

УДК 517.542

О ПОЧТИ ПРОСТЫХ ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ ГРАФОВ РАНГА 3¹

Ч. Ван, А. В. Васильев, Д. О. Ревин

Группа G подстановок конечного множества Ω покомпонентно действует на декартовом квадрате Ω^2 . Наибольшая подгруппа в $\text{Sym}(\Omega)$, имеющая на Ω^2 те же орбиты, что и сама G , называется 2-замыканием группы G . Рангом группы G называется число ее орбит на Ω^2 . Если ранг группы G равен 3, а порядок четен, то с точностью до взятия дополнения определен неориентированный граф с множеством вершин Ω , у которого в качестве множества ребер берется одна из двух недиагональных орбит группы G на Ω^2 . Такой граф называется графом ранга 3. Полная группа автоморфизмов этого графа совпадает с 2-замыканием группы G и содержит G в качестве подгруппы. На данный момент за исключением случая, когда G — почти простая группа, имеется явное описание 2-замыканий групп G ранга 3. В данной работе мы восполняем имеющийся пробел, тем самым завершая и описание полных групп автоморфизмов графов ранга 3.

Ключевые слова: почти простая группа, 2-замыкание группы подстановок, группа подстановок ранга 3, граф ранга 3, группа автоморфизмов графа.

Z. Wang, A. V. Vasil'ev, D. O. Revin. On the almost simple automorphism groups of rank 3 graphs.

A permutation group G of a finite set Ω acts componentwisely on the Cartesian square Ω^2 . The largest subgroup of $\text{Sym}(\Omega)$ having the same orbits on Ω^2 as G is called the 2-closure of G . The rank of G is the number of its orbits on Ω^2 . If the rank of G is 3 and the order is even, then an undirected graph with vertex set Ω is defined up to taking complement, for which one of the two off-diagonal orbits of G on Ω^2 is taken as the edge set. Such a graph is called a graph of rank 3. The full automorphism group of this graph coincides with the 2-closure of G and contains G as a subgroup. At present, except for the case when G is an almost simple group, there is an explicit description of the 2-closures of groups G of rank 3. In this paper, we fill the existing gap, thereby completing the description of the complete automorphism groups of graphs of rank 3. Keywords: almost simple group, 2-closure of permutation group, rank 3 permutation group, rank 3 graph, the automorphism group of a graph.

MSC: 20B25, 20D05, 05E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-04

К 95-летию Михаила Ивановича Каргаполова

Введение

Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — группа подстановок конечного множества Ω . Орбиты покомпонентного действия группы G на декартовом квадрате $\Omega \times \Omega$ называются ее *орбиталями* или *2-орбитами*, а их количество — *рангом* группы G . Наибольшая подгруппа симметрической группы $\text{Sym}(\Omega)$ с такими же как у G орбиталями называется *2-замыканием* группы G и обозначается $G^{(2)}$. Граф Γ , множество вершин которого — Ω , а множество ребер (возможно, ориентированных) — одна из орбиталей группы G , называется *орбитальным графом* группы G .

Если G — группа ранга 3, то она, очевидно, транзитивна, а значит, одна из ее орбиталей — диагональ квадрата $\Omega \times \Omega$. Если G имеет нечетный порядок, то две оставшиеся иррефлексивные орбитали переводятся одна в другую транспонированием, поэтому соответствующие орбитальные графы являются *турнирами* (т. е. полными ориентированными графами), противоположными друг другу. Если группа G — четного порядка, то эти орбитали симметричны, а соответствующие орбитальные графы — неориентированные графы, дополнительные друг другу. Их называют *графами ранга 3* (соответствующими группе G). Несложно видеть, что

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

полная группа автоморфизмов $\text{Aut } \Gamma$ такого графа (у пары дополнительных друг другу графов, очевидно, одна и та же группа автоморфизмов) — это 2-замыкание группы G , а сама группа G — подгруппа в $\text{Aut } \Gamma = G^{(2)}$.

Графы ранга 3 — важнейший и наиболее изученный подкласс класса *сильно регулярных графов*, т. е. графов, в которых число общих соседей двух вершин зависит только от того, будут ли они равны, смежны или не смежны (при этом полные графы и их дополнения сильно регулярными графами не считаются). В недавно вышедшей монографии “Сильно регулярные графы” Брауэра и Ван Малдегема [2] дано описание графов ранга 3, т. е. указаны все пары вида (Γ, G) , где Γ — сильно регулярный граф, а G — некоторая (не обязательно полная) группа автоморфизмов этого графа, ранг которой равен 3 (группа G выступает в качестве сертификата того, что Γ — граф ранга 3). Важно отметить, что описания полных групп автоморфизмов графов ранга 3 или, что было бы эквивалентно, описания 2-замыканий групп ранга 3, в этой книге (и всей имеющейся в распоряжении авторов литературе) нет. Несмотря на то, что имеется большой объем информации о полных группах автоморфизмов графов ранга 3 (например, в [2, табл. 11.8] для всех графов ранга 3 с числом вершин не больше 1024 указаны в том числе и полные группы их автоморфизмов), завершение их описания представляется задачей, имеющей существенное значение как для теории групп, так и для теории графов.

В недавних работах [17] и [10] решение данной проблемы было сведено к проблеме описания 2-замыканий для почти простых групп G ранга 3. Цель данной работы — дать такое описание, тем самым завершая как описание 2-замыкания групп ранга 3, так и описание полных групп автоморфизмов графов ранга 3 (граф ранга 3 считается заданным, если указана некоторая группа его автоморфизмов, действующая на вершинах графа графа как группа подстановок ранга 3).

Теорема 1. *Если G — конечная группа ранга 3, то ее 2-замыкание $G^{(2)}$ известно.*

Следствие 1. *Если Γ — конечный граф ранга 3, то его группа автоморфизмов $\text{Aut } \Gamma$ известна.*

Напомним, что *цоколь* $\text{Soc } G$ группы G — это подгруппа, порожденная всеми ее минимальными нормальными подгруппами. Группа G *почти проста*, если ее цоколь $L = \text{Soc } G$ — неабелева простая группа. Эквивалентно G почти проста, если найдется неабелева группа L , для которой $L \simeq \text{Inn } L \leq G \leq \text{Aut } L$, т. е. G “зажата” между L и ее группой автоморфизмов $\text{Aut } L$.

Пусть теперь $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — группа подстановок ранга 3. Уже отмечалось, что G транзитивна на Ω . Если G импримитивна, то у нее имеется ровно одна нетривиальная система импримитивности Σ ; соответствующий орбитальный граф Γ_G (или его дополнение) — это объединение попарно непересекающихся клик одного размера, множества вершин которых — блоки системы Σ , см. [2, §1.1.3]. Если Δ — один из блоков системы Σ , то полная группа автоморфизмов $\text{Aut } \Gamma$ подстановочно изоморфна сплетению $\text{Sym}(\Delta) \wr \text{Sym}(\Sigma)$ двух симметрических групп на множествах Δ и Σ (см., например, [17, предложение 2.2]). Таким образом, мы можем считать, что группа G примитивна.

Из [13, теорема 1] следует, что если $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — примитивная почти простая группа с цоколем L , то за исключением некоторых явно описанных там случаев 2-замыкание $G^{(2)}$ содержится в нормализаторе $N_{\text{Sym}(\Omega)}(L)$ цоколя L в симметрической группе $\text{Sym}(\Omega)$. Более того, если G — группа ранга 3, то из [13, предложения 1,2] несложно вывести, что число таких исключений конечно, причем группа $G^{(2)}$ остается почти простой, хотя и с другим цоколем; см. предложение 4 в разд. 2 настоящей работы, где мы указываем 2-замыкания во всех исключительных случаях. Во всех остальных случаях $G^{(2)} \leq N_{\text{Sym}(\Omega)}(L)$ и в силу [7, теорема 4.3B] выполняется

$$L \leq G \leq G^{(2)} \leq \text{Aut } L,$$

т. е. 2-замыкание — тоже почти простая группа с тем же цоколем, что исходная группа G (см. также [15, теорема 2]). Таким образом, проблема сводится к тому, чтобы для каждого точного

примитивного подстановочного представления ранга 3 почти простой группы G с цоколем L найти наибольшую подгруппу в $\text{Aut } L$, до которой оно поднимается, оставаясь точным и сохраняя ранг 3 (см. лемму 2 в разд. 3). Последняя задача решается в предложениях 1–3 (см. разд. 2) для почти простых групп, цоколи которых — знакопеременные группы, спорадические группы и группы лиева типа соответственно.

Группы ранга 3, цоколи которых знакопеременные группы, были описаны Банаи [1] (см. также [2, теорема 11.3.1]). В случае спорадических групп эта работа была проделана Брауэром, Сойчером и Р. Уилсоном с использованием “Атласа конечных групп” [5] (см. [2, теорема 11.3.5]). Наши результаты о 2-замыканиях данных групп — предложения 1 и 2 — получаются из перечисленных путем несложной проверки и носят скорее справочный характер.

Случай групп лиева типа требует больших усилий. Группы ранга 3 с классическим цоколем были описаны Кантором и Либлером в [11] (см. [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3]), а с исключительным — Либекком и Сакслем [14] (см. также [2, теорема 11.3.4]). Чтобы получить их 2-замыкания, мы используем информацию о том, как ведут себя максимальные подгруппы таких групп относительно их автоморфизмов, из [4; 6; 12].

Напомним, что в соответствии с классической теоремой Стейнберга [18] каждый элемент полной группы автоморфизмов $\text{Aut } L$ простой группы L лиева типа есть произведение внутреннего, диагонального, полевого и графового автоморфизмов. Обозначим через \tilde{L} подгруппу в $\text{Aut } L$, порожденную всеми внутренними, диагональными и полевыми автоморфизмами (точные определения см. в разд. 1). Оказывается, в большинстве случаев 2-замыкание почти простой группы подстановок G ранга 3 с цоколем L изоморфно $\text{Aut } L$ или \tilde{L} (если речь идет о группе, цоколь которой — группа лиева типа). Более точно, как следует из предложений 1–4 в разд. 2, верна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок ранга 3 на конечном множестве Ω , L — ее цоколь. Тогда либо $G^{(2)} = \text{Aut } L$, либо выполняется одно из следующих утверждений.

- 1) $L = \text{PSL}_n(q)$, $n > 4$, действие G на Ω определено в п. 1 предложения 3 и $G^{(2)} = \tilde{L}$ — подгруппа индекса 2 в $\text{Aut } L$.
- 2) $L = \text{PSp}_4(q)$, q четно, действие G на Ω определено в пп. 6–8 предложения 3 и $G^{(2)} = \tilde{L}$ — подгруппа индекса 2 в $\text{Aut } L$.
- 3) $L = \text{P}\Omega_{10}^+(q)$, действие G на Ω определено в п. 12 предложения 3 и $G^{(2)} = \tilde{L}$ — подгруппа индекса 2 в $\text{Aut } L$.
- 4) $L = \text{P}\Omega_8^+(q)$, действие G на Ω , а также $G^{(2)}$ определены в пп. 11, 15, 16 предложения 3.
- 5) $L = \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(3)$, $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $(n, \varepsilon) \neq (4, +)$, действие G на Ω определено в п. 16 предложения 3 и $G^{(2)}$ — подгруппа индекса 2 в $\text{Aut } L$.
- 6) $L = E_6(q)$, действие G на Ω определено в п. 17 предложения 3, и $G^{(2)} = \tilde{L}$ — подгруппа индекса 2 в $\text{Aut } L$.
- 7) L — группа из пп. 4, 12 табл. 1, пп. 2, 6–9, 11 табл. 2 или группа из табл. 3.

Статья структурирована следующим образом. В разд. 1 приведены необходимые сведения о простых группах и их автоморфизмах. В разд. 2 собраны наши результаты — детальные описания 2-замыканий групп ранга 3, эквивалентно — полных групп автоморфизмов графов ранга 3, а в разд. 3 — доказательства этих результатов.

1. Предварительные сведения о простых группах и их автоморфизмах

В обозначениях и наименованиях графов мы следуем [2]. За основу обозначений, связанных с группами, взяты [4; 5; 12]. Ниже приведены необходимые сведения о группах автоморфизмов неабелевых простых групп.

Известно, что 14 из 26 спорадических групп, а именно

$$M_{11}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_4, Ru, Ly, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}, Th, B, M$$

совпадают со своей группой автоморфизмов, а 12 оставшихся,

$$M_{12}, M_{22}, J_2, J_3, HS, McL, O'N, He, HN, Suz, Fi_{22}, Fi_{24}'$$

имеют группу внешних автоморфизмов порядка 2.

Отметим также, что из четырех групп Янко J_1 – J_4 только группа J_2 в том или ином качестве участвует в описании групп подстановок ранга 3. В соответствии с обозначениями и терминологией [2], которая наряду с основной используется также и в [5], будем называть эту группу группой Холла — Янко и обозначать символом HJ .

Группа автоморфизмов знакопеременной группы $\text{Alt}(n)$ совпадает с $\text{Sym}(n)$, за исключением случая, когда $n = 6$. Группа внешних автоморфизмов группы $\text{Alt}(6) \simeq \text{PSL}_2(9) \simeq \text{PSp}_4(2)'$ является элементарной абелевой группой порядка 4.

Для конечной классической простой группы L и для $L = E_6(q)$ определим подгруппу $\tilde{L} \leq \text{Aut } L$, содержащую L . Достаточно задать образ группы \tilde{L} относительно канонического эпиморфизма

$$\text{Aut } L \rightarrow \text{Out } L = \text{Aut } L/L.$$

Для этого, следуя обозначениям из [4], определим автоморфизмы $\gamma, \delta, \delta', \phi, \varphi$ и τ . Мы будем одними и теми же символами обозначать как сами эти автоморфизмы, так и их образы в группе $\text{Out } L$.

Далее L — одна из следующих групп $\text{PSL}_n(q), \text{PSU}_n(q), \text{PSp}_{2n}(q), \text{P}\Omega_{2n+1}(q), \text{P}\Omega_{2n}^\pm(q), E_6(q)$. Считаем, что $q = p^e$ для некоторого простого числа p , а F — поле порядка q^2 в случае $L = \text{PSU}_n(q)$ и порядка q в остальных случаях. Через ω обозначается примитивный элемент мультипликативной группы F^\times поля F .

Каждую классическую группу рассматриваем одновременно как образ в факторгруппе по модулю скалярных матриц некоторой матричной группы и как факторгруппу по модулю умножений на ненулевые скаляры группы линейных преобразований векторного пространства V , на котором задана билинейная, эрмитова или квадратичная форма (см. определения в [4, § 1.5, 1.6]).

Случай $L = \text{PSL}_n(q)$. Автоморфизм δ — сопряжение проективным образом матрицы $\text{diag}(\omega, 1, \dots, 1)$. Автоморфизм ϕ группы L индуцирован действием автоморфизма Фробениуса

$$(\alpha_{ij}) \mapsto (\alpha_{ij}^p) \tag{1.1}$$

на матрицах (α_{ij}) из $\text{GL}_n(q)$. Автоморфизм γ определен при $n \geq 3$ и индуцирован автоморфизмом

$$g \mapsto (g^{-1})^\top \tag{1.2}$$

группы $\text{GL}_n(q)$, где g^\top обозначает транспонированную матрицу g . В группе $\text{Out } L$ выполнены соотношения

$$\delta^{(n,q-1)} = \gamma^2 = \phi^e = [\gamma, \phi] = 1, \quad \delta^\gamma = \delta^{-1}, \quad \delta^\phi = \delta^p,$$

а $\text{Out } L = \langle \delta, \phi \rangle$ при $n = 2$ и $\text{Out } L = \langle \delta, \phi, \gamma \rangle$ при $n \geq 3$. Образ группы \tilde{L} в $\text{Out } L$ равен $\langle \delta, \phi \rangle$. В обозначениях [4, табл. 1.2] $\tilde{L} = \text{P}\Gamma\text{L}_n(q)$.

Случай $L = \text{PSU}_n(q), n \geq 3$. отождествим $\text{GU}_n(q)$ как матричную группу с подгруппой в $\text{GL}_n(q^2)$ таких матриц (α_{ij}) , что

$$(\alpha_{ij}^q)^\top = (\alpha_{ij})^{-1}.$$

Аutomорфизм δ — сопряжение проективным образом матрицы $\text{diag}(\omega^{q-1}, 1, \dots, 1)$ из $\text{GU}_n(q)$. Как и выше, автоморфизм ϕ группы L индуцирован действием автоморфизма Фробениуса (1.1)

на матрицах (α_{ij}) из $\mathrm{GU}_n(q)$. Определенный в (1.2) автоморфизм группы $\mathrm{GL}_n(q^2)$ оставляет инвариантной группу $\mathrm{GU}_n(q)$ и индуцирует на $\mathrm{PSU}_n(q)$ автоморфизм γ . В группе $\mathrm{Out} L$ выполнены соотношения

$$\delta^{(n,q+1)} = \gamma^2 = [\gamma, \phi] = 1, \quad \phi^e = \gamma, \quad \delta^\gamma = \delta^{-1}, \quad \delta^\phi = \delta^p$$

и $\mathrm{Out} L = \langle \delta, \phi, \gamma \rangle = \langle \delta, \phi \rangle$. В обозначениях [4, табл. 1.2] $\mathrm{Aut} L = \tilde{L} = \mathrm{PGU}_n(q)$.

С л у ч а й $L = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, $n \geq 2$. отождествим $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ как матричную группу с подгруппой в $\mathrm{GL}_{2n}(q)$ таких матриц g , что gg^T — блочно-диагональная матрица с n блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Автоморфизм δ — сопряжение проективным образом матрицы $\mathrm{diag}(\omega, \dots, \omega, 1, \dots, 1) \in \mathrm{GL}_{2n}(q)$, где количество символов ω равно n . Автоморфизм ϕ группы L индуцирован действием автоморфизма Фробениуса (1.1) на матрицах (α_{ij}) из $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$. В группе $\mathrm{Out} L$ выполнены соотношения

$$\delta^{(2,q-1)} = \phi^e = [\delta, \phi] = 1,$$

причем $\mathrm{Out} L = \langle \delta, \phi \rangle$ при $(n, p) \neq (4, 2)$ и $|\mathrm{Out} L : \langle \delta, \phi \rangle| = 2$ при $(n, p) = (4, 2)$. Образ группы \tilde{L} в $\mathrm{Out} L$ равен $\langle \delta, \phi \rangle$. В обозначениях [4, табл. 1.2] $L = \mathrm{PCSp}_{2n}(q)$.

Далее мы будем рассматривать ортогональные группы. Геометрически группы $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$, где ε — пустой символ при нечетных d и $\varepsilon = \pm$ при четных d , можно рассматривать как группы невырожденных преобразований конечномерного векторного пространства V размерности над полем F порядка q , сохраняющих заданную на V невырожденную квадратичную форму $Q : V \rightarrow F$. Во всех случаях с точностью до эквивалентности существуют две квадратичные формы, но сохраняющие их группы изоморфны, если d нечетно, и не изоморфны и индексируются знаком “+” или “−”, если d четно. Группа $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$ вложена в качестве нормальной подгруппы в группу $\mathrm{CGO}_d^\varepsilon(q)$ подобий формы Q , т. е. таких преобразований, под действием которых значение формы на любом векторе умножается на фиксированный ненулевой элемент поля, зависящий только от преобразования. С формой Q ассоциирована невырожденная симметрическая билинейная форма, определенная равенством

$$(u, v) = \frac{1}{(2, q-1)}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)). \quad (1.3)$$

Определитель любого преобразования из $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$ равен ± 1 , и $\mathrm{SO}_d^\varepsilon(q)$ — подгруппа в $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$, состоящая из преобразований с определителем 1. В ней, в свою очередь, есть (нормальная) подгруппа индекса 2, обозначаемая как $\Omega_d^\varepsilon(q)$. Вектор v называется несингулярным, если $Q(v) \neq 0$. Пусть q нечетно. Значение квадратичной формы на несингулярном векторе может быть или не быть квадратом в поле F . Для несингулярного вектора $v \in V$ определено отражение

$$r_v : u \mapsto u - 2 \frac{(u, v)}{(v, v)} v.$$

Отражения порождают группу $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$, и группа $\Omega_d^\varepsilon(q)$ состоит из тех преобразований в $\mathrm{SO}_d^\varepsilon(q)$, у которых в любом разложении в произведение отражений присутствует лишь четное число отражений, соответствующих несингулярным векторам с неквадратным значением формы.

С л у ч а й $L = \mathrm{P}\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 3$, q нечетно. С точностью до эквивалентности на V определены две невырожденные квадратичные формы, которым тем не менее соответствуют изоморфные ортогональные группы. Выбрав в V базис в соответствии с [12, предложение 2.5.3(iii)], мы можем отождествить $\mathrm{GO}_{2n+1}(q)$ как матричную группу с подгруппой в $\mathrm{GL}_{2n+1}(q)$ всех таких матриц g , что gg^T — блочно-диагональная матрица с n блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

и одним блоком (1). Автоморфизм ϕ группы L индуцирован действием автоморфизма Фробениуса (1.1) на матрицах (α_{ij}) из $\text{GO}_{2n+1}(q)$. Автоморфизм δ группы L — сопряжение проективным образом матрицы из $\text{SO}_{2n+1}(q) \setminus \Omega_{2n+1}(q)$ (например, образом произведения $r_v r_w$, где $Q(v)$ — квадрат, а $Q(w)$ — не квадрат в F^\times и $(v, w) = 0$). Отметим, что $\text{PSO}_{2n+1}(q) = \text{PGO}_{2n+1}(q)$. В группе $\text{Out } L$ выполнены соотношения

$$\delta^2 = \phi^e = [\delta, \phi] = 1,$$

причем $\text{Out } L = \langle \delta, \phi \rangle$. В обозначениях [4, табл. 1.2] $\text{Aut } L = \tilde{L} = \text{PCGO}_{2n+1}(q)$.

Случай $L = \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(q)$, $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+, -\}$. Выбрав в пространстве V подходящий базис, мы можем отождествить $\text{GO}_{2n}^\varepsilon(q)$ как матричную группу с подгруппой в $\text{GL}_{2n}(q)$ всех таких матриц g , что gg^T — матрица B , определенная следующим образом:

- B будет блочно-диагональной матрицей, состоящей из n блоков вида (1.4), если $\varepsilon = +$;
- B — единичная матрица, если $\varepsilon = -$ и числа q и $n(q-1)/2$ нечетны;
- в остальных случаях B будет блочно-диагональной матрицей, состоящей из $n-1$ блока вида (1.4) и одного блока

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

где $\mu \in F$ выбирается таким образом, что многочлен $t^2 + t + \mu \in F[t]$ неприводим над F .

Как следует из [12, предложение 2.5.13], при нечетных q дискриминант формы Q , т. е. определитель матрицы B , будет квадратом в поле F , если и только если $(-1)^{n(q-1)/2} = \varepsilon$.

Аutomорфизм γ индуцирован элементом порядка 2 из $\text{GO}_{2n}^\varepsilon(q) \setminus \text{SO}_{2n}^\varepsilon(q)$ при нечетных q и из $\text{SO}_{2n}^\varepsilon(q) \setminus \Omega_{2n}^\varepsilon(q)$ при четных q .

Отображение (1.1) оставляет инвариантной группу матриц $\text{GO}_{2n}^\varepsilon(q)$, если $\varepsilon = +$ или если $\varepsilon = -$ и числа q и $n(q-1)$ оба нечетны. В этих случаях ϕ — автоморфизм, индуцированный на $L = \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(q)$ отображением (1.1). Порядок образа ϕ в $\text{Out } L$ в этом случае равен e . В остальных случаях рассмотрим автоморфизм φ , который индуцируется на $\text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(q)$ композицией отображения Фробениуса и сопряжения некоторой матрицей c . Эта матрица подбирается таким образом, что данная композиция оставляет инвариантной матрицу B и, следовательно, группу $\text{GO}_{2n}^\varepsilon(q)$, как она определена выше. Точный вид матрицы B указан в [12, §2.8] и [4, §1.7.1]. При этом порядок образа φ в $\text{Out } L$ равен $2e$ и $\varphi^e = \gamma$.

В случае, когда q нечетно, определены диагональные автоморфизмы δ и δ' группы $L = \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(q)$. Определим сначала δ' . В случае, когда $(-1)^{n(q-1)/2} = \varepsilon$, автоморфизм δ' имеет порядок 2 и индуцирован сопряжением некоторым элементом из $\text{SO}_{2n}^\varepsilon(q) \setminus \Omega_{2n}^\varepsilon(q)$ (например, $r_v r_w$, где v, w — несингулярные ортогональные векторы такие, что $Q(v)$ — квадрат, а $Q(w)$ — не квадрат в поле F). В остальных случаях считаем δ' равным 1.

Аutomорфизм δ индуцирован сопряжением некоторой матрицей из $\text{CGO}_{2n}^\varepsilon(q) \setminus \text{GO}_{2n}^\varepsilon(q)$. Точный вид матрицы см. в [4, §1.7.1]. Порядок δ в группе $\text{Out } L$ находится следующим образом:

$$|\delta| = \begin{cases} 2, & \text{если } (-1)^{n(q-1)/2} = (\varepsilon 1)^n, \\ 4, & \text{если } (-1)^{n(q-1)/2} \neq (\varepsilon 1)^n. \end{cases}$$

При этом если $|\delta| = 4$, то $\delta^2 = \delta'$ в $\text{Out } L$.

В случае, когда q нечетно, образы групп $\text{PSO}_{2n}^\varepsilon(q)$, $\text{PGO}_{2n}^\varepsilon(q)$ и $\text{PCGO}_{2n}^\varepsilon(q)$ в $\text{Out } L$ совпадают с $\langle \delta' \rangle$, $\langle \delta', \gamma \rangle$ и $\langle \delta, \delta', \gamma \rangle$ соответственно.

Для удобства считаем, что $\delta = \delta' = 1$, если q четно. Образ группы $\text{Inndiag } L$ внутренне-диагональных автоморфизмов равен $\langle \delta, \delta' \rangle$ (см. [8, определение 2.5.10]). При нечетных q будем обозначать группу $\text{Inndiag } L$, следуя [9], через $\text{PCSO}_{2n}^\varepsilon(q)$. Группы $\text{PSO}_{2n}^\varepsilon(q)$, $\text{PCSO}_{2n}^\varepsilon(q)$,

$\text{PGO}_{2n}^\varepsilon(q)$ и $\text{PCGO}_{2n}^\varepsilon(q)$ представлены на следующей диаграмме.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{PCGO}_{2n}^\varepsilon(q) = \langle \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(q), \delta', \delta, \gamma \rangle & \\
 & \swarrow \quad \quad \quad \searrow & \\
 \text{PCSO}_{2n}^\varepsilon(q) = \langle \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(q), \delta', \delta \rangle & & \text{PGO}_{2n}^\varepsilon(q) = \langle \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(q), \delta', \gamma \rangle \\
 & \swarrow \quad \quad \quad \searrow & \\
 & \text{PSO}_{2n}^\varepsilon(q) = \langle \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(q), \delta' \rangle &
 \end{array}$$

Прообразы подгрупп $\langle \delta', \phi \rangle$, $\langle \delta', \phi, \gamma \rangle$, $\langle \delta, \delta', \phi \rangle$ и $\langle \delta, \delta', \gamma, \phi \rangle$ в $\text{Aut } L$ будем обозначать² символами $\text{P}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$, $\text{P}\Gamma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$, $\text{P}\text{C}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$ и $\text{P}\text{C}\Gamma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$ соответственно. При необходимости ϕ нужно заменить на φ . Группы $\text{P}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$, $\text{P}\text{C}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$, $\text{P}\Gamma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$ и $\text{P}\text{C}\Gamma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$ представлены на следующей диаграмме.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{P}\text{C}\Gamma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q) = \langle \text{P}\text{C}\Gamma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q), \phi \rangle & \\
 & \swarrow \quad \quad \quad \searrow & \\
 \text{P}\text{C}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q) = \langle \text{P}\text{C}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q), \phi \rangle & & \text{P}\Gamma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q) = \langle \text{P}\Gamma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q), \phi \rangle \\
 & \swarrow \quad \quad \quad \searrow & \\
 & \text{P}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q) = \langle \text{P}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q), \phi \rangle &
 \end{array}$$

В случае, когда q четно, группа $\text{PSO}_{2n}^\varepsilon(q) = \text{P}\Gamma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q) = \text{PCSO}_{2n}^\varepsilon(q) = \text{PCGO}_{2n}^\varepsilon(q)$ имеет образ в $\text{Out } L$, равный $\langle \gamma \rangle$. Группа $\text{Inndiag } L$ при этом совпадает с L .

Ниже приведены соотношения в группе $\text{Out } L$ и своим образом в $\text{Out } L$ определена группа \tilde{L} .

Если q четно и $\varepsilon = +$, то

$$\gamma^2 = \phi^\varepsilon = 1, \quad [\phi, \gamma] = 1,$$

причем $\text{Out } L = \langle \gamma, \phi \rangle$, кроме случая, когда $n = 4$. Образ \tilde{L} совпадает с $\langle \phi \rangle$.

Если q четно и $\varepsilon = -$, то

$$\gamma^2 = 1, \quad \varphi^\varepsilon = \gamma$$

и $\text{Out } L = \langle \varphi \rangle$. Образ \tilde{L} совпадает с $\langle \varphi \rangle$.

Если q нечетно, $\varepsilon = +$ и $n \geq 4$ четно, то

$$\delta'^2 = \delta^2 = \gamma^2 = \phi^\varepsilon = [\phi, \gamma] = [\delta, \phi] = 1, \quad (\delta\gamma)^2 = \delta',$$

причем $\text{Out } L = \langle \delta, \delta', \gamma, \phi \rangle = \langle \delta, \gamma, \phi \rangle$, кроме случая, когда $n = 4$. Образ \tilde{L} в $\text{Out } L$ совпадает с $\langle \delta, \delta', \phi \rangle$, т. е. \tilde{L} совпадает с $\text{P}\text{C}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$.

Если $q \equiv 1 \pmod{4}$, $\varepsilon = +$ и $n \geq 3$ нечетно, то

$$\delta'^2 = \gamma^2 = \phi^\varepsilon = [\phi, \gamma] = 1, \quad \delta^2 = \delta', \quad \delta^\gamma = \delta^{-1}, \quad \delta^\phi = \delta^p$$

и $\text{Out } L = \langle \delta, \delta', \gamma, \phi \rangle = \langle \delta, \gamma, \phi \rangle$. Образ \tilde{L} в $\text{Out } L$ совпадает с $\langle \delta, \delta', \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle$, т. е. \tilde{L} совпадает с $\text{P}\text{C}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$.

Если $q \equiv 3 \pmod{4}$, $\varepsilon = +$ и $n \geq 3$ нечетно, то

$$\delta^2 = \gamma^2 = \phi^\varepsilon = [\phi, \gamma] = [\phi, \delta] = [\gamma, \delta] = 1$$

²Отметим, что в литературе, в том числе в [2; 3], символом $\text{P}\Gamma\text{O}_d^\varepsilon(q)$ иногда обозначают группу, которую мы, следуя [4], обозначаем символом $\text{P}\text{C}\Gamma\text{O}_d^\varepsilon(q)$. С нашей точки зрения, символ $\text{P}\Gamma\text{O}_d^\varepsilon(q)$ для расширения группы $\text{P}\Gamma\text{O}_d^\varepsilon(q)$ группой полевых автоморфизмов хорошо согласуется с обозначениями из [4], и именно в этом значении он используется в настоящей работе.

и $\text{Out } L = \langle \delta, \gamma, \phi \rangle$. Образ \tilde{L} в $\text{Out } L$ совпадает с $\langle \delta, \phi \rangle$, т. е. \tilde{L} совпадает с $\text{PC}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$.

Если q нечетно, $\varepsilon = -$, $n \geq 3$ и либо n четно, либо $q \equiv 1 \pmod{4}$, то

$$\delta^2 = \gamma^2 = [\varphi, \delta] = [\gamma, \delta] = 1, \quad \varphi^e = \gamma,$$

причем $\text{Out } L = \langle \delta, \gamma, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$. Образ \tilde{L} в $\text{Out } L$ совпадает с $\langle \delta, \varphi \rangle$, т. е. \tilde{L} совпадает с $\text{PC}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$.

Если $q \equiv 3 \pmod{4}$, $\varepsilon = -$ и $n \geq 3$ нечетно, то

$$\delta'^2 = \gamma^2 = \phi^e = [\phi, \gamma] = [\phi, \delta] = 1, \quad \delta^2 = \delta', \quad \delta^\gamma = \delta^{-1}$$

и $\text{Out } L = \langle \delta, \delta', \gamma, \phi \rangle = \langle \delta, \gamma, \phi \rangle$. Образ \tilde{L} в $\text{Out } L$ совпадает с $\langle \delta, \delta', \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle$, т. е. \tilde{L} совпадает с $\text{PC}\Sigma\text{O}_{2n}^\varepsilon(q)$ и совпадает с $\text{Aut } L$.

Для случая, когда $(\varepsilon, n) = (+, 4)$, группа $L = \text{P}\Omega_8^+(q)$ допускает также автоморфизм τ порядка 3 такой, что $\langle \gamma, \tau \rangle \simeq \text{Sym}(3)$. В группе $\text{Out } L$ выполняются следующие соотношения.

Если q четно и $(\varepsilon, n) = (+, 4)$, то

$$\gamma^2 = \tau^3 = (\gamma\tau)^2 = \phi^e = 1, \quad [\phi, \gamma] = [\phi, \tau] = 1$$

и $\text{Out } L = \langle \gamma, \phi, \tau \rangle$.

Если q нечетно и $(\varepsilon, n) = (+, 4)$, то

$$\delta'^2 = \delta^2 = \gamma^2 = \tau^3 = (\gamma\tau)^2 = \phi^e = [\phi, \gamma] = [\delta, \phi] = [\tau, \phi] = 1, \quad (\delta\gamma)^2 = \delta', \quad \delta^\tau = \delta', \quad \delta'^\tau = \delta\delta'$$

и $\text{Out } L = \langle \delta, \delta', \gamma, \phi, \tau \rangle = \langle \delta, \gamma, \phi, \tau \rangle$.

Случай $L = E_6(q)$. Известно [8, теорема 2.5.12], что группа $\text{Out } L$ порождается автоморфизмами δ , ϕ и γ , где δ — диагональный автоморфизм, ϕ — полевой автоморфизм и γ — графовый автоморфизм. При этом выполнены соотношения

$$\delta^{(3, q-1)} = \phi^e = \gamma^2 = [\phi, \gamma] = 1, \quad \delta^\gamma = \delta^{-1}, \quad \delta^\phi = \delta^p.$$

Полагаем, в этом случае группу \tilde{L} такой, что ее образ в $\text{Out } L$ равен $\langle \delta, \phi \rangle$.

Обратим внимание на одно важное различие между терминологией и обозначениями в [2] и [4; 12]. Векторное пространство V размерности $2n + 1$ с определенной на нем квадратичной формой Q над полем \mathbb{F}_q характеристики 2 всегда обладает нетривиальным радикалом V^\perp относительно билинейной формы (1.3), ассоциированной с квадратичной формой Q . В [4; 12] форма Q считается вырожденной. Вместе с тем в [2, §3.1.1] считается, что форма Q невырождена на V , если V^\perp имеет размерность 1 и порождается некоторым несингулярным вектором. На фактор-пространстве V/V^\perp форма (1.3) индуцирует невырожденную симплектическую форму, группа изометрий которой изоморфна группе $\text{Sp}_{2n}(q) = \text{PSp}_{2n}(q)$, а также и группе изометрий квадратичной формы Q пространства V . Поэтому в случае, когда q четно, там, где в [2] речь идет о группах $\Omega_{2n+1}(q) = \text{P}\Omega_{2n+1}(q)$, мы пишем $\text{Sp}_{2n}(q) = \text{PSp}_{2n}(q)$, вместо $\text{P}\Omega_{2n+1}(q)$ пишем $\text{P}\Gamma\text{Sp}_{2n}(q)$ и так далее. При этом V будем называть *параболическим* пространством ранга n . Кроме того, параболическим удобно называть и пространство нечетной размерности с невырожденной квадратичной формой в случае, когда характеристика нечетна.

Также при четных q граф $\Gamma(Q_{2n}(q))$, ассоциированный с пространством V , изоморфен графу $\Gamma(W_{2n-1}(q))$ (см. [2, 2.6.4]), и мы его будем рассматривать в этом случае только как $\Gamma(W_{2n-1}(q))$.

2. Группы и графы ранга 3

Напомним, что группа G ранга 3 подстановок множества Ω задает на Ω два графа ранга 3, каждый из которых является дополнением другого. Граф Γ_G , фигурирующий в предложениях 1–4 ниже, определен с точностью до взятия дополнения.

Предложение 1. Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — примитивная почти простая группа подстановок ранга 3 на конечном множестве Ω , ее цоколь L — знакопеременная группа степени $n \geq 5$, M — стабилизатор точки в этом действии и Γ_G — соответствующий граф ранга 3. Если $\text{Soc } G^{(2)} = L$, то с точностью до подстановочного изоморфизма выполняется одно из следующих утверждений.

- 1) Ω — множество двухэлементных подмножеств n -элементного множества, $\Gamma_G = \Gamma(n)$ — граф треугольников. Тогда $G^{(2)} = \text{Sym}(n)$, в частности $G^{(2)} = \text{Aut } L$ при $n \neq 6$.
- 2) $n \in \{8, 10\}$, Ω — множество разбиений n -элементного множества в объединение непересекающихся подмножеств мощности $n/2$, Γ_G — S_n -граф. Тогда $G^{(2)} = \text{Sym}(n) = \text{Aut } L$.

Предложение 2. Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — примитивная почти простая группа подстановок ранга 3 на конечном множестве Ω мощности v , ее цоколь L — спорадическая группа, M — стабилизатор точки в этом действии и Γ_G — соответствующий граф ранга 3. Если $\text{Soc } G^{(2)} = L$, то с точностью до подстановочного изоморфизма $v = |\Omega|$, L , $M \cap L$, Γ_G и 2-замыкание $G^{(2)}$ группы G содержатся в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

**Почти простые группы подстановок ранга 3
со спорадическим цоколем**

шл.	$v = \Omega $	$L = \text{Soc } G$	$M \cap L$	Γ_G	$G^{(2)}$	ссылка
1	77	M_{22}	$2^4 \cdot \text{Alt}(6)$	$S(3, 6, 22)$	$\text{Aut } L$	[2, §10.27]
2	100	HS	M_{22}	Хигмэна-Симса	$\text{Aut } L$	[2, §10.31]
3	100	HJ	$\text{PSU}_3(3)$	Холла-Янко	$\text{Aut } L$	[2, §10.32]
4	176	M_{22}	$\text{Alt}(7)$	$S(4, 7, 23) \setminus S(3, 6, 22)$	L	[2, §10.51]
5	253	M_{23}	$2^4 \cdot \text{Alt}(7)$	$S(4, 7, 23)$	$L = \text{Aut } L$	[2, §10.56]
6	275	McL	$\text{PSU}_4(3)$	МакЛафлина	$\text{Aut } L$	[2, §10.61]
7	1288	M_{24}	$M_{12} \cdot 2$	граф додекаэдр	$L = \text{Aut } L$	[2, §10.80]
8	1782	Suz	$G_2(4)$	Сузуки	$\text{Aut } L$	[2, §10.83]
9	2300	Co_2	$\text{PSU}_6(2) \cdot 2$	Конвея	$L = \text{Aut } L$	[2, §10.88]
10	3510	Fi_{22}	$2 \cdot \text{PSU}_6(2)$	Fi_{22} -граф	$\text{Aut } L$	[2, §10.90]
11	4060	Ru	${}^2F_4(2)$	Рудвалиса	$L = \text{Aut } L$	[2, §10.91]
12	14080	Fi_{22}	$\Omega_7(3)$	Fi_{22} -граф	L	[2, §10.94]
13	31671	Fi_{23}	$2 \cdot Fi_{22}$	Fi_{23} -граф	$L = \text{Aut } L$	[2, §10.96]
14	137632	Fi_{23}	$\text{P}\Omega_8^+(3) \cdot \text{Sym}(3)$	Fi_{23} -граф	$L = \text{Aut } L$	[2, §10.97]
15	306936	Fi_{24}'	Fi_{23}	Fi_{24} -граф	$\text{Aut } L$	[2, §10.99]

Предложение 3. Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — примитивная почти простая группа подстановок ранга 3 на конечном множестве Ω , ее цоколь L — простая группа лиева типа над конечным полем порядка q и характеристики p , M — стабилизатор точки в этом действии и Γ_G — соответствующий граф ранга 3. Если $\text{Soc } G^{(2)} = L$, то с точностью до подстановочного изоморфизма либо $v = |\Omega|$, L , $M \cap L$, Γ_G и 2-замыкание $G^{(2)}$ группы G содержится в табл. 2, либо выполняется одно из следующих утверждений.

- 1) $L = \text{PSL}_n(q)$, $n \geq 4$, Ω — множество прямых для L в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = J_q(n, 2)$ — граф Грассмана. Тогда $G^{(2)} = \tilde{L} = \text{P}\Gamma\text{L}_n(q)$ при $n > 4$ и $G^{(2)} = \text{Aut } L = \langle \text{P}\Gamma\text{L}_n(q), \gamma \rangle$ при $n = 4$.
- 2) $L = \text{PSU}_n(q)$, $n \geq 3$, Ω — множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \Gamma(H_{n-1}(q^2))$ — эрмитов полярный граф. Тогда $G^{(2)} = \text{Aut } L = \tilde{L} = \text{P}\Gamma\text{U}_n(q)$.
- 3) $L = \text{PSU}_4(q)$, Ω — множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \text{GQ}(q, q^2)$ — обобщенный четырехугольник. Тогда $G^{(2)} = \text{Aut } L = \tilde{L} = \text{P}\Gamma\text{U}_4(q)$.
- 4) $L = \text{PSU}_5(q)$, Ω — множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \text{GQ}(q^3, q^2)$ — обобщенный четырехугольник. Тогда $G^{(2)} = \text{Aut } L = \tilde{L} = \text{P}\Gamma\text{U}_5(q)$.

- 5) $L = \text{PSU}_n(2)$, $n \geq 4$, Ω — множество анизотропных точек в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \overline{N\overline{U}}_m(2)$ — граф, в котором отношение смежности — ортогональность. Тогда $G^{(2)} = \text{Aut } L = \tilde{L} = \text{PGU}_n(2)$.
- 6) $L = \text{PSp}_{2n}(q)$, $n \geq 2$, Ω — множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \Gamma(W_{2n-1}(q))$ — симплектический полярный граф ранга n . Тогда $G^{(2)} = \tilde{L} = \text{PCSp}_{2n}(q)$, причем $G^{(2)} = \text{Aut } L$, если $(n, p) \neq (2, 2)$.
- 7) $L = \text{PSp}_4(q)$, Ω — множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \text{GQ}(q, q)$ — обобщенный четырехугольник. Тогда $G^{(2)} = \tilde{L} = \text{PCSp}_4(q)$, причем $G^{(2)} = \text{Aut } L$, если q нечетно.
- 8) $L = \text{PSp}_{2n}(q)$, $n \geq 2$, $q \in \{4, 8\}$, Ω — множество анизотропных гиперплоскостей одного типа (гиперболических или эллиптических) в параболическом пространстве ранга n над полем из q элементов, $\Gamma_G = \text{NO}_{2n+1}^\pm(q)$. Тогда $G^{(2)} = \tilde{L} = \text{PCSp}_{2n}(q)$. При этом $G = G^{(2)} = \text{PCSp}_{2n}(q)$, если $q = 8$. Кроме того, при $n > 2$ группа $G^{(2)}$ совпадает с $\text{Aut } L$.
- 9) $L = \text{P}\Omega_{2n+1}(3)$, $n \geq 2$, Ω — множество анизотропных гиперплоскостей одного типа (гиперболических или эллиптических) в параболическом пространстве ранга n над полем из 3 элементов, $\Gamma_G = \text{NO}_{2n+1}^\pm(3)$. Тогда $G^{(2)} = \text{Aut } L = \tilde{L} = \text{PSO}_{2n+1}(3)$.
- 10) $L = \text{P}\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 2$, q нечетно, Ω — множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \Gamma(Q_{2n}(q))$ — параболический ортогональный полярный граф ранга n . Тогда $G^{(2)} = \text{Aut } L = \tilde{L} = \text{PCGO}_{2n+1}(q)$.
- 11) $L = \text{P}\Omega_{2n}^+(q)$, $n \geq 3$, Ω — множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \Gamma(Q_{2n-1}(q))$ — гиперболический ортогональный полярный граф ранга n . Тогда $G^{(2)} = \text{PCGO}_{2n}^+(q)$, причем $G^{(2)} = \text{Aut } L$, если $n \neq 4$, и $G^{(2)}$ имеет индекс 3 в $\text{Aut } L$, если $n = 4$.
- 12) $L = \text{P}\Omega_{10}^+(q)$, Ω — множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \Delta_{1/2}$ — половинный граф двудольного дистанционно-регулярного графа $\Delta(X, \Omega)$ ортогонального полярного пространства ранга 5. Тогда $G^{(2)} = \tilde{L} = \text{PC}\Sigma\text{O}_{10}^+(q)$.
- 13) $L = \text{P}\Omega_{2n+2}^-(q)$, $n \geq 2$, Ω — множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \Gamma(Q_{2n+1}(q))$ — эллиптический ортогональный полярный граф ранга n . Тогда $G^{(2)} = \text{Aut } L = \text{PCGO}_{2n+2}^-(q)$.
- 14) $L = \text{P}\Omega_6^-(q)$, Ω — множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \text{GQ}(q^2, q)$ — обобщенный четырехугольник. Тогда $G^{(2)} = \text{Aut } L = \text{PCGO}_6^-(q)$.
- 15) $L = \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(2)$, $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, Ω — множество анизотропных точек в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \text{NO}_{2n}^\varepsilon(2)$ — граф, в котором отношение смежности — ортогональность. Тогда $G^{(2)} = \text{PSO}_{2n}^\varepsilon(2)$, причем $G^{(2)} = \text{Aut } L$, если $(n, \varepsilon) \neq (4, +)$, и $G^{(2)}$ имеет индекс 3 в $\text{Aut } L$, если $(n, \varepsilon) = (4, +)$.
- 16) $L = \text{P}\Omega_{2n}^\varepsilon(3)$, $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, Ω — множество анизотропных точек с фиксированным значением квадратичной формы в соответствующем проективном пространстве, $\Gamma_G = \text{NO}_{2n}^\varepsilon(3)$ — граф, в котором отношение смежности — ортогональность. Тогда $G^{(2)} = \text{PGO}_{2n}^\varepsilon(3)$ — подгруппа, образ которой в $\text{Out } L$ равен $\langle \delta', \phi, \gamma \rangle$; подгруппа $G^{(2)}$ имеет индекс 2 в $\text{Aut } L$, если $(n, \varepsilon) \neq (4, +)$, и индекс 6, если $(n, \varepsilon) = (4, +)$.
- 17) $L = E_6(q)$, Ω — множество смежных классов по подгруппе M , где $M \cap L$ — параболическая $D_5(q)$ -подгруппа группы L , Γ_G — это граф коллинеарности геометрии $E_{6,1}(q)$. Тогда $G^{(2)} = \tilde{L} = \langle \text{Inndiag } L, \phi \rangle$ — подгруппа в $\text{Aut } L$ индекса 2, а образ в $\text{Out } L$ равен $\langle \delta, \phi \rangle$.

Т а б л и ц а 2

Почти простые группы подстановок ранга 3 малой степени с цоколем лиева типа

пп.	$v = \Omega $	$L = \text{Soc } G$	$M \cap L$	Γ_G	$G^{(2)}$	ссылка
1	10	$\text{PSL}_2(5) \simeq \text{Alt}(5)$	$\text{Sym}(3)$	$T(5)$	$\text{Aut } L \simeq \text{Sym}(5)$	[2, §10.3]
2	15	$\text{PSL}_2(9) \simeq \text{Alt}(6)$	$\text{Sym}(4)$	$T(6)$	$\text{Sym}(6)$	[2, §10.5]
3	28	$\text{PSL}_4(2) \simeq \text{Alt}(8)$	$\text{Sym}(6)$	$T(8)$	$\text{Aut } L \simeq \text{Sym}(7)$	[2, §10.11]
4	35	$\text{PSL}_4(2) \simeq \text{Alt}(8)$	$2^4 : (\text{Sym}(3) \times \text{Sym}(3))$	S_8 -граф	$\text{Aut } L \simeq \text{Sym}(8)$	[2, §10.13]
5	36	$\text{PSU}_3(3)$	$\text{PSL}_3(2)$	$G_2(2)$ -граф	$\text{Aut } L$	[2, §10.14]
6*	50	$\text{PSU}_3(5)$	$\text{Alt}(7)$	Хоффмана — Синглтона	$L.2$	[2, §10.19]
7*	56	$\text{PSL}_3(4)$	$\text{Alt}(6)$	Гевирца	$L : 2^2$	[2, §10.20]
8	117	$\text{PSL}_4(3) \simeq \text{P}\Omega_6^+(3)$	$\text{PSp}_4(3) \simeq \text{P}\Omega_5(3)$	$\text{NO}_6^+(3)$	$\text{PGO}_6^+(3)$	[2, §10.35]
9*	162	$\text{PSU}_4(3)$	$\text{PSL}_3(4)$	$U_4(3)$ -граф	$L.(2^2)_{133}$	[2, §10.48]
10	416	$G_2(4)$	HJ	$G_2(4)$ -граф	$\text{Aut } L$	[2, §10.68]
11*	1408	$\text{PSU}_6(2)$	$\text{PSU}_4(3).2$	Конвея	$L.2$	[2, §10.81]

Примечание. Группа $L = \text{PSU}_4(3)$ имеет группу внешних автоморфизмов, изоморфную группе D_8 , которая содержит три класса инволюций, обозначаемых в [5] символами 2_1 (центральный элемент в D_8), 2_2 и 2_3 , и две элементарные абелевы подгруппы порядка 4, обозначенные как $(2^2)_{122}$ и $(2^2)_{133}$; расширение группы L с помощью последней из них и выступает в качестве группы $G^{(2)}$ в п. 9 табл. 2. В пп. 6, 7 и 11 строение группы $G^{(2)}$ однозначно восстанавливается из ее описания в табл. 2 по [5].

Предложение 4. Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — примитивная почти простая группа подстановок ранга 3 на конечном множестве Ω , L — ее цоколь, M — стабилизатор точки в этом действии и Γ_G — соответствующий граф ранга 3. Если $\text{Soc } G^{(2)} \neq L$, то с точностью до подстановочного изоморфизма $v = |\Omega|$, L , $M \cap L$, Γ_G и 2-замыкание $G^{(2)}$ группы G содержится в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Почти простые группы подстановок G ранга 3, для которых $\text{Soc } G^{(2)} \neq \text{Soc } G$

пп.	$v = \Omega $	$L = \text{Soc } G$	$M \cap L$	Γ_G	$G^{(2)}$	ссылка
1*	36	$\text{PSL}_2(8)$	D_{14}	$T(9)$	$\text{Sym}(9)$	[2, §10.15]
2	55	M_{11}	$M_{9.2}$	$T(11)$	$\text{Sym}(11)$	[2, §11.3.5]
3	66	M_{12}	$M_{10.2}$	$T(12)$	$\text{Sym}(12)$	[2, §11.3.5]
4	120	$\text{PSp}_6(2)$	$G_2(2)$	$\text{NO}_8^+(2)$	$\text{PSO}_8^+(2)$	[2, §10.39]
5	120	$\text{Alt}(9)$	$\text{P}\Gamma\text{L}_2(8)$	$\text{NO}_8^+(2)$	$\text{PSO}_8^+(2)$	[2, §11.3.1]
6	253	M_{23}	$M_{21.2}$	$T(23)$	$\text{Sym}(23)$	[2, §11.3.5]
7	276	M_{24}	$M_{22.2}$	$T(24)$	$\text{Sym}(24)$	[2, §11.3.5]
8	351	$G_2(3)$	$\text{PSU}_3(3).2$	$\text{NO}_7^-(3)$	$\text{PSO}_7(3)$	[2, §10.66]
9	1080	$\text{P}\Omega_7(3)$	$G_2(3)$	$\text{NO}_8^+(3)$	$\text{PGO}_8^+(3)$	[2, §10.78]
10	2016	$G_2(4)$	$\text{PSU}_3(4).2$	$\text{NO}_7^-(4)$	$\text{P}\Gamma\text{Sp}_6(4)$	[2, §3.1.4]
11*	130816	$G_2(8)$	$\text{PSU}_3(8).2$	$\text{NO}_7^-(8)$	$\text{P}\Gamma\text{Sp}_6(8)$	[2, §3.1.4]

Примечание. Группы G с цоколями $L = \text{PSL}_2(8)$ и $L = G_2(8)$ из соответственно пп. 1 и 11 табл. 3 имеют ранг 3, только если $G = \text{Aut } L$.

3. Доказательства основных результатов

Нам потребуются ряд вспомогательных лемм. Всюду далее Ω — конечное множество, $|\Omega| > 1$.

Лемма 1. Пусть $G \leq G^* \leq \text{Sym}(\Omega)$ и G транзитивна. Пусть $\alpha \in \Omega$, $H = G_\alpha$ и $H^* = G_\alpha^*$ — стабилизаторы точки α в G и G^* соответственно. Справедливы следующие утверждения.

- 1) $H = G \cap H^*$.
- 2) $G^* = H^*G$.
- 3) Если обе группы G и G^* имеют один и тот же ранг, то орбиты H и H^* на Ω совпадают.

- 4) Если $G \trianglelefteq G^*$, то $H^G = H^{G^*}$.
 5) Если $G \trianglelefteq G^*$ и H не имеет орбит длины 1, отличных от $\{\alpha\}$, то $H^* = N_{G^*}(H)$; в частности, $H = N_G(H)$.

Доказательство. Утверждение п. 1 очевидно. Поскольку G — транзитивная группа, для любого $g^* \in G^*$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $\alpha g^* = \alpha g$ и, следовательно, $g^* g^{-1} \in H^*$ и $g^* \in H^* G$. Тем самым $G^* \subseteq H^* G$ и п. 2 доказан. Так как орбиты группы H^* на Ω являются объединениями орбит группы H , из совпадения числа орбит групп H и H^* (т. е. из совпадения рангов групп G и G^*) следует, что каждая орбита группы H будет также орбитой H^* . Таким образом, орбиты групп H и H^* одни и те же, что и утверждается в п. 3. Утверждение п. 4 следует из пп. 1,2: если $G \trianglelefteq G^*$, то $H = H^* \cap G \trianglelefteq H^*$ и

$$H^{G^*} = H^{H^* G} = H^G.$$

Докажем п. 5. Ясно, что $H^* \leq N_{G^*}(H)$, если $G \trianglelefteq G^*$. Допустим, $g \in N_{G^*}(H) \setminus H^*$. Тогда $\beta := \alpha g \neq \alpha$. С другой стороны,

$$\beta H = \beta H^g = \alpha g H^g = \alpha H g = \alpha g = \beta;$$

противоречие с тем, что $\{\alpha\}$ — единственная орбита длины 1 группы H .

Лемма 2. Пусть $G \trianglelefteq X$ и $C_X(G) = 1$. Пусть $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$ — точное транзитивное подстановочное представление ранга 3 группы G и $H = G_\alpha$ — стабилизатор точки $\alpha \in \Omega$. Предположим, что орбиты на Ω группы H имеют попарно различные длины. Тогда $GN_X(H)$ — наибольшая подгруппа группы X , на которую отображение ϕ продолжается, оставаясь точным подстановочным представлением ранга 3 на множестве Ω .

Доказательство. Положим для краткости $H^0 := N_X(H)$ и $G^0 := H^0 G$.

Покажем сначала, что отображение $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$ можно продолжить до гомоморфизма $G^0 \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$, задающего действие на Ω группы G^0 . Из условия следует, что $\{\alpha\}$ — единственная орбита длины 1 группы H . Теперь в силу утверждения п. 5 леммы 1 имеем $H = N_G(H) = H^0 \cap G$. Рассмотрим множества

$$\Delta^0 = \{H^0 g \mid g \in G^0\} \quad \text{и} \quad \Delta = \{H g \mid g \in G\}.$$

Из равенств $G^0 = H^0 G$ и $H = H^0 \cap G$ следует, что $\Delta^0 = \{H^0 g \mid g \in G\}$ и что правило $H g \leftrightarrow H^0 g$ для всех $g \in G$ корректно задает естественное взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств Δ^0 и Δ . Это соответствие показывает, что действия группы G правыми сдвигами на множествах Δ и Δ^0 эквивалентны. Первое из этих действий канонически эквивалентно действию ϕ группы G на Ω , а действие группы G на Δ^0 является сужением на G канонического действия на Δ^0 группы G^0 . Следовательно, отображение ϕ по эквивалентности продолжается до действия на Ω группы G^0 .

Покажем далее, что определенное таким образом действие на Ω группы G^0 по-прежнему имеет ранг 3. Стабилизатором точки α при таком действии будет подгруппа H^0 , поэтому надо убедиться, что H^0 имеет ровно три орбиты. Всякая орбита подгруппы H^0 будет объединением орбит подгруппы H , поскольку $H \leq H^0$, причем одна из орбит подгруппы H^0 совпадает с орбитой $\{\alpha\}$ подгруппы H . Таким образом, если предположить, что число орбит подгруппы H^0 не равно 3, оно равно двум, и $\Omega \setminus \{\alpha\}$ — орбита подгруппы H^0 . Но, поскольку $H \trianglelefteq H^0$, орбиты подгруппы H на $\Omega \setminus \{\alpha\}$, т. е. две отличные от $\{\alpha\}$ орбиты подгруппы H , образуют систему импримитивности для действия H^0 на $\Omega \setminus \{\alpha\}$. В частности, они имеют равную длину, вопреки условию.

Покажем, наконец, что действие группы G^0 на Ω точное. Ядро K этого действия тривиально пересекается с нормальной подгруппой G , поскольку G действует точно. Значит, $[G, K] \leq G \cap K = 1$ и $K \leq C_X(G) = 1$.

Если теперь G^* — другая подгруппа группы X , содержащая G и такая, что действие группы G на Ω можно продолжить до точного подстановочного представления группы G^* ранга 3, то по лемме 1 $G^* = H^*G$, где H^* — стабилизатор в G^* точки α и $H^* = N_{G^*}(H) \leq N_X(H) = H^0$. Тем самым $G^* = H^*G \leq H^0G = G^0$, т. е. G^0 — наибольшая подгруппа в X с требуемыми свойствами, как и утверждается в лемме.

З а м е ч а н и е. Если в условиях леммы 2 рассматривать действие группы X на множестве классов сопряженных подгрупп группы G , индуцированное сопряжениями, подгруппа $GN_X(H)$ совпадает со стабилизатором в X класса H^G .

Следующее утверждение хорошо известно и приводится здесь лишь для полноты изложения. Оно понадобится для того, чтобы непосредственно применить [13, теорема 1] при доказательстве предложений 1–4. В качестве альтернативы можно воспользоваться [15, теорема 2].

Лемма 3. Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — почти простая примитивная группа подстановок ранга 3 и $L = \text{Soc } G$. Тогда $N_{\text{Sym}(\Omega)}(L)$ — также почти простая группа с цокелем L . В частности, цокель группы $G^{(2)}$ равен L , если и только если $G^{(2)} \leq N_{\text{Sym}(\Omega)}(L)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку L является цокелем и единственной минимальной нормальной подгруппой примитивной группы G , группа $N_{\text{Sym}(\Omega)}(L)$ также примитивна и в соответствии с [7, теорема 4.3В] либо группа L регулярна на Ω , либо $C_{\text{Sym}(\Omega)}(L) = 1$. Допустим, L регулярна на Ω . Тогда $|\Omega| = |L|$. Так как G — группа ранга 3, длина одной из орбит группы G на Ω^2 не меньше, чем $(|L|^2 - |L|)/2$. Пусть пара (α, β) принадлежит этой орбите. Тогда

$$\frac{|L|^2 - |L|}{2} \leq |G : G_{\alpha\beta}| \leq |G| \leq |\text{Aut } L|,$$

откуда $(|L| - 1)/2 \leq |\text{Out } L|$. Но, какова бы ни была неабелева простая группа L , согласно [16, лемма 2.2] выполнено неравенство $|\text{Out } L| \leq |L|/30$, что очевидно противоречит предыдущему неравенству. Значит, $C_{\text{Sym}(\Omega)}(L) = 1$ и нормализатор $N_{\text{Sym}(\Omega)}(L)$ изоморфно вкладывается в $\text{Aut } L$.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложений 1–4. Напомним, что G — почти простая группа с неабелевым простым цокелем L , действующая как группа подстановок ранга 3 на некотором конечном множестве Ω . Тем самым на Ω определена структура сильно регулярного графа Γ_G степени v и валентности k . Пусть также M — стабилизатор некоторой точки $\alpha \in \Omega$. Как следует из условий доказываемых предложений (см. также введение настоящей работы), мы считаем, что группа G примитивна, т. е. M — максимальная подгруппа группы G .

Допустим, что $\text{Soc } G^{(2)} \neq L$, как в условии предложения 4. Тогда $G^{(2)} \not\leq N_{\text{Sym}(\Omega)}(L)$ по лемме 3 и из [13, теорема 1] следует, что имеет место один из следующих случаев А.І–А.ІІІ.

С л у ч а й А.І: тройка $(G, v, G^{(2)})$ присутствует в списке

$$(\text{P}\Gamma\text{L}_2(8), 36, \text{Sym}(9)), \quad (M_{11}, 55, \text{Sym}(11)), \quad (M_{12}, 66, \text{Sym}(12)), \\ (M_{23}, 253, \text{Sym}(23)), \quad (M_{24}, 276, \text{Sym}(24)), \quad (\text{Alt}(9), 120, \text{PSO}_8^+(2)).$$

Как видно из [2, теоремы 11.3.1–11.3.5], группа G действительно имеет ранг 3, и каждая из перечисленных троек соответствует пп. 1–3 и 5–7 в табл. 3. По ссылке, указанной в последнем столбце табл. 3, определяем $M \cap L$ и граф Γ_G . Таким образом, утверждение предложения 4 в случае А.І верно.

С л у ч а й А.ІІ: $L = G_2(q)$, $v = |\Omega| = q^3(q^3 - 1)/2$, и если q нечетно, то $\text{Soc } G^{(2)} = \text{P}\Omega_7(q)$, а если q четно, то $\text{Soc } G^{(2)} = \text{PSp}_6(q)$. Из [2, теорема 11.3.4] и [13, предложение 1] (и замечание после него) заключаем, что группа G с цокелем L может быть группой ранга 3 только при $q = 3, 4, 8$, что соответствует пп. 8, 10 и 11 в табл. 3, причем при $q = 8$ группа G с цокелем $L = G_2(q)$ может быть группой ранга 3, только если $G = G_2(8).3 = \text{Aut } L$. По ссылке, указанной в

последнем столбце табл. 3, определяем, что $M \cap L = \text{PSU}_3(q).2$, и при q четном — $\Gamma_G = \text{NO}_7^-(q)$, а при $q = 3$ — $\Gamma_G = \text{NO}_7^{-\perp}(3)$. Информация о группе $G^{(2)}$ будет получена при доказательстве предложения 3 в пп. 8 и 9 (см. разбор случая В.IV ниже).

С л у ч а й А.III: $L = \text{P}\Omega_7(q)$ при нечетном q и $L = \text{PSp}_6(q)$ при четном q , $v = q^3(q^4 - 1)/(2, q - 1)$ и $\text{Soc } G^{(2)} = \text{P}\Omega_8^+(q)$. Из [13, предложение 2] с учетом принятых ранее соглашений заключаем, что группа G с цокелем L может быть группой ранга 3 только при $q = 2, 3$, что соответствует пп. 4 и 9 в табл. 3. По ссылке, указанной в последнем столбце табл. 3, определяем, что $M \cap L = G_2(q)$ и $\Gamma_G = \text{NO}_8^+(q)$. Полная информация о группе $G^{(2)}$ будет получена после того, как будет доказано предложение 3 в утверждениях пп. 15 и 16 этого предложения (см. разбор случая В.IV ниже).

Пусть далее, как и в условиях предложений 1–3, цокель группы $G^{(2)}$ совпадает с L . Поскольку группа содержится в своем 2-замыкании, имеем

$$L \trianglelefteq G \leq G^{(2)} \leq X, \quad (3.1)$$

где $X = \text{Aut } L$. Пусть $H = L_\alpha = M \cap L$ — стабилизатор в L точки $\alpha \in \Omega$. Рассмотрим случаи В.I–В.IV, когда группа L является соответственно знакопеременной, спорадической, исключительной или классической группой.

С л у ч а й В.I: L — знакопеременная группа степени не меньше 5 и $\text{Soc } G^{(2)} = L$. Все возможности для действия группы G со знакопеременным цокелем описаны в теореме Банаи [1] (см. также [2, теорема 11.3.1]). В частности, из этой теоремы вытекает, что группа L сама действует на Ω как группа ранга 3 и, за исключением случая, когда $L = \text{Alt}(7)$ и $\Gamma_G = \Gamma_L = T(7)$, длины k и $v - k - 1$ отличных от $\{\alpha\}$ орбит группы H на Ω различны. Если $\Gamma_G = \Gamma_L = T(7)$, то $G^{(2)} = \text{Aut } \Gamma_G = \text{Sym}(7)$ согласно [3, теорема 9.1.2]. В остальных случаях в силу (3.1) и леммы 2 группа $G^{(2)}$ совпадает со стабилизатором в $\text{Aut } L$ класса сопряженности H^L подгруппы H . Снова из теоремы Банаи и строения группы автоморфизмов знакопеременной группы заключаем, что либо $L \neq \text{Alt}(6)$, класс сопряженности H^L инвариантен относительно $\text{Aut } L = \text{Sym}(6)$ и имеет место одно из утверждений 1), 2) в предложении 1, либо $L = \text{Alt}(6)$ и с точностью до подстановочной эквивалентности $\Gamma_L = T(6)$. В последнем случае $G^{(2)} = \text{Aut } \Gamma_G = \text{Sym}(6)$ — подгруппа индекса 2 в $\text{Aut } L$ (см. [3, теорема 9.1.2]). Таким образом, в случае, когда L — простая знакопеременная группа, справедливо предложение 1.

С л у ч а й В.II: L — спорадическая группа и $\text{Soc } G^{(2)} = L$. Все возможности (19 случаев), когда группа G со спорадическим цокелем действует как группа ранга 3, перечислены в [2, теорема 11.3.5 и табл. 11.3]. Если

$$(L, v) \in \{(M_{11}, 55), (M_{12}, 66), (M_{23}, 253), (M_{24}, 276)\},$$

то, как мы видели при разборе случая I, $\text{Soc } G^{(2)} \neq L$. Оставшиеся 15 случаев соответствуют пп. 1–15 табл. 1. Из параграфа монографии [2], указанного в последнем столбце таблицы, находим информацию о подгруппе $H = M \cap L$, графе Γ_G и группе $\text{Aut } \Gamma_G = G^{(2)}$. Таким образом, убеждаемся в справедливости предложения 2.

С л у ч а й В.III: L — исключительная группа лиева типа и $\text{Soc } G^{(2)} = L$. Группы ранга 3 с исключительным простым цокелем описаны в [2, теорема 11.3.4]. Если

$$(L, v) \in \{(G_2(3), 351), (G_2(4), 2016), (G_2(8), 130816)\},$$

то, как мы видели при разборе случая А.II, $\text{Soc } G^{(2)} \neq L$. В остальных случаях согласно [2, теорема 11.3.4] либо

$$L = G_2(4), \quad v = 416 \quad \text{и} \quad H = HJ = J_2,$$

$$\text{либо} \quad L = E_6(q), \quad v = \frac{(q^{12} - 1)(q^9 - 1)}{(q^4 - 1)(q - 1)} \quad \text{и} \quad H \text{ — параболическая подгруппа типа } D_5(q).$$

Ситуация $L = G_2(4)$ соответствует п. 10 в табл. 2, и из [2, §10.68] находим информацию о Γ_G и убеждаемся, что $G^{(2)} = \text{Aut } \Gamma_G = \text{Aut } L$, как и утверждается в предложении 3. Если же $L = E_6(q)$, то в силу [2, теорема 11.3.4] сама группа L действует на Ω как группа ранга 3. Поэтому $G^{(2)}$ совпадает со стабилизатором в $\text{Aut } L$ класса сопряженности H^L подгруппы H . Известно (см., например, [6, табл. 9]), что в группе L имеется два класса сопряженности параболических подгрупп H указанного строения. Эти классы переставляются графовым автоморфизмом, а стабилизатор класса совпадает с группой \tilde{L} , как указано в утверждении п. 17 предложения 3.

Случай В.IV: L — классическая простая группа лиева типа и $\text{Soc } G^{(2)} = L$. Все возможности для действия группы G перечислены в [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3]. Часть этих возможностей соответствует случаям, перечисленным в табл. 2. Если L и v указаны в этой таблице, то $H = M \cap L$; граф Γ_G и группа автоморфизмов графа Γ_G находятся в параграфе монографии [2], указанном в последнем столбце табл. 3. Пункты 1–4 этой таблицы в силу известных изоморфизмов соответствуют случаям, когда L — знакопеременная группа и группа $G^{(2)}$ известна (см. случай В.I). В остальных случаях группа $\text{Aut } \Gamma_G$ явно указана в соответствующем параграфе в [2]. Далее, часть возможностей в [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3] соответствуют случаю, когда

$$(L, v) \in \{(\text{PSL}_2(8), 36), (\text{PSp}_6(2), 120), (\text{P}\Omega_7(3), 1080)\},$$

и тогда см. случаи А.I и А.II.

Наконец, все оставшиеся возможности в [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3] соответствуют случаям, когда группа L и действие группы G перечислены в пп. 1–16 предложения 3. Начнем их разбор со случая, когда $L = \text{PSp}_{2n}(q)$, где $q = 8$, и группа G с поколем L действует на множестве Ω гиперболических или эллиптических гиперплоскостей $(2n + 1)$ -мерного векторного пространства с невырожденной квадратичной формой; в этом случае, как явно указано в [2, теорема 11.3.2(iv)], группа G как подгруппа в $X = \text{Aut } L$ определена однозначно, а именно $G = \text{PSp}_{2n}(8).3 = \text{PCSp}_{2n}(8)$. В частности, $G^{(2)} = G = \text{PCSp}_{2n}(8) = \tilde{L}$. Таким образом, выполнено утверждение п. 8 в предложении 3.

Во всех остальных случаях согласно [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3] поколь L группы G сам действует на Ω как группа ранга 3. Это действие с точностью до подстановочной эквивалентности и возникающий граф $\Gamma_G = \Gamma_L$ совпадают с действием и графом, указанными в утверждениях пп. 1–16 предложения 3 (за исключением случая, когда $q = 8$ в п. 8, рассмотренном выше). Отсюда вытекает, что H — максимальная подгруппа, являющаяся стабилизатором некоторого подпространства, вполне изотропного или невырожденного, в соответствующем проективном модуле V . Значит, H является элементом класса Ашбахера \mathcal{C}_1 . Стабилизаторы классов сопряженности элементов классов Ашбахера в $\text{Aut } L$ известны и указаны для случая, когда проективная размерность V не меньше 12, в [12, табл. 3.5G] с учетом информации в столбце V из [12, табл. 3.5A–3.5F], а для случая, когда проективная размерность V не превосходит 11, — в [4, табл. 8.1–8.85]. Во всех случаях убеждаемся, что стабилизатор в $X = \text{Aut } L$ класса сопряженности подгруппы H совпадает с группой, заявленной в качестве группы $G^{(2)}$ в соответствующем пункте предложения 3. Непосредственные вычисления с использованием параметров графа Γ_L показывают, что длины k и $v - k - 1$ отличных от $\{\alpha\}$ орбит подгруппы H различны (если p — характеристика поля, над которым рассматривается пространство V , то можно сравнить максимальные степени числа p , делящие k и $v - k - 1$). По лемме 2 каждое утверждение пп. 1–16 в предложении 3 выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bannai E.** Maximal subgroups of low rank of finite symmetric and alternating groups // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1971/72. Vol. 18. P. 475–486.
2. **Brouwer A.E., Van Maldeghem H.** Strongly regular graphs. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2022. 425 p. <https://doi.org/10.1017/9781009057226>
3. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; NY: Springer-Verlag, 1989. 495 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-74341-2>

4. **Bray J., Holt D., Roney-Dougal C.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. 438 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139192576>
5. **Conway J.H., et al.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. **Craven D.A.** The maximal subgroups of the exceptional groups $F_4(q)$, $E_6(q)$, and ${}^2E_6(q)$ and related almost simple groups // *Invent. Math.* 2023. Vol. 234. P. 637–719. <https://doi.org/10.1007/s00222-023-01208-2>
7. **Dixon J.D., Mortimer B.** Permutation groups. Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 163. NY: Springer, 1996. 348 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3>
8. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, Number 3. Part I, Ch. A: Almost simple \mathcal{K} -groups. Providence, RI: Ams. Math. Soc., 1998.
9. **Гречкосеева М.А.** О спектрах почти простых расширений ортогональных групп четной размерности // *Сиб. мат. журн.* 2018. Т. 59, № 4. С. 791–813. <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.405>
10. **Guo J., Vasil'ev A.V., Wang Z.** The automorphism groups of small affine rank 3 graphs. 12 p. URL: <https://arxiv.org/abs/2410.04341>. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.04341>
11. **Kantor W.M., Liebler R. A.** The rank 3 permutation representations of the finite classical groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1982. Vol 271. P. 1–71.
12. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511629235>
13. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** On the 2-closures of finite permutation groups // *J. London Math. Soc.* (2). 1988. Vol. 37. no. 2. P. 241–252. <https://doi.org/10.1112/JLMS/S2-37.2.241>
14. **Liebeck M.W., Saxl J.** The finite primitive permutation groups of rank three // *Bull. London Math. Soc.* 1986. Vol. 18. P. 165–172. <https://doi.org/10.1112/blms/18.2.165>
15. **Praeger C.E., Saxl J.** Closures of finite primitive permutation groups // *Bull. London Math. Soc.* 1992. Vol. 24. P. 251–258. <https://doi.org/10.1112/BLMS/24.3.251>
16. **Quick M.** Probabilistic generation of wreath products of non-abelian finite simple groups // *Comm. Algebra.* 2004. Vol 32. no. 12. P. 4753–4768. <https://doi.org/10.1142/S0218196706003074>
17. **Skresanov S.V.** On 2-closures of rank 3 groups // *Ars Math. Contemp.* 2021. Vol. 21, no. 1. Paper no. 1.08. <https://doi.org/10.26493/1855-3974.2450.1dc>
18. **Steinberg R.** Automorphisms of finite linear groups // *Canadian J. Math.* 1960. Vol. 12. P. 606–615. <https://doi.org/10.4153/CJM-1960-054-6>

Поступила 12.10.2024

После доработки 6.12.2024

Принята к публикации 9.12.2024

Опубликована онлайн 12.12.2024

Ван Чжиган (Wang Zhigang)

PhD, профессор

Школа математики и статистики, Хайнаньский университет;

г. Хайкоу, провинция Хайнань, КНР

e-mail: wzhigang@hainanu.edu.cn

Васильев Андрей Викторович

д-р физ.-мат. наук, профессор

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

e-mail: vasand@math.nsc.ru

Ревин Данила Олегович

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск;

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: revin@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Bannai E. Maximal subgroups of low rank of finite symmetric and alternating groups. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 1971/72, vol. 18, pp. 475–486.

2. Brouwer A.E., Van Maldeghem H. *Strongly regular graphs*. Ser. Encyclopedia Math. and its Appl., vol. 182, Cambridge: Camb. Univ. Press, 2022, 425 p. <https://doi.org/10.1017/9781009057226>
3. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumeier A. *Distance-regular graphs*. Berlin, Heidelberg, NY: Springer-Verlag, 1989, 495 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-74341-2>
4. Bray J., Holt D., Roney-Dougal C. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*. London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, 438 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139192576>
5. Conway J.H., et al. *Atlas of finite groups*. Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p.
6. Craven D.A. The maximal subgroups of the exceptional groups $F_4(q)$, $E_6(q)$, and ${}^2E_6(q)$ and related almost simple groups. *Invent. Math.*, 2023, vol. 234, pp. 637–719. <https://doi.org/10.1007/s00222-023-01208-2>
7. Dixon J.D., Mortimer B. *Permutation groups*. Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 163, NY: Springer, 1996, 348 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3>
8. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups*, Number 3, Part I, Ch. A: *Almost simple \mathcal{K} -groups*, Ser. Math. Surv. Monogr., 40.3, Providence, RI: Ams. Math. Soc., 1998.
9. Grechkoseeva M.A. On spectra of almost simple extensions of even-dimensional orthogonal groups. *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 623–640. <https://doi.org/10.1134/S0037446618040055>
10. Guo J., Vasil'ev A.V., Wang Z. The automorphism groups of small affine rank 3 graphs. 12 p. Available at <https://arxiv.org/abs/2410.04341>. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.04341>
11. Kantor W.M., Liebler R.A. The rank 3 permutation representations of the finite classical groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, vol. 271, pp. 1–71. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511629235>
12. Kleidman P., Liebeck M. *The subgroup structure of the finite classical groups*. Cambridge: University Press, 1990.
13. Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J. On the 2-closures of finite permutation groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 1988, vol. 37., no. 2, pp. 241–252. <https://doi.org/10.1112/JLMS/S2-37.2.241>
14. Liebeck M.W., Saxl J. The finite primitive permutation groups of rank three. *Bull. London Math. Soc.*, 1986, vol. 18, pp. 165–172. <https://doi.org/10.1112/blms/18.2.165>
15. Praeger C.E., Saxl J. Closures of finite primitive permutation groups. *Bull. London Math. Soc.*, 1992, vol. 24, pp. 251–258. <https://doi.org/10.1112/BLMS/24.3.251>
16. Quick M. Probabilistic generation of wreath products of non-abelian finite simple groups. *Comm. Algebra.*, 2004, vol. 32, no. 12, pp. 4753–4768. <https://doi.org/10.1142/S0218196706003074>
17. Skresanov S.V. On 2-closures of rank 3 groups. *Ars Math. Contemp.*, 2021, vol. 21, no. 1, paper no. 1.08. <https://doi.org/10.26493/1855-3974.2450.1dc>
18. Steinberg, R. Automorphisms of finite linear groups. *Canadian J. Math.*, 1960, vol. 12, pp. 606–615. <https://doi.org/10.4153/CJM-1960-054-6>

Received October 12, 2024

Revised December 6, 2024

Accepted December 9, 2024

Published online December 12, 2024

Funding Agency: The research of A. V. Vasil'ev and D. O. Revin was carried out within the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics (FWNF-2022-0002).

Zhigang Wang, PhD, Prof., School of Mathematics and Statistics, Hainan Univ., Haikou, Hainan, 570225, P. R. China, e-mail: wzhigang@hainanu.edu.cn.

Andrey Viktorovich Vasil'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberia Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: vasand@math.nsc.ru.

Danila Olegovich Revin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberia Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: revin@math.nsc.ru.

Cite this article as: Z. Wang, A. V. Vasil'ev, D. O. Revin. On the almost simple automorphism groups of rank 3 graphs. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 36–52.