

УДК 512.542

## ИЗООРДНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Йи, С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Пусть  $A, B$  — подгруппы конечной группы  $G$ . Тогда  $A$  называется: *изоордно перестановочной с  $B$* , если в  $G$  существует подгруппа  $C$  такая, что  $|C| = |B|$  и  $AC = CA$ ; *наследственно изоордно перестановочной с  $B$* , если  $A$  изоордно перестановочна с  $B$  в любой подгруппе из  $G$ , содержащей  $A$  и  $B$ ; *изоордно перестановочной в  $G$* , если  $A$  изоордно перестановочна с любой подгруппой группы  $G$ ; *наследственно изоордно перестановочной в  $G$* , если  $A$  наследственно изоордно перестановочна с любой подгруппой группы  $G$ . В работе анализируются свойства изоордно перестановочных подгрупп и исследуется строение конечной группы  $G$ , все минимальные подгруппы которой являются наследственно изоордно перестановочными.

Ключевые слова: конечная группа, изоордно перестановочная подгруппа, наследственно изоордно перестановочная подгруппа, минимальная подгруппа.

X. Yi, S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyaynov. Isoorderly permutable subgroups of finite groups.

Let  $A$  and  $B$  be subgroups of a finite group  $G$ . Then the subgroup  $A$  is called: *isoorderly permutable with  $B$*  if there is a subgroup  $C$  of  $G$  such that  $|C| = |B|$  and  $AC = CA$ , *hereditarily isoorderly permutable with  $B$*  if  $A$  is isoorderly permutable with  $B$  in any subgroup of  $G$  containing  $A$  and  $B$ , *isoorderly permutable in  $G$*  if  $A$  is isoorderly permutable with every subgroup of  $G$ , and *hereditarily isoorderly permutable in  $G$*  if  $A$  is hereditarily isoorderly permutable with every subgroup of  $G$ . In this paper, the properties of isoorderly permutable subgroups are analyzed, and the structure of a finite group  $G$  all of whose minimal subgroups are hereditarily isoorderly permutable is studied.

Keywords: finite group, isoorderly permutable subgroup, hereditarily isoorderly permutable subgroup, minimal subgroup.

MSC: 20D10

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-02

## Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными.

Напомним, что подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *перестановочной с подгруппой  $B$* , если  $AB = BA$ . Если  $A$  перестановочна со всеми подгруппами из  $G$ , то  $A$  называется *перестановочной* [1] или *квазинормальной* [2] подгруппой в  $G$  (ясно, что любая нормальная подгруппа из  $G$  является перестановочной).

Перестановочные подгруппы имеют ряд интересных свойств. Так, например, Оре в [2] доказал, что любая перестановочная подгруппа является субнормальной. Ито и Сеп усилили этот результат: они доказали в [3], что для каждой перестановочной подгруппы  $H$  группы  $G$  фактор-группа  $H/H_G$  нильпотентна. В дальнейшем Майер и Шмид доказали в [4], что при таких условиях  $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$ .

В работах Кегеля [5] и Дескинса [6] показано, что подгруппа  $H$ , перестановочная со всеми силовскими подгруппами конечной группы  $G$  (она называется  *$S$ -перестановочной* или  *$S$ -квазинормальной*), наследует ряд ключевых свойств перестановочных подгрупп. В частности,  $H$  по-прежнему субнормальна, а секция  $H/H_G$  нильпотентна. Если к тому же группа  $G$  разрешима и  $H$  перестановочна с системными нормализаторами группы  $G$ , то  $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$ .

Исследования второго и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта Ф23РНФ-237.

После работ [5; 6] многими авторами исследовались свойства других типов обобщенно перестановочных подгрупп. В частности, рассматривались *m*-перестановочные подгруппы [7], т. е. подгруппы, перестановочные со всеми максимальными подгруппами, и *полунормальные* подгруппы [8], т. е. подгруппы  $H$ , перестановочные со всеми подгруппами из некоторого добавления к  $H$ .

Все отмеченные выше концепции перестановочности в [9] обобщены следующим образом. Пусть  $\Theta$  — некоторое множество подгрупп группы  $G$ . Если подгруппа  $H$  из  $G$  перестановочна со всеми подгруппами из  $\Theta$ , то  $H$  называется  $\Theta$ -перестановочной.

В то же время часто встречается ситуация (см., например, [10]), когда подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  не являются перестановочными, но в  $G$  имеется такой элемент  $x$ , для которого справедливо равенство  $AB^x = B^xA$ . В связи с этим в [10] предложена концепция перестановочности, основанная на следующих определениях.

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $A, B$  — подгруппы группы  $G$  и  $\emptyset \neq X \subseteq G$ . Тогда  $A$  называется:

- (1)  $X$ -перестановочной с  $B$ , если  $AB^x = B^xA$  для некоторого  $x \in X$ ;
- (2) наследственно  $X$ -перестановочной с  $B$ , если  $AB^x = B^xA$  для некоторого элемента  $x \in X \cap \langle A, B \rangle$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется (наследственно)  $X$ -перестановочной в  $G$ , если  $A$  (наследственно)  $X$ -перестановочна со всеми подгруппами из  $G$ .

Отметим, что 1-перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные подгруппы. В другом предельном случае мы имеем дело с  $G$ -перестановочными подгруппами. Понятно, что подгруппа  $A$  является наследственно  $G$ -перестановочной в  $G$  тогда и только тогда, когда  $A$  является  $E$ -перестановочной в каждой подгруппе  $E \subseteq G$ , содержащей  $A$ .

В качестве тривиального примера отметим, что в группе  $G \cong S_3$  силовская 2-подгруппа  $G$ -перестановочна в  $G$ , но не является перестановочной и  $S$ -перестановочной подгруппой в  $G$ .

В данной работе мы предлагаем концепцию, которая развивает концепцию  $X$ -перестановочности.

**О п р е д е л е н и е 3.** Пусть  $A, B$  — подгруппы группы  $G$ . Тогда  $A$  называется:

- (1) изоордно перестановочной с  $B$ , если в  $G$  существует подгруппа  $C$  такая, что  $|C| = |B|$  и  $AC = CA$ ;
- (2) наследственно изоордно перестановочной с  $B$ , если  $A$  изоордно перестановочна с  $B$  в любой подгруппе из  $G$ , содержащей  $A$  и  $B$ .

**О п р е д е л е н и е 4.** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется (наследственно) изоордно перестановочной в  $G$ , если  $A$  (наследственно) изоордно перестановочна с любой подгруппой группы  $G$ .

Очевидно, что  $X$ -перестановочность подгруппы для любого  $\emptyset \neq X \subseteq G$  влечет ее изоордную перестановочность, но обратное утверждение неверно.

**П р и м е р 1.** Пусть

$$G = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = 1, ba = abc, ca = ac, cb = bc \rangle$$

— экстраспециальная группа порядка  $p^3$  и экспоненты  $p$ . Простая проверка показывает, что подгруппа  $\langle a \rangle$  изоордно перестановочна в  $G$ , но не является  $G$ -перестановочной в  $G$ .

**П р и м е р 2.** Пусть  $G \cong PSL_2(7)$  и  $P$  — ее силовская 3-подгруппа. Тогда  $P$  изоордно перестановочна в  $G$ , но не является  $G$ -перестановочной в  $G$ . Отметим, что подгруппа  $P$  не является наследственно изоордно перестановочной в  $G$ .

В данной работе анализируется влияние изоордно перестановочных минимальных подгрупп на строение группы  $G$  (при этом под *минимальной подгруппой* группы  $G$  понимается любая подгруппа простого порядка).

Исследования инициированы следующими результатами:

- 1) Пусть все минимальные подгруппы группы  $G$  нормальны. Тогда  $G$  разрешима и ее коммутант  $G'$  имеет нормальную силовскую 2-подгруппу, фактор-группа по которой является нильпотентной (Гашюц, Ито [11, теорема IV.5.7]).
- 2) Если все минимальные подгруппы группы  $G$ , имеющей нечетный порядок, нормальны, то  $G$  сверхразрешима (Бакли [12]);
- 3) Если каждая минимальная подгруппа группы  $G$  является наследственно  $G$ -перестановочной в  $G$ , то  $G$  разрешима (Каморников, Тютянов [13, теорема 1]).

Наша главная цель — доказательство следующих двух теорем, развивающих отмеченные выше результаты.

**Теорема 1.** *Если каждая минимальная подгруппа группы  $G$  является наследственно изоордно перестановочной, то  $G$  разрешима.*

В общем случае, как следует из [12], группа  $G$ , удовлетворяющая условию теоремы 1, не является сверхразрешимой. В то же время имеет место следующий результат.

**Теорема 2.** *Если все минимальные подгруппы группы  $G$ , а также все ее циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно изоордно перестановочными в  $G$ , то  $G$  сверхразрешима.*

**Следствие 1.** *Если любая минимальная подгруппа группы  $G$ , имеющая нечетный порядок, является наследственно изоордно перестановочной в  $G$ , то  $G$  сверхразрешима.*

## 1. Используемая терминология

В работе используются стандартные определения и обозначения теории групп, которые могут быть найдены в [12].

Далее через  $\mathfrak{U}$  обозначается класс всех сверхразрешимых групп.

Будем использовать также следующие обозначения:

- $\Phi(G)$  — подгруппа Фраттини группы  $G$ ;
- $Z(G)$  — центр группы  $G$ ;
- $G^{\mathfrak{U}}$  —  $\mathfrak{U}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы  $G$ , фактор-группа по которой сверхразрешима.

Для описания расширений групп используются следующие обозначения:

- $A \times B$  — прямое произведение подгрупп  $A$  и  $B$ ;
- $A : B$  — расщепляемое расширение группы  $A$  с помощью группы  $B$ .

*Минимальная неразрешимая группа* — это неразрешимая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Простая проверка показывает, что группа  $G$  является минимальной неразрешимой группой тогда и только тогда, когда  $G/\Phi(G)$  — минимальная простая группа, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [14]. Этот список содержит следующие группы:

- $PSL_2(2^p)$ , где  $p$  — простое число;
- $PSL_2(3^p)$ , где  $p$  — простое число, большее 3;
- $PSL_2(p)$ , где  $p$  — простое число, большее 5, и  $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ ;
- $PSL_3(3)$ ;
- $Sz(2^p)$ ,  $p$  — простое нечетное число.

Описание подгрупп группы  $PSL_2(q)$  содержится в известной теореме Диксона (см., например, [11, теорема II.8.27]). В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

*Минимальная несверхразрешимая группа* — эта группа, у которой все собственные подгруппы сверхразрешимы, но сама она сверхразрешимой не является.

## 2. Предварительные результаты

Отметим следующее свойство минимальных неразрешимых групп.

**Лемма 1.** *Если  $G$  — минимальная неразрешимая группа и  $F$  — ее наследственно изоордно перестановочная подгруппа простого порядка, то  $F \subseteq \Phi(G)$ . В частности, любая минимальная простая группа не содержит наследственно изоордно перестановочных подгрупп простого порядка.*

**Доказательство.** Предположим, что лемма не верна, т.е. некоторая минимальная неразрешимая группа  $G$  содержит наследственно изоордно перестановочную подгруппу  $F$  простого порядка  $r$ , которая не содержится в  $\Phi(G)$ .

Рассмотрим все пять возможных случаев из списка Томпсона.

1.  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$ , где  $q = 2^p$  и  $p$  — простое число.

Предположим, что  $|F| = r$  — простое нечетное число. Поскольку

$$(q-1, q+1) = 1 \text{ и } |G/\Phi(G)| = q(q-1)(q+1),$$

то либо  $r \in \pi(q-1)$ , либо  $r \in \pi(q+1)$ . Пусть сначала  $r \in \pi(q-1)$ . Так как группа  $G$  содержит некоторую холлову  $\pi(q+1)$ -подгруппу  $H$ , то из изоордной перестановочности подгруппы  $F$  следует, что группа  $G$  содержит холлову  $\pi(q+1)$ -подгруппу  $S$  такую, что  $FS = SF$ . Но тогда группа  $G/\Phi(G)$  содержит подгруппу  $FS\Phi(G)/\Phi(G)$  порядка  $r(q+1)$ , что невозможно. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда  $r \in \pi(q+1)$ .

Пусть теперь  $|F| = 2$ . Простая проверка показывает, что группа  $G$  содержит некоторую холлову  $\{2\} \cup \pi(q-1)$ -подгруппу  $H$ . При этом  $H/H_1$  является группой Фробениуса с ядром  $S/H_1$  порядка  $q$  и циклическим дополнением  $D/H_1$  порядка  $q-1$ , где  $H_1 = H \cap \Phi(G)$ . Не нарушая общности рассуждений, можем полагать, что подгруппа  $F$  содержится в  $H$ . Так как подгруппа  $F$  является наследственно изоордно перестановочной в  $H$ , то в  $H$  существует холлова  $\pi(q-1)$ -подгруппа  $R$  такая, что  $FR = RF$ . Ясно, что  $F$  не содержится в  $H_1$ . Таким образом, в  $H/H_1$  имеется подгруппа  $(FH_1/H_1)(RH_1/H_1) = FH_1/H_1 \times RH_1/H_1$ , что невозможно.

2.  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$ , где  $q = 3^p$  и  $p$  — простое число, большее 3.

Предположим сначала, что  $|F| = r > 3$ . Поскольку

$$|G/\Phi(G)| = q(q-1)(q+1)/2,$$

то либо  $r \in \pi(q-1)$ , либо  $r \in \pi(q+1)$ . Пусть  $r \in \pi(q-1)$  и  $H$  — некоторая холлова  $\pi(q+1)$ -подгруппа группы  $G$ . Тогда из изоордной перестановочности подгруппы  $F$  следует, что группа  $G$  содержит холлову  $\pi(q+1)$ -подгруппу  $S$  такую, что  $FS = SF$ . Но тогда группа  $G/\Phi(G)$  содержит подгруппу  $FS\Phi(G)/\Phi(G)$  порядка  $r(q+1)$ , а значит, и группа  $PSL_2(q)$  содержит подгруппу порядка  $r(q+1)$ , что невозможно. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда  $r \in \pi(q+1)$ .

Пусть  $|F| = 3$ . Тогда, как и выше, из изоордной перестановочности подгруппы  $F$  следует, что группа  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(3^p)$  содержит подгруппу порядка  $3(q+1)$ , что невозможно. Снова пришли к противоречию.

Предположим теперь, что  $|F| = 2$ . Так как  $G/\Phi(G)$  содержит подгруппу  $H/\Phi(G) \cong A_4$  и все инволюции в  $G/\Phi(G)$  сопряжены, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что  $F\Phi(G)/\Phi(G)$  содержится в подгруппе  $H/\Phi(G)$ . Так как подгруппа  $F$  является наследственно изоордно перестановочной в  $H$ , то в подгруппе  $H$  существует силовская 3-подгруппа  $S$  такая, что  $FS = SF$ . Отсюда следует, что  $H/\Phi(G)$  содержит подгруппу порядка 6, что невозможно.

3.  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(p)$ , где  $p$  — простое число, большее 5, и  $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ .

Предположим сначала, что  $|F| = p$ . Пусть  $d$  — порядок силовской 2-подгруппы группы  $G/\Phi(G)$ . Тогда, как и выше, из изоордной перестановочности подгруппы  $F$  следует, что  $G/\Phi(G)$  содержит подгруппу порядка  $pd$ , что невозможно.

Пусть  $|F| = 2$ . Тогда, как и в предыдущем пункте, показывается, что в группе  $G/\Phi(G)$  существует подгруппа  $H/\Phi(G) \cong A_4$ , содержащая подгруппу порядка 6, что невозможно.

Предположим теперь, что  $r$  — простое нечетное число, отличное от  $p$ . Так как

$$|G/\Phi(G)| = p(p-1)(p+1)/2,$$

то либо  $r \in \pi(p-1)$ , либо  $r \in \pi(p+1)$ . Пусть сначала  $r \in \pi(p+1)$ . Тогда из изоордной перестановочности подгруппы  $F$  следует, что группа  $G$  содержит силовскую  $p$ -подгруппу  $S$  такую, что  $FS = SF$ . Но тогда группа  $G/\Phi(G)$  содержит подгруппу  $FS\Phi(G)/\Phi(G)$  порядка  $pr$ , что невозможно.

Пусть теперь  $r \in \pi(p-1)$  и  $p > 7$ . Рассмотрим в  $G/\Phi(G)$  диэдральную подгруппу  $H/\Phi(G)$  порядка  $p-1$ . Так как  $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ , то при  $p > 7$  подгруппа  $H/\Phi(G)$  максимальна в  $G/\Phi(G)$ . Из изоордной перестановочности подгруппы  $F$  следует, что группа  $G$  содержит подгруппу  $M$  такую, что  $|M| = |H|$  и  $FM = MF$ . Отметим, что

$$|FM\Phi(G)/\Phi(G)| = |FM|/|FM \cap \Phi(G)| \geq |FM|/|\Phi(G)| = |F| \cdot |M|/|\Phi(G)| = r(q+1).$$

Пришли к противоречию с тем, что группа  $PSL_2(p)$  не содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на  $r(q+1)$ .

Пусть  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(7)$ . Поскольку  $|PSL_2(7)| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ , то с учетом изложенного выше достаточно рассмотреть случай, когда  $|F| = 3$ . Так как  $G/\Phi(G)$  содержит подгруппу  $H/\Phi(G) \cong A_4$  и все силовские 3-подгруппы группы  $G/\Phi(G)$  сопряжены, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что  $F\Phi(G)/\Phi(G)$  содержится в подгруппе  $H/\Phi(G)$ . Рассмотрим в  $H$  подгруппу  $FD$ , где  $D$  — силовская 2-подгруппа из  $H$ . Ясно, что  $D \trianglelefteq FD$  и  $FD/D \cap \Phi(G) \cong A_4$ . Поскольку подгруппа  $F$  является наследственно изоордно перестановочной в  $FD$ , то в подгруппе  $D$  существует 2-подгруппа  $D_1$  индекса 2 такая, что  $FD_1 = D_1F$ . Если  $D_1$  содержит  $D \cap \Phi(G)$ , то группа  $FD/D \cap \Phi(G) \cong A_4$  содержит подгруппу  $FD_1/(D \cap \Phi(G))$  порядка 6, что невозможно.

Следовательно,  $D_1$  не содержит  $D \cap \Phi(G)$ . Тогда  $D_1 \trianglelefteq FD_1$  и  $FD_1/D_1 \cap \Phi(G) \cong A_4$ . Так как подгруппа  $F$  является наследственно изоордно перестановочной в  $FD_1$ , то в подгруппе  $D_1$  существует 2-подгруппа  $D_2$  индекса 2 такая, что  $FD_2 = D_2F$ . Если  $D_2$  содержит  $D_1 \cap \Phi(G)$ , то группа  $FD_1/D_1 \cap \Phi(G) \cong A_4$  содержит подгруппу  $FD_2/(D_1 \cap \Phi(G))$  порядка 6, что невозможно. Если  $D_2$  не содержит  $D_1 \cap \Phi(G)$ , то продолжаем описанный процесс до тех пор, пока не приходим к подгруппе  $D_k$  такой, что  $FD_k \cong A_4$ . Поскольку подгруппа  $F$  является наследственно изоордно перестановочной в  $FD_k$ , то она содержит подгруппу порядка 6, что невозможно.

#### 4. $G/\Phi(G) \cong PSL_3(3)$ .

Из [15, с. 13] следует, что  $|G/\Phi(G)| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$  и группа  $G/\Phi(G)$  содержит максимальные подгруппы  $3^2 : 2S_4$ ,  $13 : 3$  и  $S_4$ . Предположим сначала, что  $|F| = 13$ . Тогда из изоордной перестановочности подгруппы  $F$  следует, что группа  $G$  содержит силовскую 2-подгруппу  $S$  такую, что  $FS = SF$ . Но тогда группа  $G/\Phi(G)$  содержит подгруппу  $FS\Phi(G)/\Phi(G)$  порядка  $13 \cdot 2^4$ , что невозможно.

Пусть  $|F| = 2$ . Так как  $G/\Phi(G)$  содержит подгруппу  $H/\Phi(G) \cong A_4$  и все инволюции в  $G/\Phi(G)$  сопряжены, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что  $F\Phi(G)/\Phi(G)$  содержится в подгруппе  $H/\Phi(G)$ . Так как подгруппа  $F$  является наследственно изоордно перестановочной в  $H$ , то в подгруппе  $H$  существует силовская 3-подгруппа  $S$  такая, что  $FS = SF$ . Отсюда следует, что  $H/\Phi(G)$  содержит подгруппу порядка 6, что невозможно.

Пусть  $|F| = 3$ . Ввиду теоремы Силова, не нарушая общности рассуждений, можем полагать, что  $F\Phi(G)/\Phi(G)$  содержится в холловой  $\{2, 3\}$ -подгруппе

$$D/\Phi(G) = (\langle a\Phi(G) \rangle \times \langle b\Phi(G) \rangle) : H/\Phi(G) \cong 3^2 : 2S_4$$

группы  $G/\Phi(G)$ . Предположим сначала, что

$$F\Phi(G)/\Phi(G) \subseteq \langle a\Phi(G) \rangle \times \langle b\Phi(G) \rangle.$$

Тогда по условию подгруппа  $F$  перестановочна с некоторой силовской 2-подгруппой  $S$  подгруппы  $H$ . При этом подгруппа

$$F\Phi(G)/\Phi(G) = (\langle a\Phi(G) \rangle \times \langle b\Phi(G) \rangle) \cap FS\Phi(G)/\Phi(G)$$

нормальна в  $FS\Phi(G)/\Phi(G)$ . Отсюда, в частности, следует, что  $2^3$  делит

$$|C_{G/\Phi(G)}(\langle a\Phi(G) \rangle)|.$$

Однако согласно таблице характеров [15, с. 13] группа  $G/\Phi(G) \cong PSL_3(3)$  содержит только два класса сопряженных элементов порядка 3 с представителями  $3A$  и  $3B$ , порядки централизаторов которых равны 54 и 9 соответственно. Пришли к противоречию.

Рассмотрим теперь случай, когда подгруппа  $F\Phi(G)/\Phi(G)$  не содержится в подгруппе  $\langle a\Phi(G) \rangle \times \langle b\Phi(G) \rangle$ . Так как  $\langle a\Phi(G) \rangle \times \langle b\Phi(G) \rangle \trianglelefteq D\Phi(G)/\Phi(G)$ , то

$$R/\Phi(G) = (\langle a\Phi(G) \rangle \times \langle b\Phi(G) \rangle) : (F\Phi(G)/\Phi(G))$$

— силовская 3-подгруппа в  $D/\Phi(G)$ .

4.1. Пусть  $F\Phi(G)/\Phi(G)$  не содержится в центре подгруппы  $R/\Phi(G)$ . Поскольку подгруппа  $\langle a\Phi(G) \rangle \times \langle b\Phi(G) \rangle$  нетривиально пересекается с центром любой силовской 3-подгруппы группы  $D/\Phi(G)$ , то  $F\Phi(G)/\Phi(G)$  не содержится в центре никакой силовской 3-подгруппы группы  $D/\Phi(G)$ . Отсюда, с одной стороны,  $|C_{G/\Phi(G)}(F\Phi(G)/\Phi(G))| = 9$ . С другой стороны, подгруппа  $F\Phi(G)/\Phi(G)$  содержится в подгруппе  $H/\Phi(G) \cong GL_2(3)$ , имеющей центр порядка 2. Пришли к противоречию.

4.2. Пусть  $F\Phi(G)/\Phi(G)$  содержится в центре подгруппы  $R/\Phi(G)$ . Тогда

$$C_{D/\Phi(G)}(\langle a\Phi(G) \rangle \times \langle b\Phi(G) \rangle)$$

содержит силовскую 3-подгруппу  $R/\Phi(G)$ . А так как  $|C_{G/\Phi(G)}(\langle a\Phi(G) \rangle)| = 54$ , то подгруппа  $R/\Phi(G)$  нормальна в  $D/\Phi(G)$ . Снова пришли к противоречию.

5.  $G/\Phi(G) \cong Sz(2^p)$ , где  $p$  — простое нечетное число.

Предположим сначала, что  $|F| = 2$ . Как следует из [16], группа  $G/\Phi(G)$  содержит максимальную подгруппу  $M_1/\Phi(G)$ , являющуюся группой Фробениуса порядка  $q^2(q-1)$ , где  $q = 2^p$ . Пусть

$$M_1/\Phi(G) = (R/\Phi(G)) : (S/\Phi(G)),$$

где  $R/\Phi(G)$  — ядро группы Фробениуса  $M_1/\Phi(G)$ , а  $S/\Phi(G)$  — ее циклическое дополнение. Если  $R_1$  — силовская 2-подгруппа группы  $G$ , то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$F \subseteq R_1 \subseteq R_1\Phi(G) = R \subseteq M_1.$$

Таким образом,  $F$  — наследственно изоордно перестановочная подгруппа в  $M_1$ . Так как все холловы  $2'$ -подгруппы из  $M_1$  сопряжены в  $M_1$ , то по определению в  $M_1$  найдется элемент  $y$  такой, что  $F^y S_1 = S_1 F^y$  и  $S_1\Phi(G) = S$ , где  $S_1$  — некоторая холлова  $2'$ -подгруппа из  $M_1$ . Значит, в  $M_1/\Phi(G)$  существует подгруппа

$$L/\Phi(G) = (F^y\Phi(G)/\Phi(G)) : (S/\Phi(G)).$$

Так как  $|L : S| = 2$ , то

$$L/\Phi(G) = (F^y\Phi(G)/\Phi(G)) \times (S/\Phi(G))$$

и  $C_{R/\Phi(G)}(S/\Phi(G)) \neq 1$ . Отсюда следует, что  $M_1/\Phi(G)$  не является группой Фробениуса. Пришли к противоречию.

Кроме отмеченной группы Фробениуса  $M_1$  порядка  $q^2(q-1)$  группа  $G/\Phi(G)$  содержит максимальную подгруппу  $M_2/\Phi(G)$ , являющуюся группой Фробениуса порядка  $4(q + \sqrt{2q} + 1)$ ,

максимальную подгруппу  $M_3/\Phi(G)$ , являющуюся группой Фробениуса порядка  $4(q - \sqrt{2q} + 1)$ , а также максимальную подгруппу  $M_4/\Phi(G)$ , являющуюся диэдральной группой порядка  $2(q - 1)$ . При этом

$$|G/\Phi(G)| = q^2(q - 1)(q^2 + 1)$$

и числа  $q - 1$ ,  $q - \sqrt{2q} + 1$  и  $q + \sqrt{2q} + 1$  — попарно взаимно простые.

Предположим, что  $r \in \pi(q - 1)$ . Тогда из изоордной перестановочности подгруппы  $F$  следует, что  $G/\Phi(G)$  содержит подгруппу порядка  $r(q - \sqrt{2q} + 1)$ ; это невозможно. Случаи, когда  $r \in \pi(q - \sqrt{2q} + 1)$  или  $r \in \pi(q + \sqrt{2q} + 1)$ , рассматриваются аналогично.

Лемма доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Минимальная простая группа может содержать нетривиальные наследственно изоордно перестановочные подгруппы, имеющие составной порядок. Например, в группе  $PSL_2(7)$  любая максимальная подгруппа порядка 24 является наследственно изоордно перестановочной.

При доказательстве теоремы 1 мы будем опираться на следующий хорошо известный факт.

**Лемма 2.** Пусть  $p$  и  $q$  — простые числа,  $m$  и  $n$  — натуральные числа, причем  $p^m = q^n + 1$ . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1)  $q = 2$ ,  $p = 3$ ,  $n = 3$  и  $m = 2$ ;
- 2)  $q = 2$ ,  $m = 1$ ,  $n$  является степенью числа 2, а  $p = q^n + 1$  — простое число Ферма;
- 3)  $p = 2$ ,  $n = 1$  и  $q = p^m - 1$  — простое число Мерсенна, в частности  $m$  является простым числом.

В виде лемм приведем наиболее важные свойства минимальных несверхразрешимых групп.

**Лемма 3.** Пусть  $G$  — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1)  $G$  разрешима и  $|\pi(G)| \leq 3$ ;
- 2)  $G^{\mathfrak{M}}$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  для некоторого простого  $p$ .

Доказательство вытекает из леммы С и теоремы 1 работы [17].

**Лемма 4.** Пусть  $G$  — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда

- 1)  $G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  — главный фактор группы  $G$ ;
- 2)  $|G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})| = p^n$ , где  $n > 1$ ;
- 3)  $\Phi(G^{\mathfrak{M}}) = G^{\mathfrak{M}} \cap \Phi(G)$ ;
- 4) если группа  $G^{\mathfrak{M}}$  неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту  $p$ ;
- 5) если группа  $G^{\mathfrak{M}}$  абелева, то она элементарна;
- 6) если  $p > 2$ , то группа  $G^{\mathfrak{M}}$  имеет экспоненту  $p$ ; при  $p = 2$  экспонента  $G^{\mathfrak{M}}$  не превышает 4.

Доказательство вытекает из леммы 5.9 и теоремы 24.2 книги [18].

### 3. Доказательство теоремы 1

Пусть  $G$  — минимальный контрпример к теореме 1. Тогда, очевидно,  $G$  — минимальная неразрешимая группа. Кроме того, из леммы 1 следует, что группа  $G$  не является простой неабелевой группой. Поэтому  $\Phi(G) \neq 1$  и  $G/\Phi(G)$  — минимальная простая группа.

Предположим, что  $r \in \pi(G)$  и  $r \notin \pi(\Phi(G))$ . Тогда по лемме 1 подгруппа  $R$  порядка  $r$  содержится в  $\Phi(G)$ , что противоречит предположению. Значит,  $\pi(G) = \pi(\Phi(G))$ .

Проанализируем далее все возможные случаи из списка Томпсона.

**С л у ч а й 1.** Пусть  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$ , где  $q = 2^p$  и  $p$  — простое число.

Отметим, что в группе  $PSL_2(q)$  силовская 2-подгруппа  $U$  содержится в единственной максимальной подгруппе  $B \cong q : (q - 1)$ . Кроме того,  $PSL_2(q)$  содержит циклическую подгруппу  $T \cong q + 1$ . При этом числа  $q$ ,  $q - 1$ ,  $q + 1$  являются попарно взаимно простыми. Согласно лемме 2 равенство  $2^p + 1 = 3^m$  справедливо только в случае  $p = 3$  и  $m = 2$  для группы  $PSL_2(2^3)$ . В оставшихся случаях имеется простой делитель  $s$  числа  $q + 1$ , отличный от 3. Пусть  $S \in Syl_s(PSL_2(q))$ . В силу изложенного имеем  $\langle U, S \rangle = PSL_2(q)$ .

Пусть сначала  $p \neq 3$ . Пусть  $r = 3$ . Рассмотрим элемент  $x \in \Phi(G)$  такой, что  $|x| = 3$ . Так как подгруппа  $\langle x \rangle$  является наследственно изоордно перестановочной в  $G$ , то для некоторых  $U \in Syl_2(G)$  и  $S \in Syl_s(G)$ , где  $s \in \pi(q + 1) \setminus \{3\}$ , существуют подгруппы  $\langle x \rangle S$  и  $\langle x \rangle U$ . Поскольку подгруппа  $\Phi(G)$  нильпотентна, то подгруппа  $R \in Syl_3(\Phi(G))$  нормальна в  $G$ . Отсюда следует, что

$$\langle x \rangle S \cap R = \langle x \rangle U \cap R = \langle x \rangle .$$

Поэтому  $\langle x \rangle S = \langle x \rangle : S$  и  $\langle x \rangle U = \langle x \rangle : U$ . Если  $\langle S, U \rangle \subset G$ , то  $\langle S, U \rangle$  является разрешимой группой. Тогда группа  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$  содержит собственную разрешимую подгруппу

$$\langle U\Phi(G)/\Phi(G), S\Phi(G)/\Phi(G) \rangle ,$$

где  $U\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_2(G/\Phi(G))$  и  $S\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_s(G/\Phi(G))$ . Последнее невозможно согласно замечаниям о строении группы  $PSL_2(q)$ .

Таким образом,  $\langle S, U \rangle = G$  и подгруппа  $\langle x \rangle$  нормальна в  $G$ . Следовательно, для любого элемента  $z \in G$  порядка 3 подгруппа  $\langle z \rangle$  нормальна в  $G$ . Ясно, что  $\langle z \rangle \in Z(R)$ . Поэтому  $\Phi(G) \subset C_G(\langle z \rangle)$ . Так как подгруппа  $C_G(\langle z \rangle)$  является нормальной в  $G$ , то  $C_G(\langle z \rangle) = G$  и  $z \in Z(G)$ . Поскольку  $z$  — произвольный элемент порядка 3, то все элементы группы  $G$ , имеющие порядок 3, содержатся в  $Z(G)$ . Согласно [11, теорема IV.5.5] группа  $G$  является 3-нильпотентной, что невозможно.

Пусть  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(8)$ .

В группе  $PSL_2(8)$  порядка  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$  силовская 2-подгруппа  $S$  и силовская 3-подгруппа  $T$  порождают  $PSL_2(8)$ . Положим  $r = 7$  и точно так же, как и выше, придем к противоречию.

Все оставшиеся случаи рассматриваются по аналогии со случаем 1, поэтому мы укажем только две силовские подгруппы группы  $G$ , которые ее порождают, а также соответствующее нечетное  $r \in \pi(G)$ .

**С л у ч а й 2.** Пусть  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$ , где  $q = 3^p$  и  $p$  — простое число, большее 3.

Группа  $PSL_2(q)$  содержит силовскую 3-подгруппу  $U$ , которая содержится в единственной максимальной подгруппе  $B \cong q : ((q - 1)/2)$ . Так как подгруппа  $(q - 1)/2$  является циклической, то она не содержит силовскую 2-подгруппу  $S$  группы  $G$ . Поэтому  $\langle U, S \rangle = PSL_2(q)$ . Следовательно, в группе  $G$  силовская 2-подгруппа и силовская 3-подгруппа порождают  $G$ . Теперь в качестве  $r$  достаточно взять любое число из  $\pi(G) \setminus \{2, 3\}$ .

**С л у ч а й 3.** Пусть  $G/\Phi(G) \cong PSL_2(p)$ , где  $p$  — простое число, большее 5, и  $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ .

Так же как и в случае 2, показывается, что  $U \in Syl_p(G)$  и  $S \in Syl_2(G)$  порождают  $G$ . В качестве  $r$  достаточно взять любое число из  $\pi(G) \setminus \{2, p\}$ .

**С л у ч а й 4.** Пусть  $G/\Phi(G) \cong PSL_3(3)$ .

Из [15, с. 13] следует, что  $U \in Syl_2(G)$  и  $S \in Syl_7(G)$  порождают  $G$ . В этом случае  $r = 3$ .

**С л у ч а й 5.** Пусть  $G/\Phi(G) \cong Sz(q)$ , где  $q = 2^p$  и  $p$  — простое нечетное число.

Пусть  $U \in Syl_2(Sz(q))$ . Число 5 делит  $q^2 + 1$  и в группе  $Sz(q)$  имеются два максимальных тора  $T_1$  и  $T_2$  взаимно простых порядков  $q + \sqrt{2q} + 1$  и  $q - \sqrt{2q} + 1$  соответственно. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что  $(|T_1|, 5) = 1$ . Пусть  $s \in \pi(T_1)$  и  $S \in Syl_s(Sz(q))$ . Тогда, как следует из [16],  $\langle S, U \rangle = Sz(q)$ . Поэтому в группе  $G$  силовская 2-подгруппа и силовская  $s$ -подгруппа порождают  $G$ . В качестве  $r$  следует взять число 5.

Теорема доказана.

## 4. Доказательство теоремы 2

Пусть  $G$  — группа наименьшего порядка, для которой теорема не верна, и пусть  $M$  — ее произвольная максимальная подгруппа. Тогда из  $|M| < |G|$  и выбора группы  $G$  следует, что  $M$  — сверхразрешимая группа. Так как группа  $G$  не является сверхразрешимой, то  $G$  — минимальная несверхразрешимая группа.

Ввиду леммы 3 сверхразрешимый корадикал  $G^{\mathfrak{M}}$  группы  $G$  является силовой  $p$ -подгруппой в  $G$ . При этом по лемме 4  $G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  — главный фактор группы  $G$ ,  $\Phi(G^{\mathfrak{M}}) = G^{\mathfrak{M}} \cap \Phi(G)$  и  $|G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})| = p^n$ , где  $n > 1$ . Кроме того, из условия теоремы следует, что если  $p > 2$ , то группа  $G^{\mathfrak{M}}$  имеет экспоненту  $p$ , а если  $p = 2$ , то группа  $G^{\mathfrak{M}}$  имеет экспоненту, не превышающую 4. Отсюда, в частности, получаем, что найдется по крайней мере один элемент  $x \in G^{\mathfrak{M}}$ , который не лежит в  $\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  и имеет простой порядок  $p$  или порядок 4.

Пусть  $M/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  — максимальная подгруппа группы  $G/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$ , не содержащая  $G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$ . Так как группа  $G/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  разрешима и  $G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  — ее минимальная нормальная подгруппа, то из максимальной  $M/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  в  $G/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  следует, что

$$G/\Phi(G^{\mathfrak{M}}) = (M/\Phi(G^{\mathfrak{M}}))(G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})) \quad \text{и} \quad (M/\Phi(G^{\mathfrak{M}})) \cap (G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})) = 1.$$

Отсюда, в частности,  $M/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  — холлова  $p'$ -подгруппа группы  $G/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$ , а значит,  $M = H\Phi(G^{\mathfrak{M}})$ , где  $H$  — холлова  $p'$ -подгруппа группы  $G$ .

Поскольку подгруппа  $\langle x \rangle$  является изоордно перестановочной в  $G$ , то в  $G$  существует подгруппа  $D$  такая, что  $|D| = |M|$  и  $\langle x \rangle D = D \langle x \rangle$ . Из  $|D| = |M|$  следует, что  $|D|$  делится на  $|H|$ . Теперь из разрешимости группы  $G$  по теореме Холла  $H^y \subseteq D$  для некоторого  $y \in G$ . Если  $S$  — максимальная подгруппа группы  $G$ , содержащая  $D$ , то из  $\Phi(G^{\mathfrak{M}}) = G^{\mathfrak{M}} \cap \Phi(G)$  следует, что  $S = H^y\Phi(G^{\mathfrak{M}})$ . Таким образом,  $|S| = |M|$ . А поскольку  $|D| = |M|$  и  $D \subseteq S$ , то  $D = S$ , т. е.  $D$  — максимальная подгруппа группы  $G$ , изолирующая главный фактор  $G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  группы  $G$ . Поэтому

$$(D/\Phi(G^{\mathfrak{M}})) \cap (G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})) = 1.$$

Следовательно,  $|G : D| = p^n$ , где  $n > 1$ .

С другой стороны,

$$\langle x \rangle \Phi(G^{\mathfrak{M}})/\Phi(G^{\mathfrak{M}}) \subseteq G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$$

и  $\langle x \rangle \Phi(G^{\mathfrak{M}})/\Phi(G^{\mathfrak{M}}) \neq 1$ . Отсюда и из максимальнойности  $D$  в  $G$  следует, что  $D \langle x \rangle = G$ . Значит, если  $p > 2$ , то из  $|x| = p$  имеем  $|G : D| = p$ , что невозможно. Если  $p = 2$ , то при  $|x| = 4$  из  $\langle x \rangle \Phi(G^{\mathfrak{M}})/\Phi(G^{\mathfrak{M}}) \subseteq G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  и элементарной абелевости группы  $G^{\mathfrak{M}}/\Phi(G^{\mathfrak{M}})$  имеем  $|G : D| = 2$ . Снова приходим к противоречию, которое завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. <https://doi.org/10.1515/9783110870138>
2. **Ore O.** Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. Vol. 5. P. 431–460. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-39-00537-5>
3. **Itô N., Szép J.** Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. Vol. 23, no. 1–2. P. 168–170.
4. **Maier R., Schmid P.** The embedding of quasinormal subgroups in finite groups // Math. Z. 1973. Vol. 131, no. 3. P. 269–272. <https://doi.org/10.1007/BF01187244>
5. **Kegel O.H.** Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Vol. 78, no. 1. P. 205–221. <https://doi.org/10.1007/BF01195169>
6. **Deskins W.E.** On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. Vol. 82, no. 2. P. 125–132. <https://doi.org/10.1007/BF01111801>
7. **Maier R.** Zur Vertauschbarkeit und Subnormalität von Untergruppen // Arch. Math. 1989. Vol. 53, no. 2. P. 110–120.

8. **Su H.** Semi-normal subgroups of finite groups // *Math. Mag.* 1988. Vol. 8, no. 1. P. 7–9.
9. **Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.** Products of finite groups. Berlin; NY: Walter De Gruyter, 2010. Ser. De Gruyter Expos. Math., vol. 53. <https://doi.org/10.1515/9783110220612>
10. **Го В., Скиба А.Н., Шам К.П.** X-перестановочные подгруппы // *Сиб. мат. журн.* 2007. Vol. 48, no. 4. P. 741–759.
11. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1967. 793 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-64981-3>
12. **Buckley J.** Finite groups whose minimal subgroups are normal // *Math. Z.* 1970. Vol. 116, no. 1. P. 15–17. <https://doi.org/10.1007/BF01110184>
13. **Kamornikov S.F., Tyutyaynov V.N.** Finite groups with hereditarily  $G$ -permutable minimal subgroups // *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)* 2023. Vol. 321, Suppl. 1. P. 101–108. <https://doi.org/10.1134/S0081543823060093>
14. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1968. Vol. 74, no. 3. P. 383–437. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1968-11953-6>
15. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985. 252 p. <https://doi.org/10.1017/S001309150002839X>
16. **Suzuki M.** On a class double transitive groups // *Ann. Math.* 1962. Vol. 75, No 1. P. 105–145. <https://doi.org/10.2307/1970423>
17. **Doerk K.** Minimal nichtüberauflösbare endliche Gruppen // *Math. Z.* 1966. Vol. 91, no. 3. P. 198–205. <https://doi.org/10.1007/BF01312426>
18. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. Москва: Наука, 1978. 271 с.

Поступила 23.08.2024

После доработки 8.10.2024

Принята к публикации 14.10.2024

Опубликовано онлайн 1.11. 2024

Йи Сяолан (Yi Xiaolan)

Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China

e-mail: yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович

д-р физ.-мат. наук, профессор

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”, Гомель, Беларусь

e-mail: vtutanov@gmail.com

## REFERENCES

1. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, NY, Walter de Gruyter, 1992, 891 p. <https://doi.org/10.1515/9783110870138>
2. Ore O. Contributions in the theory of groups of finite order. *Duke Math. J.*, 1939, vol. 5, pp. 431–460. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-39-00537-5>
3. Itô N., Szép J. Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen. *Act. Sci. Math.*, 1962, vol. 23, no. 1–2, pp. 168–170.
4. Maier R., Schmid P. The embedding of quasinormal subgroups in finite groups. *Math. Z.*, 1973, vol. 131, no. 3, pp. 269–272. <https://doi.org/10.1007/BF01187244>
5. Kegel O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen. *Math. Z.*, 1962, vol. 78, pp. 205–221. <https://doi.org/10.1007/BF01195169>
6. Deskins W.E. On quasinormal subgroups of finite groups. *Math. Z.*, 1963, vol. 82, no. 2, pp. 125–132. <https://doi.org/10.1007/BF01111801>
7. Maier R. Zur Vertauschbarkeit und Subnormalität von Untergruppen. *Arch. Math.*, 1989, vol. 53, no. 2, pp. 110–120.

8. Su H. Semi-normal subgroups of finite groups. *Math. Mag.*, 1988, vol. 8, no. 1, pp. 7–9.
9. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of finite groups*. Ser. De Gruyter Expos. Math., vol. 53, Berlin, NY, Walter De Gruyter, 2010, <https://doi.org/10.1515/9783110220612>
10. Guo W., Skiba A.N., Sham K.P. X-quasinormal subgroups. *Sib. Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 4, pp. 593–605.  
<https://doi.org/10.1007/s11202-007-0061-x>
11. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin, Springer-Verl., 1967, 793 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-64981-3>
12. Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal. *Math. Z.*, 1970, vol. 116, no. 1, pp. 15–17.  
<https://doi.org/10.1007/BF01110184>
13. Kamornikov S.F., Tyutyaynov V.N. Finite groups with hereditarily  $G$ -permutable minimal subgroups. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 321, Suppl. 1. P. 101–108.  
<https://doi.org/10.1134/S0081543823060093>
14. Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 74, no. 3, pp. 383–437. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1968-11953-6>
15. Conway J.N., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985, 252 p. <https://doi.org/10.1017/S001309150002839X>
16. Suzuki M. On a class double transitive groups. *Ann. Math.*, 1962, vol. 75, no 1, pp. 105–145.  
<https://doi.org/10.2307/1970423>
17. Doerk K. Minimal nichtüberauflösbare endliche Gruppen. *Math. Z.*, 1966, vol. 91, no. 3, pp. 198–205.  
<https://doi.org/10.1007/BF01312426>
18. Shemetkov L.A. Formatsii konechnykh grupp [Formations of finite groups]. Moskow, Nauka Publ., 1978, 271 p.

Received August 23, 2024

Revised October 8, 2024

Accepted October 14, 2024

Published online November 1, 2024

**Funding Agency:** The research of the second and third authors was supported by the Russian Science Foundation and by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no.  $\Phi 23PH\Phi-237$ ).

*Xiaolan Yi*, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China, e-mail: yixiaolan2005@126.com.

*Sergei Fedorovich Kamornikov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., F. Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Republic of Belarus, e-mail: sfkamornikov@mail.ru.

*Valentin Nikolayevich Tyutyaynov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gomel Branch of International University “MITSO”, Gomel, 246029 Republic of Belarus, e-mail: vtutanov@gmail.com.

Cite this article as: X. Yi, S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyaynov. Isoorderly permutable subgroups of finite groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 66–76.