ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 1 2025

УДК 515.12

ПЫТКЕЕВ ЕВГЕНИЙ ГЕОРГИЕВИЧ

А. В. Осипов, М. А. Филатова, А. Г. Ченцов, В. Т. Шевалдин

Статья посвящена светлой памяти выдающего российского ученого-тополога Евгения Георгиевича Пыткеева (1947–2022), блестящего специалиста в области функционального анализа и теории множеств. Евгений Георгиевич был ярким представителем Уральской топологической школы, основанной профессором Николаем Васильевичем Величко в 70-е годы прошлого века. Закончив обучение в 1972 г. на математико-механическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького, Е. Г. Пыткеев стал одним из первых учеников Н.В. Величко и внес значительный вклад в развитие теоретико-множественной топологии и теорию функций. В данной работе приводятся краткие факты из научной биографии Е. Г. Пыткеева, обсуждаются результаты его научных исследований, его научные идеи и методы, а также их перспективы в современной науке. Отдельно отмечена педагогическая и издательская деятельность Евгения Георгиевича и его заметный вклад в становление школьного олимпиадного движения на Урале.

A. V. Osipov, M. A. Filatova, A. G. Chentsov, V. T. Shevaldin. Evgeny Georgievich Pytkeev.

The article is dedicated to the blessed memory of the outstanding Russian topologist Evgeny Georgievich Pytkeev (1947–2022), a brilliant specialist in the field of functional analysis and set theory. Evgeny Georgievich was a prominent representative of the Ural topological school, founded by Professor Nikolai Vasilievich Velichko in the 70s of the last century. After completing his studies in 1972 at the Faculty of Mathematics and Mechanics of the Ural State University named after A.M. Gorky, E.G. Pytkeev became one of the first students of N.V. Velichko and made a significant contribution to the development of set-theoretical topology and function theory. This paper provides brief facts from the scientific biography of E.G. Pytkeev, discusses the results of his scientific research, his scientific ideas and methods, as well as their prospects in modern science. The teaching and publishing activities of Evgeny Georgievich and his significant contribution to the development of the school Olympiad movement in the Urals are especially noted.

MSC: 01A70

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-9-18

1. О творческом пути

Евгений Георгиевич Пыткеев родился 17 июня 1947 г. в Тюмени и жил в этом городе до 9 класса. Затем его семья переехала в Новосибирск, где он в 1965 г. закончил школу и поступил в Новосибирский государственный университет. С 1966 г. он студент математико-механического факультета Уральского государственного университета имени А. М. Горького, который закончил по специальности “математика” в 1972 г. В 1969 г. стал работать лаборантом в отделе уравнений математической физики Института математики и механики Уральского научного центра АН СССР. После окончания университета в 1972 г. Е. Г. Пыткеев был принят на работу на должность инженера в отдел математического анализа Института математики и механики Уральского научного центра. Далее — только одно место работы и обычный путь молодого ученого в академическом Институте. Младшим научным сотрудником он стал в 1977 г., старшим — в 1980 г., а ведущим — в 1995 г. После упразднения отдела математического анализа Е. Г. Пыткеев — научный сотрудник сектора топологии в отделе алгебры и топологии. Его жизнь в течение более 50 лет была неразрывно связана с Институтом математики и механики УрО РАН.

В 1978 г. Е. Г. Пыткеев защитил кандидатскую диссертацию на тему “Уплотнения на компакты и полные метрические пространства” под руководством Николая Васильевича

Величко (1936–2016), который с 1967 по 1973 г. работал на кафедре математического анализа Уральского университета, затем перешел в Тюменский государственный университет и в 1984 г. вернулся в Свердловск, возглавив впоследствии сектор топологии в ИММ УрО РАН. Докторскую диссертацию на тему "Пространства непрерывных и бэровских функций в слабых топологиях" Евгений Георгиевич блестяще защитил в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова в 1994 г. В 1987 г. ему было присвоено звание старшего научного сотрудника, а в 2005 г. — звание профессора.

Е. Г. Пыткеев был одним из первых учеников профессора Н. В. Величко — основателя Уральской топологической школы, которая сформировалась в 70–80-е гг. прошлого века. 14 учеников Николая Васильевича защитили кандидатские диссертации, а в их числе трое (Е. Г. Пыткеев, А. А. Грызлов и А. В. Осипов) — докторские. Сейчас Уральская топологическая школа, созданная Н. В. Величко и Е. Г. Пыткеевым, является одной из ведущих школ в мире в области теоретико-множественной топологии.

Под руководством Е. Г. Пыткеева были защищены три кандидатские диссертации (М. И. Альперин (1994), А. Г. Хохлов (1999) и М. А. Филатова (2005)).

Евгений Георгиевич — автор более 70 научных работ и 14 учебных пособий. Он обладал широчайшим математическим кругозором и филигранной техникой. На консультацию к нему за помощью приходили многие сотрудники Института. Кроме того, он получил ряд значимых результатов и в смежных областях математики, тесно сотрудничая с коллегами из других отделов, в частности с В. А. Кощеевым, В. С. Балаганским, В. Т. Шевалдиным, А. Г. Ченцовым, М. Ю. Хачаем и др.

Е. Г. Пыткеев имел большой многолетний опыт преподавательской работы на радиотехническом факультете Уральского политехнического института и в Тюменском государственном университете, где он читал общие и специальные курсы и руководил работами студентов. Его учебные пособия по математическому и функциональному анализу, теории вероятностей, математической статистике, математическим методам в экономике и др. (многие из них выполнены с соавторами) получили высокую оценку как студентов, так и преподавателей. В частности, он получил в Тюмени премию как лауреат конкурса "Книга года - 2011" за "лучшую научную книгу", написанную в соавторстве:

В. А. Аксентьев, Е. Г. Пыткеев, А. Г. Хохлов. Математические методы в экономике и финансах. Тюмень: Изд-во Тюмен. ун-та, 2011. 375 с.

Евгений Георгиевич Пыткеев в 70-80-е гг. прошлого века был одним из организаторов школьного олимпиадного движения в Свердловской области, несколько раз являлся председателем жюри Областной олимпиады школьников по математике и многие годы входил в состав Программного комитета. Его деятельность во многом способствовала становлению школьного олимпиадного движения в Свердловской области и пропаганде математических знаний. Будучи прекрасным геометром, он придумал для школьников множество различных задач. В соавторстве с С.Э. Нохриным, В. Т. Шевалдиным, С. С. Кумковым и Д. В. Хлопиным были изданы пять томов олимпиадных задач в сборнике:

Неэлементарные задачи элементарной математики / Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: ООО "Издательство УМЦ УПИ". Т. 1, 2013, 516 с.; Т. 2, 2013, 338 с.; Т. 3, 2014, 275 с.; Т. 4., 2017, 382 с.; Т. 5, 2021, 348 с.

Личные качества Евгения Георгиевича вызывали восхищение. Деликатный, скромный, спокойный, он обладал удивительным талантом — умением слушать. Многие коллеги делились с ним своими проблемами, и он всегда был добрым и отзывчивым человеком. Решение им многих научных проблем поражают своей оригинальностью и глубиной восприятия.

Е. Г. Пыткеев в последние годы жизни сильно болел, но до последних дней продолжал активную научную работу.

Евгений Георгиевич Пыткеев скончался 24 января 2022 г. на 75-м г. жизни.

2. О научном наследии Евгения Георгиевича Пыткеева

2.1. Уплотнения на компакты

В 1935 г. польский математик Стефан Банах сделал первую запись в известной "Шотландской книге": "Когда метрическое пространство взаимно однозначно и непрерывно отображается (уплотняется) на метрический компакт?"

Вопрос Стефана Банаха был мотивирован его результатом, полученным в начале тридцатых годов XX в.: "Замкнутый шар S^* в пространстве, сопряженном сепарабельному нормированному пространству, секвенциально слабо $*$-компактен". Из метризуемости (в пространстве, сопряженном к сепарабельному нормированному) шара S^* в слабой $*$-топологии и результата Банаха следует слабо $*$-компактность S^*. Таким образом, замкнутый единичный шар в пространстве, сопряженном к сепарабельному нормированному, можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на метрический компакт. Слабо $*$-компактность единичного шара в пространстве, сопряженном к нормированному, была доказана Леонидасом Алаоглу в 1940 г. Его теорема обобщает теорему Банаха на случай произвольных нормированных пространств, является одной из основных теорем функционального анализа и находит применение в теории управления, теории меры, вариационном исчислении (для доказательства существования решения в вариационных задачах), физике (при описании множества состояний алгебры наблюдаемых, а именно, что любое состояние может быть записано в виде выпуклой линейной комбинации так называемых чистых состояний).

Павел Сергеевич Александров (на семинаре в МГУ) поставил вопрос о существовании уплотнения хаусдорфова пространства на компактное хаусдорфово пространство. Сейчас трудно сказать какая проблема была сформулирована раньше: проблема Банаха или проблема Александрова, но, в силу того что в начале 1940 г. "Шотландская книга" была временно утеряна, в 70-х г. считалось, что проблема Банаха об уплотнениях имеет следующий вид: *когда метрическое пространство уплотняется на компактное хаусдорфово пространство?*

Возможно, эту проблему стоит называть проблемой Банаха — Александрова, поскольку в сепарабельном метрическом случае проблемы Банаха и Александрова совпадают.

Вопросами существования уплотнений хаусдорфовых пространств на хаусдорфовы компакты занимаются многие исследователи; эти задачи еще со времен С. Банаха и П. С. Александрова являются классическими задачами общей топологии.

Одним из первых положительных результатов по проблеме Банаха был результат Мирослава Катетова (1949), который доказал, что *счетное регулярное пространство уплотняется на компакт тогда и только тогда, когда оно разреженно*, т. е. любое подпространство содержит изолированную точку.

В 1941 г. А. С. Пархоменко доказал, что *любое локально компактное хаусдорфово пространство уплотняется на хаусдорфово компактное пространство.* Из этого результата следует, что *любое конечномерное сеперабельное банахово пространство уплотняется на метрический компакт.*

В 1976 г. выходит первая научная работа Евгения Георгиевича:

Е. Г. Пыткеев. О верхних гранях топологий // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 4. С. 489–500.

Ее результаты послужили основой для кандидатской диссертации "Уплотнения на компакты и полные метрические пространства". В ней Евгений Георгиевич получил фундаментальный результат в теории уплотнений:

Любое сепарабельное абсолютно борелевское не σ-компактное пространство уплотняется на гильбертов куб.

Из теоремы Пыткеева, в частности, следует, что любое бесконечномерное сепарабельное банахово пространство уплотняется на гильбертов куб. Тем самым (для конечномерных пространств — результат Пархоменко, для бесконечномерных сепарабельных пространств — результат Пыткеева) полностью решается проблема Банаха для сепарабельных банаховых пространств. Более того, результаты работы 1976 г. позволили ответить на вопрос Банаха — Александрова в классе банаховых пространств, а именно: *любое банахово пространство уплотняется на хаусдорфово компактное пространство.*

Евгений Георгиевич еще не раз будет возвращаться к вопросам существования уплотнений на компакты. Совместно с А. В. Осиповым и В. И. Белугиным он исследовал различные классы хаусдорфовых пространств, в которых проблема П. С. Александрова решается положительно (например, в классах a-пространств и строго a-пространств).

В конце 2021 г. Евгений Георгиевич предложил А. В. Осипову подумать над вопросом Банаха в классе метрических пространств плотности континуум. В середине января 2022 г. Е. Г. Пыткеев активно интересовался этим вопросом и рекомендовал коллегам по отделу для решения использовать различные методики. 24 января 2022 г. Е. Г. Пыткеева не стало, но основная идея, которая активно обсуждалась и была заложена в первой научной статье Евгения Георгиевича, успешно реализована в работе

A. V. Osipov, E. G. Pytkeev. Every metric space of weight $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ admits a condensation onto a Banach space // Topology and its Applications. 2023. Vol. 330, art. no. 108486.

В ней получен ответ на проблему Банаха в классе метрических пространств плотности континуум, а именно доказано, что *любое метрическое пространство плотности континуум уплотняется на гильбертов куб.*

В 2023 г. А. В. Осиповым было завершено (по сути, начатое в 70-х годах Е. Г. Пыткеевым) решение проблемы Банаха об уплотнении банаховых пространств на метрические компакты.

2.2. Разложимость топологических пространств

Понятия разложимого (τ-разложимого, максимально разложимого) топологического пространства были независимо даны Эдвином Хьюиттом (1943) и Мирославом Катетовым (1947). Топологическое пространство X называется τ-разложимым, если X можно разбить на τ плотных в X подмножеств. Говорят, что X максимально разложимо, если оно $\Delta(X)$-разложимо; здесь $\Delta(X) = \min\{|U|$, где U — открыто и $U \neq \varnothing\}$ — дисперсионный характер пространства X.

Разложимость плотных в себе (т. е. без изолированных точек) метрических и линейно упорядоченных пространств была доказана Эдвином Хьюиттом в 1943 г. Разложимость локально компактных плотных в себе хаусдорфовых пространств была, по существу, доказана еще П. С. Александровым и отмечена в работе Э. Хьюитта. Хьюиттом и Катетовым были построены первые примеры плотных в себе неразложимых пространств.

В последующие почти три десятилетия интенсивные исследования по проблеме разложимости широко раздвинули рамки классических теорем Хьюитта. Были построены примеры плотных в себе неразложимых пространств и доказана разложимость многих классов пространств. И вот в начале семидесятых годов XX в. основным барьером в изучении разложимости топологических пространств стали k-пространства. Вопрос о разложимости k-пространств был поднят на семинаре П. С. Александрова и считался одним из центральных вопросов теории разложимости.

В 1976 г. Николай Васильевич Величко решил k-вопрос, доказав, что всякое плотное в себе k-пространство разложимо. Но проблема τ-разложимости (для $\tau > 2$) оставалась нерешенной еще почти семь лет.

Евгений Георгиевич Пыткеев доказал максимальную разложимость k-пространств в 1983 г. в статье

Е. Г. Пыткеев. О максимально разложимых пространствах // Тр. МИАН АН СССР. 1983. Т. 154. С. 209–213.

Чтобы доказать максимальную разложимость k-пространств, Е. Г. Пыткеев определил широкий класс пространств (он назвал их $\pi\Re$-пространствами). Класс $\pi\Re$-пространств содержит, в частности, компактные пространства, упорядоченные пространства, k-пространства, пространства, теснота которых меньше дисперсионного характера. Е. Г. Пыткеев доказал максимальную разложимость $\pi\Re$-пространств. В дальнейшем окажется, что эти пространства представляют самостоятельный интерес (не только в контексте теории разложимости).

Вопросы о разложимости ближайших обобщений компактов долго не поддавались полному решению; многие из них окончательно решены только в XXI в. (хотя разложимость таких пространств в некоторых частных случаях стала известна еще в конце XX в., и в некоторых случаях были построены примеры неразложимых пространств). Вопрос о разложимости псевдокомпактных тихоновских пространств остается открытым до сих пор.

В 2002 г. Е. Г. Пыткеев доказал ω-разложимость счетно-компактных пространств в работе

E. G. Pytkeev. Resolvability of countably compact regular spaces // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2002. № 2. P. S152–S154.

Идеи и методы, разработанные Евгением Георгиевичем, оказали существенное влияние на новое и интересное направление в теории разложимых пространств — разложимость в точке.

Е. Г. Пыткеев доказал максимальную разложимость $\pi\Re$-пространств в любой неизолированной точке. Методы исследования разложимости в точке во многих случаях отличаются от методов исследования разложимости топологических пространств. Из разложимости пространства, конечно, следует его разложимость в любой точке. Но разложимое в некоторой своей точке пространство не обязано быть плотным в себе, а значит, разложимым. В. И. Малыхин и А. Белла в 1998 г. построили пример неразложимого пространства, которое разложимо в любой своей точке. Исследования разложимости в точке топологических пространств продолжаются и в наше время (в Уральской топологической школе данным направлением сейчас активно занимается А.Е. Липин); в этой тематике до сих пор есть открытые и трудные вопросы.

2.3. Пространства и свойства Пыткеева

Одно из редких и весьма значимых признаний научных работ ученого — это название в его честь объектов исследований. В честь Евгения Георгиевича были определены:

• *пространства Пыткеева* (*Pytkeev space*) (см. *V. I. Malykhin, G. Tironi.* Weakly Frechet–Urysohn and Pytkeev spaces // Topology and Its Applications. 2000. Vol. 104, no. 2. P. 181–190; см. также ссылку URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Pytkeev_space);

• *свойство Пыткеева* (*Pytkeev property*) (см. *M. Sakai.* The Pytkeev property and the Reznichenko property in function spaces // Note Math. 2003/04. Vol. 22, no. 2. P. 43–52);

• *сильное свойство Пыткеева* (*strong Pytkeev property*) (см. *B. Tsaban, L. Zdomskyy.* On the Pytkeev property in spaces of continuous functions. II // Houston J. Math. 2009. Vol. 35, no. 2. P. 563–571).

Точка x называется *точкой Пыткеева*, если для любого множества A, такого что $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, существует счетная π-сеть бесконечных подмножеств A. Пространства, в которых любая точка является точкой Пыткеева, называются *пространствами Пыткеева* или *пространствами со свойством Пыткеева*.

Пространства Пыткеева — частный случай $\pi\Re$-пространств. В. И. Малыхин и Ж. Тирони показали, что секвенциальные пространства являются пространствами Пыткеева (обратное неверно), что пространства Пыткеева — пространства слабо Фреше — Урысона (обратное неверно); пространства слабо Фреше — Урысона будут иметь счетную тесноту (обратное неверно). Также они показали, что хаусдорфово компактное пространство со счетной теснотой будет пространством Пыткеева.

Топологическое пространство X имеет *сильное свойство Пыткеева* в точке $x \in X$, если существует счетное семейство $\mathcal{N}$ подмножеств X (сейчас подобного рода семейство называют сетью Пыткеева) такое, что для любой окрестности $O(x) \subseteq X$ точки x и любого подмножества $A \subseteq X$, $x \in \overline{A}$, существует $N \in \mathcal{N}$, при котором $N \subseteq O(x)$ и пересечение $A \cap N$ бесконечно. Топологическое пространство X обладает *сильным свойством Пыткеева*, если оно обладает сильным свойством Пыткеева в каждой своей точке. Каждое пространство с сильным свойством Пыткеева является пространством Пыткеева.

В настоящее время свойством Пыткеева (и близким к нему свойств) в функциональных и гиперпространствах с различными топологиями занимаются известные российские и зарубежные топологи.

2.4. Пространства функций в слабых топологиях

В конце 70-х годов А. В. Архангельский предложил новое научное направление (сейчас оно называется C_p-теория) как результат изучения тополого-алгебраических свойств пространства $C_p(X)$ непрерывных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X и наделенных p-топологией поточечной сходимости. Данное направление исследования и многообразие открытых вопросов и задач, связанных с ним, привлекли участников Уральской топологической школы, и они получили здесь существенные результаты. Это было сделано в докторской диссертации Н.В. Величко и кандидатских диссертациях его учеников М. О. Асанова и С. Э. Нохрина. Евгений Георгиевич также принимал активное участие в развитии этой теории.

В 1994 г. Е. Г. Пыткеев защитил в МГУ докторскую диссертацию на тему “Пространства непрерывных и бэровских функций в слабых топологиях”, включающую глубокие исследования в C_p-теории.

К основным результатам докторской диссертации следует отнести теорему о характеризации свойства Фреше — Урысона для пространства $C_\lambda(X)$, где λ — сеть из компактных подмножеств пространства X. В ней доказывается, что свойства Фреше — Урысона быть k-пространством и быть секвенциальным пространством совпадают в классе пространств вида $C_\lambda(X)$.

Вторым по значимости результатом докторской диссертации Е. Г. Пыткеева можно назвать решение (долгое время открытого) вопроса о характеризации свойства Бэра для пространства $C_p(X)$. В работе 1985 г. (*Е. Г. Пыткеев.* Свойство Бэра пространств непрерывных функций // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 5. С. 726–740) Евгений Георгиевич изучает свойство Бэра пространств $C_p(X, Y)$ и выпуклые аналоги этого свойства для пространств $C_p(X)$ и $C_p(X, [0, 1])$. Исследуются и характеризуются такие свойства, как бочечность, W-бэровость, выпуклая и монотонно выпуклая бэровость, имеющие важные приложения в функциональном анализе.

Основные идеи C_p-теории, заложенные в диссертации Е. Г. Пыткеева, получили свое продолжение в классах пространств $[0, 1]$-значных отображений и бэровских функций.

2.5. Пространства бэровских функций в слабых топологиях

Пространства бэровских функций исследуются для решения многих вопросов анализа, топологии и дескриптивной теории множеств. Чаще всего эти пространства рассматривают в топологиях поточечной или равномерной сходимости. В середине XX в. пространства бэровских функций, наделенные топологией поточечной сходимости, не изучались в классической дескриптивной теории множеств, но их анализ требовал привлечения результатов классической дескриптивной теории множеств, а также распространения этих результатов на случай топологических пространств.

В начале восьмидесятых годов двадцатого века вырос интерес к $B_1(X)$-пространствам функций первого бэровского класса. Это связано с тем, что некоторые задачи функционального анализа сводятся к рассмотрению топологических вопросов в $B_1(X)$.

Вторая глава докторской диссертации Е. Г. Пыткеева посвящена изучению пространств бэровских функций в топологии поточечной сходимости, прежде всего пространства $B_1(X)$ вещественнозначных функций первого бэровского класса, определенных на тихоновском пространстве X, с топологией поточечной сходимости, и исследованию бэровских отображений.

В 1977 г. Розенталь в связи с исследованием сепарабельных банаховых пространств, не содержащих изоморфную копию l_1, доказал, что замыкание относительно счетно компактного подмножества $B_1(X)$, где X — аналитическое пространство, является компактом со счетной теснотой. Из этого результата следует, что компактные подпространства $B_1(X)$ (X — аналитическое пространство) имеют счетную тесноту. Компактные подпространства $B_1(X)$ (где X — сепарабельное пространство, метризуемое полной метрикой) называются компактами Розенталя. Компактам Розенталя посвящено множество исследований: Талагранд, Фремлин и Бурген в 1978 г. доказали, что компакты Розенталя обладают свойством Фреше — Урысона, затем Бургеном было установлено, что компакты Розенталя имеют точки с первой аксиомой счетности, а Годфруа в 1980 г. показал, что свойство быть компактом Розенталя не сохраняется непрерывными отображениями.

Евгений Георгиевич вместо аналитических пространств рассматривал K-аналитические, распространив обозначенные выше результаты на этот случай. Он обобщил и теорему Розенталя, и результат Тагарланда — Фремлина — Бургена, доказав сильную счетную компактность и свойство Фреше — Урысона для замыкания относительно счетно компактного подмножества пространства $B_1(X)$ для K-аналитического пространства X. Класс компактных подмножеств $B_1(X)$ (X — K-аналитическое пространство) кроме компактов Розенталя содержит и компакты Корсона.

Относительно счетно компактное подмножество $B_1(X)$ может не быть относительно компактным. Е. Г. Пыткеев доказал, что для регулярного K-аналитического пространства X замыкание относительно компактного множества в $B_1(X)$ компактно тогда и только тогда, когда X совершенно нормально (и это эквивалентно тому, что $B_1(X)$ не содержит подмножество, гомеоморфное ω_1).

Эта теорема позволила получить результаты, относящиеся к C_p-теории, которые дали возможность выяснить сферу действия двух классических результатов Н. И. Лузина (о том, что K-аналитическое пространство не содержит строго предельно возрастающую последовательность G_δ-множеств, 1934 г.) и Зальцвассера (что наследственно линделёфово и наследственно сепарабельное пространство не содержит строго возрастающей последовательности F_σ- и G_δ-множеств).

Методы, развитые Евгением Георгиевичем во второй главе докторской диссертации, позволили показать, что при переходе от абсолютно борелевских и аналитических сепарабельных метрических пространств к абсолютно бэровским и K-аналитическим пространствам классические теоремы, согласно которым борелевское уплотнение абсолютно борелевского (аналитического) сепарабельного метрического пространства на сепарабельное метрическое пространство есть борелевский изоморфизм (гомеоморфизм), становятся неверными. Он построил бэровскую биекцию компакта на тихоновское, не нормальное (т. е. не K-аналитическое) пространство. Также он показал, что если ограничиться Z_σ-отображениями, то аналоги этих двух теорем справедливы.

Также во второй главе докторской диссертации Евгений Георгиевич ответил на вопрос В. И. Пономарёва: “Всякое ли абсолютно бэровское пространство бэровски изоморфно нульмерному абсолютно бэровскому пространству?”, построив для всякого $n = 1, 2, \dots, \infty$ компакт Эберлейна X_n, $\dim X_n = n$, который не бэровски изоморфен никакому абсолютно бэровскому пространству Y размерности меньше n.

В конце второй главы докторской диссертации Е. Г. Пыткеев затрагивает проблему уплотнений на компакты, о которой было рассказано выше.

2.6. Аппроксимация сплайнами и всплесками

Каждый математик знает, что очень часто решение сложной научной задачи сводится к доказательству одного (на вид небольшого, но очень трудного) математического утверждения, на которое он тратит значительное время и которое потом фигурирует в итоговой статье в качестве вспомогательного утверждения, т. е. леммы. В научной деятельности Е. Г. Пыткеева и В. Т. Шевалдина такая ситуация встретилась трижды, в результате которых появились три их совместные научные статьи. Каждый раз В. Т. Шевалдин, решая задачи в области сплайнов и всплесков, обращался к Евгению Георгиевичу с просьбой помочь доказать некоторое утверждение олимпиадного характера (формально не относящееся к данным конструкциям). И все три раза Е. Г. Пыткеев находил решения поставленных задач, оформляя решения своим фирменным, красивым и лаконичным, почерком! Первая задача была связана с изучением нулей комплексных функций, вторая — с существованием и оценкой решения системы линейных уравнений при нахождении порядков аппроксимации локальными сплайнами, а третья задача — с применением матриц Сильвестра и теории результантов алгебраических многочленов при построении всплесков без применения преобразования Фурье.

2.7. Топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости

В современной теории управления важную роль играет задача о построении областей достижимости; знание этих областей позволяет оценивать возможности управляемых систем, что определяет целесообразность практического применения последних. На практике, однако, возникают погрешности как в описании самих систем управления, так и в описании условий их конкретного применения. Нередко приходится сталкиваться с отсутствием у областей достижимости свойства устойчивости. Одним из типичных вариантом возмущения ограничений является их ослабление, т. е. переход к рассмотрению постановки с приближенным соблюдением ограничений. Здесь естественным образом возникает задача с ограничениями асимптотического характера, для исследования которой привлекаются конструкции расширений (своеобразных компактификаций); в этой связи отметим работы Дж. Варги, Р. В. Гамкрелидзе, Н. Н. Красовского, А. И. Субботина. Абстрактный вариант данной задачи исследовался А. Г. Ченцовым, что нашло свое отражение в нескольких монографиях и многих журнальных статьях, среди которых имеется целый ряд совместных работ с Евгением Георгиевичем Пыткеевым. Его заинтересовали возможности топологии в плане изучения асимптотического поведения областей достижимости, и в частности применение компактификаций пространства решений (управлений). В то же время он живо интересовался примерами задач управления, в которых ценой пренебрежимо малого нарушения ограничений удавалось добиться ощутимого выигрыша в качестве; неустойчивость такого рода могла быть полезной. Важно отметить, что подобные конструкции сколь угодно точным, но все же не "стопроцентным" соблюдением фазовых ограничений сыграли свою роль в обосновании фундаментальной теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина в теории дифференциальных игр. Евгений Георгиевич был научным руководителем проекта по гранту РФФИ, посвященного вопросам, связанным с точным и приближенным соблюдением ограничений в задачах управления; отметим в этой связи следующую работу:

A. G. Chentsov, E. G. Pytkeev. Constraints of asymptotic nature and attainability problems // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 569–582.

Он осознавал, какую важную роль играют в упомянутых задачах определяемые тем или иным образом обобщенные элементы (обобщенные управления). В частности, в абстрактных задачах о достижимости в качестве таковых использовались ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств. С открывающимися здесь возможностями было обусловлено обращение Евгения Георгиевича к теории самих ультрафильтров; так, его заинтересовали конструкции, связанные с открытыми ультрафильтрами и реализующие “укрупненные точки” топологического пространства. Данные “укрупненные точки” составлялись из открытых ультрафильтров, сходящихся к заданной наперед “обычной” точке. Для Евгения Георгиевича был естественным вопрос о различимости упомянутых “укрупненных точек”. Исследование этого вопроса привело его к введению и обоснованию новых аксиом отделимости (см. $T_{[0]}$-, $T_{[1]}$- и $T_{[2]}$-пространства); он исследовал связь с традиционными аксиомами отделимости и представления в терминах канонически открытых окрестностей; см. в этой связи работу:

Е. Г. Пыткеев, А. Г. Ченцов. Открытые ультрафильтры и отделимость с использованием операции замыкания // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 212–225.

В этих построениях существенно использовались конструкции на основе экстремально несвязного компакта открытых ультрафильтров и множеств, являющихся некоторыми аналогами абсолюта исходного топологического пространства.

В настоящее время исследования, связанные с топологическими конструкциями расширений задач о достижимости, интенсивно проводятся сотрудниками Института, и в частности сектора топологии. Здесь имеет смысл отметить совместные работы А. Г. Ченцова и А. В. Осипова, касающиеся вопросов применения конечно-аддитивных мер в качестве обобщенных управлений и мультитопологических пространств (имеются в виду множества с оснащением несколькими топологиями).

Евгений Георгиевич был замечательным педагогом. Курсы, которые он читал на радиотехническом факультете университета, отличались глубиной и вместе с тем ясностью изложения. Им был подготовлен целый ряд замечательных учебных пособий. Он являлся активным участником секции “Современная математика в инженерном образовании”, созданной на радиофаке по инициативе специалистов в области технических наук. Упомянутые пособия безусловно привнесли много полезного в работу кафедр факультета по подготовке радиоинженеров; отметим здесь, кстати, дружеские отношения Евгения Георгиевича с профессором Борисом Алексеевичем Панченко, одним из ведущих радиофизиков России. Таким образом, будучи прекрасным специалистом в области “чистой” математики, Евгений Георгиевич понимал значимость инженерных приложений и уделял этой стороне деятельности серьезное внимание. В этом ему помогала безупречная логика, глубокое проникновение в существо решаемой задачи. Он был замечательным ученым, великолепным педагогом и верным товарищем.

3. Конференция “Топология и ее приложения”, посвященная памяти Е. Г. Пыткеева

Конференция “Топология и ее приложения”, посвященная памяти Е. Г. Пыткеева, проходила в Екатеринбурге с 7 по 9 февраля 2024 г. Она была организована Институтом математики и механики УрО РАН при поддержке Уральского математического центра. Тематика конференции включала основные научные направления, которыми занимался Е. Г. Пыткеев; это общая топология, приложения общей топологии, общематематические приложения. Среди докладчиков и участников конференции были академик РАН В. И. Бердышев, член-корреспондент РАН А. Г. Ченцов, академик Киргизии А. А. Борубаев, десять докторов наук; математики из Москвы, Петрозаводска, Томска, Екатеринбурга, Ташкента, Бишкека, Оша и Желал-Абада. Многие из них, докладывая о своих результатах, с искренней теплотой вспоминали о совместной работе с Евгением Георгиевичем и рассказывали о его наследии.

Поступила 8.02.2025
Принята к публикации 8.02.2025

Осипов Александр Владимирович
д-р физ.-мат. наук, зав. сектором
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: oab@list.ru

Филатова Мария Александровна
канд. физ.-мат. наук
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: MA.Filatova@urfu.ru

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-кор. РАН, главный науч. сотрудник
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: agchentsov@mail.ru

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Alexander Vladimirovich Osipov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: oab@list.ru .

Mariya Aleksandrovna Filatova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: MA.Filatova@urfu.ru .

Aleksandr Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: agchentsov@mail.ru .

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Received February 8, 2025
Accepted February 8, 2025

Cite this article as: A. V. Osipov, M. A. Filatova, A. G. Chentsov, V. T. Shevaldin. Evgeny Georgievich Pytkeev. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 9–18 .