

УДК 519.145

## НЕАБЕЛЕВЫ ПОДГРУППЫ АВТОТОПИЗМОВ ПОРЯДКА 8 ПОЛУПОЛЕВЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ<sup>1</sup>

О. В. Кравцова, Д. С. Скок

Изучается известная гипотеза Д. Хьюза 1959 г. о разрешимости полной группы коллинеаций недезарговой полуполевого проективной плоскости конечного порядка (также вопрос 11.76 Н.Д. Подуфалова в Коуровской тетради). Эта гипотеза редуцируется к группе автотопизмов, состоящей из коллинеаций, фиксирующих треугольник. Завершено описание диэдральных и кватернионных подгрупп автотопизмов порядка 8 без центральных коллинеаций в случае нечетного порядка полуполевого плоскости. Указано матричное представление и геометрический смысл порождающих элементов и условия на регулярное множество плоскости. Приведены примеры полуполевого плоскостей порядка 81. Результаты могут быть использованы для изучения полуполевого плоскостей, допускающих подгруппы автотопизмов из списка Д.Г. Томпсона минимальных простых групп.

Ключевые слова: полуполе, регулярное множество, гомология, группа автотопизмов, бэровская инволюция, группа кватернионов, группа диэдра, проблема Хьюза.

**O. V. Kravtsova, D. S. Skok. Non-Abelian autotopism subgroups of order 8 of semifield projective planes.**

We study the well-known hypothesis of D.R. Hughes that the full collineation group of a finite-order non-Desarguesian semifield projective plane is solvable (see also N.D. Podufalov's Question 11.76 in the Kourovka Notebook). This hypothesis is reduced to the autotopism group that consists of collineations fixing a triangle. We complete the description of perspectivity-free dihedral and quaternion autotopism subgroups of order 8 in the case of an odd-order semifield plane. A matrix representation and a geometric meaning of generating elements are given together with conditions for the spread set of the plane. Examples of semifield planes of order 81 are presented. The results can be used in the study of semifield planes with autotopism subgroups from J.G. Thompson's list of minimal simple groups.

Keywords: semifield plane, semifield, spread set, homology, autotopism group, Baer involution, quaternion group, dihedral group, Hughes problem.

MSC:17D99, 16K20, 15A04, 51E15, 51A35

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-90-100

### Введение

Хорошо известно, что геометрические свойства проективной плоскости тесно связаны с алгебраическими свойствами ее координатизирующего множества. Так, конечная дезаргова проективная плоскость координатизируется полем, плоскость трансляций — квазиполем.

Изучение конечных полуполей и полуполевого плоскостей началось с первых примеров, построенных Л.Е. Диксоном в 1906 г. *Полуполем* называется неассоциативное кольцо  $Q = (Q, +, \cdot)$  с единицей, в котором уравнения  $ax = b$  и  $ya = b$  однозначно разрешимы для любых  $a, b \in Q$ ,  $a \neq 0$ . Отсутствие ассоциативного закона в полуполе приводит к ряду аномальных свойств в сравнении с полем, телом и даже почти-полем.

Общая классификация конечных полуполей и квазиполей пока отсутствует, наиболее полный обзор результатов представлен в монографии [1]. На текущий момент известно 28 классов полуполей, в том числе и бесконечные серии. Построение новых примеров ведется, помимо прочего, с масштабным использованием вычислительной техники (см., например, [2]). Наряду

<sup>1</sup>Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

с проблемой перечисления и классификации конечных полуполей актуальной является задача исследования их автоморфизмов и автотопизмов [3–5], а также построения полуполей и полуполевых плоскостей с предписанной группой автотопизмов [6].

Классы конечных полуполевых плоскостей, найденных к середине 1950-х гг., обладали общим свойством, заключающимся в разрешимости группы коллинеаций (автоморфизмов). Д.Р. Хьюз предположил в 1959 г., что любая конечная проективная плоскость, координатизируемая неассоциативным полуполем, имеет разрешимую группу коллинеаций. Эта гипотеза представлена в монографии [7, гл. VIII]; доказано также, что гипотеза редуцируется к разрешимости группы автотопизмов (группы, фиксирующей треугольник). Проблема Хьюза вызвала интерес широкого круга исследователей, которые доказали разрешимость группы коллинеаций для обширного списка полуполевых плоскостей с определенными ограничениями. В 1990 г. проблема была записана Н. Д. Подуфаловым в Коуровской тетради ([8], вопрос 11.76).

Мы выполняем исследования в рамках подхода, основанного на классификации конечных простых групп и теореме Дж. Томпсона о минимальных простых группах. Метод регулярного множества позволяет указать условия существования полуполевой плоскости с определенной подгруппой автотопизмов, а также может быть использован для построения примеров, включая компьютерные вычисления. Исключение некоторых групп списка Томпсона из перечня возможных подгрупп автотопизмов представляется важным шагом на пути решения проблемы Хьюза.

Настоящая статья продолжает исследование [9] о существовании подгруппы автотопизмов, изоморфной диэдральной либо кватернионной группе порядка 8 (см. теорему 1). Как было доказано, в случае, когда полуполевая проективная плоскость имеет порядок  $p^N$ , где  $p$  — простое число и  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , указанная подгруппа обязательно содержит центральные коллинеации и не может поэтому содержаться в простой неабелевой группе автотопизмов. Здесь мы рассматриваем случай характеристики  $p \equiv -1 \pmod{4}$ , имеющий принципиальные геометрические отличия.

Основным результатом является теорема 2, из которой вытекает необходимое условие существования подгрупп автотопизмов, изоморфных диэдральной группе  $D_8$  либо кватернионной группе  $Q_8$  и не содержащих гомологий. Это делимость числа  $N$  на 4 для порядка полуполевой плоскости  $|\pi| = p^N$  при характеристике основного поля  $p \equiv -1 \pmod{4}$ . Так как  $D_8$  или  $Q_8$  содержатся во многих конечных простых неабелевых группах, то имеем следствие 1, пополняющее перечень исключенных из числа возможных подгрупп автотопизмов.

## 1. Определения и вспомогательные результаты

Используются основные определения в соответствии с [7; 10]; см. также обозначения [9] и предшествующих статей первого автора.

Рассмотрим линейное пространство  $Q$ ,  $n$ -мерное над конечным полем  $GF(p^s)$  ( $p$  простое), и подмножество линейных преобразований  $R \subset GL_n(p^s) \cup \{0\}$  с условиями:

- 1)  $R$  состоит из  $p^{ns}$  квадратных  $(n \times n)$ -матриц над  $GF(p^s)$ ;
- 2)  $R$  содержит нулевую матрицу  $0$  и единичную матрицу  $E$ ;
- 3) для любых  $A, B \in R$ ,  $A \neq B$ , разность  $A - B$  является невырожденной матрицей.

Множество  $R$  называют *регулярным множеством*. Рассмотрим биективное отображение  $\theta$  из  $Q$  на  $R$  и представим регулярное множество как  $R = \{\theta(y) \mid y \in Q\}$ . Определим умножение на  $Q$  правилом  $x * y = x \cdot \theta(y)$  ( $x, y \in Q$ ). Тогда  $\langle Q, +, * \rangle$  является правым квазиполем порядка  $p^{ns}$  [10; 11]. Далее, если  $R$  замкнуто по сложению, то  $\langle Q, +, * \rangle$  — полуполе.

Отметим, что если в качестве основного поля используется простое подполе  $\mathbb{Z}_p$ , то отображение  $\theta$  задается с использованием только линейных функций; это значительно упрощает рассуждения и вычисления (в том числе компьютерные).

Полуполе  $Q$  координатизирует проективную плоскость  $\pi$  порядка  $|\pi| = |Q|$ , определенную следующим образом:

- 1) аффинными точками являются элементы  $(x, y)$  пространства  $Q \oplus Q$ ;
- 2) аффинными прямыми являются смежные классы по подгруппам

$$V(\infty) = \{(0, y) \mid y \in Q\}, \quad V(m) = \{(x, x\theta(m)) \mid x \in Q\} \quad (m \in Q);$$

- 3) множество всех смежных классов по одной подгруппе есть особая точка;
- 4) множество всех особых точек есть особая прямая;
- 5) инцидентность теоретико-множественная.

Разрешимость группы коллинеаций  $Aut \pi$  полуполевого пространства редуцируется [7, гл. VIII, § 6] к разрешимости ее подгруппы автотопизмов  $\Lambda$  (коллинеаций, фиксирующих треугольник). Без ограничения общности можем считать, что линейные автотопизмы определяются линейными преобразованиями пространства  $Q \oplus Q$ :

$$\lambda : (x, y) \rightarrow (x, y) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где матрицы  $A$  и  $B$  удовлетворяют условию коллинеации [9; 11]

$$A^{-1}\theta(m)B \in R \quad \forall \theta(m) \in R. \quad (1.1)$$

Известно [7, гл. IV, теорема 4.3], что любая коллинеация порядка 2 является либо центральной, либо бэровской.

Коллинеация проективной плоскости называется *центральной* или *перспективностью*, если она фиксирует поточечно некоторую прямую (*ось*) и некоторую точку (*центр*) вместе со всеми прямыми, проходящими через нее. Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется *элацией*, иначе — *гомологией*. Порядок любой элации делит порядок  $|\pi|$  проективной плоскости, порядок любой гомологии делит  $|\pi| - 1$ . Все перспективности в группе автотопизмов являются гомологиями и образуют циклические подгруппы:

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \mid X \in R_m^* \right\}, \quad H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \mid X \in R_r^* \right\},$$

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \mid X \in R_l^* \right\}.$$

Подгруппа автотопизмов, порожденная гомологиями, нормальна в  $\Lambda$ . Множества матриц  $R_l$ ,  $R_m$ ,  $R_r$ , определяемые с помощью регулярного множества как

$$R_l = \{X \in GL_n(p^s) \cup \{0\} \mid XT = TX \ \forall T \in R\},$$

$$R_m = \{X \in R \mid XT \in R \ \forall T \in R\},$$

$$R_r = \{X \in R \mid TX \in R \ \forall T \in R\},$$

называют *левым*, *средним* и *правым ядрами* плоскости  $\pi$  соответственно. Эти подмножества в  $GL_n(p^s) \cup \{0\}$  изоморфны соответствующим ядрам координатизирующего полуполя  $Q$ :

$$N_l = \{x \in Q \mid (x * a) * b = x * (a * b) \ \forall a, b \in Q\},$$

$$N_m = \{x \in Q \mid (a * x) * b = a * (x * b) \ \forall a, b \in Q\},$$

$$N_r = \{x \in Q \mid (a * b) * x = a * (b * x) \ \forall a, b \in Q\}.$$

Плоскость  $\pi$  дезаргова (классическая) тогда и только тогда, когда  $Q$  является полем, в этом случае и  $R \simeq Q \simeq GF(p^{ns})$ .

Группа автотопизмов полуполевого пространства нечетного порядка содержит три инволютивных гомологий:

$$h_1 = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \in H_1, \quad h_2 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \in H_2, \quad h_3 = h_1 h_2 = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \in H_3.$$

Коллинеация проективной плоскости  $\pi$  порядка  $m$  называется *бэровской*, если она фиксирует поточечно подплоскость порядка  $\sqrt{|\pi|} = \sqrt{m}$  (*бэровскую подплоскость*). В случае, когда полуполевая плоскость имеет ранг 2 над своим ядром, первые результаты о матричном представлении бэровской инволюции  $\tau \in \Lambda$  и подходящего регулярного множества полуполевой плоскости были получены М. Билиотти и соавторами в [12]. Мы используем матричное представление автотопизмов порядка 2 и 4 из [9] в случае произвольного ранга  $N$ .

## 2. Подгруппы автотопизмов $D_8$ и $Q_8$ при $p \equiv 1 \pmod{4}$

Вопрос о подгруппах автотопизмов, изоморфных  $D_8$  либо  $Q_8$ , объясняется тем, что такие подгруппы содержатся в силовой 2-подгруппе значительного количества простых неабелевых групп. Введем необходимые обозначения (подробнее см. в [9]).

Пусть  $\pi$  — недезаргова полуполевая плоскость порядка  $p^N$  ( $p > 2$  простое). Если группа автотопизмов  $\Lambda$  содержит бэровскую инволюцию  $\tau$ , то  $N = 2n$  чётно и базис  $4n$ -мерного линейного пространства над  $\mathbb{Z}_p$  может быть выбран так, что

$$\tau = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Регулярное множество  $R$  в  $GL_{2n}(p) \cup \{0\}$  состоит из матриц

$$\theta(V, U) = \begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $V \in Q$ ;  $U \in K$ ;  $Q, K$  — регулярные множества в  $GL_n(p) \cup \{0\}$ ;  $K$  — регулярное множество бэровской подплоскости  $\pi_\tau$ ;  $m, f$  — аддитивные инъективные отображения из  $K$  и  $Q$  в  $GL_n(p) \cup \{0\}$ ;  $m(E) = E$ . Всюду далее блоки-подматрицы имеют по умолчанию одинаковую размерность.

Продолжая исследования [9], мы изучаем условия существования в группе автотопизмов

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A, B \in GL_N(p), A^{-1}\theta(m)B \in R \forall \theta(m) \in R \right\}$$

подгрупп следующего вида:

$$H = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^4 = \beta^2 = 1, \beta\alpha\beta = \alpha^{-1} \rangle \simeq D_8, \quad (2.3)$$

$$F = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^4 = \beta^4 = 1, \alpha^2 = \beta^2, \beta\alpha\beta = \alpha \rangle \simeq Q_8. \quad (2.4)$$

В случае  $p \equiv 1 \pmod{4}$  в [9] приведено матричное представление автотопизмов  $\alpha, \beta, \gamma$  и указано, что подгруппы  $H$  и  $F$  обязательно содержат гомологию  $h_3$ :

$$\alpha = \begin{pmatrix} -iE & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iE \end{pmatrix} h_1^{k_1} h_2^{k_2}, \quad (2.5)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \end{pmatrix},$$

где  $i \in \mathbb{Z}_p$ ,  $i^2 = -1$ ,  $k_1, k_2 \in \{0, 1\}$ . Основной результат [9] представлен в теореме 1.

**Теорема 1.** Пусть  $\pi$  — недезаргова полуполевая плоскость порядка  $p^N$ ,  $p$  — простое,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Группа автоморфизмов  $\Lambda$  содержит подгруппу  $H \simeq D_8$  (2.3) тогда и только тогда, когда  $\Lambda$  содержит подгруппу  $F \simeq Q_8$  (2.4). В этом случае  $N = 2n \geq 4$ , подгруппы  $H$  и  $F$  содержат инволютивную гомологию  $h_3$ , плоскость  $\pi$  допускает бэровскую инволюцию  $\tau$  (2.1). Базис линейного пространства может быть выбран так, что  $H = \langle \alpha, \beta \rangle$ ,  $F = \langle \alpha, \gamma \rangle$ , где автоморфизмы имеют вид (2.5). Регулярное множество  $R$  состоит из матриц (2.2), где  $V \in Q$ ,  $U \in K$ , множества  $Q, K \subset GL_n(p) \cup \{0\}$  замкнуты по сложению. Аддитивные инъекции  $m : K \rightarrow K$  и  $f : Q \rightarrow Q$  являются нетривиальными инволютивными отображениями.

Случай характеристики  $p \equiv -1 \pmod{4}$  имеет значительное отличие, связанное с геометрическим смыслом автоморфизма порядка 4.

### 3. Подгруппы автоморфизмов $D_8$ и $Q_8$ при $p \equiv -1 \pmod{4}$

Пусть теперь  $\pi$  — полуполевая проективная плоскость порядка  $p^N$ , где  $p \equiv -1 \pmod{4}$ . Основное поле  $\mathbb{Z}_p$  не содержит элемента  $i$  с условием  $i^2 = -1$ , поэтому матрица с минимальным многочленом  $\lambda^2 + 1$  не имеет жордановой нормальной формы. Очевидно, она имеет четную размерность  $2m \times 2m$  и сопряжена с блочной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

вместо которой удобнее использовать сопряженную матрицу  $S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ .

Пусть  $\alpha$  — автоморфизм порядка 4. Обсуждая вопрос о существовании простых неабелевых подгрупп автоморфизмов, мы исключаем из рассмотрения случаи, когда инволюция  $\alpha^2$  является гомологией, поскольку гомологии порождают нормальную подгруппу автоморфизмов. Таким образом, полагаем, что  $\alpha^2 = \tau$  — бэровская инволюция, фиксирующая поточечно бэровскую подплоскость  $\pi_\tau = \{(0, x, 0, y)\}$ . Здесь все векторы — размерности  $N/2$ ,  $N$  четно. Нам будет удобно использовать также множество точек  $\pi_1 = \{(x, 0, y, 0)\}$ ,  $\pi = \pi_1 \oplus \pi_\tau$ . Регулярными множествами бэровских подплоскостей  $\pi_\tau$  и  $\pi_1$  являются соответственно  $K$  и  $m(K) = \{m(U) \mid U \in K\}$  (проверяется непосредственно умножением на матрицу  $\theta(0, U)$ ).

В силу перестановочности автоморфизмов  $\alpha$  и  $\tau$  матрица  $\alpha$  блочно-диагональная,  $\alpha = \text{diag}(A_1, A_2, B_1, B_2)$ . Обозначим через  $\alpha_0$  ограничение  $\alpha$  на подплоскость  $\pi_\tau$ ,  $\alpha_1$  — на  $\pi_1$ ,

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad A_2^2 = B_2^2 = E, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad A_1^2 = B_1^2 = -E, \quad \alpha_1^2 = h_3.$$

Тогда автоморфизм  $\alpha_0$  подплоскости  $\pi_\tau$  может быть либо тождественным, либо одной из гомологий  $h_1, h_2, h_3$ , либо бэровской инволюцией. В отличие от “хорошей” характеристики  $p \equiv 1 \pmod{4}$  все эти случаи можно реализовать, что показано при построении примеров.

В следующей теореме приведена редукция задачи о подгруппах  $D_8$  и  $Q_8$  без гомологий на бэровские подплоскости, приведено матричное представление подгрупп.

**Теорема 2.** Пусть  $\pi$  — недезаргова полуполевая плоскость порядка  $p^N$ ,  $p$  — простое,  $p \equiv -1 \pmod{4}$ , группа автоморфизмов  $\Lambda$  содержит подгруппу  $H$ , изоморфную  $D_8$  или  $Q_8$ , в которой нет гомологий. Тогда  $N$  делится на 4 и, с точностью до умножения элементов  $H$  на центральные гомологии  $h_i$ , можно полагать, что либо

$$1) \alpha = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix}, \text{ либо}$$

$$2) N \text{ делится на } 8, \alpha = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $CS = -SC$ ;  $L_2 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$ . В случае  $H \simeq D_8$  должно быть  $C^2 = E$ , и  $C^2 = -E$  при  $H \simeq Q_8$ . Подгруппа  $H$  индуцирует на бэровских подплоскостях  $\pi_\tau$  и  $\pi_1$  подгруппы  $H_0$  и  $H_\alpha$ . Подгруппа  $H_0$  — порядка 2 или элементарная абелева порядка 4, ее инволюции бэровские. Подгруппа  $H_\alpha$  изоморфна  $D_8$  или  $Q_8$  соответственно и содержит гомологию  $h_3$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим сначала более подробно случай  $H \simeq D_8$ .

Если автотопизм 4-го порядка  $\alpha$  действует на бэровской подплоскости  $\pi_\tau$  как гомология  $h_i$ , то подгруппа  $\langle \alpha h_i, \beta \rangle$  снова изоморфна  $D_8$  и не содержит гомологий, поэтому эти случаи можно исключить из рассмотрения. Остаются, таким образом, два варианта:  $\alpha_0$  тождественный или  $\alpha_0$  — бэровская инволюция подплоскости  $\pi_\tau$ . В первом случае  $A_2 = B_2 = E$ , во втором базис  $\pi_\tau$  можно выбрать так, что  $A_2 = B_2 = L$ . В обоих случаях из условия коллинеации имеем  $A_1 = B_1$ . За счет выбора базиса подплоскости  $\pi_1$  можно полагать  $A_1 = B_1 = S$  (необходима делимость  $N$  на 4).

Из перестановочности  $\beta$  и  $\tau$  следует блочная диагональность  $\beta = \text{diag}(C_1, C_2, D_1, D_2)$ , ограничения на бэровские подплоскости  $\beta_0 = \text{diag}(C_2, D_2)$  и  $\beta_1 = \text{diag}(C_1, D_1)$  либо тождественны, либо гомологии  $h_i$ , либо бэровские инволюции. Может реализоваться только последний случай, поскольку иначе нетривиальный автотопизм  $\beta$ , или  $\beta h_i$ , или  $\beta \tau$  фиксирует точек больше, чем в бэровской подплоскости; это невозможно. Итак,  $\beta_0$  — бэровская инволюция. В случае  $\alpha_0 = \varepsilon$  можно выбрать базис подплоскости  $\pi_\tau$  так, что  $C_2 = D_2 = L$ . Во втором случае бэровские инволюции  $\beta_0$  и  $\alpha_0$  перестановочны, поэтому  $N/2$  делится на 4, и выбором базиса приводим к  $C_2 = D_2 = L_2$ . Из условия коллинеации снова имеем  $C_1 = D_1 = C$ .

Заметим дополнительно, что в подгруппе  $H_\alpha$  автотопизм  $\beta_1 = \text{diag}(C, C)$  обязательно является бэровской инволюцией (не тривиален, не гомология).

Для  $H \simeq D_8$  теорема доказана.

В случае  $H \simeq Q_8$  рассуждения аналогичны. Так как теперь  $\beta$  — элемент порядка 4, а не инволюция, следует дополнительно рассмотреть случай его тождественного действия на бэровской подплоскости  $\pi_\tau$ :  $\beta = \text{diag}(C, E, C, E)$  при  $\alpha = \text{diag}(S, E, S, E)$ . Он исключается с применением условия коллинеации на автотопизмы  $\alpha$  и  $\beta$ . Действительно, для любой матрицы  $\theta(V, U)$  из регулярного множества должно быть выполнено условие (1.1)

$$\begin{pmatrix} -S & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \in R$$

аналогично с матрицей  $C$ . Тогда для всех  $U \in K$  и  $V \in Q$  должны быть выполнены следующие условия:

$$VS \in Q, \quad VC \in Q, \quad f(VS) = -Sf(V), \quad f(VC) = -Cf(V), \\ m(U)S = Sm(U), \quad m(U)C = Cm(U).$$

Последние два условия показывают, что матрицы  $S$  и  $C$  обе принадлежат левому ядру бэровской подплоскости  $\pi_1$ , т. е. централизатору регулярного множества  $m(K) = \{m(U) \mid U \in K\}$ . Это поле, в мультипликативной группе которого два элемента  $S$  и  $C$  порядка 4 должны быть связаны условием  $C = S^{-1}$ . При этом подгруппа  $\langle \alpha, \beta \rangle$  абелева, а не кватернионная.

Теорема полностью доказана.  $\square$

Подробное рассмотрение описанных в теореме случаев предоставит условия на матрицы  $\theta(V, U)$  регулярного множества. Использование условия коллинеации уточнит вид функций  $m$  и  $f$ , а также множеств  $Q$  и  $K$  (аналогично рассуждениям в доказательстве выше). Заметим, что в общем случае, в отличие от  $K$ , множество  $Q$  не обязательно содержит единичную матрицу: причиной могут послужить многократные замены базиса линейного пространства. Для произвольной размерности  $N > 4$  такие расчеты достаточно сложны и не всегда эффективны.

Как показывает теорема 2, для построения примера полуполевого пространства порядка  $p^N$ , допускающей диэдральную или кватернионную подгруппу автоморфизмов порядка 8 без гомологий, следует сначала построить регулярное множество полуполевого пространства порядка  $p^{N/2}$ , допускающей такую подгруппу, но с гомологией  $h_3$  в качестве центральной инволюции. Реализация этого алгоритма намечена целью дальнейших исследований.

**З а м е ч а н и е.** В случае 1 для  $H \simeq D_8$  можно записать автоморфизмы  $\alpha$  и  $\beta$  и проще. Действительно, выбор базиса в  $\pi_1$  приведет к  $\beta_1 = \text{diag}(L, L)$ , меняя матрицу  $S$  на  $S'$  с условиями  $LS' = -S'L$  и  $S'^2 = -E$ . Тогда, как нетрудно проверить,

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

и новая замена базиса в  $\pi_1$  с матрицей перехода  $T = \text{diag}(E, B, E, B)$  не меняет  $\beta_1$ , приводя к  $\alpha_1 = \text{diag}(S, S)$ . Окончательно имеем, таким образом,  $\alpha = \text{diag}(S, E, S, E)$  и  $\beta = \text{diag}(L, L, L, L)$ . Условие коллинеации в этом случае позволяет записать регулярное множество  $m(K)$  подпространства  $\pi_1$  в виде множества матриц

$$m(K) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu(Y) & \varphi(X) \\ X & Y \end{pmatrix} \mid X \in K_X, Y \in K_Y \right\},$$

где  $\mu(\mu(X)) = X$  для всех  $X \in K_X$  и  $\varphi(\varphi(Y)) = Y$  для всех  $Y \in K_Y$ . Построение примеров начинается с действия на бэровской подпространстве в  $\pi_1$  порядка  $p^{N/4}$  с регулярным множеством  $K_Y$ .

Сравнивая случаи характеристики  $p \equiv \pm 1 \pmod{4}$ , необходимо отметить существенное различие: при  $p \equiv -1 \pmod{4}$  из существования подгруппы автоморфизмов  $H \simeq D_8$  не следует наличие подгруппы  $F \simeq Q_8$ , и наоборот. Это будет продемонстрировано примерами ниже. С другой стороны, для случая  $p \equiv 1 \pmod{4}$  невозможна редукция к подгруппам на бэровских подпространствах.

Применяя результаты Д. Голдшмидта о сильно замкнутых подгруппах ([13], см. также Д. Горенштейн [14]), пополняем перечень простых неабелевых групп, которые не могут содержаться в группе автоморфизмов.

**Следствие 1.** Пусть  $\pi$  — недезаргова полуполевого пространства порядка  $p^N$ , где  $p > 2$  — простое,  $p \equiv -1 \pmod{4}$ ,  $N$  не делится на 4. Тогда ее группа автоморфизмов  $\Lambda$  не содержит простых неабелевых подгрупп, за исключением, возможно, следующих:  $PSL(2, 2^n)$ ,  $n \geq 2$ ,  $PSU(3, 2^n)$ ,  $n \geq 2$ ,  $Sz(2^n)$ ,  $n$  нечетно,  $n > 1$ ,  $PSL(2, q)$ ,  $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ ,  $J_1$  или  ${}^2G_2(3^n)$ ,  $n$  нечетно,  $n > 1$ .

## 4. Примеры

В случае характеристики  $p \equiv 1 \pmod{4}$  примеры полуполевого пространства с диэдральной и с кватернионной подгруппами автоморфизмов представлены в [9]. При  $p \equiv -1 \pmod{4}$  минимальный порядок плоскости, удовлетворяющей условиям теоремы 2, равен 81.

Первым автором в статье [15] представлены все, с точностью до изоморфизма, полуполевого пространства порядка 81, допускающие бэровскую инволюцию ( $\tau$  вида (2.1), за счет выбора

Т а б л и ц а 1

Плоскость	$ N_l ,  N_m ,  N_r $	$ \Lambda $	$n_2$	$B_2$	$n_4$	$B_4$	$F_1$	$F_2$
A1	3,3,9	256	7	4	88	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
A2	3,3,9	512	7	4	216	4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
B1	3,9,3	256	7	4	88	4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
B2	3,9,3	512	7	4	216	4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
C1	9,3,3	256	7	4	88	4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
C2	9,3,3	512	7	4	216	4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
D1	9,9,9	1024	7	4	56	8	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
D2	9,9,9	2048	103	100	600	8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

базиса). Таких плоскостей точно 8, их регулярное множество в  $GL_4(3) \cup \{0\}$  состоит из матриц вида (2.2), где  $Q$  и  $K$  – поля порядка 9 в  $GL_2(3) \cup \{0\}$ . В подходящем базисе имеем

$$Q = K = \{xD + yE \mid x, y \in \mathbb{Z}_3\}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейные функции  $m$  и  $f$  представимы в виде

$$m(xD + yE) = xM + yE, \quad f(xD + yE) = xF_1 + yF_2, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

матрицы  $F_1$  и  $F_2$  перечислены в табл. 1. Таблица 1 содержит также информацию о порядках ядер, порядке группы автотопизмов  $\Lambda$ . В ней  $n_k$  – число автотопизмов порядка  $k$ ;  $B_k$  – число бэровских коллинеаций порядка  $k$ . Количество автотопизмов порядков 2 и 4 получено непосредственным компьютерным перебором с проверкой условия коллинеации.

Группа автотопизмов  $\Lambda$  является 2-группой и поэтому разрешима. Подгруппу, изоморфную  $D_8$  или  $Q_8$ , будем искать в централизаторе бэровской инволюции  $\tau = \alpha^2$  (см. рассуждения выше). Так как для плоскостей A1–D1 число инволюций в  $\Lambda$  равно 7, то они вместе с тождественным автотопизмом образуют элементарную абелеву подгруппу  $\langle \tau, h_1, h_2 \rangle$ , поэтому перечисленные плоскости не допускают  $H \simeq D_8$  без гомологий.

Среди 100 бэровских инволюций плоскости D2 попадают в  $C_\Lambda(\tau)$  только 7 – те же  $\tau$ ,  $h_i$  и  $\tau h_i$ . Следовательно, окончательно имеем результат.

**Предложение 1.** *Не существует недезарговых полуполевогой плоскостей порядка 81 с подгруппой автотопизмов  $H \simeq D_8$  без гомологий.*

Для поиска подгрупп автотопизмов, изоморфных  $Q_8$ , выделим сначала автотопизмы  $\alpha$  порядка 4 с условием  $\alpha^2 = \tau$ . У плоскостей A2 и C1 таких автотопизмов нет, у плоскостей B1, B2, C2 их 8, у A1 и D1 – 32, у плоскости D2 таких автотопизмов 72. Далее в списке автотопизмов порядка 4 формируем пары  $(\alpha, \beta)$  с условием  $\beta\alpha\beta = \alpha$ . С точностью до перехода к обратному элементу получаем 19 различных кватернионных подгрупп автотопизмов плоскости D2 и ни одной – для всех остальных.

**Предложение 2.** *Существует единственная недезаргова полуполевая плоскость порядка 81, в группе автоморфизмов которой есть подгруппы кватернионов порядка 8 без гомологий.*

Таким образом, даже пример минимального порядка показывает неэквивалентность условий существования подгрупп  $D_8$  и  $Q_8$  без гомологий в группе автоморфизмов при характеристике  $p \equiv -1 \pmod{4}$ .

### Заключение

Как видим, свойства и строение группы автоморфизмов полуполевой плоскости могут существенно различаться для характеристик  $p \equiv \pm 1 \pmod{4}$ . В случае размерности  $N \neq 4n$  координатизирующего полуполя над простым подполем даже для “плохой” характеристики  $p \equiv -1 \pmod{4}$  доказанный результат пополняет перечень простых неабелевых групп, которые не могут содержаться в группе автоморфизмов.

Говоря об изучении проблемы Хьюза о разрешимости полной группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости, мы полагаем возможным использование доказанных результатов в дальнейших исследованиях. Примененный метод полезен как для рассмотрения простых неабелевых групп и исключения обширного их списка из перечня возможных групп автоморфизмов, так и для построения примеров полуполевых плоскостей малого ранга.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Johnson N.L., Jha V., Biliotti M.** Handbook of finite translation planes. Boca Raton; London; NY: Chapman & Hall /CRC, 2007. 861 p.
2. **Cáceres J.M.H., Rúa I.F.** An approach to the classification of finite semifields by quantum computing // Non-associative algebras and related topics (NAART 2020): Proc. Cham: Springer, 2023. P. 245–260. (Ser. Springer Proc. in Math. & Stat.; vol. 427).  
[https://doi.org/10.1007/978-3-031-32707-0\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-031-32707-0_16)
3. **Hui A.M.W., Tai Y.K., Wong P.P.W.** On the autotopism group of the commutative Dickson semifield  $\mathcal{K}$  and the stabilizer of the Ganley unital embedded in the semifield plane  $\Pi(\mathcal{K})$  // Innovations in Incidence Geometry 2015. Vol. 14, no. 1. P. 27–42. <https://doi.org/10.2140/iig.2015.14.27>
4. **Meléndez W., Delgado A.R.** On a conjecture about the autotopism group of the Figueroa’s presemifields of order  $p^n$  // Note di Matematica 2018. Vol. 38, no. 2. P. 11–20.  
<https://doi.org/10.1285/i15900932v38n2p11>
5. **Meléndez W., Figueroa R.** On the autotopism group of the Cordero-Figueroa semifield of order  $3^6$  // Discus. Math. General Algebra and Appl., 2016. Vol. 36. P. 117–126.  
<https://doi.org/10.7151/dmgaa.1250>
6. **Combarro E., Nicolás A.P., Ranilla J., Rúa I.F.** On finite division rings with a designed automorphism group // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. Vol. 43, no. 7. P. 3982–3994.  
<https://doi.org/10.1002/mma.6167>
7. **Hughes D.R., Piper F.C.** Projective planes. NY Inc.: Springer-Verlag, 1973. 292 p.
8. The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 20th ed. [e-resource]. Lincoln; Novosibirsk: University of Lincoln, U.K.; Inst. Math. SO RAN Publ., 2024. 274 p. URL: <https://kourovka-notebook.org/>.
9. **Kravtsova O.V., Skok D.S.** Linear autotopism subgroups of semifield projective planes // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2023. Vol. 16, no. 6. P. 705–719.  
URL: <https://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/151860>.
10. **Podufalov N.D.** On spread sets and collineations of projective planes // Contem. Math. 1992. Vol. 131, Part 1. P. 697–705.
11. **Lüneburg H.** Translation planes. NY: Springer-Verlag, 1980. 278 p.
12. **Biliotti M., Jha V., Johnson N.L., Menichetti G.** A structure theory for two-dimensional translation planes of order  $q^2$  that admit collineation group of order  $q^2$  // Geom. Dedicata. 1989. Vol. 29. P. 7–43. <https://doi.org/10.1007/BF00147468>
13. **Goldschmid D.M.** 2-fusion in finite groups // Ann. Math. 1974. Vol. 99, no. 1, P. 70–117.  
<https://doi.org/10.2307/1971014>

14. **Gorenstein D.** Finite simple groups. An introduction to their classification. NY: Plenum Press, 1982. 352 p.
15. **Кравцова О.В., Шевелева И.В.** О некоторых 3-примитивных полуполевых плоскостях // Чебышевский сб. 2020. Т. 20, № 3. С. 316–332. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-316-332>

Поступила 1.10.2024

После доработки 8.10.2024

Принята к публикации 14.10.2024

Кравцова Ольга Вадимовна

д-р физ.-мат. наук, доцент

заведующий кафедрой высшей математики № 2

Институт математики и фундаментальной информатики

Сибирского федерального университета

г. Красноярск

e-mail: ol71@bk.ru

Скок Дарья Сергеевна

аспирант

Институт вычислительного моделирования СО РАН

г. Красноярск

e-mail: skokdarya@yandex.ru

## REFERENCES

1. Johnson N.L., Jha V., Biliotti M. *Handbook of finite translation planes*. Boca Raton, London, NY, Chapman & Hall / CRC, 2007, 861 p. ISBN: 9781584886051.
2. Cáceres J.M.H., Rúa I.F. An approach to the classification of finite semifields by quantum computing. In: Albuquerque H., Brox J., Martinez C., Saraiva P. (eds) *Non-associative algebras and related topics. NAART 2020. Springer Proc. in Math. & Stat.*, Cham, Springer, 2023, vol. 427, pp. 245–260. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-32707-0\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-031-32707-0_16)
3. Hui A.M.W., Tai Y.K., Wong P.P.W. On the autotopism group of the commutative Dickson semifield  $\mathcal{K}$  and the stabilizer of the Ganley unit embedded in the semifield plane  $\Pi(\mathcal{K})$ . *Innov. Incid. Geom.*, 2015, vol. 14, no. 1, pp. 27–42. <https://doi.org/10.2140/iig.2015.14.27>
4. Meléndez W., Delgado A.R. On a conjecture about the autotopism group of the Figueroa’s presemifields of order  $p^n$ . *Note di Mat.*, 2018, vol. 38, iss. 2, pp. 11–20. <https://doi.org/10.1285/i15900932v38n2p11>
5. Meléndez W., Figueroa R., Delgado M. On the autotopism group of the Cordero–Figueroa semifield of order  $3^6$ . *Discus. Math. General Algebra and Appl.*, 2016., vol. 36, pp. 117–126. <https://doi.org/10.7151/dmgaa.1250>
6. Combarro E., Nicolás A.P., Ranilla J., Rúa I.F. On finite division rings with a designed automorphism group. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, vol. 43, no. 7, pp. 3982–3994.: <https://doi.org/10.1002/mma.6167>
7. Hughes D.R., Piper F.C. *Projective planes*. NY, Springer-Verlag, 1973, 291 p. ISBN-13: 978-0387900445
8. The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 20th ed. [e-resource]. Linkoln, Novosibirsk, University of Lincoln, U.K.; Inst. Math. SO RAN, 2024, 274 p. Available at: <https://kourovka-notebook.org/>.
9. Kravtsova O.V., Skok D.S. Linear autotopism subgroups of semifield projective planes. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2023, vol. 16, no. 6, pp. 705–719. Available at: <https://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/151860>.
10. Podufalov N.D. On spread sets and collineations of projective planes. *Contemp. Math.*, 1992, vol. 131, pt. 1, pp. 697–705.
11. Luneburg H. *Translation planes*. NY, Springer-Verlag, 1980, 278 p. ISBN-13: 978-3540096146
12. Biliotti M., Jha V., Johnson N.L., Menichetti G. A structure theory for two-dimensional translation planes of order  $q^2$  that admit collineation group of order  $q^2$ . *Geom. Dedicata*, 1989, vol. 29, pp. 7–43. <https://doi.org/10.1007/BF00147468>

13. Goldschmidt D.M. 2-fusion in finite groups. *Ann. Math.*, 1974, vol. 99, no. 1, pp. 70–117. <https://doi.org/10.2307/1971014>
14. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification*. NY, Springer, 1982, 333 p. doi: 10.1007/978-1-4684-8497-7. Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu*, Moscow, Mir Publ., 1985, 352 p.
15. Kravtsova O.V., Sheveleva I.V. On some 3-primitive projective planes. *Chebyshevskii Sb.*, 2019, vol. 20, no. 3, pp. 316–332 (in Russian). <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-316-332>

Received October 1, 2024

Revised October 8, 2024

Accepted October 14, 2024

**Funding Agency:** This work was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center, which is financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2024-1429).

*Olga Vadimovna Kravtsova*, Dr. Phys.-Math. Sci., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: ol71@bk.ru.

*Daria Sergeevna Skok*, Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: skokdarya@yandex.ru.

Cite this article as: O. V. Kravtsova, D. S. Skok. Non-Abelian autotopism subgroups of order 8 of semifield projective planes. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 90–100.