ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 1 2025

УДК 517.977, 621.9:519.6(035)

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ

А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов

Рассматриваются задачи маршрутизации перемещений с ограничениями предшествования и функциями стоимости с зависимостью от списка заданий. Исследуются варианты аддитивного агрегирования затрат и минимаксной постановки (задача на узкие места). Предполагается, что вся совокупность заданий, связанных с посещением мегаполисов (непустых конечных множеств), разбита в сумму двух кластеров, в результате чего возникают две частные задачи: предваряющая и финальная. Выполнение заданий финальной задачи может быть начато только после завершения всех заданий предваряющей. Целью исследования является оптимизация композиционных решений в случаях аддитивной и минимаксной постановок. Предлагается единый подход, связанный с раздельным решением предваряющей и финальной задач с использованием широко понимаемого динамического программирования. Построен оптимальный алгоритм для композиционного решения задач ощутимой размерности с приемлемым для практики быстродействием. Возможные применения могут быть связаны с задачей о демонтаже радиационно опасных объектов, задачей управления инструментом при фигурной листовой резке на машинах с ЧПУ, а также с некоторыми транспортными задачами, касающимися логистических проблем в малой авиации.

Ключевые слова: динамическое программирование, композиционные решения, условия предшествования.

A. G. Chentsov, P. A. Chentsov. Dynamic programming and decomposition in extreme routing problems.

Problems of movement routing with precedence constraints and cost functions depending on the list of tasks are considered. Variants of additive cost aggregation and minimax statement (bottleneck problem) are studied. It is assumed that the entire set of tasks related to visiting megalopolises (nonempty finite sets) is divided into the sum of two clusters; as a result, two particular problems arise: preliminary and final. The execution of tasks of the final problem can be started only after the completion of all tasks of the preliminary one. The aim of the study is to optimize compositional solutions in the cases of additive and minimax statements. A unified approach is proposed related to the separate solution of the preliminary and final problems using broadly understood dynamic programming. An optimal algorithm for the compositional solution of problems of significant dimension with practically acceptable performance is constructed. Possible applications may include the problem of dismantling radiation-hazardous objects, tool control during shaped sheet cutting on CNC machines, and some transport problems related to logistical problems in small aviation.

Keywords: dynamic programming, compositional solutions, precedence conditions.

MSC: 90C27

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-03

Статья посвящена светлой памяти
Евгения Георгиевича Пыткеева —
выдающегося ученого-тополога,
педагога и прекрасного человека.

Введение

Рассматриваются задачи маршрутизации, имеющие смысл последовательного обхода мегаполисов (непустых конечных множеств). По постановке возможны условия предшествования, задаваемые посредством упорядоченных пар (УП) индексов заданий; такие УП именуем адресными. Упомянутые условия могут возникать по разным причинам и порождают ограничения на выбор способа нумерации посещаемых мегаполисов. Данная нумерация определяется перестановкой индексов заданий; сами перестановки именуем маршрутами, следуя традиции задачи коммивояжера (ЗК) (см. [1–7] и др.), которая является прототипом изучаемых ниже задач маршрутизации, ориентированных на инженерные приложения. Трудности вычислительной реализации, присущие ЗК, сохраняются и для исследуемых в работе задач маршрутизации. Среди возможных приложений выделим задачу о последовательном демонтаже радиационно опасных объектов (см. [8–10] и др.) и задачу управления инструментом при фигурной листовой резке деталей на машинах с ЧПУ (см. [11–14] и др.). В этих случаях естественной представляется математическая модель с аддитивным критерием. В некоторых задачах транспортного типа, напротив, возникает потребность в модели, использующей неаддитивный вариант агрегирования затрат (см. [15–17] и др.). Речь идет о задаче на узкие места (минимаксной задаче; заметим, что более общие постановки с неаддитивным агрегированием рассматривались в [15]).

В указанных исследованиях [8–17] в качестве основного инструмента использовалось широко понимаемое динамическое программирование (ДП), восходящее к построениям [18, § 4.9]. Данная конструкция на основе ДП определяет структуру оптимальных решений в очень общих задачах с ограничениями предшествования и функциями стоимости с зависимостью от списка заданий (такого рода зависимость естественно возникает в задаче о демонтаже радиационно опасных объектов: “светят” те и только те объекты, которые не демонтированы на данный момент; в задаче, связанной с листовой резкой, упомянутая зависимость может создаваться искусственно в интересах построения системы штрафов за нарушение условий, обеспечивающих эффективный отвод тепла при осуществлении врезки, см. [12, § 1.3.3]). Трудность вычислительной реализации в задачах ощутимой размерности заставляет обращаться к эвристикам (см. [11]) или к решению задачи по “частям”. В последнем случае имеется в виду декомпозиция полной задачи с использованием частичных задач меньшей размерности. В этой связи отметим, в частности, монографию [19].

В ряде случаев декомпозиция отвечает существу инженерной задачи. Так, при термической резке деталей на машинах с ЧПУ на инженерном уровне принимается требование о предваряющей резке длинномерных деталей (см. [12, с. 46]), расположенных вблизи узкой границы материала. Это требование естественно приводит к формированию предваряющей частичной задачи. В интересах обеспечения условий жесткости материала используется резка зонами, которые предварительно упорядочиваются (см. [12, с. 47]). Здесь уже может возникать более двух частичных задач, отвечающих кластерам, порождаемым зонами (отметим в этой связи алгоритм в [20, § 12] для задачи резки зонами). В описанных случаях декомпозиция не приводит к огрублению исходной задачи; наоборот, она позволяет учесть ее важные с инженерной точки зрения особенности. Полезно отметить, что (см. [20–22] и др.) сама логика построения оптимального композиционного решения оказывается одной и той же для аддитивной и минимаксной постановок; с учетом этого ниже будет сформулирован единый алгоритм, после чего будут рассмотрены две его естественные конкретизации (см. в этой связи [20–23]).

1. Общие сведения

Используется стандартная теоретико-множественная символика: $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Если x и y — объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем их неупорядоченную пару, т. е. множество со свойствами $x \in \{x; y\}$, $y \in \{x; y\}$, $(z = x) \ \vee \ (z = y)$ при $z \in \{x; y\}$. Для каждого объекта m в виде $\{m\} \triangleq \{m; m\}$ имеем синглетон, содержащий m. Множества — объекты, а потому [24, с. 67] для двух объектов p и q определяем их УП $(p, q) \triangleq \{\{p\}; \{p; q\}\}$ с первым элементом p и вторым элементом q. Если h — произвольная УП, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h, однозначно определямые равенством $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Если же x, y и z — три объекта, то $(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$. Напомним, что (см. [25, с. 17]) для всяких трех множеств A, B и C

$$A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C; \tag{1.1}$$

тогда $(x,y) \in A \times B \times C$ при $x \in A \times B$ и $y \in C$. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств (п/м)H, а через $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех непустых конечных п/м H. Для любых двух непустых множеств A и B через B^A обозначаем (см. [24, гл. II]) множество всех отображений (функций) из A в B; если $f \in B^A$ и $a \in A$, то $f(a) \in B$ — значение f в точке a. Если A и B — непустые множества, $h \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $h^1(C) \triangleq \{h(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии h; $h^1(C) \in \mathcal{P}'(B)$ при $C \in \mathcal{P}'(A)$, $h^1(\varnothing) = \varnothing$. Используем обычные соглашения для значений функций нескольких переменных. Так, для трех непустых множеств A, B и C, $h \in C^{A\times B}$, $a \in A$ и $b \in B$, как обычно, $h(a,b) \triangleq h((a,b)) \in C$. Для четырех непустых множеств A, B, C и D, $g \in D^{A\times B\times C}$, $\mu \in A \times B$ и $\nu \in C$ в виде $g(\mu,\nu) \in D$ имеем (см. (1.1)) значение g в точке $(\mu,\nu) = (\mu_1,\mu_2,\nu)$, где $\mu_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(\mu)$ и $\mu_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(\mu)$; используем также традиционное обозначение: $g(\mu_1,\mu_2,\nu) \triangleq g(\mu,\nu) \in D$.

В дальнейшем $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$ ($\mathbb{R}$ вещественная прямая), $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$; $\overline{p,q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leqslant k)\&(k \leqslant q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)\ \ \forall p \in \mathbb{N}_0\ \ \forall q \in \mathbb{N}_0$ (ясно, что $\overline{1,0} = \varnothing$ и $\overline{1,m} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant m\}$ при $m \in \mathbb{N}$). При $K \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ и $s \in \mathbb{N}$ в виде $K \oplus s \triangleq \{k+s : k \in K\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ имеем сдвиг K. Непустому конечному множеству $\mathbb{K}$ сопоставляем его мощность $|\mathbb{K}| \in \mathbb{N}$ и (непустое) множество $(\mathrm{bi})[\mathbb{K}]$ всех биекций (см. [25, с. 87]) дискретного интервала $\overline{1,|\mathbb{K}|}$ на $\mathbb{K}$; $|\varnothing| \triangleq 0$. Перестановка непустого множества S есть (см. [25, с. 87]) биекция S на себя; каждой перестановке α множества S сопоставляется перестановка α^{-1} данного множества, обратная к α: $\alpha^{-1}(\alpha(s)) = \alpha(\alpha^{-1}(s)) = s$ при $s \in S$. При $m \in \mathbb{N}$ в виде $(\mathrm{bi})[\overline{1,m}]$ реализуется множество всех перестановок дискретного интервала $\overline{1,m}$. Непустому множеству H сопоставляем множество $\mathcal{R}_+[H]$ всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на H. Кортежами называем отображения, определенные на непустых п/м $\mathbb{N}_0$. Используется индексная форма записи отображений (семейство с индексом в [26, с. 11]). Имеем свойство

$$\sup(\{\sup(\{x;y\});z\}) = \sup(\{x;\sup(\{y;z\})\})\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ \forall z \in \mathbb{R};$$

при этом, конечно, здесь $\sup(\{a;b\})$ есть наибольшее из чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$. Подмножества декартовых произведений (множества УП) именуем отношениями; см. [24, гл. II, § 4].

2. Основные элементы задачи маршрутизации с декомпозицией

Введем основные элементы постановки аддитивной и минимаксной задач маршрутизации. Фиксируем непустое множество X, а также $X^0 \in \mathrm{Fin}(X)$; пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \geqslant 4$,

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, M_{\mathbf{n}} \in \mathrm{Fin}(X); \tag{2.1}$$

множества (2.1) именуем мегаполисами. Считаем, что

$$(M_j \cap X^0 = \varnothing\ \forall j \in \overline{1,\mathbf{n}})\&(\forall p \in \overline{1,\mathbf{n}}\ \forall q \in \overline{1,\mathbf{n}}\ \ (M_p \cap M_q \neq \varnothing) \Rightarrow (p = q)). \tag{2.2}$$

В виде $\mathcal{M} \triangleq \{M_i : i \in \overline{1,\mathbf{n}}\}$ имеем семейство мегаполисов основной задачи, X^0 — множество точек старта. Как и в [20–23], с каждым мегаполисом связываем непустое отношение, фиксируя

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \ldots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}'(M_{\mathbf{n}} \times M_{\mathbf{n}}).$$

Полагаем, что $\mathcal{M}$ разбито в сумму непустых подсемейств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, для чего фиксируем $N \in \overline{2,\mathbf{n}-2}$ и считаем, что

$$(\mathcal{M}_1 \triangleq \{M_i : i \in \overline{1,N}\})\&(\mathcal{M}_2 \triangleq \{M_i : i \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\}) \tag{2.3}$$

Из (2.2), (2.3) легко следует, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \varnothing$. С мегаполисами из $\mathcal{M}_1$ (из $\mathcal{M}_2$) связываем предваряющую (финальную) задачу, которая будет реализована в двух вариантах; мегаполисы из $\mathcal{M}_1$ должны обслуживаться раньше, чем мегаполисы из $\mathcal{M}_2$. Полагаем, что в каждой из частных задач возможны условия предшествования, поэтому фиксируем

$$(\mathbf{K}_1 \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N}))\&(\mathbf{K}_2 \in \mathcal{P}(\overline{1,\mathbf{n}-N} \times \overline{1,\mathbf{n}-N})); \tag{2.4}$$

УП — элементы множеств (2.4) — именуем адресными, у каждой из них первый элемент называем отправителем, а второй — получателем. Считаем далее, что (см. [18, ч. 2])

$$(\forall\, \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1)\ \exists\, z^0 \in \mathbf{K}^0 :\ \mathrm{pr}_1(z^0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall z \in \mathbf{K}^0)$$
$$\&(\forall\, \tilde{\mathbf{K}}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2)\ \exists\, \tilde{z}^0 \in \tilde{\mathbf{K}}^0 :\ \mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall\, z \in \tilde{\mathbf{K}}^0). \tag{2.5}$$

Перестановки индексов из $\overline{1,N}$, $\overline{1,\mathbf{n}-N}$ и $\overline{1,\mathbf{n}}$ именуем маршрутами. Полагаем $\mathbb{P}_1 \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$ и $\mathbb{P}_2 \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}-N}]$; тогда (см. (2.5), [18, (2.1.5), (2.2.53)])

$$\mathcal{A}_1 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_1 |\ \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}_1\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_1),$$

$$\mathcal{A}_2 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_2 |\ \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_2)$$

суть множества допустимых по предшествованию маршрутов в $\mathcal{M}_1$- и в $\mathcal{M}_2$-задаче соответственно (т. е. таких маршрутов, что для каждой адресной пары соответствующей задачи ее отправитель посещается раньше получателя). Пусть $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}]$; тогда при $\alpha \in \mathbb{P}_1$ и $\beta \in \mathbb{P}_2$ маршрут $\alpha\lozenge\beta \in \mathbb{P}$ определяем условиями

$$((\alpha\lozenge\beta)(k) \triangleq \alpha(k)\ \ \forall\, k \in \overline{1,N})\&((\alpha\lozenge\beta)(l) \triangleq \beta(l-N) + N\ \forall l \in \overline{N+1,\mathbf{n}}). \tag{2.6}$$

Посредством (2.6) выделяем допустимые композиционные маршруты в $\mathcal{M}$-задаче, полагая

$$\mathbf{P} \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z)\lozenge\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} = \{\alpha\lozenge\beta \colon \alpha \in \mathcal{A}_1,\ \beta \in \mathcal{A}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}) \tag{2.7}$$

(в связи с (2.7) см. [22, замечание 4.1]). Введем траектории в $\mathcal{M}_1-$, $\mathcal{M}_2-$ и $\mathcal{M}$-задаче. Начнем с последней, полагая $\mathfrak{Z} \triangleq (X \times X)^{\overline{0,\mathbf{n}}}$; при $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbb{P}$

$$\mathcal{Z}_\gamma[x] \triangleq \{(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z} | (z_0 = (x,x))\&(z_\tau \in \mathbb{M}_{\gamma(\tau)}\ \forall \tau \in \overline{1,\mathbf{n}})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}). \tag{2.8}$$

Если $x \in X^0$, то элементы множества

$$\tilde{\mathbf{D}}[x] \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z}\ |\ \ \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z}) \tag{2.9}$$

являются допустимыми решениями (ДР) в $\mathcal{M}$-задаче со стартом в x, т. е. в $(\mathcal{M}, x)$- задаче. Тогда

$$\mathbf{D} \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0\ |\ (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0) \tag{2.10}$$

есть множество всех ДР в $\mathcal{M}$-задаче с нефиксированным стартом, именуемых маршрутными процессами (МП). Полагаем при $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$, что

$$(\mathfrak{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\})\&(\mathbf{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\}). \tag{2.11}$$

Кроме того, в дальнейшем потребуются множества

$$(\mathbf{M} \triangleq \bigcup_{i=N+1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i \in \mathrm{Fin}(X))\&(\mathbb{X} \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathfrak{M}_i \in \mathrm{Fin}(X))\&(\mathbf{X} \triangleq (\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i) \cup X^0 \in \mathrm{Fin}(X)).$$

Рассмотрим аналоги (2.8)–(2.10) для финальной задачи, полагая сначала $\tilde{\mathbf{K}}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z)\colon z \in \mathbf{K}_1\}$ и получая (см. [18, (4.9.9), предложение 4.9.3]) свойство $\overline{1,N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1 \in \mathcal{P}'(\overline{1,N})$. Вводим множество X^{00} всех возможных точек старта $\mathcal{M}_2$-задачи:

$$X^{00} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1} \mathbf{M}_i \in \mathrm{Fin}(X). \tag{2.12}$$

Всюду в дальнейшем при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ считаем, что

$$M^{(j)} \triangleq M_{N+j},\ \mathbb{M}^{(j)} \triangleq \mathbb{M}_{N+j}, \mathfrak{M}^{(j)} \triangleq \mathfrak{M}_{N+j},\ \mathbf{M}^{(j)} \triangleq \mathbf{M}_{N+j},$$

приходя к непустым конечным множествам, параметрам $\mathcal{M}_2$-задачи; в силу (2.11)

$$(\mathfrak{M}^{(j)} = \{\mathrm{pr}_1(z)\colon z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \mathcal{P}'(M^{(j)}))\&(\mathbf{M}^{(j)} = \{\mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \mathcal{P}'(M^{(j)})).$$

Пусть $\mathfrak{Z}^* \triangleq (X \times X)^{\overline{0,\mathbf{n}-N}}$; тогда при $x \in X^{00}$ (см. (2.12)) и $\beta \in \mathcal{A}_2$

$$\mathcal{Z}^*_\beta[x] \triangleq \{(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^* \mid (z_0 = (x,x))\&(z_t \in \mathbb{M}^{(\beta(t))}\ \forall\, t \in \overline{1, \mathbf{n} - N})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}^*) \tag{2.13}$$

является пучком траекторий $\mathcal{M}_2$-задачи, стартующих из x и согласованных с β. При $x \in X^{00}$

$$\mathbf{D}^*[x] \triangleq \{(\beta, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^* \mid (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^*) \tag{2.14}$$

есть множество всех ДР $\mathcal{M}_2$-задачи со стартом в x. Рассмотрим аналоги (2.13), (2.14) для $\mathcal{M}_1$-задачи, полагая $\mathfrak{Z}^\natural \triangleq (X \times X)^{\overline{0,N}}$; при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_1$ в виде

$$\mathcal{Z}^\natural_\alpha[x] \triangleq \{(z_t)_{t \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}^\natural \mid (z_0 = (x,x))\&(z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)}\ \forall\, \tau \in \overline{1,N})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}^\natural)$$

имеем пучок траекторий $\mathcal{M}_1$-задачи со стартом в x, согласованных с α. При $x \in X^0$ в виде

$$\mathbf{D}^\natural[x] \triangleq \{(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0,N}}) \in \mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural \mid (z_t)_{t \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural) \tag{2.15}$$

находим множество всех ДР $\mathcal{M}_1$-задачи со стартом в x. При $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$

$$\mathrm{pr}_2(z_N) \in X^{00} \tag{2.16}$$

(см., например, [23, предложение 3.3]). Введем

$$(\mathbb{X}^* \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathfrak{M}^{(i)} \in \mathrm{Fin}(X))\&(\mathbf{X}^* \triangleq (\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}^{(i)}) \cup X^{00} \in \mathrm{Fin}(X))$$

$$\&(\mathbb{X}^\natural \triangleq \bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{M}_i \in \mathrm{Fin}(X))\&(\mathbf{X}^\natural \triangleq (\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i) \cup X^0 \in \mathrm{Fin}(X))\&(\mathbf{M}^\natural \triangleq \bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i \in \mathrm{Fin}(X)); \tag{2.17}$$

при этом, конечно, $\mathbb{X}^* \subset \mathbb{X}$, $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X}$, $\mathbb{X}^\natural \subset \mathbb{X}$ и $\mathbf{X}^\natural \subset \mathbf{X}$. Пусть $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}})$, $\mathfrak{N}^* \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ и $\mathfrak{N}^\natural \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,N})$. Множества — элементы этих семейств — называем списками (заданий). Ясно, что $(K \oplus N \in \mathfrak{N}\ \ \forall\, K \in \mathfrak{N}^*)\&(\mathfrak{N}^\natural \subset \mathfrak{N})$. С учетом этих построений введем функции стоимости в $\mathcal{M}$-, $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задаче. Итак, фиксируем

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \quad \ldots, \quad c_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}]; \tag{2.18}$$

значения $\mathbf{c}$ оценивают внешние перемещения, значения $c_1, \ldots, c_{\mathbf{n}}$ — внутренние работы при посещении мегаполисов, а значения f — терминальные состояния. Из (2.18) следует, что первые $\mathbf{n}+1$ функции допускают зависимость от списка заданий. Функции стоимости в $\mathcal{M}_1$- и в $\mathcal{M}_2$- задаче получаются несложными преобразованиями (2.18). Таким образом,

$$\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X}^* \times \mathfrak{N}^*], \quad c_1^* \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(1)} \times \mathfrak{N}^*], \quad \ldots, \quad c_{\mathbf{n}-N}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(\mathbf{n}-N)} \times \mathfrak{N}^*], \ f \tag{2.19}$$

суть функции стоимости $\mathcal{M}_2$-задачи; при этом полагаем, что

$$(\mathbf{c}^*(x, y, K) \overset{\triangle}{=} \mathbf{c}(x, y, K \oplus N) \ \ \forall x \in \mathbf{X}^* \ \forall y \in \mathbb{X}^* \ \forall K \in \mathfrak{N}^*)$$

$$\&(c_j^*(z, K) \overset{\triangle}{=} c_{j+N}(z, K \oplus N) \ \ \forall\, j \in \overline{1, \mathbf{n}-N} \ \ \forall z \in \mathbb{M}^{(j)} \ \forall K \in \mathfrak{N}^*). \tag{2.20}$$

Наконец, используем следующие варианты функций стоимости для $\mathcal{M}_1$-задачи:

$$\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^\natural \times \mathbb{X}^\natural \times \mathfrak{N}^\natural], \quad c_1^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}^\natural], \quad \ldots, \quad c_N^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_N \times \mathfrak{N}^\natural], \quad \mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}^\natural]; \tag{2.21}$$

при этом полагаем в отношении функций из (2.21), что

$$(\mathbf{c}^\natural(x, y, K) \overset{\triangle}{=} \mathbf{c}(x, y, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \ \ \forall x \in \mathbf{X}^\natural \ \forall y \in \mathbb{X}^\natural \ \forall K \in \mathfrak{N}^\natural)$$

$$\&(c_j^\natural(z, K) \overset{\triangle}{=} c_j(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \ \ \forall\, j \in \overline{1, N} \ \ \forall z \in \mathbb{M}_j \ \forall K \in \mathfrak{N}^\natural), \tag{2.22}$$

функция $\mathbf{f}$ определяется в терминах функции экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи. Введем два варианта критерия в $\mathcal{M}$-задаче. Итак, при $x \in X^0$ и $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \overset{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] + f(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+, \tag{2.23}$$

$$\mathfrak{B}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \overset{\triangle}{=} \sup(\{\max_{t \in \overline{1, \mathbf{n}}} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}}))]; f(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}}))\}) \in \mathbb{R}_+; \tag{2.24}$$

при $\tau \in \overline{1, \mathbf{n}}$ $\gamma^1(\overline{\tau, \mathbf{n}}) = \{\gamma(k) : k \in \overline{\tau, \mathbf{n}}\}$ — образ дискретного интервала $\overline{\tau, \mathbf{n}}$ при действии γ.

Посредством (2.23) определяется аддитивный критерий в основной задаче, а посредством (2.24) — критерий в задаче на узкие места. Важно отметить, что а л г о р и т м решения обеих задач (аддитивной и минимаксной) будет в своей основе одним и тем же, приведем его описание.

Ш а г 1). Построить множество X^{00} возможных точек старта в $\mathcal{M}_2$-задаче (см. (2.12)).

Ш а г 2). Сформировать $\mathcal{M}_2$-задачу в виде системы $(\mathcal{M}_2, x)$-задач (задач со стартом в x и семейством мегаполисов $\mathcal{M}_2$), $x \in X^{00}$.

Ш а г 3). Найти функцию экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи с областью определения X^{00} (и слои функции Беллмана).

Ш а г 4). С использованием функции экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи сформировать терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_1$-задачи (функцию $\mathbf{f}$ в (2.21)).

Ш а г 5). Сформировать $\mathcal{M}_1$-задачу в виде системы $(\mathcal{M}_1, x)$-задач (т. е. задач со стартом в x и семейством мегаполисов $\mathcal{M}_1$), $x \in X^0$.

Ш а г 6). Найти функцию экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи (и слои функции Беллмана), ее полный экстремум (включая оптимизацию старта) и экстремальное множество точек старта.

Ш а г 7). Зафиксировать оптимальный старт $x^0 \in X^0$ в $\mathcal{M}_1$-задаче и построить оптимальное $\mathcal{M}_1$-решение со стартом в x^0, реализуемое в виде УП “маршрут-траектория”. Зафиксировать на траектории финишную точку x^{00} в виде второго элемента УП, являющейся терминальным состоянием данной траектории.

Ш а г 8). Принять x^{00} за точку старта в $\mathcal{M}_2$-задаче и найти оптимальное решение $\mathcal{M}_2$-задачи со стартом в x^{00}, реализуемое в виде УП маршрут-траектория.

Ш а г 9). Склеить найденные оптимальные $(\mathcal{M}_1, x^0)$-решение и $(\mathcal{M}_2, x^{00})$-решения (раздельно склеиваются маршруты и траектории). Дополнить получившуюся УП точкой x^0.

После выполнения шагов 1)–9) в обоих вариантах постановки, аддитивной и минимаксной, будет получен оптимальный композиционный МП. □

П р и м е ч а н и е. В случае, когда не требуется построение оптимального МП, а достаточно найти экстремум основной $\mathcal{M}$-задачи и множество ее оптимальных точек старта, следует выполнить только 1)–6). Здесь не нужно сохранять в памяти вычислителя слои функции Беллмана (по этой причине о них в 3) и 6) упоминается в скобках). Более того, тогда реализацию процедур на основе ДП в $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задаче можно осуществлять с перезаписью слоев (см. [22, замечание 2.1]), что обеспечивает некоторую экономию ресурсов памяти.

3. Существенные списки заданий и слои пространства позиций

Возвращаясь к 1)–9), отметим, что наиболее сложными представляются шаги 3) и 6), где речь идет о построении функций экстремума и слоев функции Беллмана (последние важны при построении оптимальных МП). Здесь используются процедуры на основе широко понимаемого ДП, в которых учитываются условия предшествования. Последние позволяют несколько снизить вычислительную сложность, т. е. эти условия “работают” в положительном направлении. Для того, чтобы это можно было бы применить, потребуются построения, восходящие к [18, § 4.9]. Эти построения будут “универсальными”, если иметь в виду последующее применение в аддитивной и минимаксной задачах. Начнем построение с $\mathcal{M}_1$-задачи; согласно [18, § 2.2] введем оператор $\mathbf{I}^\natural : \mathfrak{N}^\natural \to \mathfrak{N}^\natural$ посредством следующего правила: при $K \in \mathfrak{N}^\natural$

$$\mathbf{I}^\natural(K) \overset{\triangle}{=} K \setminus \{\, \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \Xi^\natural[K]\}, \tag{3.1}$$

где $\Xi^\natural[K] \overset{\triangle}{=} \{z \in \mathbf{K}_1 |\ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \& (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. В (3.1) имеем оператор вычеркивания (заданий из списка); отсылаем за подробностями к [18, § 2.2]. Множества — элементы семейства

$$\mathfrak{S}^\natural \overset{\triangle}{=} \{\, K \in \mathfrak{N}^\natural |\ \forall z \in \mathbf{K}_1\ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\} \tag{3.2}$$

называем существенными списками в $\mathcal{M}_1$-задаче. При $s \in \overline{1, N}$ полагаем, что $\mathfrak{S}^\natural_s \overset{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{S}^\natural \mid s = |K|\}$, получая семейство всех s-элементных существенных списков; $\mathfrak{S}^\natural_N = \{\overline{1, N}\}$ и при $\tilde{\mathbf{K}}_1 = \{\mathrm{pr}_1(h) \colon h \in \mathbf{K}_1\}$ $\mathfrak{S}^\natural_1 = \{\{t\} \colon t \in \overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1\}$. Здесь же заметим, что (см. [21, (6.3)], [22, (8.15)]) при $s \in \overline{2, N}$

$$\mathfrak{S}^\natural_{s-1} = \{K \setminus \{j\} \colon K \in \mathfrak{S}^\natural_s,\ j \in \mathbf{I}^\natural(K)\}. \tag{3.3}$$

Определена рекуррентная процедура $\mathfrak{S}^\natural_N \to \mathfrak{S}^\natural_{N-1} \to \ldots \to \mathfrak{S}^\natural_1$, регулярный шаг которой соответствует (3.3). Существенные списки используются при построении слоев пространства позиций (позицией называем здесь каждую пару (x, K), где $x \in X$ и $K \subset \overline{1, N}$), обозначаемых через $D^\natural_0, D^\natural_1, \ldots, D^\natural_N$. При этом

$$(D^\natural_0 \overset{\triangle}{=} \{(x, \varnothing) \colon x \in X^{00}\}) \& (D^\natural_N \overset{\triangle}{=} \{(x, \overline{1, N}) \colon x \in X^0\}); \tag{3.4}$$

в (3.4) определены крайние слои. Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathfrak{S}^\natural_s$, то (см. [21, (6.6)], [22, с. 179])

$$\mathcal{J}^\natural_s(K) \overset{\triangle}{=} \{j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}^\natural_{s+1}\}, \quad \mathcal{M}^\natural_s[K] \overset{\triangle}{=} \bigcup_{j \in \mathcal{J}^\natural_s(K)} \mathbf{M}_j,$$
$$\mathbb{D}^\natural_s[K] \overset{\triangle}{=} \{(x, K) \colon x \in \mathcal{M}^\natural_s[K]\} \tag{3.5}$$

(([3.5](#)) определяет процедуру $\mathcal{J}_s^\natural(K) \to \mathcal{M}_s^\natural[K] \to \mathbb{D}_s^\natural[K]$). Тогда

$$D_s^\natural \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^\natural} \mathbb{D}_s^\natural[K] \;\; \forall\, s \in \overline{1, N-1}. \tag{3.6}$$

В связи с (3.4)–(3.6) заметим, что $D_0^\natural \neq \varnothing, D_1^\natural \neq \varnothing, \ldots, D_N^\natural \neq \varnothing$ (см. [18, предложение 4.9.3]). Отметим здесь же важное свойство [22, (8.18)], восходящее к [18, предложение 4.9.4]:

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^\natural \;\; \forall\, s \in \overline{1, N} \;\; \forall\, (x, K) \in D_s^\natural \;\; \forall\, j \in \mathbf{I}^\natural(K) \;\; \forall\, z \in \mathbb{M}_j. \tag{3.7}$$

Аналогичные построения реализуются для $\mathcal{M}_2$-задачи. Определяем оператор $\mathbf{I}^* : \mathfrak{N}^* \to \mathfrak{N}^*$ правилом: если $K \in \mathfrak{N}^*$, то, при $\Sigma^*[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K}_2 |\ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \& (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$,

$$\mathbf{I}^*(K) \triangleq K \setminus \{\ \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \Sigma^*[K]\}. \tag{3.8}$$

В (3.8) имеем аналогию с (3.1). Подобны и ближайшие построения. В виде

$$\mathfrak{S}^* \triangleq \{K \in \mathfrak{N}^* \mid \forall\, z \in \mathbf{K}_2 \;\; (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\} \tag{3.9}$$

имеем семейство всех существенных списков $\mathcal{M}_2$-задачи. При $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ в виде $\mathfrak{S}_s^* \triangleq \{K \in \mathfrak{S}^* \mid s = |K|\}$ имеем семейство всех s-элементных существенных списков, $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* = \{\overline{1, \mathbf{n} - N}\}$;

$$\mathfrak{S}_1^* = \{\{t\} \colon t \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_2\},$$

где $\tilde{\mathbf{K}}_2 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(h) \colon h \in \mathbf{K}_2\}$. Если $s \in \overline{2, \mathbf{n} - N}$, то (см. [21, (5.3)], [22, (8.3)])

$$\mathfrak{S}_{s-1}^* = \{K \setminus \{t\} \colon K \in \mathfrak{S}_s^*,\ t \in \mathbf{I}^*(K)\}. \tag{3.10}$$

Создана рекуррентная процедура $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* \to \mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N-1}^* \to \ldots \to \mathfrak{S}_1^*$, регулярный шаг которой указан в (3.10). Следующий этап — построение слоев $D_0^*, D_1^*, \ldots, D_{\mathbf{n}-N}^*$ пространства позиций. Определяя $\tilde{\mathcal{M}}^*$ в виде объединения всех множеств $\mathbf{M}^{(j)}$, $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_2$, полагаем [22, (8.4)]

$$D_0^* \triangleq \{(x, \varnothing) \colon x \in \tilde{\mathcal{M}}^*\}. \tag{3.11}$$

Кроме того, пусть $D_{\mathbf{n}-N}^* \triangleq \{(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \colon x \in X^{00}\}$. Если $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}$ и $K \in \mathfrak{S}_s^*$, то

$$\begin{gathered} \mathcal{J}_s^*(K) \triangleq \{j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus K |\ \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}^*\}, \quad \mathcal{M}_s^*[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^*(K)} \mathbf{M}^{(j)}, \\ \mathbb{D}_s^*[K] \triangleq \{(x, K) \colon x \in \mathcal{M}_s^*[K]\} \end{gathered} \tag{3.12}$$

(в (3.12) реализуем процедуру $\mathcal{J}_s^*(K) \to \mathcal{M}_s^*[K] \to \mathbb{D}_s^*[K]$). Тогда

$$D_s^* \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^*} \mathbb{D}_s^*[K] \;\; \forall\, s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}. \tag{3.13}$$

При этом $D_0^* \neq \varnothing, D_1^* \neq \varnothing, \ldots, D_{\mathbf{n}-N}^* \neq \varnothing$ (см. [18, предложение 4.9.3]). Будем использовать свойство [22, (8.8)], восходящее к [18, предложение 4.9.4]:

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^* \;\; \forall\, s \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \;\; \forall\, (x, K) \in D_s^* \;\; \forall\, j \in \mathbf{I}^*(K) \;\; \forall\, z \in \mathbb{M}^{(j)}. \tag{3.14}$$

Свойства (3.7) и (3.14) и определяют "продвижения" в слоях пространства позиций.

4. Склеивание маршрутов и траекторий

В настоящем, кратком, разделе отметим общие свойства маршрутов и траекторий, которые понадобятся при исследовании экстремальных задач с критериями, определяемыми в (2.23), (2.24) (см. в этой связи [21; 22]). Напомним, что (см. [23, предложение 3.3])

$$\mathrm{pr}_2(z_N) \in X^{00} \quad \forall\, x \in X^0 \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{A}_1 \quad \forall\, (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]. \tag{4.1}$$

Кроме того, имеем в силу (2.6), что (см. [22, предложение 6.1])

$$(\alpha\Diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_1 \quad \forall\, \beta \in \mathcal{A}_2 \quad \forall\, t \in \overline{1,N}. \tag{4.2}$$

Далее отметим: из (2.6) легко следует, что (см. [22, предложение 6.2])

$$(\alpha\Diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N}) \oplus N \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_1 \quad \forall\, \beta \in \mathcal{A}_2 \quad \forall\, t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}. \tag{4.3}$$

В (4.2), (4.3) указан вид списков, которые возникают в (2.23), (2.24). Свойство (4.1) позволяет "привязывать" $\mathcal{M}_2$-задачу к $\mathcal{M}_1$-задаче. Введем склеивание траекторий, полагая сначала, что при $\mathbf{z}' \in \mathfrak{Z}^{\natural}$ и $\mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}^*$ кортеж $\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}$ определяется условиями

$$((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t) \triangleq \mathbf{z}'(t)\ \forall\, t \in \overline{0,N})\&((\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'')(t) \triangleq \mathbf{z}''(t-N) \quad \forall\, t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}). \tag{4.4}$$

Правило (4.4) может применяться к траекториям; при этом (см. (2.6), [22, предложение 6.3])

$$\mathbf{z}'\Box\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\alpha\Diamond\beta}[x] \quad \forall\, x \in X^0 \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{A}_1 \quad \forall\, \beta \in \mathcal{A}_2 \quad \forall\, \mathbf{z}' \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x] \quad \forall\, \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}^*_{\beta}[\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]. \tag{4.5}$$

Из (2.6), (2.8), (4.4) и (4.5) вытекает, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\Diamond\beta}[x]$

$$(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]. \tag{4.6}$$

С учетом (4.1), (4.5) и (4.6) имеем, конечно, свойство

$$\mathrm{pr}_2(z_N) \in X^{00} \quad \forall\, x \in X^0 \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{A}_1 \quad \forall\, \beta \in \mathcal{A}_2 \quad \forall\, (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\diamond\beta}[x]. \tag{4.7}$$

В (4.6), (4.7) мы исходя из (2.7) определили свойства сужений траекторий $\mathcal{M}$-задачи на $\overline{0,N}$. В отношении аналогичных сужении на $\overline{N+1,\mathbf{n}}$ напомним [22, предложение 7.2]: при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\Diamond\beta}[x]$ и $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$

$$((z^*_0 = (\mathrm{pr}_2(z_N), \mathrm{pr}_2(z_N)))\&(z^*_\tau = z_{\tau+N}\ \forall \tau \in \overline{1,\mathbf{n}-N})) \Rightarrow ((z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_{\beta}[\mathrm{pr}_2(z_N)]). \tag{4.8}$$

В силу (2.7), (2.9) и (4.5) при $x \in X^0$, $(\alpha, \mathbf{y}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x]$ и $(\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$

$$(\alpha \diamond \beta, \mathbf{y} \Box \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]. \tag{4.9}$$

5. Аддитивная задача маршрутизации с элементами декомпозиции, 1

Рассмотрим критерий (2.23). При $x \in X^0$ имеем $(\mathcal{M}, x)$-задачу

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \longrightarrow \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x],$$

которой сопоставляется экстремум $\tilde{V}[x]$ и непустое экстремальное множество $(\mathrm{sol})[x]$:

$$\tilde{V}[x] \triangleq \min_{(\gamma,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}})\in\tilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{5.1}$$

$$(\mathrm{sol})[x] \triangleq \{(\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \tilde{V}[x]\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\mathbf{D}}[x]). \tag{5.2}$$

Конечно, (2.23) определено для $(\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D}$ (см. (2.10)). В основной задаче

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \longrightarrow \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D} \tag{5.3}$$

вводим экстремум $\mathbb{V}$ и множество **SOL** всех оптимальных (композиционных) МП:

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{(\gamma,\mathbf{z},x)\in\mathbf{D}} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \min_{x\in X^0} \tilde{V}[x] \in \mathbb{R}_+, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{SOL} \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D} \mid \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \mathbb{V}\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}). \tag{5.5}$$

Наконец, в связи с (5.1), (5.4) возникает задача оптимизации старта:

$$\tilde{V}[x] \to \min, \quad x \in X^0; \tag{5.6}$$

в силу (5.4) имеем, что $\mathbb{V}$ есть экстремум в задаче (5.6),

$$X^0_{\mathrm{opt}} \triangleq \{x \in X^0 \mid \tilde{V}[x] = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(X^0). \tag{5.7}$$

Для решения (5.3) применяем ДП, реализуемое раздельно в $\mathcal{M}_1$-задаче и в $\mathcal{M}_2$-задаче. Начнем с $\mathcal{M}_2$-задачи. При $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[x]$

$$\mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} [\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}))$$
$$+ c^*_{\beta(t)}(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}))] + f(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N})) \in \mathbb{R}_+. \tag{5.8}$$

Ясно, что (при $x \in X^{00}$) значение (5.8) определено для $(\beta, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x]$. Итак, установлен аддитивный критерий. При $x \in X^{00}$ рассматриваем $(\mathcal{M}_2, x)$-задачу

$$\mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] \longrightarrow \min, \quad (\beta, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x],$$

которой сопоставляется экстремум $\tilde{V}^*[x]$ и (непустое) экстремальное множество $(\mathrm{sol})^*[x]$:

$$\tilde{V}^*[x] \triangleq \min_{(\beta,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}})\in\mathbf{D}^*[x]} \mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{5.9}$$

$$(\mathrm{sol})^*[x] \triangleq \{(\beta, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x] | \; \mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \tilde{V}^*[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}^*[x]). \tag{5.10}$$

Посредством функции экстремума $\tilde{V}^*[\cdot] \triangleq (\tilde{V}^*[x])_{x\in X^{00}} \in \mathcal{R}_+[X^{00}]$ определяем терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_1$-задачи. Точнее, полагаем здесь, что функция $\mathbf{f}$ в (2.21) такова, что

$$(\mathbf{f}(x) \triangleq \tilde{V}^*[x] \; \forall x \in X^{00})\&(\mathbf{f}(x) \triangleq 0 \; \forall x \in \mathbf{M}^\natural \setminus X^{00}) \tag{5.11}$$

(в связи с (5.11) заметим, что согласно (2.12) и (2.17) $X^{00} \subset \mathbf{M}^\natural$). Далее, с учетом (2.21), (2.22), (4.1) и (5.11) полагаем при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$

$$\mathfrak{C}^\natural_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \triangleq \sum_{t=1}^{N} [\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))] + \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(z_N)], \tag{5.12}$$

получая, что $\mathfrak{C}^\natural_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \in \mathbb{R}_+$; в силу (2.15) значение (5.12) определено при $(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$. Если $x \in X^0$, рассматриваем следующую $(\mathcal{M}_1, x)$-задачу

$$\mathfrak{C}^\natural_\alpha[\mathbf{z}] \longrightarrow \min, \; (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^\natural[x],$$

ей сопоставляется экстремум $V^\natural[x]$ и (непустое)экстремальное множество $(\mathrm{sol})^\natural[x]$:

$$V^\natural[x] \triangleq \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}})\in\mathbf{D}^\natural[x]} \mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{5.13}$$

$$(\mathrm{sol})^\natural[x] \triangleq \{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x] |\ \mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] = V^\natural[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}^\natural[x]). \tag{5.14}$$

В виде $V^\natural[\cdot] \triangleq (V^\natural[x])_{x\in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$ имеем функцию экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи. Задаче

$$V^\natural[x] \longrightarrow \min, \quad x \in X^0,$$

сопоставляется полный экстремум $\mathbb{V}^\natural$ $\mathcal{M}_1$-задачи и экстремальное множество $X^\natural_{\mathrm{opt}}$:

$$\mathbb{V}^\natural \triangleq \min_{x\in X^0} V^\natural[x] \in \mathbb{R}_+, \tag{5.15}$$

$$X^\natural_{\mathrm{opt}} \triangleq \{x \in X^0 \mid\ V^\natural[x] = \mathbb{V}^\natural\} \in \mathrm{Fin}(X^0). \tag{5.16}$$

Таким образом, введены две взаимосвязанные (см. (5.11)) экстремальные задачи. Сейчас (см. (4.9)) потребуются некоторые теоретические положения, обеспечивающие алгоритм 1)–9) в реализации (2.23). Следующее положение (см. [21, предложение 3]) приведено в [21] без доказательства.

Предложение 1. *При $x \in X^0$, $(\alpha,\mathbf{y}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$ и $(\beta,\mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$*

$$\mathfrak{C}_{\alpha\diamond\beta}[\mathbf{y}\,\square\,\mathbf{z}] = \mathfrak{C}_\alpha^\natural[\mathbf{y}] - \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))] + \mathfrak{C}^*_\beta[\mathbf{z}]. \tag{5.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем x, $(\alpha,\mathbf{y})$ и $(\beta,\mathbf{z})$ в соответствии с условиями,

$$w \triangleq \mathbf{y}\,\square\,\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{\alpha\diamond\beta}[x]; \tag{5.18}$$

с учетом (4.4), (4.5) и (5.18) имеем с очевидностью, что $(w(t) = \mathbf{y}(t)\ \forall\, t \in \overline{0,N})\&(w(t) = \mathbf{z}(t-N)\ \forall\, t \in \overline{N+1,\mathbf{n}})$. С учетом (2.22), (2.23) и (4.3) легко устанавливается равенство

$$\mathfrak{C}_{\alpha\diamond\beta}[w] = \mathfrak{C}_\alpha^\natural[\mathbf{y}] - \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))] + \sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(w(t-1)),\mathrm{pr}_1(w(t)),\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N}) \oplus N)$$
$$+ c_{\beta(t-N)+N}(\mathbf{z}(t-N),\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N}) \oplus N)] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{n}-N})). \tag{5.19}$$

Вместе с тем (см. (4.4)), $\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(w(t-1)),\mathrm{pr}_1(w(t)),\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N}) \oplus N) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t-N-1)),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t-N)),\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N}) \oplus N)\ \ \forall\, t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}$, а потому (см. (2.20), (4.3), (5.8), (5.19))

$$\mathfrak{C}_{\alpha\diamond\beta}[w] = \mathfrak{C}_\alpha^\natural[\mathbf{y}] - \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))] + \sum_{\tau=1}^{\mathbf{n}-N} [\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(\tau-1)),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(\tau)),\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N}))$$
$$+ c^*_{\beta(\tau)}(\mathbf{z}(\tau),\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(\mathbf{n}-N))).$$

В связи с (5.8) и (5.18) из последнего равенства извлекается (5.17). □

Следствие 1. *Если $x \in X^0$, $(\alpha,\mathbf{y}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$ и $(\beta,\mathbf{z}) \in (\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$, то справедливо равенство $\mathfrak{C}_{\alpha\diamond\beta}[\mathbf{y}\,\square\,\mathbf{z}] = \mathfrak{C}_\alpha^\natural[\mathbf{y}]$.*

Доказательство очевидно (см. (5.10)). С учетом (5.14) и следствия 1 получаем, что при $x \in X^0$, $(\alpha,\mathbf{y}) \in (\mathrm{sol})^\natural[x]$ и $(\beta,\mathbf{z}) \in (\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$

$$\mathfrak{C}_{\alpha\diamond\beta}[\mathbf{y}\,\square\,\mathbf{z}] = V^\natural[x]. \tag{5.20}$$

Предложение 2. *Если $x \in X^0$, то $V^\natural[x] = \tilde{V}[x]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $x \in X^0$. Тогда в силу (5.14) $(\mathrm{sol})^\natural[x] \neq \varnothing$. Выберем (см. (5.14)) УП $(\alpha, \mathbf{y}) \in (\mathrm{sol})^\natural[x]$. Отсюда $(\alpha, \mathbf{y}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$, и при этом $\mathfrak{C}^\natural_\alpha[\mathbf{y}] = V^\natural[x]$. В таком случае $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$ ввиду (2.15), а потому $\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N)) \in X^{00}$ (см. (2.16)). Исходя из (5.10) $(\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))] \neq \varnothing$. Выбираем $(\beta, \mathbf{z}) \in (\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$, получая ДР $(\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$ со свойством $\mathfrak{C}^*_\beta[\mathbf{z}] = \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$. Значит, $\alpha \diamond \beta \in \mathbf{P}$ в силу (2.7); кроме того, имеем (4.9), а потому согласно (5.1) $\tilde{V}[x] \leqslant \mathfrak{C}_{\alpha\diamond\beta}[\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z}]$, откуда в соответствии с (5.20) получаем неравенство

$$\tilde{V}[x] \leqslant V^\natural[x]. \tag{5.21}$$

В силу (5.2) $(\mathrm{sol})[x] \neq \varnothing$. Выберем(см. (5.2)) $(\gamma, (u_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in (\mathrm{sol})[x]$: $(\gamma, (u_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$, $\mathfrak{C}_\gamma[(u_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \tilde{V}[x]$. При этом (см. (2.9)) $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(u_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$. Ввиду (2.7) $\gamma = \gamma_1 \diamond \gamma_2$, где $(\gamma_1 \in \mathcal{A}_1)\&(\gamma_2 \in \mathcal{A}_2)$. Согласно (4.6) $(u_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_{\gamma_1}[x]$, и при этом (см. (4.7)) $\mathrm{pr}_2(u_N) \in X^{00}$. Из (2.15) получаем $(\gamma_1, (u_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$. Введем кортеж $(\hat{u}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$: $(\hat{u}_0 = (\mathrm{pr}_2(u_N), \mathrm{pr}_2(u_N)))\&(\hat{u}_t \overset{\triangle}{=} u_{t+N} \ \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}-N})$. Вследствие (4.8) $(\hat{u}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[(\mathrm{pr}_2(u_N)]$. Из (2.14) выводим

$$(\gamma_2, (\hat{u}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[\mathrm{pr}_2(u_N)]; \tag{5.22}$$

$(u_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} = (u_t)_{t\in\overline{0,N}} \,\square\, (\hat{u}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}$. В силу предложения 1 и (5.22) имеем

$$\mathfrak{C}_\gamma[(u_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}^\natural_{\gamma_1}[(u_t)_{t\in\overline{0,N}}] - \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(u_N)] + \mathfrak{C}^*_{\gamma_2}[(\hat{u}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}], \tag{5.23}$$

где реализуются (см. (5.9), (5.13)) неравенства $(V^\natural[x] \leqslant \mathfrak{C}^\natural_{\gamma_1}[(u_t)_{t\in\overline{0,N}}])\&(\tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(u_N)] \leqslant \mathfrak{C}^*_{\gamma_2}[(\hat{u}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}])$. В силу (5.23) $V^\natural[x] = V^\natural[x] - \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(u_N)] + \tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(u_N)] \leqslant \mathfrak{C}_\gamma[(u_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \tilde{V}[x]$. В соответствии с (5.21) получаем равенство $V^\natural[x] = \tilde{V}[x]$. □

Из предложения 2 вытекает равенство функций экстремума

$$V^\natural[\cdot] = \tilde{V}[\cdot], \tag{5.24}$$

где $\tilde{V}[\cdot] \overset{\triangle}{=} (\tilde{V}[x])_{x\in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$. Из (5.4), (5.15) и (5.24) получаем соотношение

$$\mathbb{V}^\natural = \mathbb{V}; \tag{5.25}$$

из (5.7), (5.16), (5.24) и (5.25) следует равенство экстремальных множеств

$$X^\natural_{\mathrm{opt}} = X^0_{\mathrm{opt}}. \tag{5.26}$$

6. Аддитивная задача маршрутизации с элементами декомпозиции, 2

С учетом положений предыдущего раздела мы получаем, в частности, что (в аддитивной версии) шаг 6) алгоритма разд. 2 доставляет (см. (5.24)) функцию экстремума $\tilde{V}[\cdot]$ основной $\mathcal{M}$-задачи, экстремум $\mathbb{V}$ (см. (5.25)) и экстремальное множество X^0_{opt} $\mathcal{M}$-задачи (см. (5.26)). Вопрос о реализации $V^\natural[\cdot]$ и $\tilde{V}^*[\cdot]$ должен быть решен ранее; применяем здесь процедуру на основе ДП, которую сейчас опишем. Начинаем с $\mathcal{M}_2$-задачи. Рассмотрим построение слоев $v^*_0 \in \mathcal{R}_+[D^*_0], v^*_1 \in \mathcal{R}_+[D^*_1], \ldots, v^*_{\mathbf{n}-N} \in \mathcal{R}_+[D^*_{\mathbf{n}-N}]$ функции Беллмана исходя из условий предшествования. Используем слои $D^*_0, D^*_1, \ldots, D^*_{\mathbf{n}-N}$ пространства позиций, представленные в разд. 3. Ввиду (3.11) полагаем, что $v^*_0 \in \mathcal{R}_+[D^*_0]$ определяется условиями

$$v^*_0(x, \varnothing) \overset{\triangle}{=} f(x) \ \ \forall x \in \tilde{\mathcal{M}}^*.$$

Далее используем (3.12), (3.14); если $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ и функция $v^*_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D^*_{s-1}]$ уже построена, то $v^*_s \in \mathcal{R}_+[D^*_s]$ задаем правилом

$$v^*_s(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^*(K)} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} [\mathbf{c}^*(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c^*_j(z, K) + v^*_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \ \ \forall (x, K) \in D^*_s. \tag{6.1}$$

Посредством (6.1) определяем регулярный шаг рекуррентной процедуры $v^*_0 \to v^*_1 \to \ldots \to v^*_{\mathbf{n}-N}$; финальная функция $v^*_{\mathbf{n}-N} \in \mathcal{R}_+[D^*_{\mathbf{n}-N}]$ реализует функцию экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи:

$$v^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \tilde{V}^*[x] \ \ \forall x \in X^{00} \tag{6.2}$$

(учитывается представление $D^*_{\mathbf{n}-N}$). Итак, реализован шаг 3) алгоритма разд. 2.

Аналогичная схема применяется в случае шага 6): нашей целью является построение функций $v^\natural_0 \in \mathcal{R}_+[D^\natural_0], v^\natural_1 \in \mathcal{R}_+[D^\natural_1], \ldots, v^\natural_N \in \mathcal{R}_+[D^\natural_N]$, где используется представление слоев $D^\natural_0, D^\natural_1, \ldots D^\natural_N$ пространства позиций разд. 3 (см. (3.4)–(3.6)). Функцию $v^\natural_0 \in \mathcal{R}_+[D^\natural_0]$ определяем на основе (6.2): полагаем (см. (3.4)) $v^\natural_0(x, \varnothing) \triangleq \tilde{V}^*[x] = v^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \ \ \forall x \in X^{00}$. Далее, учитываем (3.7). Принимая во внимание (3.5), (3.7), следуем правилу: если $s \in \overline{1, N}$ и функция $v^\natural_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D^\natural_{s-1}]$ построена, то $v^\natural_s \in \mathcal{R}_+[D^\natural_s]$ определяем условиями

$$v^\natural_s(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}^\natural(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c^\natural_j(z, K) + v^\natural_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \ \ \forall (x, K) \in D^\natural_s. \tag{6.3}$$

Преобразование $v^\natural_{s-1} \to v^\natural_s$ (6.3) задает регулярный шаг рекуррентной процедуры $v^\natural_0 \to v^\natural_1 \to \ldots \to v^\natural_N$. Финальная функция $v^\natural_N \in \mathcal{R}_+[D^\natural_N]$ такова, что (см. (3.4))

$$v^\natural_N(x, \overline{1, N}) = V^\natural[x] \ \ \forall x \in X^0. \tag{6.4}$$

Итак, мы имеем следующую (склеенную) процедуру на основе ДП:

$$(v^*_0 \to v^*_1 \to \ldots \to v^*_{\mathbf{n}-N}) \to (v^\natural_0 \to v^\natural_1 \to \ldots \to v^\natural_N); \tag{6.5}$$

после ее выполнения (что может осуществляться посредством перезаписи слоев (см. [22, замечание 2.1]) с некоторой экономией ресурсов памяти) мы получаем (см. (6.4)) функцию экстремума $V^\natural[\cdot] = \tilde{V}[\cdot]$ (см. (5.24)), сам экстремум $\mathbb{V}^\natural = \mathbb{V}$ и экстремальное множество $X^\natural_{\mathrm{opt}} = X^0_{\mathrm{opt}}$.

Совсем кратко обсудим построение оптимального МП в аддитивной задаче. Здесь уже требуется процедура (6.5) в полной общности: полагаем, что все функции-слои в (6.5) нам известны и могут использоваться. Выберем и зафиксируем $x^0 \in X^0_{\mathrm{opt}}$ (множество X^0_{opt} уже найдено). Ясно, что $x^0 \in X^\natural_{\mathrm{opt}}$, и согласно (5.7), (6.3), (6.4) и (5.24)

$$\mathbb{V} = \tilde{V}[x^0] = V^\natural[x^0] = v^\natural_N(x^0, \overline{1, N}) = \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}^\natural(x^0, \mathrm{pr}_1(z),$$

$$\overline{1, N}) + c^\natural_j(z, \overline{1, N}) + v^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})], \tag{6.6}$$

где в соответствии с (3.7) $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in D^\natural_{N-1}$ при $j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1, N})$ и $z \in \mathbb{M}_j$. Полагаем $y_0 \triangleq (x^0, x^0)$ и выбираем (см. (6.6)) $\xi_1 \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1, N})$ и $y_1 \in \mathbb{M}_{\xi_1}$, для которых

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}^\natural(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1), \overline{1, N}) + c^\natural_{\xi_1}(y_1, \overline{1, N}) + v^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}), \tag{6.7}$$

получая включение $(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) \in D^\natural_{N-1}$. Поэтому с учетом (6.3)

$$v^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \big[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(z),$$

$$\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c^\natural_j(z, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v^\natural_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; j\})\big], \tag{6.8}$$

где (см. (3.7)) $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; j\}) \in D^{\natural}_{N-2}$ при $j \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$ и $z \in \mathbb{M}_j$. Имея в виду (6.8), выбираем $\xi_2 \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$ и $y_2 \in \mathbb{M}_{\xi_2}$ из условия

$$v^{\natural}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) = \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(y_2),$$

$$\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}\big) + c^{\natural}_{\xi_2}(y_2, \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) + v^{\natural}_{N-2}(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}); \qquad (6.9)$$

при этом $(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}) \in D^{\natural}_{N-2}$. В силу (6.7) и (6.9)

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}^{\natural}(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1), \overline{1,N}) + \mathbf{c}^{\natural}(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) + c^{\natural}_{\xi_1}(y_1, \overline{1,N})$$

$$+ c^{\natural}_{\xi_2}(y_2, \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) + v^{\natural}_{N-2}(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}) \qquad (6.10)$$

(при $N = 2$ из (6.10) легко следует оптимальность УП $((\xi_i)_{i\in\overline{1,2}}, (y_i)_{i\in\overline{0,2}})$, как ДР в $(\mathcal{M}_1, x^0)$-задаче). В общем случае $N \in \overline{2, \mathbf{n}-2}$ операции, подобные (6.7), (6.9), следует продолжать вплоть до исчерпания индексного множества $\overline{1,N}$. В результате будут построены [22, § 3.9] маршрут $\xi = (\xi_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{A}_1$ и траектория $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\xi}[x^0]$ со свойством

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\xi}[\mathbf{y}] = \mathbb{V};$$

отсылаем к [27, § 6] за подробностями в построении ξ и $\mathbf{y}$ (в [27] рассматривался даже несколько более общий (см. [27, (3.8)]) случай). При этом (см. (5.25)) $\mathbb{V}^{\natural} \leqslant V^{\natural}[x^0] \leqslant \mathfrak{C}^{\natural}_{\xi}[\mathbf{y}] = \mathbb{V} = \mathbb{V}^{\natural}$, а потому ДР $(\xi, \mathbf{y}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x^0]$, где $x^0 \in X^{\natural}_{\mathrm{opt}}$ в силу (5.26), оптимально в $(\mathcal{M}_1, x^0)$-задаче: $(\xi, \mathbf{y}) \in (\mathrm{sol})^{\natural}[x^0]$. Имеем $x^{00} \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N)) = \mathrm{pr}_2(y_N) \in X^{00}$ ввиду (4.1). Выбираем x^{00} в качестве точки старта в $\mathcal{M}_2$-задаче, получая (см. разд. 3) $(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n}-N}) \in D^*_{\mathbf{n}-N}$, а тогда (см. (6.1), (6.2))

$$\tilde{V}^*[x^{00}] = v^*_{\mathbf{n}-N}(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n}-N}) = \min_{j\in\mathbf{I}^*(\overline{1,\mathbf{n}-N})} \min_{z\in\mathbb{M}^{(j)}} \big[\mathbf{c}^*(x^{00}, \mathrm{pr}_1(z),$$

$$\overline{1, \mathbf{n}-N}) + c^*_j(z, \overline{1, \mathbf{n}-N}) + v^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{j\})\big], \qquad (6.11)$$

где (см. (3.14)) $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{j\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-1}$ $\forall\, j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N})$ $\forall\, z \in \mathbb{M}^{(j)}$. Полагаем,что $\hat{y}_0 \overset{\triangle}{=} (x^{00}, x^{00})$. На основании (6.11) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N})$ и $\hat{y}_1 \in \mathbb{M}^{(\eta_1)}$ из условия

$$\tilde{V}^*[x^{00}] = \mathbf{c}^*(x^{00}, \mathrm{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N}) + c^*_{\eta_1}(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n}-N}) + v^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}), \qquad (6.12)$$

получая также, что $(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-1}$, где $\mathbf{n} - N - 1 \geqslant 1$; это следует из (3.14). Исходя из (6.1), получаем поэтому равенство

$$v^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) = \min_{j\in\mathbf{I}^*(\overline{1,\mathbf{n}-N}\setminus\{\eta_1\})} \min_{z\in\mathbb{M}^{(j)}} \big[\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \mathrm{pr}_1(z),$$

$$\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) + c^*_j(z, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) + v^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; j\})\big], \qquad (6.13)$$

где согласно (3.14) $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; j\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-2}$ при $j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})$ и $z \in \mathbb{M}^{(j)}$. С учетом (6.13) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\hat{y}_2 \in \mathbb{M}^{(\eta_2)}$, для которых

$$v^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) = \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \mathrm{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})$$

$$+ c^*_{\eta_2}(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) + v^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}), \qquad (6.14)$$

где ввиду (3.14) $(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-2}$. Тогда (см. (6.12))

$$\tilde{V}^*[x^{00}] = \mathbf{c}^*(x^{00}, \mathrm{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N}) + \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \mathrm{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})$$

$$+ c^*_{\eta_1}(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n}-N}) + c^*_{\eta_2}(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) + v^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \qquad (6.15)$$

(при $\mathbf{n} = N + 2$ из (6.15) следует, что УП $((\eta_i)_{i\in\overline{1,2}}, (\hat{y}_i)_{i\in\overline{0,2}})$ есть оптимальное ДР в $(\mathcal{M}_2, x^{00})$-задаче). В общем случае $N \in \overline{2, \mathbf{n}-2}$ операции, подобные (6.12) и (6.14), следует продолжать вплоть до исчерпания $\overline{1, \mathbf{n}-N}$ (см. [27, § 6]). В результате будут построены маршрут $\eta = (\eta_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{A}_2$ и траектория $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\eta[x^{00}]$ со свойством $\mathfrak{C}^*_\eta[\hat{\mathbf{y}}] = \tilde{V}^*[x^{00}]$. Поскольку $(\eta, \hat{\mathbf{y}}) \in \mathbf{D}^*[x^{00}]$ (см. (2.14)), это означает (см. (5.10)), что $(\eta, \hat{\mathbf{y}}) \in (\mathrm{sol})^*[x^{00}]$. Итак, $x \in X^0$, $(\xi, \mathbf{y}) \in (\mathrm{sol})^\natural[x^0]$ и $(\eta, \hat{\mathbf{y}}) \in (\mathrm{sol})^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$, согласно (5.20) $\mathfrak{C}_{\xi\Diamond\eta}[\mathbf{y}\Box\hat{\mathbf{y}}] = V^\natural[x^0]$. Однако $x^0 \in X^\natural_{\mathrm{opt}}$, а потому (см. (5.16)) $V^\natural[x^0] = \mathbb{V}^\natural$ и согласно (5.25) $V^\natural[x^0] = \mathbb{V}$. Следовательно, $\mathfrak{C}_{\xi\Diamond\eta}[\mathbf{y}\Box\hat{\mathbf{y}}] = \mathbb{V}$. Ввиду (4.9) $(\xi \diamond \eta, \mathbf{y}\Box\hat{\mathbf{y}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0]$, а тогда (см. (2.10)) $(\xi \diamond \eta, \mathbf{y}\Box\hat{\mathbf{y}}, x^0) \in \mathbf{D}$ и, как следствие (см. (5.5)), $(\xi \diamond \eta, \mathbf{y}\Box\hat{\mathbf{y}}, x^0) \in \mathbf{SOL}$. Оптимальный композиционный МП построен.

7. Пример задачи управления инструментом при фигурной листовой резке на машинах с ЧПУ

В статье рассматриваются теоретические конструкции, связанные с декомпозицией и ДП; в [20–22] приведены примеры, показывающие работоспособность алгоритма. Рассмотрим один "неудобный" (для нас) пример, а именно задачу без условий предшествования (упомянутые условия использовались [18, § 4.9] в положительном направлении в вопросах снижения вычислительной сложности). Отсутствие данных условий удается скомпенсировать, применяя декомпозицию (собственно, эффект, создаваемый декомпозицией, можно истолковать как действие некоторых условий предшествования в совокупной $\mathcal{M}$-задаче).

Рассматриваем пример, связанный с листовой резкой деталей без отверстий. В рамках данной постановки прибегаем к дискретизации эквидистант контуров с выделением точек врезки и точек выключения инструмента; возникающие мегаполисы как раз и состоят из точек упомянутых двух типов (сама же дискретизация континуальных эквидистат связана с вопросами компьютерной реализации). Обсуждаем случай термической резки по замкнутому контуру. Здесь имеют место ограничения, связанные с эффективным отводом тепла при врезке; они подробно рассмотрены в [12, гл 1]; способ учета ограничений посредством введения штрафов указан в [13, разд. 5, 6]. В результате введения упомянутых штрафов возникают (в данной задаче) функции стоимости с зависимостью от списка заданий (см. первые $\mathbf{n}+1$ функции в (2.18)). Следуем [13, разд. 5, 6] в части конкретного построения упомянутых функций стоимости.

Заметим, что в построениях настоящего раздела X есть невырожденный прямоугольник на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Предполагаем, что задано 36 контуров деталей, подлежащих резке. С каждым из этих контуров связываем мегаполис; итак, в нашем примере имеется $\mathbf{n} = 36$ мегаполисов (здесь количество контуров совпадает с количеством деталей). Как следствие, $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \varnothing$ (отсутствуют условия предшествования). Размерности мегаполисов различны: от 10 до 36. Итак, $\mathcal{M}$ есть 36-элементное семейство. Мы выбираем $N = 18$, получая кластеры $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ в виде 18-элементных семейств. Учитываем ограничения, связанные с эффективностью отвода тепла; применяем подход [13, разд. 5,6]. Был найден экстремум $\mathbb{V} = 83.941$. При этом все ограничения теплового характера были выполнены (результат без учета штрафов также равен 83.941). Время счета 5 мин 37.047 с., что вполне приемлемо с практической точки зрения.

Функции стоимости определялись здесь временем исполнения операций (время холостого хода — при внешних перемещениях и время рабочего хода — при резке); при этом время резки самих контуров было исключено при построении функций стоимости, так как оно одно и то же для всех вариантов решения и его учет сводится к добавлению одного и того же известного слагаемого к получившемуся значению критерия. Терминальная компонента критерия определялась временем холостого хода при перемещении в точку (0,0).

8. Минимаксная задача с элементами декомпозиции, 1

Мы обращаемся к постановке, в которой критерий будет определяться на основе (2.24). Так, при $x \in X^0$ мы рассматриваем сейчас $(\mathcal{M}, x)$-задачу вида

$$\mathfrak{B}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \to \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x], \tag{8.1}$$

которой сопоставляется экстремум $\tilde{\mathcal{V}}[x]$ и (непустое) экстремальное множество $\langle\mathrm{sol}\rangle[x]$:

$$\tilde{\mathcal{V}}[x] \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\gamma,\mathbf{z})\in\tilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \tag{8.2}$$

$$\langle\mathrm{sol}\rangle[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] = \tilde{\mathcal{V}}[x]\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\mathbf{D}}[x]). \tag{8.3}$$

Конечно, $\mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}]$, используемое в (8.1) и (8.2), определено при $(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}$ (см. (2.10)). С учетом этого рассматриваем следующую задачу в качестве основной:

$$\mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \to \min, \quad (\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}; \tag{8.4}$$

задаче (8.4) сопоставляется экстремум $\mathbb{V}^0$ и (непустое) экстремальное множество $\mathbb{SOL}$:

$$\mathbb{V}^0 \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\gamma,\mathbf{z},x)\in\mathbf{D}} \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \tag{8.5}$$

$$\mathbb{SOL} \stackrel{\triangle}{=} \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D} \mid \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] = \mathbb{V}^0\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}). \tag{8.6}$$

Из (2.10), (8.2) и (8.5) вытекает, что справедливо равенство

$$\mathbb{V}^0 = \min_{x\in X^0} \tilde{\mathcal{V}}[x]. \tag{8.7}$$

В связи с (8.5), (8.7) рассматриваем задачу оптимизации старта: $\tilde{\mathcal{V}}[x] \to \min, x \in X^0$; для нее $\mathbb{V}^0$ является экстремумом, а

$$\tilde{\mathbb{X}}_0^{(\mathrm{opt})} \stackrel{\triangle}{=} \{x \in X^0 \mid \tilde{\mathcal{V}}[x] = \mathbb{V}^0\} \in \mathcal{P}'(X^0) \tag{8.8}$$

есть (непустое) экстремальное множество. Ясно (см. (8.6)), что $(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{SOL}$ при $x \in \tilde{\mathbb{X}}_0^{(\mathrm{opt})}$ и $(\gamma, \mathbf{z}) \in \langle\mathrm{sol}\rangle[x]$. Для построения решения задачи (8.4) снова используется алгоритм 1)–9) разд. 2. Как и в “аддитивном случае”, начинаем с финальной задачи, полагая, что X^{00} (2.12) — это множество возможных точек старта в данной задаче. Для $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[x]$ определено (см. (2.19)) значение

$$\mathfrak{B}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{\max_{t\in\overline{1,\mathbf{n}-N}}[\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}))$$
$$+ c^*_{\beta(t)}(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}))]; f(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N}))\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{8.9}$$

Тогда при $x \in X^{00}$ имеем $(\mathcal{M}_2, x)$-задачу

$$\mathfrak{B}^*_\beta[\mathbf{z}] \to \min, \quad (\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[x], \tag{8.10}$$

которой сопоставляется экстремум $\tilde{\mathcal{V}}^*[x]$ и непустое экстремальное множество $\langle\mathrm{sol}\rangle^*[x]$:

$$\tilde{\mathcal{V}}^*[x] \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\beta,\mathbf{z})\in\mathbf{D}^*[x]} \mathfrak{B}^*_\beta[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \tag{8.11}$$

$$\langle\mathrm{sol}\rangle^*[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[x] \mid \mathfrak{B}^*_\beta[\mathbf{z}] = \tilde{\mathcal{V}}^*[x]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}^*[x]). \tag{8.12}$$

Посредством (8.11) определена важная для дальнейшего функция экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи

$$\tilde{\mathcal{V}}^*[\cdot] \triangleq (\tilde{\mathcal{V}}^*[x])_{x\in X^{00}} \in \mathcal{R}_+[X^{00}],$$

которую, как и в аддитивном случае, используем для построения терминальной компоненты критерия предваряющей задачи. Итак, функцию $\mathbf{f}$ в (2.21) определяем далее условиями

$$(\mathbf{f}(x) \triangleq \tilde{\mathcal{V}}^*[x] \ \ \forall\, x \in X^{00})\&(\mathbf{f}(x) \triangleq 0 \ \ \forall\, x \in \mathbf{M}^\natural \setminus X^{00}) \tag{8.13}$$

(в (8.13) мы используем аналог (5.11)). Затем с учетом (2.22) и (4.1) полагаем, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$

$$\mathfrak{B}^\natural_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \triangleq \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))]; \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(z_N))\})$$

$$= \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))]; \tilde{\mathcal{V}}^*[\mathrm{pr}_2(z_N)]\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{8.14}$$

Ясно, что (8.14) определено при $x \in X^0$ и $(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$. Исходя из этого, вводим в рассмотрение при $x \in X^0$ $(\mathcal{M}_1, x)$-задачу

$$\mathfrak{B}^\natural_\alpha[\mathbf{z}] \to \min,\ (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^\natural[x],$$

которой сопоставляем экстремум $\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x]$ и непустое экстремальное множество $\langle\mathrm{sol}\rangle^\natural[x]$:

$$\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \triangleq \min_{(\alpha,\mathbf{z})\in\mathbf{D}^\natural[x]} \mathfrak{B}^\natural_\alpha[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \tag{8.15}$$

$$\langle\mathrm{sol}\rangle^\natural[x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^\natural[x] \mid \mathfrak{B}^\natural_\alpha[\mathbf{z}] = \tilde{\mathcal{V}}^\natural[x]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}^\natural[x]). \tag{8.16}$$

Посредством (8.15) определена функция $\tilde{\mathcal{V}}^\natural[\cdot] \triangleq (\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x])_{x\in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$ экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи, которую рассматриваем в качестве критерия при оптимизации старта. Итак, задаче

$$\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \to \min,\ x \in X^0,$$

сопоставляем экстремум $\tilde{\mathcal{V}}^\natural_0$ и непустое экстремальное множество $\tilde{\mathcal{X}}^\natural_{\mathrm{opt}}$:

$$\tilde{\mathcal{V}}^\natural_0 \triangleq \min_{x\in X^0} \tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \in \mathbb{R}_+, \tag{8.17}$$

$$\tilde{\mathcal{X}}^\natural_{\mathrm{opt}} \triangleq \{x \in X^0 \mid \tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] = \tilde{\mathcal{V}}^\natural_0\} \in \mathcal{P}'(X^0). \tag{8.18}$$

Значение $\tilde{\mathcal{V}}^\natural_0$ (8.17) называем полным экстремумом $\mathcal{M}_1$-задачи. Итак, и в случае минимаксной постановки введены две взаимосвязанные (см. (8.13)) частичные задачи.

Предложение 3. *Если* $x \in X^0$, $(\alpha, \mathbf{y}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$ *и* $(\beta, \mathbf{z}) \in \langle\mathrm{sol}\rangle^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$, *то* $\mathfrak{B}_{\alpha\diamond\beta}[\mathbf{y}\,\square\,\mathbf{z}] = \mathfrak{B}^\natural_\alpha[\mathbf{y}]$.

Доказательство. Фиксируем x, $(\alpha, \mathbf{y})$ и $(\beta, \mathbf{z})$ в соответствии с условиями. Тогда $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}^*_\beta[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$, где (см. (2.16)) $\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N)) \in X^{00}$. Затем $\alpha \diamond \beta \in \mathbf{P}$ в силу (2.7) и $\mathbf{y}\,\square\,\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{\alpha\diamond\beta}[x]$ согласно (4.5). В итоге (см. (2.9)) $(\alpha \diamond \beta, \mathbf{y}\,\square\,\mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$, а потому

$$\mathfrak{B}_{\alpha\diamond\beta}[\mathbf{y}\,\square\,\mathbf{z}] = \sup(\{\mathbb{A}; \sup(\{\mathbb{B}; f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}\,\square\,\mathbf{z})(\mathbf{n}))\})\}) \in \mathbb{R}_+, \tag{8.19}$$

где полагается для большей краткости, что (см. (2.22), (4.2))

$$\mathbb{A} \triangleq \max_{t\in\overline{1,N}}[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(t-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{y}(t)), \alpha^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\alpha(t)}(\mathbf{y}(t), \alpha^1(\overline{t,N}))], \tag{8.20}$$

$$\mathbb{B} \triangleq \max_{t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z})(t-1)), \mathrm{pr}_1((\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z})(t)), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))$$
$$+ c_{(\alpha \diamond \beta)(t)}((\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z})(t), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))]. \tag{8.21}$$

При этом (см. (2.20), (4.3)), как легко видеть,

$$\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2((\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z})(t-1)), \mathrm{pr}_1((\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z})(t)), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))$$
$$= \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t-(N+1))), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t-N)), \beta^1(\overline{t-N, \mathbf{n}-N})) \ \ \forall t \in \overline{N+1, \mathbf{n}}.$$

Кроме того, имеем также в силу (2.20), (4.3) и (4.4), что при $t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}$

$$c_{(\alpha \diamond \beta)(t)}((\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z})(t), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) = c^*_{\beta(t-N)}(\mathbf{z}(t-N), \beta^1(\overline{t-N, \mathbf{n}-N})). \tag{8.22}$$

Из (8.21)–(8.22) вытекает следующее равенство:

$$\mathbb{B} = \max_{\tau \in \overline{1,\mathbf{n}-N}} [\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(\tau-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(\tau)), \beta^1(\overline{\tau, \mathbf{n}-N})) + c^*_{\beta(\tau)}(\mathbf{z}(\tau), \beta^1(\overline{\tau, \mathbf{n}-N}))],$$

согласно (8.9) $\sup(\{\mathbb{B}; f(\mathrm{pr}_2((\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z})(\mathbf{n})))\}) = \tilde{\mathcal{V}}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$, где учтена (см. (8.12)) оптимальность $(\beta, \mathbf{z})$. В силу (8.14), (8.19) и (8.20) $\mathfrak{B}_{\alpha \diamond \beta}[\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z}] = \sup(\{\mathbb{A}; \tilde{\mathcal{V}}^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]\}) = \mathfrak{B}^\natural_\alpha[\mathbf{y}]$.

Следствие 2. *Если $x \in X^0$, $(\alpha, \mathbf{y}) \in \langle \mathrm{sol} \rangle^\natural[x]$ и $(\beta, \mathbf{z}) \in \langle \mathrm{sol} \rangle^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$, то $\mathfrak{B}_{\alpha \diamond \beta}[\mathbf{y} \,\square\, \mathbf{z}] = \tilde{\mathcal{V}}^\natural[x]$.*

Доказательство очевидно (см. (8.16) и предложение 3). Из (8.2) и следствия 2

$$\tilde{\mathcal{V}}[x] \leqslant \tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \ \ \forall x \in X^0. \tag{8.23}$$

В свою очередь, из (8.7), (8.17) и (8.23) вытекает очевидное неравенство

$$\mathbb{V}^0 \leqslant \tilde{\mathcal{V}}^\natural_0. \tag{8.24}$$

Ниже будет показано, что в (8.23), (8.24) на самом деле реализуются равенства.

9. Минимаксная задача с элементами декомпозиции, 2: соотношение экстремумов и экстремальных множеств

В данном разделе мы уточним (8.23), (8.24), что будет важно для обоснования оптимальности алгоритма 1)–9) разд. 2 в “минимаксном” случае. Используем (4.7).

Предложение 4. *Если $x \in X^0$, то справедливо равенство $\tilde{\mathcal{V}}[x] = \tilde{\mathcal{V}}^\natural[x]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $x \in X^0$. Согласно (8.23) $\tilde{\mathcal{V}}[x] \leqslant \tilde{\mathcal{V}}^\natural[x]$. Проверим противоположное неравенство. Напомним, что (см. (8.3)) $\langle \mathrm{sol} \rangle[x] \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем ДР $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}) \in \langle \mathrm{sol} \rangle[x]$. Тогда (см. (8.3)) $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$ и

$$\mathfrak{B}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] = \tilde{\mathcal{V}}[x]. \tag{9.1}$$

В силу (2.9) $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$; $\gamma = \alpha \diamond \beta$, где $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$. Как следствие, $(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x]$. С учетом (4.6) имеем $(z_t)_{t \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$; отметим также (см. (4.7)), что $\mathrm{pr}_2(z_N) \in X^{00}$. Поскольку $(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$ в силу (2.15), справедливо (см. (8.15)) неравенство $\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \leqslant \mathfrak{B}^\natural_\alpha[(z_t)_{t \in \overline{0,N}}]$. Согласно (8.14) получаем, как следствие, что

$$\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \leqslant \sup(\{\max_{t \in \overline{1,N}} [\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))]; \tilde{\mathcal{V}}^*[\mathrm{pr}_2(z_N)]\}). \tag{9.2}$$

Введем в рассмотрение кортеж $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$: $(z^*_0 \triangleq (\mathrm{pr}_2(z_N), \mathrm{pr}_2(z_N)))\&(z^*_t \triangleq z_{t+N} \quad \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{n}-N})$. С учетом (4.8) получаем с очевидностью, что $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[\mathrm{pr}_2(z_N)]$. Ясно, что (см. (8.11)) $\tilde{\mathcal{V}}^*[\mathrm{pr}_2(z_N)] \leqslant \mathfrak{B}^*_\beta[(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}]$, где $(\beta, (z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[\mathrm{pr}_2(z_N)]$; в силу (9.2)

$$\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \leqslant \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c^\natural_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))]; \mathfrak{B}^*_\beta[(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}]\}). \quad (9.3)$$

Легко видеть, что из (2.22), (4.2) и (9.3) следует также неравенство

$$\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \leqslant \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}))]; \mathfrak{B}^*_\beta[(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}]\}). \quad (9.4)$$

При этом, однако, приходим к равенству

$$\mathfrak{B}^*_\beta[(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \sup(\{\max_{t\in\overline{N+1,\mathbf{n}}}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}))]; f(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}}))\}) \quad (9.5)$$

(в (9.5) учтены представления (2.6), (4.3), (4.8)). Тогда (см. (2.24), (9.4), (9.5)) $\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \leqslant \mathfrak{B}_\gamma[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}]$. Из (9.1) вытекает неравенство $\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \leqslant \tilde{\mathcal{V}}[x]$, чем и завершается доказательство. □

Из предложения 4 имеем следующее совпадение функций экстремума:

$$\tilde{\mathcal{V}}^\natural[\cdot] = \tilde{\mathcal{V}}[\cdot]. \quad (9.6)$$

Из (8.7), (8.17) и (9.6) получаем важное равенство

$$\tilde{\mathcal{V}}^\natural_0 = \mathbb{V}^0. \quad (9.7)$$

В свою очередь, из (8.8), (8.18) и (9.7) вытекает равенство экстремальных множеств:

$$\tilde{\mathcal{X}}^\natural_{\mathrm{opt}} = \tilde{\mathbb{X}}^{(\mathrm{opt})}_0. \quad (9.8)$$

Итак, ключевые показатели основной задачи совпадают с аналогичными показателями предваряющей, что определяется согласованием в виде первого положения в (8.13).

10. Двухэтапное динамическое программирование

Возвращаемся к алгоритму 1)–9) разд. 2 с целью реализации шагов 3) и 6), связанных с построением функций экстремума $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задачи, а также слоев функции Беллмана (для построения минимаксного МП). Общая логика здесь соответствует разд. 6 для аддитивной задачи. Начинаем построения с финальной задачи, для которой будут последовательно определены функции $\mathrm{v}^*_0 \in \mathcal{R}_+[D^*_0], \mathrm{v}^*_1 \in \mathcal{R}_+[D^*_1], \ldots, \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N} \in \mathcal{R}_+[D^*_{\mathbf{n}-N}]$. Используем отображение $\mathbf{I}^*$ (3.8); см. также (3.9)–(3.13). Функцию $\mathrm{v}^*_0 \in \mathcal{R}_+[D^*_0]$ задаем условием (см. (3.11))

$$\mathrm{v}^*_0(x, \varnothing) \triangleq f(x) \quad \forall\, x \in \tilde{\mathcal{M}}^*. \quad (10.1)$$

Далее используем (3.14). Итак, если $s \in \overline{1,\mathbf{n}-N}$ и функция $\mathrm{v}^*_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D^*_{s-1}]$ построена, то (с учетом (3.14)) определяем $\mathrm{v}^*_s \in \mathcal{R}_+[D^*_s]$:

$$\mathrm{v}^*_s(x, K) \triangleq \min_{j\in\mathbf{I}^*(K)}\ \min_{z\in\mathbb{M}^{(j)}} \sup(\{[\mathbf{c}^*(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c^*_j(z, K)]; \mathrm{v}^*_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \quad \forall\, (x, K) \in D^*_s. \quad (10.2)$$

Следовательно, определена рекуррентная процедура $\mathrm{v}^*_0 \to \mathrm{v}^*_1 \to \ldots \to \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}$; регулярный шаг указан в (10.2), а начальный элемент — в (10.1). Итак, построены все функции-слои $\mathcal{M}_2$-задачи. Финалом является функция экстремума:

$$\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1,\mathbf{n}-N}) = \tilde{\mathcal{V}}^*[x] \quad \forall\, x \in X^{00} \quad (10.3)$$

(см. [22, (8.11)]). Таким образом, посредством $\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}$ найдена функция экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи (завершен этап 3) основного алгоритма). С учетом (8.13) и (10.3) определяем теперь терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_1$-задачи и приступаем к реализации шага 6). Здесь используем отображение $\mathbf{I}^\natural$ (3.1), а также (3.2)–(3.6) для определения $\mathrm{v}^\natural_0 \in \mathcal{R}_+[D^\natural_0], \mathrm{v}^\natural_1 \in \mathcal{R}_+[D^\natural_1], \ldots \mathrm{v}^\natural_N \in \mathcal{R}_+[D^\natural_N]$. Функцию $\mathrm{v}^\natural_0 \in \mathcal{R}_+[D^\natural_0]$ находим явно, опираясь на (10.3):

$$\mathrm{v}^\natural_0(x, \varnothing) \stackrel{\triangle}{=} \tilde{\mathcal{V}}^*[x] = \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \ \ \forall\, x \in X^{00}. \tag{10.4}$$

Далее используем (3.7): если $s \in \overline{1, N}$ и функция $\mathrm{v}^\natural_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D^\natural_{s-1}]$ построена, то $\mathrm{v}^\natural_s \in \mathcal{R}_+[D^\natural_s]$ задаем правилом

$$\mathrm{v}^\natural_s(x, K) \stackrel{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{[\mathbf{c}^\natural(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c^\natural_j(z, K)]; \mathrm{v}^\natural_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \ \ \forall\, (x, K) \in D^\natural_s. \tag{10.5}$$

Значит, определена рекуррентная процедура $\mathrm{v}^\natural_0 \to \mathrm{v}^\natural_1 \to \ldots \to \mathrm{v}^\natural_N$, регулярный шаг которой соответствует (10.5), а начальный элемент указан в (10.4). Финалом процедуры является функция экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи (см. (3.4); [22, (8.20)]):

$$\mathrm{v}^\natural_N(x, \overline{1, N}) = \tilde{\mathcal{V}}^\natural[x] \ \ \forall\, x \in X^0. \tag{10.6}$$

Следовательно (см. (10.6)), определена функция $\tilde{\mathcal{V}}^\natural[\cdot]$, а потому найдены полный экстремум $\tilde{\mathcal{V}}^\natural_0$ (8.17) и экстремальное множество $\tilde{\mathcal{X}}^\natural_{\mathrm{opt}}$ (8.18) $\mathcal{M}_1$-задачи. С учетом предложения 4, (9.6)–(9.8) и (10.6) получаем функцию $\tilde{\mathcal{V}}[\cdot]$, экстремум $\mathbb{V}^0$ и экстремальное множество $\tilde{\mathbb{X}}^{(\mathrm{opt})}_0$:

$$(\tilde{\mathcal{V}}[x] = \mathrm{v}^\natural_N(x, \overline{1, N}) \ \ \forall\, x \in X^0) \& (\mathbb{V}^0 = \min_{x \in X^0} \mathrm{v}^\natural_N(x, \overline{1, N})) \& (\tilde{\mathbb{X}}^{(\mathrm{opt})}_0 = \{x \in X^0 \mid \mathrm{v}^\natural_N(x, \overline{1, N}) = \mathbb{V}^0\}). \tag{10.7}$$

Показатели (10.7) основной задачи вычисляются посредством сквозной (склеенной) процедуры

$$(\mathrm{v}^*_0 \to \mathrm{v}^*_1 \to \ldots \to \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}) \to (\mathrm{v}^\natural_0 \to \mathrm{v}^\natural_1 \to \ldots \to \mathrm{v}^\natural_N) \tag{10.8}$$

на основе ДП, причем реализация данной процедуры достаточна (для (10.7)) в схеме с перезаписью слоев функции Беллмана (см. [22, замечание 2.1]), т. е. при некоторой экономии ресурсов памяти; при использовании такой схемы в памяти вычислителя достаточно сохранять только один слой функции Беллмана на всех этапах (10.8).

11. Построение минимаксного маршрутного процесса

Рассмотрим построение оптимального МП, т. е. триплета, являющегося элементом множества (8.6). В этой части мы полагаем процедуру (10.8) завершенной в полной общности (схема с перезаписью слоев здесь недостаточна): исходим из того, что в нашем распоряжении (в памяти вычислителя) находятся все функции из (10.8). Считаем выполненными построения (10.7); впрочем, для дальнейшего нам достаточно знать любую точку $\tilde{\mathbb{X}}^{(\mathrm{opt})}_0$. Фиксируем

$$x^0 \in \tilde{\mathbb{X}}^{(\mathrm{opt})}_0. \tag{11.1}$$

Тогда (см. (9.8), (11.1)) $x^0 \in \tilde{\mathcal{X}}^\natural_{\mathrm{opt}}$, причем (см. (10.6), (10.7))

$$\mathbb{V}^0 = \tilde{\mathcal{V}}[x^0] = \tilde{\mathcal{V}}^\natural[x^0] = \mathrm{v}^\natural_N(x^0, \overline{1, N}). \tag{11.2}$$

При этом $(x^0, \overline{1, N}) \in D^\natural_N$ согласно (3.4), а потому (см. (10.5), (11.2))

$$\mathrm{v}^\natural_N(x^0, \overline{1, N}) = \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{[\mathbf{c}^\natural(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c^\natural_j(z, \overline{1, N})]; \mathrm{v}^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})\}), \tag{11.3}$$

$(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\}) \in D^\natural_{N-1}$ при $j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N})$ и $z \in \mathbb{M}_j$. Пусть $y_0 \triangleq (x^0, x^0)$. Далее, с учетом (11.3) выбираем $\xi_1 \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N})$ и $y_1 \in \mathbb{M}_{\xi_1}$, для которых

$$\mathrm{v}^\natural_N(x^0, \overline{1,N}) = \sup(\{[\mathbf{c}^\natural(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1), \overline{1,N}) + c^\natural_{\xi_1}(y_1, \overline{1,N})]; \mathrm{v}^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})\}), \qquad (11.4)$$

получая при этом включение $(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) \in D^\natural_{N-1}$, где $N-1 \geqslant 1$. Тогда в силу (10.5)

$$\mathrm{v}^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$$

$$+ c^\natural_j(z, \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})]; \mathrm{v}^\natural_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; j\})\}), \qquad (11.5)$$

где $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; j\}) \in D^\natural_{N-2}$ при $j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$ и $z \in \mathbb{M}_j$ (см. (3.7)). Согласно (11.5) выбираем $\xi_2 \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$ и $y_2 \in \mathbb{M}_{\xi_2}$, для которых

$$\mathrm{v}^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) = \sup(\{[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$$

$$+ c^\natural_{\xi_2}(y_2, \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})]; \mathrm{v}^\natural_{N-2}(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\})\}), \qquad (11.6)$$

где $(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}) \in D^\natural_{N-2}$. Теперь отметим, что (см. (1.1), (11.4), (11.6))

$$\mathrm{v}^\natural_N(x^0, \overline{1,N}) = \sup(\{\max_{t \in \overline{1,2}} [\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_{t-1}), \mathrm{pr}_1(y_t), \overline{1,N} \setminus \{\xi_\tau : \tau \in \overline{1,t-1}\})$$

$$+ c^\natural_{\xi_t}(y_t, \overline{1,N} \setminus \{\xi_\tau : \tau \in \overline{1,t-1}\})]; \mathrm{v}^\natural_{N-2}(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_\tau : \tau \in \overline{1,2}\})\}) \qquad (11.7)$$

(с учетом (8.14), (11.2) и (11.7) в случае $N = 2$ для УП $((\xi_t)_{t \in \overline{1,2}}, (y_t)_{t \in \overline{0,2}})$ получаем свойство оптимальности данной УП как ДР в $\mathcal{M}_1$-задаче со стартом x^0). В общем случае $N \geqslant 2$ процедуры выбора УП, подобные (11.4) и (11.6), следует продолжать вплоть до исчерпывания $\overline{1,N}$. В итоге будут построены кортежи $\xi = (\xi_t)_{t \in \overline{1,N}} \in \mathcal{A}_1, \mathbf{y} = (y_t)_{t \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\xi[x^0]$, для которых получившееся ДР $(\xi, \mathbf{y}) \in \mathbf{D}^\natural[x^0]$ обладает свойством (см. (10.6), (11.2)) $\tilde{\mathcal{V}}^\natural[x^0] = \mathrm{v}^\natural_N(x^0, \overline{1,N}) = \mathfrak{B}^\natural_\xi[\mathbf{y}]$. Это означает ввиду (8.16), что справедливо включение

$$(\xi, \mathbf{y}) \in \langle \mathrm{sol} \rangle^\natural[x^0]. \qquad (11.8)$$

Пусть $x^{00} \triangleq \mathrm{pr}_2(y_N) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))$; имеем исходя из (4.1), что $x^{00} \in X^{00}$. Рассматриваем x^{00} как точку старта в $\mathcal{M}_2$-задаче, где $(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \in D^*_{\mathbf{n}-N}$ (см. разд. 3). В силу (10.2) и (10.3)

$$\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \tilde{\mathcal{V}}^*[x^{00}] = \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \sup(\{[\mathbf{c}^*(x^{00}, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N})$$

$$+ c^*_j(z, \overline{1, \mathbf{n} - N})]; \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{j\})\}); \qquad (11.9)$$

здесь $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{j\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-1}$ при $j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ и $z \in \mathbb{M}^{(j)}$ в силу (3.14). Пусть $\hat{y}_0 \triangleq (x^{00}, x^{00})$. С учетом (11.9) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ и $\hat{y}_1 \in \mathbb{M}^{(\eta_1)}$, для которых

$$\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \sup(\{[\mathbf{c}^*(x^{00}, \mathrm{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N})$$

$$+ c^*_{\eta_1}(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n} - N})]; \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})\}), \qquad (11.10)$$

где $(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-1}$. Тогда (см. (3.14)) $(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; j\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-2}$ при $j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})$ и $z \in \mathbb{M}^{(j)}$. Из (10.2) вытекает, что

$$\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \sup(\{[\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})$$

$$+ c_j^*(z, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})]; \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; j\})\}). \tag{11.11}$$

Согласно (11.11) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\hat{y}_2 \in \mathbb{M}^{(\eta_2)}$, для которых

$$\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-1}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) = \sup(\{[\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_1), \mathrm{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})$$

$$+ c_{\eta_2}^*(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})]; \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\}), \tag{11.12}$$

где $(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-2}$. Из (1.1), (11.10), (11.12) получаем равенство

$$\mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \sup(\{\max_{t \in \overline{1,2}}[\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{y}_t), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_\tau : \tau \in \overline{1, t-1}\})$$

$$+ c_{\eta_t}^*(\hat{y}_t, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_\tau : \tau \in \overline{1, t-1}\})]; \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N-2}(\mathrm{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_\tau : \tau \in \overline{1, 2}\})\}), \tag{11.13}$$

(при $\mathbf{n} = N + 2$ из (11.13)) легко извлекается оптимальность УП $((\eta_i)_{i \in \overline{1,2}}, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0,2}})$ в $\mathcal{M}_2$-задаче со стартом в x^{00}). В общем случае $N \leqslant \mathbf{n} - 2$ процедуры выбора, подобные (11.10) и (11.12), следует продолжать до исчерпания $\overline{1, \mathbf{n} - N}$; будут построены (см. [22, § 9]) кортежи $\eta = (\eta_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{A}_2, \hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\eta[x^{00}]$ со свойством $\mathfrak{B}^*_\eta[\hat{\mathbf{y}}] = \mathrm{v}^*_{\mathbf{n}-N}(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \tilde{\mathcal{V}}^*[x^{00}]$ (см. (11.9)). Поскольку $(\eta, \hat{\mathbf{y}}) \in \mathbf{D}^*[x^{00}]$, получаем (см. (8.12)), что $(\eta, \hat{\mathbf{y}}) \in \langle \mathrm{sol} \rangle^*[x^{00}]$. Таким образом (см. (11.1), (11.8)), $x^0 \in \tilde{\mathbb{X}}_0^{(\mathrm{opt})}$, $(\xi, \mathbf{y}) \in \langle \mathrm{sol} \rangle^\natural[x^0]$ и $(\eta, \hat{\mathbf{y}}) \in \langle \mathrm{sol} \rangle^*[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(N))]$, а потому (см. следствие 2) $\mathfrak{B}_{\xi \diamond \eta}[\mathbf{y} \square \hat{\mathbf{y}}] = \mathcal{V}^\natural[x^0]$, где $\mathcal{V}^\natural[x^0] = \mathcal{V}_0^\natural$ в силу (8.18) и (9.8). Тогда (см. (9.7))

$$\mathfrak{B}_{\xi \diamond \eta}[\mathbf{y} \square \hat{\mathbf{y}}] = \mathcal{V}_0^\natural = \mathbb{V}^0. \tag{11.14}$$

При этом (см. (4.9)) $(\xi \diamond \eta, \mathbf{y} \square \hat{\mathbf{y}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0]$, а значит, $(\xi \diamond \eta, \mathbf{y} \square \hat{\mathbf{y}}, x^0) \in \mathbf{D}$. Как следствие (см. (8.6), (11.14)), имеем минимаксный композиционный МП $(\xi \diamond \eta, \mathbf{y} \square \hat{\mathbf{y}}, x^0) \in \mathbb{SOL}$.

12. Пример решения минимаксной задачи с элементами декомпозиции

Исследуем случай плоской задачи, полагая, что X есть невырожденный прямоугольник на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; мегаполисы — конечные плоские множества. Рассматриваются три примера задачи о посещении мегаполисов на плоскости (итак, $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Стоимости внешних перемещений напрямую зависят от евклидовых расстояний; аналогично значения терминальной компоненты f в первых двух примерах определяются евклидовой нормой на плоскости (в третьем в определении f имеется особенность). Отношение $\mathbb{M}_j$, связываемое с мегаполисом M_j, где $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$, определяется выражением $\mathbb{M}_j = M_j \times M_j$ (декартов “квадрат” мегаполиса); предполагается что в примерах мегаполисы получаются дискретизацией окружностей фиксированного радиуса и реализуются в виде равномерных сеток; внутренние работы при посещении мегаполиса M_j, где $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$, сводятся к перемещению из пункта прибытия (точка M_j) в центр круга и последующего перемещения в пункт отправления из M_j. Стоимости внутренних перемещений получаются умножением соответствующих (данным перемещениям) евклидовых расстояний на 5; имеются в виду функции c_j, $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$. Это соответствует более медленным перемещениям при выполнении внутренних работ. Зависимость от списка заданий (в примерах) отсутствует; речь идет о функциях $\mathbf{c}, c_1, \ldots, c_{\mathbf{n}}$. Во всех примерах предполагалось, что $|M_i| \equiv 12$. В первых двух примерах рассматривается случай двух кластеров.

П р и м е р 1. Предполагается, что $\mathbf{n} = 36$. Точки старта выбираются из границы прямоугольника с вершинами $(-212, 0), (-212, 287), (205, 287), (205, 0)$; выбор осуществляется с шагом 10 (имется в виду формирование X^0). В $\mathcal{M}_1$ включены мегаполисы, все точки которых имеют отрицательную первую координату; $|\mathcal{M}_1| = 18$. В $\mathcal{M}_2$ включаются мегаполисы, все точки которых имеют положительное значение первой координаты (семейство $\mathcal{M}$ исчерпывается здесь мегаполисами двух упомянутых типов). Координаты “городов” (точки мегаполисов) не приводятся по соображениям объема. Полагаем, что условия предшествования в $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задаче отсутствуют: $\mathbf{K}_1 = \varnothing$ и $\mathbf{K}_2 = \varnothing$. В результате вычислений были найдены оптимальный композиционный МП, $\mathbb{V}^0 = 160.4$ и точка старта $(-212, 0)$. Время счета 6 мин. 41 с.

Пример 2. Предполагается, что $\mathbf{n} = 54$. Все мегаполисы M_i, $i \in \overline{1, \mathbf{n}}$, состоят из векторов с ненулевой первой координатой. Как и в примере 1, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ состоят из мегаполисов, все "города" которых имеют соответственно отрицательную и положительную первую координату. Полагаем здесь $N = 27$; имеются условия предшествования, причем $|\mathbf{K}_1| = |\mathbf{K}_2| = 22$. Функции стоимости (внешних перемещений и внутренних работ) такие же, как и в примере 1. Точки старта выбираются с шагом 10 из границы прямоугольника с вершинами $(-319, 0), (-319, 265)$, $(341, 265), (341, 0)$. Найдены оптимальный композиционный МП, $\mathbb{V}^0 = 174,4$, точка старта $(-319, 0)$. Время счета 6 мин 40 с. Здесь уместно сравнить примеры 1 и 2 с точки зрения времени счета; оно практически одно и то же в обоих случаях, но размерность существенно больше в примере 2. Однако в этом примере имеются и в положительном направлении эффективно используются условия предшествования.

Пример 3. Обратимся к случаю многоэтапной задачи, понимаемой в духе [28, § 6], где изучался многоэтапный вариант задачи курьера, т. е. случай одноэлементных мегаполисов. Однако распространение алгоритма [28, § 6] на случай, когда исследуется проблема посещения мегаполисов, не составляет труда и в логическом отношении соответствует [20, § 12] для аддитивной задачи. Ограничиваемся сейчас примером применения алгоритма при $\mathbf{n} = 110$, $|M_i| \equiv 12$. Рассматриваем пять кластеров, порождаемых семействами $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4$ и $\mathcal{M}_5$ мегаполисов, $|\mathcal{M}_i| \equiv 22$. Имеются условия предшествования в каждой из $\mathcal{M}_i$-задач, порождаемые соответствующими множествами $\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_5$ адресных пар, причем $|\mathbf{K}_i| \equiv 16$. Точки старта выбираются из границы прямоугольника с вершинами $(0, 0), (0, 393), (971, 393), (971, 0)$ (шаг выбора 10). Функции стоимости аналогичны двум первым примерам за исключением f; значение f определяется евклидовым расстоянием до точки $(900, 0)$. Найдены оптимальный композиционный МП, $\mathbb{V}^0 = 193,4$, точка старта (0,20). Время счета 52 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gutin G., Punnen A.** The traveling salesman problem and its variations. NY: Springer, 2002. 830 p.
2. **Cook W.J.** In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton; New Jersey: Princeton University Press, 2012. 248 p.
3. **Гимади Э.Х., Хачай М.Ю.** Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2016. 220 p.
4. **Сергеев С.И.** Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I. Подход на основе динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1995. №7. С. 144–150.
5. **Меламед И.И., Сергеев С. И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–33; № 10. С. 3–29; № 11. С. 3–26.
6. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
7. **Хелд М., Карп Р.М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
8. **Коробкин В.В., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Ченцов А.Г.** Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций / под общ. ред. член-корр. РАН И.А. Каляева. М.: Новые технологии, 2012. 234 с.
9. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Модельный вариант задачи о последовательной утилизации источников излучения (итерации на основе оптимизирующих вставок) // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2017. Т. 50. С. 83–109. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-08
10. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Сесекин А.Н.** Одна задача маршрутизации работ в условиях повышенной радиации // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2021. Т. 58. С. 94–126. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-58-06
11. **Петунин А.А.** О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та. 2009. Т. 13, № 2. С. 280–286.

12. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: Ид-во УрФУ, 2020. 247 с.
13. **Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. Вып. 11. С. 96–117.
14. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Сер. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. №2 (169). С. 280–286.
15. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Сесекин А.Н.** Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат. М.: Ленанд, 2021. 230 с.
16. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Обобщенная модель курьера с дополнительными ограничениями // Вестн. ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование. 2016. Т. 9. № 1. С. 46–58. https://doi.org10.14529/mmp160104
17. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Сесекин А.Н.** Динамическое программирование в обобщенной задаче "на узкие места"и оптимизация точки старта // Вестн. Удмурт. университета. Математика. Механика, Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 3. С. 348–363. https://doi.org/10.20537/vm180306
18. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Ижевский институт компьютерных исследований, 2008. 239 с.
19. **Сигал И.Х., Иванова А.П.** Введение в прикладное динамическое программирование. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
20. **Ченцов А.Г.,Ченцов П.А.** Экстремальная двухэтапная задача маршрутизации и процедуры на основе динамического программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 2. С. 215–248. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-215-248
21. **Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Двухэтапное динамическое программирование в задаче маршрутизации с элементами декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 2023. № 5. С. 133–164. https://doi.org/10.31857/S0005231023050070
22. **Ченцов А.Г.** Задача маршрутизации “на узкие места” с системой первоочередных заданий // Изв. ИМИ УдГУ. 2023. Т. 61. С. 156–186. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-09
23. **Ченцов А.Г.,Ченцов П.А.** Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // Вестн. российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 137. С. 95–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124
24. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
25. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2002. 960 с.
26. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
27. **Ченцов А.Г.** К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестн. Удмурт. университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. № 1. С. 59–82.
28. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Ченцов П.А.** Задача маршрутизации «на узкие места» (оптимизация в пределах зон) // Вестн. Удмурт. университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34, № 2. С. 267–285. https://doi.org/10.35634/vm240206

Поступила 14.10.2024
После доработки 4.11.2024
Принята к публикации 11.11.2024
Опубликована онлайн 1.12.2024

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Павел Александрович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
старший науч. сотрудник
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: p.chentsov@mail.ru

REFERENCES

1. Gutin G., Punnen A. *The traveling salesman problem and its variations.* NY, Springer New York, 2002, 830 p. https://doi.org/10.1007/b101971
2. Cook W.J. *In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation.* Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 2012, 248 p. ISBN: 9780691163529 .
3. Gimadi E.Kh., Khachai M.Yu. *Ekstremal'nyye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* [Extremal problems on permutation sets]. Yekaterinburg, Izd-vo UMTS UPI, 2016, 220 p. ISBN: 978-8-8295-0497-7 .
4. Sergeev S.I. Algorithms for solving a minimax traveling salesman problem. I. An approach based on dynamic programming. *Autom. Remote Control*, 1995, vol. 56, no. 7, pp. 1027–1032.
5. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. *Autom. Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173; vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324; vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
6. Bellman R. Application of dynamic programming to the traveling salesman problem. *Kiberneticheskiy sbornik*, 1964, vol. 9, pp. 219–228 (in Russian).
7. Held M., Karp R.M. Application of dynamic programming to ordering problems. *Kiberneticheskiy sbornik*, 1964, vol. 9, pp. 202–218 (in Russian).
8. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsiy* [Routing methods and their applications in problems of improving the safety and efficiency of nuclear power plants]. Moscow, Iz-vo "Novyye tekhnologii", 2012, 234 p. ISBN: 978-5-94694-027-6 .
9. Chentsov A.G., Chentsov A.A. A model variant of the problem about radiation sources utilization (iterations based on optimization insertions). *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 50, pp. 83–109 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-08
10. Chentsov A.G., Chentsov A.A., Sesekin A.N. One task of routing jobs in high radiation conditions. *Izv. IMI UdGU*, 2021, vol. 58, pp. 94–126 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-58-06
11. Petunin A.A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines. *Vestnik UGATU*, 2009, vol. 13, no. 2, pp. 280–286 (in Russian).
12. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. *Optimal'naya marshrutizatsiya instrumenta mashin figurnoy listovoy rezki s chislovym programmnym upravleniyem. Matematicheskiye modeli i algoritmy* [Optimal routing of the tool of figured sheet cutting machines with numerical control. Mathematical models and algorithms], Yekaterinburg, UrFU, 2020, 247 p. ISBN: 978-5-7996-3016-4 .
13. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Routing under constraints: problem of visit to megalopolises. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 11, pp. 1957–1974. https://doi.org/10.1134/S0005117916110060
14. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. To the question about instrument routing in the automated machines of the sheet cutting. *Nauchno-Tekhnicheskiye Vedomosti SPbGPU*, Ser. Computer Science. Telecommunications and Control Systems, 2013, no. 2 (169), pp. 103–111 (in Russian).
15. Chentsov A.G., Chentsov A.A., Sesekin A.N. *Zadachi marshrutizacii peremeshchenij s neadditivnym agregirovaniem zatrat* [Problems of routing of movements with non-additive aggregation of costs]. 2nd edt., Moscow, Lenand Publ., 2021, 230 p. ISBN: 978-5-9710-8057-2 .
16. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Generalized model of courier with additional restrictions. *Vestnik YuUrGU. Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye*, 2016, vol. 9, no. 1, pp. 46–58 (in Russian). https://doi.org/10.14529/mmp160104
17. Chentsov A.G., Chentsov A.A., Sesekin A.N. Dynamic programming in the generalized bottleneck problem and the start point optimization. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2018, vol. 28, no. 3, pp. 348–363 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180306

18. Chentsov A.G. *Ekstremal'nyye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii: nauchnoye izdaniye* [Extremal problems of routing and assignment distribution: theoretical issues: scientific publication]. Moscow, Institute of Computer Research; Izhevsk, Scientific Center "Regular and Chaotic Dynamics", 2008, 239 p. ISBN: 978-5-93972-654-2 .
19. Sigal I.Kh., Ivanova A.P. *Vvedenie v prikladnoe diskretnoe programmirovanie : modeli i vychislitel'nye algoritmy* [Introduction to applied dynamic programming]. Moscow: Fizmatlit, 2007, 304 p.
20. Chentsov A.G., Chentsov P.A. An extremal two-stage routing problem and procedures based on dynamic programming. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 215–248. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-215-248
21. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Two-stage dynamic programming in the routing problem with decomposition elements. *Autom. Remote Control*, 2023, vol. 84, no. 5, pp. 609–632.
22. Chentsov A.G. A bottleneck routing problem with a system of priority tasks. *Izv. IMI UdGU*, 2023, vol. 61, pp. 156–186 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-09
23. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Dynamic programming in the routing problem: decomposition variant. *Vestnik Ross. Univ. Matematika*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 95–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124
24. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* Warszawa: PWN — Polish Sci. Publ., 1968, 417 p. ISBN: 9780444534170 . Translated to Russian under the title Teoriya mnozhestv. Moscow: Mir Publ., 1970, 416 p.
25. Cormen T., Leiserson C., Rivest R. *Introduction to algorithms.* NY: McGraw-Hill, 1990, 1028 p. ISBN: 0-262-53091-0 . Translated to Russian under the title Algoritmy: postroenie i analiz, Moscow: MTsNMO Publ., 2002. 960 p. ISBN: 5-900916-37-5 .
26. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* NY: Acad. Press, 1972. 624 p. ISBN: 9781483259192 . Translated to Russian under the title Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami, Moscow: Nauka Publ., 1977. 624 p.
27. Chentsov A.G. To question of routing of works complexes. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, vol. 1, pp. 59–82 (in Russian).
28. Chentsov A.G., Chentsov A.A., Chentsov P.A. The routing bottlenecks problem (optimization within zones). *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2024, vol. 34, no. 2, pp. 267–285 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm240206

Received October 14, 2024
Revised November 4, 2024
Accepted November 11, 2024
Published online December 1, 2024

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Pavel Alexandrovich Chentsov, Cand. Sci. (Phys.-Math.) Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: chentsov.p@mail.ru .

Cite this article as: A. G. Chentsov, P. A. Chentsov. Dynamic programming and decomposition in extreme routing problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 247–272 .