ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 1 2025

УДК 512.558

ДИСТРИБУТИВНЫЕ РЕШЕТКИ С РАЗЛИЧНЫМИ АННУЛЯТОРНЫМИ СВОЙСТВАМИ[1]

Е. М. Вечтомов

Изучаются дистрибутивные решетки с аннуляторными свойствами. Получены абстрактные характеризации таких решеток. В частности, доказаны новые теоремы характеризации обобщенных булевых решеток и булевых решеток, обобщенных стоуновых решеток и стоуновых решеток. Доказано, что точечные дистрибутивные решетки изоморфны точечным решеткам множеств. Приведены примеры. Указаны обобщения полученных результатов на один класс коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец.

Ключевые слова: дистрибутивная решетка, идеал, аннулятор, аннуляторные свойства, булева решетка, стоунова решетка, точечная решетка, полукольцо.

E. M. Vechtomov. Distributive lattices with different annihilator properties.

Distributive lattices with annihilator properties are studied. Abstract characterizations of such lattices are obtained. In particular, new characterization theorems are proved for generalized Boolean lattices and Boolean lattices, as well as for generalized Stone lattices and Stone lattices. It is proved that point distributive lattices are isomorphic to point lattices of sets. Examples are given. Generalizations of the obtained results to one class of commutative multiplicatively idempotent semirings are presented.

Keywords: distributive lattice, ideal, annihilator, annihilator properties, Boolean lattice, Stone lattice, point lattice, semiring.

MSC: 06D05, 08A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-01

Введение

Статья посвящена теории дистрибутивных решеток. Исследуются дистрибутивные решетки с нулем, обладающие различными аннуляторными свойствами. Введено понятие решетки с аннуляторами. Осуществлен анализ взаимосвязей рассматриваемых в работе классов дистрибутивных решеток, приведены соответствующие примеры. Доказаны новые теоремы характеризации обобщенных стоуновых решеток, стоуновых решеток, обобщенных булевых решеток, булевых решеток, конечных булевых решеток. В частности, показано, что любая неодноэлементная конечная дистрибутивная решетка с аннуляторами является булевой решеткой. Установлено, что эти результаты переносятся на коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца с тождеством $x + 2xy = x$. Доказано, что дистрибутивные точечные решетки изоморфны точечным решеткам множеств.

Дистрибутивные решетки с аннуляторным условием рассматривались в работах [1; 2]. Мы пользуемся известными теоретико-решеточными понятиями и фактами, которые можно найти в трудах [3–7]. Классическая монография Биркгофа [3] затрагивает основы теории решеток и ее приложения. Отметим, что в отдельных главах книг [4; 7] исследуются дистрибутивные решетки, а книга Сикорского [6] целиком посвящена булевым решеткам (булевым алгебрам). Переработанное и расширенное издание [8] книги Гретцера [4] может служить справочником по теории решеток.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта «Полукольца и полумодули с условиями идемпотентности» (проект №24-21-00117).

1. Предварительные сведения

Напомним некоторые исходные понятия теории решеток.

Решеткой называется универсальная алгебра $\langle L, +, \cdot \rangle$ с двумя идемпотентными коммутативно-ассоциативными бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, связанными тождествами поглощения $x(x+y) = x$ и $x + xy = x$. Это алгебраическое определение решеток. При порядковом подходе под *решеткой* понимается упорядоченное множество $\langle L, \leq \rangle$, для любых двух элементов a, b которого существуют точная верхняя грань $\sup\{a, b\}$ и точная нижняя грань $\inf\{a, b\}$. Эти два определения решеток эквивалентны. Если решетка определена как алгебра с операциями сложения и умножения, то отношение порядка $\leq$ на ней задается правилом: $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a + b = b$, или, равносильно, $ab = a$. Обратно, если решетка определяется как упорядоченное множество с отношением порядка $\leq$, то операции сложения и умножения в ней можно задать правилами $a + b = \sup\{a, b\}$ и $ab = \inf\{a, b\}$.

Решетку L удобно рассматривать как "упорядоченную решетку" — алгебраическую систему $\langle L, +, \cdot, \leq \rangle$, удовлетворяющую обоим определениям решетки с указанными связями, при этом неравенства в L можно почленно складывать и умножать: $a \leq b$ и $c \leq d$ влекут $a + c \leq b + d$ и $ac \leq bd$ для любых элементов $a, b, c, d \in L$.

Решетка с тождеством $x(y + z) = xy + xz$ и, равносильно, с двойственным тождеством $x + yz = (x + y)(x + z)$ называется *дистрибутивной.*

Для элемента o решетки L эквивалентны следующие условия:

o — нейтральный по сложению, т. е. $o + a = a$ для всех $a \in L$;

o — поглощающий по умножению, т. е. $oa = o$ для всех $a \in L$;

o — наименьший элемент, т. е. $o \leq a$ для всех $a \in L$.

Для элемента e решетки L эквивалентны условия:

e — нейтральный по умножению, т. е. $ea = a$ для всех $a \in L$;

e — поглощающий по сложению, т. е. $e + a = e$ для всех $a \in L$;

e — наибольший элемент, т. е. $a \leq e$ для всех $a \in L$.

Если решетка L обладает элементом o (e) с отмеченными свойствами, то элемент o (соответственно e) единственен, называется *нулем* (*единицей*) решетки L и обозначается 0 (соответственно 1), а сама решетка L называется *решеткой с нулем* (*решеткой с единицей*). Решетка с 0 и с 1 называется *ограниченной.*

Непустое подмножество решетки L, замкнутое относительно операций сложения и умножения в L, называется ее *подрешеткой.* Подрешетка I решетки L называется *идеалом*, если $aL = \{ax : x \in L\} \subseteq I$ для всех $a \in I$. При $a \in L$ множество aL будет идеалом решетки L, называемым *главным идеалам*, порожденным элементом a. Ясно, что $aL = \{x \in L : x \leq a\}$.

Пусть L — решетка с нулем 0. Минимальные элементы среди ненулевых элементов решетки L называются ее *атомами.* Таким образом, ненулевой элемент a решетки L будет атомом тогда и только тогда, когда $aL = \{0, a\}$ и, равносильно, $ax = 0$ или $ax = a$ для любого $x \in L$.

Для любых идеалов I и J решетки L множество $IJ = \{ab : a \in I, b \in J\} = I \cap J$ есть идеал, и если решетка L дистрибутивна, то $I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ также будет идеалом в L, причем $aL + bL = (a + b)L$ при любых $a, b \in L$. Сумма $I + J$ идеалов I и J дистрибутивной решетки L называется *прямой суммой* и обозначается через $I \oplus J$, если для любых элементов $a, u \in I$ и $b, v \in J$ равенство $a + b = u + v$ влечет равенства $a = u$ и $b = v$. Скажем, что идеал I решетки L *выделяется прямым слагаемым*, если $I \oplus J = L$ для некоторого идеала J в L.

Отношение эквивалентности ρ на решетке L называется *конгруэнцией* на L, если $a \,\rho\, b$ и $c \,\rho\, d$ влекут $(a + c) \,\rho\, (b + d)$ и $(ac) \,\rho\, (bd)$ для любых $a, b, c, d \in L$ (можно считать $c = d$). Классы $a/\rho = \{x \in L : x \,\rho\, a\}$ конгруэнции ρ образуют фактор-решетку L/ρ при (корректно) заданных операциях $a/\rho + b/\rho = (a + b)/\rho$ и $(a/\rho)(b/\rho) = (ab)/\rho$. Множество $\operatorname{Con} L$ всех конгруэнций на произвольной решетке L относительно отношения включения $\subseteq$ конгруэнций (как множеств пар) является ограниченной дистрибутивной решеткой [4, с. 110, теорема 11].

Также напомним, что прямым произведением семейства $(L_x)_{x\in X}$ решеток L_x, индексированных элементами x непустого индексного множества X, называется множество $\prod L_x$ всех отображений $f : X \to \bigcup L_x$, таких что $f(x) \in L_x$ для любого индекса $x \in X$. Элементы $f \in \prod L_x$ можно мыслить как "строки" $(a_x) = (a_x)_{x\in X}$. Определяя сумму и произведение строк (a_x) и (b_x) покоординатно $(a_x) + (b_x) = (a_x + b_x)$ и $(a_x)(b_x) = (a_x b_x)$, получим решетку, называемую *прямым произведением* семейства $(L_x)_{x\in X}$ решеток L_x.

Класс всевозможных дистрибутивных решеток образует многообразие, т. е. замкнут относительно взятия подрешеток, фактор-решеток (гомоморфных образов) и прямых произведений.

Рассмотрим произвольную дистрибутивную решетку L и ее идеалы I и J. Предположим, что они образуют прямую сумму $I \oplus J$. Возьмем элементы a, b из идеала $I \cap J$. Имеем $a = a+a = a+ab$, откуда $a = ab$. Аналогично $b = ab$. Значит, идеал $I\cap J$ одноэлементный и, скажем, $I \cap J = \{c\}$ для подходящего элемента $c \in L$. Тогда $cL = \{c\}$, т. е. $c = cx$ для всех $x \in L$. Такой элемент c является нулем 0 решетки L. Предположим далее, что $I \cap J = \{0\}$ и $a + b = u + v$ для некоторых a, $u \in I$ и b, $v \in L$. Тогда $a = a(a + b) = a(u + v) = au = (a + b)u = (u + v)u = u$. Аналогично $b = v$. Следовательно, $I + J = I \oplus J$. В частности, главные идеалы aL и bL образуют прямую сумму тогда и только тогда, когда $ab = 0$.

Сформулируем сказанное в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть L — дистрибутивная решетка, I и J — ее идеалы и $a, b \in L$. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) $I + J = I \oplus J \Leftrightarrow L$ *— решетка с нулем* 0 *и* $I \cap J = \{0\}$;
2) $aL + bL = aL \oplus bL \Leftrightarrow L$ *— решетка с нулем* 0 *и* $ab = 0$.

Возьмем решетку L с нулем 0. Множество $\operatorname{Ann} a = \{x \in L : xa = 0\}$, $a \in L$, называется *аннулятором элемента* a. Если A — непустое подмножество в L, то множество $\operatorname{Ann} A = \{x \in L : xa = 0$ для всех $a \in A\} = \bigcap_{a\in A} \operatorname{Ann} a$ называется *аннулятором множества* A. Заметим, что $\operatorname{Ann} a$ будет идеалом решетки L для всех $a \in L$ тогда и только тогда, когда L 0-*дистрибутивна*, т. е. равенства $ab = 0$ и $ac = 0$ влекут равенство $a(b + c) = 0$ при любых $a, b, c \in L$. Идеалы вида $\operatorname{Ann} A$ называются *аннуляторными*. Если $a \in L$ и $\operatorname{Ann} a$ имеет наибольший элемент, то этот элемент называется *псевдодополнением элемента* a и обозначается как a^*, при этом $\operatorname{Ann} a = a^*L$. Если каждый элемент решетки L имеет псевдодополнение, то L называется *решеткой с псевдодополнениями*. Конечные 0-дистрибутивные решетки являются решетками с псевдодополнениями.

Дистрибутивная решетка L с псевдодополнениями и с единицей 1 называется *стоуновой*, если $a^* + a^{**} = 1$ для всех $a \in L$.

Неодноэлементная ограниченная дистрибутивная решетка L называется *булевой*, если каждый ее элемент a имеет *дополнение*, т. е. такой элемент $b \in L$, что $a+b = 1$ и $ab = 0$; дополнение элемента a единственно и обозначается как a'.

Решетку L с нулем 0 назовем *решеткой с аннуляторами*, если каждый ее неединичный элемент a имеет ненулевой аннулятор, т. е. $ab = 0$ для некоторого ненулевого элемента $b \in L$.

Ясно, что булевы решетки стоуновы (в них $a^* = a'$) и являются решетками с аннуляторами.

Пусть L — дистрибутивная решетка с нулем 0 и $\operatorname{Id} L$ — множество всех ее идеалов. Относительно отношения включения $\subseteq$ множество $\operatorname{Id} L$ является дистрибутивной решеткой с нулем $\{0\}$ и с единицей L [6, с. 141]. Для любых I, $J \in \operatorname{Id} L$ справедливо $I + J = \sup\{I, J\}$ и $I \cap J = \inf\{I, J\}$. Если идеал I выделяется прямым слагаемым в L: $I \oplus J = L$ для некоторого идеала J в L, то идеал I называется *дополняемым*, а идеал J — его *дополнением*. В дистрибутивной решетке $\operatorname{Id} L$ дополнение дополняемого идеала единственно.

Дистрибутивную решетку L с нулем 0 будем называть:

решеткой с аннуляторным условием, если различные элементы решетки L имеют различные аннуляторы, т. е. для любых a, $b \in L$ $\operatorname{Ann} a = \operatorname{Ann} b \Rightarrow a = b$;

обобщенной булевой решеткой, если для всякого ненулевого элемента $a \in L$ главный идеал aL является булевой решеткой;

обобщенной стоуновой решеткой, если для любого $a \in L$ $\mathrm{Ann}\, a + \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, a) = L$;

слабо риккартовой, если для любых $a, b \in L$ $ab = 0 \Rightarrow \mathrm{Ann}\, a + \mathrm{Ann}\, b = L$.

Булевы решетки и стоуновы решетки — это соответственно обобщенные булевы решетки и обобщенные стоуновы решетки. Обобщенные булевы решетки, имеющие ненулевую единицу, булевы.

Кольцо (ассоциативное) с тождеством $xx = x$ называется *булевым кольцом*. Отметим, что кольца с аннуляторным условием суть в точности булевы кольца [2, теорема 1].

З а м е ч а н и е 1. Обобщенные булевы решетки введены М. Стоуном [9, p. 48] как дистрибутивные решетки с нулем, обладающие относительными дополнениями (см. также [4, с. 108]). *Относительным дополнением* элемента b до элемента a в решетке L с нулем 0 называется элемент $a \setminus b \in L$, для которого $(a \setminus b)b = 0$ и $(a \setminus b) + b = a + b$. В дистрибутивных решетках с нулем относительные дополнения единственны (если существуют). Ясно, что приведенное нами определение обобщенной булевой решетки равносильно определению Стоуна. Обобщенные булевы решетки находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с булевыми кольцами [9, Theorems 3, 4; 4, с. 109, теорема 9]. А именно, пусть $\langle L, +, \cdot \rangle$ — обобщенная булева решетка, тогда $\langle L, \oplus, \cdot \rangle$ будет булевым кольцом, если положить $a \oplus b = (a \setminus b) + (b \setminus a)$ для всех $a, b \in L$. Обратно, если $\langle L, \oplus, \cdot \rangle$ — булево кольцо, то $\langle L, +, \cdot \rangle$ является обобщенной булевой решеткой при $a + b = a \oplus ab \oplus b$ для любых $a, b \in L$. При этом булевым решеткам соответствуют булевы кольца с ненулевой единицей.

П р и м е р 1. Дистрибутивными решетками служат линейно упорядоченные множества (*цепи*) и их прямые произведения. Любая ограниченная цепь L с $1 \neq 0$ есть стоунова решетка, поскольку для любого элемента $a \in L$ его псевдодополнение a^* равно 0 или 1. Прямые произведения ограниченных цепей (цепей с нулем) также будут стоуновыми решетками (обобщенными стоуновыми решетками). Если прямое произведение цепей с нулем является стоуновой решеткой, то все цепи-сомножители — ограниченные решетки.

П р и м е р 2. Рассмотрим прямую сумму $S = \oplus L_x$ семейства цепей L_x, индексированных элементами x некоторого бесконечного множества X, каждая из которых имеет свой нуль 0 и не менее трех элементов. Элементы $f \in S$ представляют собой отображения $I \to \bigcup L_x$, такие, что $f(x) \in L_x$ для всех $x \in X$ и $f(x) = 0$ для почти всех $x \in X$, кроме конечного числа индексов x. Решетка S будет идеалом прямого произведения $T = \prod L_x$ данного семейства цепей $(L_x)_{x \in X}$, являющегося дистрибутивной решеткой с нулем $f \equiv 0$. Множество $\mathrm{supp}\, f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ называется *носителем функции* $f \in T$. Тем самым решетка S состоит из всех тех функций из T, которые имеют конечный носитель. Легко видеть, что решетка S — это решетка с аннуляторами, но решетки S и T не удовлетворяют аннуляторному условию, поскольку $\mathrm{Ann}\, f = \mathrm{Ann}\, g \Leftrightarrow \mathrm{supp}\, f = \mathrm{supp}\, g$ для любых $f, g \in T$. Решетка T не является решеткой с аннуляторами.

Лемма 2. *Любая обобщенная булева решетка удовлетворяет аннуляторному условию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны обобщенная булева решетка L и ее элементы $a \neq b$. Главный идеал $(a + b)L$ будет булевой решеткой с единицей $e = a + b$. Элементы a и b имеют в решетке eL дополнения c и d соответственно: $a + c = b + d = e$ и $ac = bd = 0$. Рассмотрим элементы ad и bc. Если $ad \neq 0$ или $bc \neq 0$, то $d \in (\mathrm{Ann}\, b) \setminus (\mathrm{Ann}\, a)$ или $c \in (\mathrm{Ann}\, a) \setminus (\mathrm{Ann}\, b)$. Пусть теперь $ad = 0$ и $bc = 0$. Тогда $e = (a + c)(b + d) = ab + cd$, откуда $a = ae = ab = be = b$, что противоречит условию $a \neq b$. Значит, $\mathrm{Ann}\, a \neq \mathrm{Ann}\, b$. □

Лемма 3. *Для любого идеала I дистрибутивной решетки L с нулем имеют место равенства* $I + \mathrm{Ann}\, I = I \oplus \mathrm{Ann}\, I$ *и* $\mathrm{Ann}\,(I + \mathrm{Ann}\, I) = \{0\}$. *В частности* $\mathrm{Ann}\,(aL \oplus \mathrm{Ann}\, a) = \{0\}$ *для всех $a \in L$.* □

Доказательство. Поскольку $I \cap \operatorname{Ann} I = \{0\}$, то $I + \operatorname{Ann} I = I \oplus \operatorname{Ann} I$ в силу леммы 1. Если $b(I + \operatorname{Ann} I) = \{0\}$ для некоторого элемента $b \in L$, то $bI = \{0\}$, $b \in \operatorname{Ann} I$ и $b = bb = 0$. Значит, $\operatorname{Ann}(I + \operatorname{Ann} I) = \{0\}$. □

2. Аннуляторные характеризации

Дадим характеризации дистрибутивных решеток с нулем, обладающих теми или иными аннуляторными свойствами.

Предложение 1 [10, предложение 6]. *Дистрибутивная решетка L с нулем удовлетворяет аннуляторному условию тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} a) = aL$ для любого элемента $a \in L$.*

Предложение 2. *Любая обобщенная стоунова решетка слабо риккартова.*

Доказательство. Пусть L — обобщенная стоунова решетка и $ab = 0$ для некоторых $a, b \in L$. Тогда $\operatorname{Ann} a + \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} a) = L$ и $bL \subseteq \operatorname{Ann} a$, откуда $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} a) \subseteq \operatorname{Ann} b$ и $\operatorname{Ann} a + \operatorname{Ann} b = L$. □

Предложение 3. *Дистрибутивная решетка L с нулем будет слабо риккартовой тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in L$*

$$\operatorname{Ann}(ab) = \operatorname{Ann} a + \operatorname{Ann} b.$$

Доказательство. Пусть даны слабо риккартова решетка L и ее элементы a, b. Включение $\operatorname{Ann} a + \operatorname{Ann} b \subseteq \operatorname{Ann}(ab)$ очевидно. Возьмем элемент c из аннулятора $\operatorname{Ann}(ab)$. Имеем $(ca)(cb) = 0$. Поэтому $L = \operatorname{Ann}(ac) + \operatorname{Ann}(bc)$. Тогда $c = x + y = cx + cy$ при $x \in \operatorname{Ann}(ac)$ и $y \in \operatorname{Ann}(bc)$. Отсюда $cx \in \operatorname{Ann} a$ и $cy \in \operatorname{Ann} b$. Значит, $c \in \operatorname{Ann} a + \operatorname{Ann} b$.

Обратно, при $ab = 0$ для $a, b \in L$ получаем $\operatorname{Ann} a + \operatorname{Ann} b = \operatorname{Ann}(ab) = \operatorname{Ann} 0 = L$. □

Теорема 1. *Для всякой дистрибутивной решетки L с нулем эквивалентны следующие утверждения*:

1) *L стоунова*;
2) *L — обобщенная стоунова решетка с единицей*;
3) *L — слабо риккартова решетка с псевдодополнениями.*

Доказательство. 1) ⇒ 2). Пусть L — стоунова решетка и $a \in L$. Тогда

$$\operatorname{Ann} a + \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} a) = a^*L + a^{**}L = (a^* + a^{**})L = L.$$

2) ⇒ 3). Пусть верно утверждение 2). По предложению 2 решетка L слабо риккартова. В силу леммы 3 для любого элемента $a \in L$ имеем $L = \operatorname{Ann} a \oplus \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} a)$, и $1 = b + c$ для подходящих элементов $b \in \operatorname{Ann} a$ и $c \in \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} a)$. Легко видеть, что $\operatorname{Ann} a = bL$. Поэтому $b = a^*$. Значит, L — решетка с псевдодополнениями.

3) ⇒ 1). Пусть верно 3) и $a \in L$. Поскольку $aa^* = 0$, то

$$L = \operatorname{Ann} a + \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} a) = a^*L + a^{**}L = (a^* + a^{**})L,$$

откуда $a^* + a^{**} = 1$. □

Замечание 2. Слабо риккартовы решетки с единицей образуют подкласс класса слабо риккартовых полуколец, рассматриваемых в [11, § 3.4]. Напомним: собственный идеал P полукольца S называется *простым*, если для любых элементов $a, b \in S$ включение $ab \in P$ влечет $a \in P$ или $b \in P$. Из предложения 3.4.3 [11] следует, что слабая риккартовость ограниченной дистрибутивной решетки равносильна тому, что каждый ее простой идеал содержит единственный минимальный простой идеал. В работе [11, § 3.4] изучаются также риккартовы полукольца. Отметим, что в силу предложения 3.4.6 [11] и теоремы 1 те риккартовы полукольца, которые являются дистрибутивными решетками, суть в точности стоуновы решетки.

Предложение 4. *Для всякой дистрибутивной решетки L с нулем равносильны следующие условия:*

1) *L — обобщенная стоунова решетка;*
2) *каждый главный идеал решетки L является стоуновой решеткой;*
3) *аннулятор $\mathrm{Ann}\, a$ любого элемента a решетки L выделяется прямым слагаемым.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть L — обобщенная стоунова решетка и $a \in L$. Тогда $\mathrm{Ann}\, b + \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, b) = L$ для любого $b \in aL$. В силу дистрибутивности решетки идеалов $\mathrm{Id}\, L$ получаем $aL = (aL \cap (\mathrm{Ann}\, b)) + (aL \cap \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, b))$. Значит, $a = c + d$ и $cd = 0$ для некоторых $c \in aL \cap \mathrm{Ann}\, b$ и $d \in aL \cap \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, b)$. Легко видеть, что $c = b^*$ и $d = b^{**}$ в ограниченной решетке aL.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть выполнено условие 2) и $a \in L$. Возьмем произвольный элемент $x \in L$. Главный идеал $(x + a)L$ решетки L является стоуновой решеткой. Поэтому $x + a = a^* + a^{**}$ в стоуновой решетке $(x + a)L$. Значит, $x = xa^* + xa^{**}$ и, стало быть, $x \in \mathrm{Ann}\, a + \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, a)$ в самой решетке L. Следовательно, $\mathrm{Ann}\, a + \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, a) = L$. Остается применить лемму 3.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть дистрибутивная решетка L удовлетворяет условию 3) и $a \in L$. Тогда $\mathrm{Ann}\, a \oplus J = L$ для некоторого идеала J решетки L. Ясно, что $J \subseteq \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, a)$. Поэтому $\mathrm{Ann}\, a + \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, a) = L$. □

Теорема 2. *Для всякой дистрибутивной решетки L с нулем эквивалентны следующие условия:*

1) *L — обобщенная булева решетка;*
2) *L — обобщенная стоунова решетка с аннуляторным условием;*
3) *каждый главный идеал решетки L выделяется прямым слагаемым;*
4) *$aL + \mathrm{Ann}\, a = L$ для любого $a \in L$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть выполнено условие 1) и $a \in L$. По лемме 2 решетка L удовлетворяет аннуляторному условию. По предложению 1 $\mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, a) = aL$. Поэтому $\mathrm{Ann}\, a + \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, a) = \mathrm{Ann}\, a + aL$. Остается показать, что $\mathrm{Ann}\, a + aL = L$. Возьмем произвольный элемент $b \in L$ и рассмотрим главный идеал $(a + b)L$, являющийся по условию булевой решеткой. Элемент a имеет в $(a + b)L$ дополнение c: $a + c = a + b$ и $ac = 0$. Тогда $(a + b)L = aL + cL$. Поэтому $b = ax + cy$ при $x, y \in L$. Поскольку $cy \in \mathrm{Ann}\, a$, то $b \in \mathrm{Ann}\, a + aL$.

2) $\Rightarrow$ 3) в силу предложения 1 и леммы 3.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть выполнено 3) и $a \in L$. Имеем $aL \oplus J = L$ для подходящего идеала J в L. Поскольку $J \subseteq \mathrm{Ann}\, a$, то $aL + \mathrm{Ann}\, a = L$.

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть верно 4) и e — ненулевой элемент решетки L. Возьмем элемент a в идеале eL. Имеем $aL + \mathrm{Ann}\, a = L$. Поэтому $e = ax + b$ для некоторых элементов $x \in L$ и $b \in (\mathrm{Ann}\, a) \cap eL$. Тогда $a = ae = ax$. Отсюда $e = a + b$ и $ab = 0$. Значит, eL — булева решетка. Стало быть, L — обобщенная булева решетка.

Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Всякая обобщенная булева решетка является обобщенной стоуновой решеткой.*

Теорема 3. *Для того чтобы неодноэлементная дистрибутивная решетка L была булевой, необходимо и достаточно, чтобы L была решеткой с аннуляторами и с псевдодополнениями.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Пусть решетка L удовлетворяет условию теоремы и $a \in L$. Имеем $aL + \mathrm{Ann}\, a = aL + a^*L = (a + a^*)L$. По лемме 3 $\mathrm{Ann}\,(a + a^*) = \{0\}$. Поэтому $a + a^* = 1$. Получаем $a^* = a'$ для всех $a \in L$, что доказывает булевость решетки L.

Теорема доказана.

Следствие 2. *Для произвольной неодноэлементной конечной дистрибутивной решетки L равносильны следующие утверждения*:

1) L *— булева решетка*;
2) L *удовлетворяет аннуляторному условию*;
3) L *— решетка с аннуляторами.*

Доказательство. Лемма 2 дает импликацию 1) $\Rightarrow$ 2).

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) вытекает из теоремы 3, поскольку все конечные дистрибутивные решетки являются решетками с псевдодополнениями. □

Отметим, что в следствии 2 наиболее значима импликация 3) $\Rightarrow$ 1).

Решетка L называется *локально конечной* (в смысле теории упорядоченных множеств [12, с. 150]), если для любых ее элементов $a < b$ интервал $\{x \in L : a \leq x \leq b\}$ конечен. Отметим, что локально конечные дистрибутивные решетки с нулем названы в [12, с. 162] *финитарными дистрибутивными решетками.*

Лемма 4 [4, с. 108, теорема 8]. *Для всякой обобщенной булевой решетки L решетки* $\mathrm{Con}\, L$ *и* $\mathrm{Id}\, L$ *изоморфны.*

Лемма 5 [4, с. 208, упражнение 16]. *Решетка* $\mathrm{Con}\, L$ *конгруэнций произвольной дистрибутивной решетки L является булевой решеткой тогда и только тогда, когда L — локально конечная решетка.*

Теорема 4. *Для любой дистрибутивной решетки L с нулем эквивалентны следующие условия*:

1) L *— локально конечная обобщенная булева решетка*;
2) *все идеалы в L выделяются прямыми слагаемыми, т. е.* $\mathrm{Id}\, L$ *— булева решетка*;
3) *все идеалы в L — аннуляторные*;
4) $I = \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, I)$ *для любого идеала I решетки L*;
5) *аннуляторы различных идеалов в L различны.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). В силу лемм 4 и 5 решетка $\mathrm{Id}\, L$ всех идеалов локально конечной обобщенной булевой решетки будет булевой.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть выполнено условие 2) и I — идеал решетки L. Тогда $I \oplus J = L$ для подходящего идеала J в L. Покажем, что $I = \mathrm{Ann}\, J$. Ясно, что $I \subseteq \mathrm{Ann}\, J$. Обратно, пусть $x \in \mathrm{Ann}\, J$. Имеем $x = a + b$ для некоторых $a \in I$ и $b \in J$. Отсюда $x = ax \in I$. Значит, $I = \mathrm{Ann}\, J$ — аннуляторный идеал.

3) $\Rightarrow$ 4). Предположим, что верно условие 3) и I — идеал решетки L. Рассмотрим идеал $I + \mathrm{Ann}\, I$. По условию $I + \mathrm{Ann}\, I = \mathrm{Ann}\, J$ для некоторого идеала J в L. Поскольку $IJ = \{0\}$, то $J \subseteq \mathrm{Ann}\, I \subseteq \mathrm{Ann}\, J$, т. е. $J = \{0\}$ и $I + \mathrm{Ann}\, I = \mathrm{Ann}\, 0 = L$. Имеем $I \subseteq \mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, I)$. Обратное включение $\mathrm{Ann}\,(\mathrm{Ann}\, I) \subseteq I$ получается так же, как при доказательстве импликации 2) $\Rightarrow$ 3).

Импликация 4) $\Rightarrow$ 5) очевидна.

5) $\Rightarrow$ 1). Пусть выполнено условие 5) и I — идеал решетки L. По лемме 3 идеал $I + \mathrm{Ann}\, I$ имеет нулевой аннулятор, как и сама решетка L. Поэтому $I + \mathrm{Ann}\, I = L$. Значит, решетка $\mathrm{Id}\, L$ булева. По теореме 2 L — обобщенная булева решетка. Снова применяя леммы 4 и 5, получаем, что L — локально конечная обобщенная булева решетка.

Теорема доказана.

Следствие 3. *Для любой неодноэлементной ограниченной дистрибутивной решетки L каждое из условий* 2)–5) *теоремы* 4 *равносильно тому, что L — конечная булева решетка.*

П р и м е р 3. Вернемся к примеру 2. Пусть теперь дано бесконечное семейство двухэлементных цепей $L_x = \{0, 1\}$ $(x \in X)$. Решетка $T = \prod L_x$ изоморфна булеану $B(X)$ всех подмножеств множества X при соответствии $f \mapsto \operatorname{supp} f$, а решетка $S = \oplus L_x$ изоморфна решетке $L(X)$ всех конечных подмножеств в X. Решетка $L(X)$ является локально конечной обобщенной булевой решеткой. Поэтому решетка $L(X)$ удовлетворяет условиям 2)–5) теоремы 4. Нетрудно показать, что идеалы решетки $L(X)$ исчерпываются идеалами вида $L(Y) = \{A \in L(X) : A \subseteq Y\}$ по всевозможным подмножествам $Y \subseteq X$. Поэтому решетка всех идеалов решетки $L(X)$ изоморфна булевой решетке $B(X)$.

Лемма 6 [4, с. 91, следствие 12]. *Конечная решетка является булевой решеткой тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке $B(X)$ всех подмножеств некоторого непустого конечного множества X.*

Из леммы 6 и примера 3 вытекает

Предложение 5. *Произвольная решетка L будет локально конечной обобщенной булевой решеткой тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке $L(X)$ всех конечных подмножеств некоторого множества X, при этом в качестве X можно взять множество всех атомов решетки L.*

П р и м е р 4. Предыдущий пример можно обобщить. Рассмотрим бесконечные мощности k и m, $k < m$. И пусть X — множество мощности m. Тогда подмножества множества X, мощности которых $\leq k$, образуют обобщенную булеву решетку L, являющуюся идеалом в булеане $B(X)$. Решетка L не локально конечна, поэтому не удовлетворяет ни одному из условий 2)–5) теоремы 4, но в ней каждый аннуляторный идеал выделяется прямым слагаемым. Ясно, что решетка L не изоморфна решетке $L(X)$. Отметим, что решетка L *k-полна*, т. е. любое ее непустое подмножество A мощности $\leq k$ имеет в L точную верхнюю грань $\sup A = \bigcup A$.

Рассмотрим на дистрибутивной решетке L с нулем следующее отношение эквивалентности ρ: $a\,\rho\,b \Leftrightarrow \operatorname{Ann} a = \operatorname{Ann} b$ для любых $a, b \in L$.

Предложение 6. *Отношение ρ является конгруэнцией на любой дистрибутивной решетке L с нулем, а фактор-решетка L/ρ будет решеткой с аннуляторным свойством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a, b, c \in L$ и $a\,\rho\,b$, т. е. $\operatorname{Ann} a = \operatorname{Ann} b$. Очевидно, $(a + c)\,\rho\,(b + c)$. Также для любого $x \in L$ получаем $(ac)x = 0 \Leftrightarrow a(cx) = 0 \Leftrightarrow b(cx) = 0 \Leftrightarrow (bc)x = 0$, т. е. $(ac)\,\rho\,(bc)$. Значит, ρ — конгруэнция на решетке L.

Пусть далее $\operatorname{Ann}(a/\rho) = \operatorname{Ann}(b/\rho)$ в фактор-решетке L/ρ. Очевидно, $0/\rho = \{0\}$. Для любого элемента $x \in L$ имеем $x \in \operatorname{Ann} a \Leftrightarrow ax = 0 \Leftrightarrow (a/\rho)(x/\rho) = (ax)/\rho = 0/\rho \Leftrightarrow (b/\rho)(x/\rho) = 0/\rho \Leftrightarrow bx = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ann} b$. Следовательно, $\operatorname{Ann} a = \operatorname{Ann} b$, и $a/\rho = b/\rho$. □

3. Решетки множеств

В этом разделе рассматриваются решетки множеств, являющиеся дистрибутивными решетками с аннуляторным условием. Такие решетки множеств могут доставлять примеры дистрибутивных решеток с различными аннуляторными свойствами.

Хорошо известна классическая теорема Биркгофа – Стоуна [4, с. 93, теорема 19] об изоморфном представлении любой абстрактной дистрибутивной решетки в виде решетки множеств. *Решеткой множеств* называется произвольное непустое множество L множеств, замкнутое относительно конечных теоретико-множественных объединений и пересечений, т. е. $A \cup B$, $A \cap B \in L$ для всех $A, B \in L$. Получаем дистрибутивную решетку $\langle L, \cup, \cap \rangle$. При этом если L имеет нулевой (единичный) элемент, то можно считать, что пустое множество $\varnothing$ принадлежит L (соответственно, $\bigcup L = \bigcup\{A : A \in L\} \in L$).

Поэтому при изучении дистрибутивных решеток L можно ограничиться рассмотрением решеток множеств L.

З а м е ч а н и е 3. Это теоретико-множественный подход к исследованию дистрибутивных решеток. Для булевых решеток (булевых алгебр) он осуществлен в монографии Р. Сикорского [6] и основан на теореме Стоуна [4, с. 94, следствие 21] о представлении булевых алгебр как полей множеств. Напомним, что *полем множеств* называется такая решетка множеств L, что $\varnothing \in L$, $E = \bigcup L \in L$ и $E \setminus A \in L$ для всех $A \in L$. Отметим, что традиционно решетки множеств называют кольцами множеств, что плохо согласовано с термином “кольцо”.

Решетка множеств L называется *приведенной*, если для любых двух различных элементов $x, y \in \bigcup L$ существует множество $A \in L$, содержащее ровно один из них: $x \in A$, $y \notin A$ или $x \notin A$, $y \in A$. Если для произвольной решетки множеств L склеить элементы $x, y \in \bigcup L$, не разделяемые никаким множеством из L, то, очевидно, получим приведенную решетку множеств, канонически изоморфную L.

Выполнение аннуляторного условия на решетке множеств L равносильно тому, что $\varnothing \in L$ и для любых $A, B \in L$ строгое включение $A \subset B$ влечет существование непустого множества $X \in L$, для которого $A \cap X = \varnothing$ и $X \subset B$.

Неодноэлементную решетку множеств L назовем *точечной*, если все одноэлементные (одноточечные) подмножества множества $\bigcup L$ принадлежат L. Все точечные решетки суть приведенные решетки множеств с $\varnothing$ в качестве нулевого элемента и являются дистрибутивными решетками с аннуляторным условием.

Решетка L называется *точечной* [4, с. 233], если каждый ее ненулевой элемент есть точная верхняя грань некоторого (непустого) множества ее атомов. Очевидно, что все точечные решетки множеств будут точечными решетками.

Теорема 5. *Любая неодноэлементная дистрибутивная точечная решетка изоморфна некоторой точечной решетке множеств.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — неодноэлементная дистрибутивная точечная решетка с нулем 0. Как отмечено выше, решетка L изоморфна некоторой приведенной решетке множеств M с наименьшим элементом $\varnothing$. Любой атом A решетки M будет одноэлементным множеством $\{x\}$, $x \in \bigcup M$. Действительно, если A содержит два различных элемента x и y, то найдется множество $B \in M$, содержащее ровно один из этих элементов. Но тогда $\varnothing \neq A \cap B \subset A$; получаем противоречие. Обозначим через X множество всех элементов $x \in \bigcup M$, для которых $\{x\}$ является атомом решетки M. Для любого множества $B \in M$ положим $X(B) = \{x \in X : \{x\} \subseteq B\}$. Имеем $X(B) = \varnothing$. По условию теоремы каждое непустое множество $B \in M$ есть точная верхняя грань множества всех атомов, содержащихся в B. Значит, любое множество $B \in M$ однозначно определяется своим подмножеством $X(B)$. Легко видеть, что $X(B \cup C) = X(B) \cup X(C)$ и $X(B \cap C) = X(B) \cap X(C)$ для всех $B, C \in M$. Тем самым, взаимно однозначное отображение $B \mapsto X(B)$ осуществляет изоморфизм решетки M на точечную решетку множеств $\{X(B) : B \in M\}$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4. В теореме 5 не все одноэлементные подмножества множества $\bigcup M$ обязаны принадлежать M, т. е. быть атомами решетки M. Возьмем решетку M всех конечных множеств натуральных чисел с наибольшим элементом $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Решетка множеств M приведенная, все одноэлементные множества натуральных чисел будут ее атомами, множество $\{\infty\} \notin M$ и $\bigcup M = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Значит, решетка M не является точечной, но она изоморфна точечной решетке множеств, полученной заменой в M наибольшего элемента $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ на $\mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е 5. Решетка называется *безатомной*, если она не имеет атомов. Безатомные булевы решетки, будучи дистрибутивными решетками с аннуляторным условием, не являются точечными решетками.

Приведем два примера точечных решеток множеств с некоторыми аннуляторными свойствами.

П р и м е р 5. Решетка множеств, включающая в себя все конечные множества натуральных чисел и все подмножества в $\mathbb{N}$, содержащие множество $2\mathbb{N}$ всевозможных четных чисел, не является слабо риккартовой.

Подмножество A множества X называется *коконечным*, если его дополнение в X конечно. Говорят, что два множества *почти равны*, если конечна их симметрическая разность.

П р и м е р 6. Пусть L — решетка множеств, составленная из конечных и коконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$, а также множеств $A \subset \mathbb{N}$, почти равных $2\mathbb{N}$. Легко видеть, что ограниченная дистрибутивная решетка L слабо риккартова и не является ни обобщенной стоуновой решеткой, ни решеткой с псевдодополнениями (см. теорему 1).

4. Полукольцевое обобщение

Результаты разд. 2 легко переносятся на коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца с тождеством $x + 2xy = x$. *Полукольцом* называется универсальная алгебра $\langle S, +, \cdot \rangle$ с двумя бинарными операциями: коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, которые связаны тождествами дистрибутивности $x(y + z) = xy + xz$ и $(x + y)z = xz + yz$. Полукольцо с коммутативным умножением само называется *коммутативным*. Если полукольцо S имеет элемент, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то такой элемент называется *нулем* полукольца S и обозначается 0, а S называется *полукольцом с нулем*. Если S имеет нейтральный по умножению элемент, называемый *единицей* полукольца S и обозначаемый 1, то S называется *полукольцом с единицей*. Полукольцо с тождеством идемпотентности $xx = x$ называется *мультипликативно идемпотентным*. Дистрибутивные решетки образуют важный класс коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец. Другой важный класс дают булевы кольца.

Коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца с тождеством $x + 2xy = x$ составляют многообразие полуколец, являющееся точной верхней гранью многообразия всех дистрибутивных решеток и многообразия всех булевых колец [13, Corollary 4.4; 14, следствие 6.3.2]. Такие полукольца служат подпрямыми произведениями двухэлементных цепей и двухэлементных полей.

Пусть далее $S = \langle S, +, \cdot \rangle$ — произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем 0 и с тождеством $x + 2xy = x$. Обозначим через $L(S)$ универсальную алгебру $\langle S, \vee, \cdot \rangle$ при $a \vee b = a + ab + b$ для любых $a, b \in S$. По свойству 4) предложения 3 [10] $L(S)$ будет дистрибутивной решеткой с 0. Между полукольцами S и решетками $L(S)$ существуют тесные связи: во многом они обладают одинаковыми свойствами.

Предложение 7. *Полукольцо S и дистрибутивная решетка $L(S)$ имеют одни и те же идеалы и одни и те же конгруэнции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку умножение в $L(S)$ совпадает с умножением в S, то достаточно рассмотреть операции сложения $+$ и $\vee$ в них. Если I — идеал полукольца S и $a, b \in I$, то $a \vee b = a + ab + b \in I$. Если же I — идеал решетки $L(S)$ и $a, b \in I$, то $a + b = (a + b)(a + ab + b) \in I$ в силу равенства $a + 2ab = a$. □

Рассмотрим элементы $a, b, c \in S$. Пусть ρ — конгруэнция на полукольце S и $a \,\rho\, b$. Тогда $(a + c)\,\rho\,(b + c)$ и $(ac)\,\rho\,(bc)$, откуда $a \vee c = (a + ac + c)\,\rho\,(b + bc + c) = b \vee c$. Обратно, пусть ρ — конгруэнция на решетке $L(S)$ и $a \,\rho\, b$. Тогда $(a \vee c)\,\rho\,(b \vee c)$ и $(ac)\,\rho\,(bc)$. Поэтому

$$a + c = (a + c)(a \vee c)\,\rho\,(a + c)(b \vee c) = (ab + abc + c + ac)\,\rho\,(ab + abc + c + bc)$$

$$= (b + c)(a \vee c)\,\rho\,(b + c)(b \vee c) = b + c.$$

Значит, ρ будет конгруэнцией и на полукольце S. □

Мы видим, что полукольцо S и дистрибутивная решетка $L(S)$ имеют одинаковые мультипликативные полугруппы, одинаковые решетки идеалов и одинаковые решетки конгруэнций. Поэтому все определения и свойства дистрибутивных решеток из разд. 2, формулируемые в терминах аннуляторов и идеалов, остаются в силе и для полуколец S. Заметим, что решетка $L(S)$ булева кольца S будет обобщенной булевой решеткой, совпадающей с $L(L(S))$.

Сформулируем соответствующие теоремы, аналоги теорем 1–4, для произвольного коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S с нулем 0, удовлетворяющего тождеству $x + 2xy = x$.

Теорема 6. *Эквивалентны следующие утверждения*:
1) $L(S)$ *— стоунова решетка*;
2) S *— стоуново полукольцо*;
3) S *— обобщенное стоуново полукольцо с единицей*;
4) S *— слабо риккартово полукольцо с псевдодополнениями.*

Прежде чем формулировать очередную теорему, укажем следующее. Напомним, что собственный идеал полукольца S называется *максимальным*, если каждый строго содержащий его идеал равен S. Отметим, что максимальные идеалы в S — простые.

Лемма 7 [4, с. 96, упражнение 27]. *Произвольная дистрибутивная решетка с нулем является обобщенной булевой решеткой тогда и только тогда, когда все ее простые идеалы максимальны.*

Лемма 8 [15, теорема 1]. *Максимальность простых идеалов полукольца S равносильна тому, что S изоморфно прямому произведению некоторых булева кольца и обобщенной булевой решетки.*

Теорема 7. *Эквивалентны следующие условия*:
(i) $L(S)$ *— обобщенная булева решетка*;
(ii) S *— обобщенное стоуново полукольцо с аннуляторным условием*;
(iii) *каждый главный идеал полукольца S выделяется прямым слагаемым*;
(iv) $aS + \operatorname{Ann} a = S$ *для любого* $a \in S$;
(v) *полукольцо S изоморфно прямому произведению булева кольца и обобщенной булевой решетки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия (i) и (v) эквивалентны в силу лемм 7 и 8 и предложения 7. □

Теорема 8. *Для неодноэлементного полукольца S равносильны следующие утверждения*:
(i) *решетка $L(S)$ булева*;
(ii) S *— полукольцо с аннуляторами и с псевдодополнениями*;
(iii) *полукольцо S изоморфно прямому произведению булева кольца с ненулевой единицей и булевой решетки (возможно отсутствие одного из сомножителей).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения (i) и (iii) равносильны на основании теоремы 7. Эквиваленция (i) $\Leftrightarrow$ (ii) есть аналог теоремы 3. □

Теорема 9. *Для полукольца S эквивалентны следующие условия*:
(i) $L(S)$ *— локально конечная обобщенная булева решетка*;
(ii) *все идеалы в S выделяются прямыми слагаемыми*;
(iii) *все идеалы в S — аннуляторные*;
(iv) $I = \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} I)$ *для любого идеала I полукольца S*;
(v) *аннуляторы различных идеалов в S различны*;
(vi) *решетка $L(S)$ изоморфна решетке всех конечных подмножеств некоторого множества.*

Доказательство. Эта теорема вытекает из теоремы 4 и предложения 5. □

Дополнение. В заключение анонсируем результат, который предполагаем подробно доказать в одной из ближайших публикаций.

Для любой неодноэлементной обобщенной булевой решетки L эквивалентны следующие утверждения:

1) все аннуляторные идеалы в L выделяются прямыми слагаемыми;

2) L — условно полная сверху решетка, т. е. любое ограниченное сверху непустое подмножество в L имеет точную верхнюю грань;

3) максимальный спектр $\mathrm{Max}\,L$ является экстремально несвязным пространством, т. е. замыкания открытых в $\mathrm{Max}\,L$ множеств открыты.

Максимальный спектр $\mathrm{Max}\,L$ называется *стоуновым пространством* обобщенной булевой решетки L. Эквивалентность утверждений 2) и 3) для булевых решеток L — это известная теорема, впервые опубликованная Глисоном [16, Folk Theorem], см. также [6, теорема 22.4]. При этом утверждение 2) означает полноту булевой решетки L.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Spead T.P.** Some remark on a class of distributive lattices // J. Austral. Math. Soc. 1969. Vol. 9, no. 3-4. P. 289–296. https://doi.org/10.1017/S1446788700007205
2. **Вечтомов Е.М.** Аннуляторные характеризации булевых колец и булевых решеток // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 2. С. 15–24.
3. **Биркгоф Г.** Теория решеток / пер. с англ. М.: Наука, 1984. 568 с.
4. **Гретцер Г.** Общая теория решеток / пер. с англ. М.: Мир, 1982. 456 с.
5. **Общая алгебра. Т. 2** / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. 480 с.
6. **Сикорский Р.** Булевы алгебры / пер. с англ. М.: Наука, 1969. 376 с.
7. **Скорняков Л.А.** Элементы теории структур. 2-е изд. М.: Наука, 1982. 160 с.
8. **Gr'atzer G.** Lattice theory: Foundation. Basel, Birkhäuser, 2011. 613 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0018-1
9. **Stone M.H.** The theory of representations for Boolean algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. Vol. 40, no. 1. P. 37–111.
10. **Вечтомов Е.М., Петров А.А.** Мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием // Изв. вузов. Математика. 2023. Вып. 3. С. 29–40. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-29-40
11. **Чермных В.В.** Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17. Вып. 3. С. 111–227.
12. **Стенли Р.** Перечислительная комбинаторика / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 440 с.
13. **Ghosh S.** A characterization of semirings which are subdirect products of a distributive lattice and a ring // Semigroup Forum. 1999. Vol. 59, no. 1. P. 106–120. https://doi.org/10.1007/PL00005999
14. **Вечтомов Е.М., Петров А.А.** Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. С-Пб.: Лань, 2022. 180 с.
15. **Вечтомов Е.М., Петров А.А.** Простые идеалы в мультипликативно идемпотентных полукольцах // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 4. С. 494–505. https://doi.org/10.4213/mzm13343
16. **Gleason A.** Projective topological spaces // Illinois J. Math. 1958. Vol. 2, no. 4A. P. 482–489. https://doi.org/10.1215/ijm/1255454110

Поступила 30.04.2024
После доработки 14.06.2024
Принята к публикации 17.06.2024
Опубликовано онлайн 1.11.2024

Вечтомов Евгений Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой фундаментальной математики
Вятский государственный университет, г. Киров
e-mail: vecht@mail.ru

REFERENCES

1. Spead T.P. Some remark on a class of distributive lattices. *J. Austral. Math. Soc.*, 1969, vol. 9, no. 3–4, pp. 289–296. https://doi.org/10.1017/S1446788700007205
2. Vechtomov E.M. Annihilator characterizations of Boolean rings and Boolean lattices. *Math. Notes*, 1993, vol. 53, no. 2, pp. 124–129. https://doi.org/10.1007/BF01208314
3. Birkhoff G. *Lattice theory.* Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1967, vol. 25, 418 p. Translated to Russian under the title *Teoriya reshetok*, Moscow, Nauka Publ., 1984, 568 p.
4. Gratzer G. *General lattice theory.* Berlin, Birkhäuser, 1978, 381 p. Translated to Russian under the title *Obshchaya teoriya reshetok*, Moscow, Mir Publ., 1982, 456 p.
5. Saliy V.N., Skornyakov L.A. *Obshchaya algebra* [General Algebra], Moscow, Nauka Publ., 1991, vol. 2, 480 p.
6. Sikorski R. *Boolean algebras.* New York, Academic Press, 1964, 237 p. Translated to Russian under the title *Bulevy algebry*, Moscow, Nauka Publ., 1969, 376 p.
7. Skornyakov L.A. *Elementy teorii struktur. 2-ye izd.* [Elements of the theory of structures. 2nd ed.] Moscow, Nauka Publ, 1982, 160 p.
8. Grätzer G. *Lattice theory: Foundation.* Basel, Birkhäuser, 2011, 614 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0018-1
9. Stone M.H. The theory of representations for Boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1936, vol. 40, no. 1, pp. 37–111. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1936-1501865-8
10. Vechtomov E.M., Petrov A.A. Multiplicatively idempotent semirings with annihilator condition. *Iz. VUZ. Matematika*, 2023, vol. 3, pp. 29–40 (in Russian). https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-29-40
11. Chermnykh V.V. Functional representations of semirings. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 187, no. 2, pp. 187–267. https://doi.org/10.1007/s10958-012-1062-2
12. Stanley R.P. *Enumerative combinatorics.* Mathematical Gazette Publ., 1986, vol. 1, p. 306. Translated to Russian under the title *Perechislitel'naya kombinatorika*, Moscow, Mir Publ., 1990, 440 p. ISBN: 5-03-001348-2 .
13. Ghosh S. A characterization of semirings which are subdirect products of a distributive lattice and a ring. *Semigroup Forum*, 1999, vol. 59, no. 1, pp. 106–120. doi: 10.1007/PL00005999
14. Vechtomov E.M., Petrov A.A. *Funktsional'naya algebra i polukol'tsa. Polukol'tsa s idempotentnym umnozheniyem* [Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2023, 180 p. ISBN: 978-5-507-46239-1 .
15. Vechtomov E.M., Petrov A.A. Completely prime ideals in multiplicatively idempotent semirings. *Math. Notes*, 2022, vol. 111, no. 4, pp. 515–524. https://doi.org/10.1134/S0001434622030191
16. Gleason A. Projective topological spaces. *Illinois J. Math.*, 1958, vol. 2, no. 4A, pp. 482–489. https://doi.org/10.1215/ijm/1255454110

Received April 30, 2024
Revised June 14, 2024
Accepted June 17, 2024
Published online November 1, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation within project no. 24-21-00117 "Semirings and Semimodules with Idempotency Conditions."

Evgenii Mikhailovich Vechtomov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Vyatka State University, Kirov, 610000 Russia, e-mail: vecht@mail.ru .

Cite this article as: E. M. Vechtomov. Distributive lattices with different annihilator properties. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 53–65 .