

УДК 517.977

О ДОПОЛНЯЕМОСТИ И ЛИНЕЙНОЙ ГОМЕОМОРФНОСТИ ПРОСТРАНСТВ $C_p(X)$ ДЛЯ СЧЕТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ X

Т. Е. Хмылева

В данной работе рассматривается вопрос о дополняемости пространства $C_p(X)$ в пространстве $C_p(Y)$ для счетных разреженных метризуемых пространств X и Y . Говорят, что пространство $C_p(X)$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(Y)$, если существует линейный гомеоморфизм $C_p(X)$ на дополняемое подпространство $L \subset C_p(Y)$. Доказано, что если для некоторого ординала α производная $X^{(\alpha \cdot \omega)} \neq \emptyset$, а $Y^{(\omega)} = \emptyset$, то пространство $C_p(X)$ дополняемо не вкладывается в пространство $C_p(Y)$. Наряду с $X^{(\alpha)}$ рассматриваются производные $X^{\{\alpha\}}$, которые определяются аналогично $X^{(\alpha)}$ отбрасыванием точек, обладающих компактной окрестностью. Доказано, что если $X^{\{\alpha\}} \neq \emptyset$, а $Y^{\{\alpha\}} = \emptyset$, то пространство $C_p(X)$ дополняемо не вкладывается в пространство $C_p(Y)$. Доказано также, что если $X^{\{\alpha\}} = Y^{\{\alpha\}} = \emptyset$, $X^{\{\alpha-1\}}$ — локально компактное некомпактное пространство, а $Y^{\{\alpha-1\}}$ — компакт, то пространство $C_p(X)$ дополняемо не вкладывается в пространство $C_p(Y)$. Для доказательства используется метод разложения пространства $C_p(X)$ в счетное произведение пространств $C_p(X_n)$ и существование непрерывного линейного оператора продолжения $T : C_p(L) \rightarrow C_p(X)$ для замкнутого подмножества $L \subset X$.

Ключевые слова: гомеоморфизм, линейный гомеоморфизм, топология поточечной сходимости, ретракт, проектор, дополняемые подпространства, ординал, теорема о замкнутом графике.

T. E. Khmyleva. On complementarity and linear homeomorphism of $C_p(X)$ spaces for countable metric spaces X .

In this paper, we consider the complementarity of the space $C_p(X)$ in the space $C_p(Y)$ for countable sparse metrizable spaces X and Y . It is said that the space $C_p(X)$ is complementably embedded in the space $C_p(Y)$ if there exists a linear homeomorphism $C_p(X)$ to the complemented subspace $L \subset C_p(Y)$. We prove that if for some ordinal α the derivative $X^{(\alpha \cdot \omega)} \neq \emptyset$, and $Y^{(\omega)} = \emptyset$, then the space $C_p(X)$ is complementably not embedded in the space $C_p(Y)$. We also consider the derivatives $X^{(\alpha)}$, which are defined similarly to $X^{(\alpha)}$ by removing all points having a compact neighborhood. It is proved that if $X^{\{\alpha\}} \neq \emptyset$, and $Y^{\{\alpha\}} = \emptyset$, then the space $C_p(X)$ is not complementably embedded in the space $C_p(Y)$. Furthermore, if $X^{\{\alpha\}} = Y^{\{\alpha\}} = \emptyset$, $X^{\{\alpha-1\}}$ is a locally compact non-compact space, and $Y^{\{\alpha-1\}}$ is compact, then the space $C_p(X)$ is complementably not embedded in the space $C_p(Y)$. For the proof, the method of decomposition of the space $C_p(X)$ into a countable product of the spaces $C_p(X_n)$ and the existence of a continuous linear extension operator $T : C_p(L) \rightarrow C_p(X)$ for a closed subset of $L \subset X$.

Keywords: homeomorphism, linear homeomorphism, topology of pointwise convergence, retract, projector, complemented subspaces, ordinal, closed graph theorem.

MSC: 46E15, 46E40, 54C30

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-236-246

1. Предварительные сведения

Вопросы о линейной гомеоморфной классификации пространств непрерывных функций $C_p(X)$ для счетных метризуемых пространств X рассматриваются в работах [1–4]. Для локально компактных метризуемых пространств X вопрос об l -эквивалентности изучен в работе [1]. Для пространств X , не являющихся локально компактными, полная линейная гомеоморфная классификация получена в работе [2] при $X^{(\omega)} = \emptyset$. В статье [5] аналогичный результат представлен для пространств непрерывных ограниченных функций $C_p^*(X)$. Для нормированных пространств непрерывных ограниченных функций подобные вопросы изучались только в частных случаях. В работе [6], например, показано, что не существует линейного непрерывного оператора пространства $l_\infty(c_0)$ на пространство $c_0(l_\infty)$. В [7] доказано, что пространства ограниченных непрерывных функций $BC(X)$ и $BC(Y)$ не являются линейно гомеоморфными, если X локально компактно, а Y таковым не является.

В данной работе изучаются вопросы о дополняемости пространства $C_p(X)$ в пространстве $C_p(Y)$ для счетных метрических разреженных пространств X и Y .

Всюду в дальнейшем X, Y — метрические пространства. Мы будем использовать следующие свойства метрических пространств:

- (1) Если X — счетное метрическое пространство, то X нульмерно [8, с. 286].
- (2) Если X — нульмерное метрическое пространство и $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ — открытое покрытие пространства X , то существует открыто-замкнутое покрытие $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ такое, что $H_n \subset U_n$ и $H_n \cap H_m = \emptyset$ при $n \neq m$ [8, с. 288].
- (3) Если X — нульмерное метрическое пространство и $F \subset X$ — непустое замкнутое подмножество, то F является ретрактом пространства X [8, с. 298].

$C_p(X)$ — пространство непрерывных вещественнозначных функций на X , наделенное топологией поточечной сходимости. Если X — компакт, то $C(X)$ — банахово пространство с нормой $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$ для $f \in C(X)$.

Запись $X \sim Y$ означает, что X гомеоморфно Y .

Если для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо $X_n \subset X$, то $X = \bigsqcup_{n=1}^\infty X_n$ означает, что $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$, все X_n открыто-замкнуты в X и $X_n \cap X_m = \emptyset$ при $m \neq n$.

Пусть запись $C_p(X) \simeq C_p(Y)$ предполагает, что $C_p(X)$ линейно гомеоморфно $C_p(Y)$.

Для линейных замкнутых подпространств L и M из $C_p(X)$ запись $L \oplus M$ означает, что $L + M = C_p(X)$ и $L \cap M = \{0\}$.

Линейное подпространство $L \subset C_p(X)$ будем называть дополняемым, если существует непрерывный линейный проектор $P : C_p(X) \xrightarrow{na} L$. Заметим, что дополняемые подпространства являются замкнутыми и если $M = P^{-1}(0)$, то $C_p(X) = L \oplus M$, т.е. любой элемент $f \in C_p(X)$ единственным образом представим в виде $f = l + m$, где $l \in L, m \in M$. Известно, что если P и Q — два линейных непрерывных проектора на подпространство $L \subset X$, то $P^{-1}(0) \simeq Q^{-1}(0)$, иначе говоря, все дополнения к подпространству L являются линейно гомеоморфными.

Если $F \subset X$ — замкнутое подмножество, то $C_p(X|F) = \{f \in C_p(X) : f|_F \equiv 0\}$.

Предложение 1. Пусть X — метрическое пространство. $F \subset X$ — непустое замкнутое подмножество и $r : X \xrightarrow{na} F$ — непрерывная ретракция. Тогда подпространство $L_F = \{g \circ r : g \in C_p(F)\} \subset C_p(X)$ — дополняемое подпространство в $C_p(X)$, $L_F \simeq C_p(F)$ и $C_p(X) = L_F \oplus C_p(X|F) \simeq C_p(F) \times C_p(X|F)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $T : C_p(F) \rightarrow C_p(X)$, $Tg = g \circ r$. Нетрудно видеть, что T — линейная непрерывная биекция пространства $C_p(F)$ на подпространство $L_F \subset C_p(X)$ и оператор сужения $R_F : L_F \rightarrow C_p(F)$ является непрерывным обратным к оператору T . Оператор $P = T \circ R_F : C_p(X) \xrightarrow{na} L_F$, $Pf = f|_F \circ r$, является непрерывным линейным проектором, причем $P^{-1}(0) = \{f \in C_p(X) : f|_F \equiv 0\}$. Следовательно, $C_p(X) = L_F \oplus C_p(X|F) \simeq C_p(F) \times C_p(X|F)$. \square

Если $X = \bigsqcup_{n=1}^\infty X_n$, то, очевидно, $C_p(X) \simeq \prod_{n=1}^\infty C_p(X_n)$ и все $C_p(X_n)$ дополняемы в пространстве $C_p(X)$. Мы обозначаем $s = \mathbb{R}^{\aleph_0}$, $c_0 = \{\{x_n\} \in \mathbb{R}^{\aleph_0} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$, а

$$\left(\prod_{n=1}^\infty C_p(X_n) \right)_{c_0} = \left\{ \{f_n\}_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty C_p(X_n) : \{n \in \mathbb{N} : \|f_n\| > \varepsilon\} \text{ конечно для } \forall \varepsilon > 0 \right\},$$

где $\|f_n\| = \sup_{x \in X_n} |f_n(x)|$.

Известно (см. [9]), что в пространстве s все замкнутые линейные подпространства, а следовательно и дополняемые, либо конечномерны, либо линейно гомеоморфны s .

Для произвольного ординала α обозначим через $X^{(\alpha)}$ производную порядка α , определяемую по трансфинитной индукции: $X^{(0)} = X$, X' — множество неизолированных точек в X ,

$X^{(\alpha)} = (X^{(\alpha-1)})'$ для непрелдельного ординала α и $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta < \alpha} X^{(\beta)}$ для предельного ординала α .

Аналогично определяется $X^{\{\alpha\}} : X^{\{0\}} = X$, $X^{\{0\}}$ — множество точек в X , не имеющих компактной окрестности в X , $X^{\{\alpha\}} = (X^{\{\alpha-1\}})^{\{1\}}$, если α — непрелдельный ординал, и $X^{\{\alpha\}} = \bigcap_{\beta < \alpha} X^{\{\beta\}}$, если α — предельный ординал (см. [5]).

Если X — разреженное пространство, т. е. любое подмножество в X имеет изолированную точку, то существует ординал α , для которого $X^{(\alpha)} = \emptyset$. Наименьший ординал α , для которого $X^{(\alpha)} = \emptyset$, будем обозначать через $\kappa(X)$. Наименьший ординал α , для которого $X^{\{\alpha\}} = \emptyset$, обозначим как $h(X)$ и будем называть высотой пространства X . Отметим следующие свойства подмножеств $X^{\{\alpha\}} \subset X$.

- (i) Для любого ординала α $X^{\{\alpha\}}$ — замкнутое подмножество в X .
- (ii) Если $X_1 \subset X$ — замкнутое подмножество, то $X_1^{\{\alpha\}} \subset X^{\{\alpha\}}$.
- (iii) Если $X_1 \subset X$ — открыто-замкнутое подмножество, то $X_1^{\{\alpha\}} = X_1 \cap X^{\{\alpha\}}$.
- (iv) Пусть X — счетное разреженное метрическое пространство, $h(X) = \alpha$ и $\alpha = (\alpha - 1) + 1$. Тогда либо $X^{\{\alpha-1\}}$ — непустой компакт, либо $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$, где $V_n^{\{\alpha-1\}}$ — непустые компакты для всех $n \in \mathbb{N}$.

- (v) Пусть X — счетное разреженное метрическое пространство, $h(X) = \alpha$ и α — предельный ординал. Тогда $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, причем для любого $n \in \mathbb{N}$ существует ординал $\alpha_n < \alpha$ такой, что $X_n^{\{\alpha_n\}} = \emptyset$.

Свойства (i)–(iii) очевидны.

Д о к а з а т е л ь с т в о п. (iv). Поскольку $X^{\{\alpha\}} = \emptyset$ и α — непрелдельный ординал, то $X^{\{\alpha-1\}}$ — локально компактное счетное метрическое пространство, а значит, $X^{\{\alpha-1\}}$ нульмерно. Пусть $X^{\{\alpha-1\}} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $X^{\{\alpha-1\}}$ не является компактным. Для каждой точки $x_n \in X^{\{\alpha-1\}}$ пусть $U(x_n)$ — компактная открыто-замкнутая в $X^{\{\alpha-1\}}$ окрестность. Положим $K_n = U(x_n) \setminus \bigcup_{k < n} U(x_k)$. Ясно, что K_n — компактные открыто-замкнутые попарно непересекающиеся подмножества в $X^{\{\alpha-1\}}$ и $X^{\{\alpha-1\}} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Не нарушая общности, можно считать, что $K_n \neq \emptyset$. Пусть теперь $\{U(K_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — открыто-замкнутые попарно непересекающиеся окрестности компактов K_n в пространстве X и $U(x_m)$ — открыто-замкнутые окрестности точек x_m , где $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} = X \setminus X^{\{\alpha-1\}}$ и $U(x_m) \cap X^{\{\alpha-1\}} = \emptyset$. Получаем открыто-замкнутое покрытие $\{U(K_n)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{U(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$.

По свойству (2) метрических пространств существуют открыто-замкнутые попарно непересекающиеся множества $\{W_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{W'_m\}_{m=1}^{\infty}$, такие что $W_n \subset U(K_n)$, $W'_m \subset U(x_m)$. По свойству (iii)

$$W_n^{\{\alpha-1\}} = W_n \cap X^{\{\alpha-1\}} = U(K_n) \cap X^{\{\alpha-1\}} = K_n$$

и $(W'_m)^{\{\alpha-1\}} = W'_m \cap X^{\{\alpha-1\}} \subset U(x_m) \cap X^{\{\alpha-1\}} = \emptyset$. Полагаем $V_n = W_n \sqcup W'_n$. Тогда $V_n^{\{\alpha-1\}} = W_n \cap X^{\{\alpha-1\}} = K_n$. \square

Д о к а з а т е л ь с т в о п. (v). Рассмотрим последовательность ординалов $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$. Тогда $X^{\{\alpha\}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X^{\{\alpha_n\}} = \emptyset$. Следовательно, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus X^{\{\alpha_n\}})$, где

$X \setminus X^{\{\alpha_n\}}$ — открытые подмножества в X . По свойству (2) $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_n \subset X \setminus X^{\{\alpha_n\}}$, X_n — открыто-замкнутые и $X_n \cap X_m = \emptyset$. По свойству (ii) $X_n^{\{\alpha_n\}} = X_n \cap X^{\{\alpha_n\}} = \emptyset$. \square

Из свойства (v) следует

Предложение 2. Пусть X — счетное разреженное пространство, $h(X) = \alpha$ и α — предельный ординал. Тогда $C_p(X) \simeq \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$, где $X_n^{\{\alpha_n\}} = \emptyset$ для некоторого $\alpha_n < \alpha$. \square

Предложение 3. Пусть X — счетное разреженное метрическое пространство, $h(X) = \alpha$ и $\alpha = (\alpha - 1) + 1$. Тогда

- (а) если $X^{\{\alpha-1\}}$ компакт, то $C_p(X) \simeq \left(\prod_{n=1}^{\infty} C_p(V_n) \right)_{c_0}$, где $V_n^{\{\alpha-1\}} = \emptyset$, т. е. $h(V_n) \leq \alpha - 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
 (б) если $X^{\{\alpha-1\}}$ — локально компактное некомпактное пространство, то $C_p(X) \simeq \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$, где $X_n^{\{\alpha-1\}} \neq \emptyset$ и компактно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. (а) $X^{\{\alpha-1\}}$ — компакт. По предложению (1) $C_p(X) \simeq C_p(X^{\{\alpha-1\}}) \times C_p(X|X^{\{\alpha-1\}})$. Пусть $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная система открыто-замкнутых компактных окрестностей компакта $X^{\{\alpha-1\}}$. Тогда $X \setminus X^{\{\alpha-1\}} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (U_k \setminus U_{k+1})$, где $U_1 = X$.

Так как множества $U_k \setminus U_{k+1}$ открыто-замкнутые, то $C_p(X|X^{\{\alpha-1\}}) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} C_p(U_k \setminus U_{k+1}) \right)_{c_0}$. Полагая $V_1 = X^{\{\alpha-1\}}$, $V_k = U_{k-1} \setminus U_k$ для $k \geq 2$, получаем доказательство случая (а).

(б) Пусть $X^{\{\alpha-1\}}$ — локально компактное некомпактное множество. Тогда по свойству (iv) $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_n$, где $X^{\{\alpha-1\}}$ — непустой компакт для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $C_p(X) = \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$. □

Предложение 4. Пусть $Y^{\{\alpha\}} \neq \emptyset$. Тогда в пространстве $C_p(Y)$ есть дополняемое подпространство, линейно гомеоморфное $\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U_{in}) \right) \right)_{c_0}$ и если α — предельный ординал, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует ординал α_n такой, что $U_{in}^{\{\alpha_n\}} \neq \emptyset$ для любого $i \in \mathbb{N}$, причем $\lim_n \alpha_n = \alpha$. Если же α — непредельный ординал, то $U_{in}^{\{\alpha-1\}} \neq \emptyset$ для всех $i, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как Y — счетное метрическое пространство, то Y нульмерно и, следовательно, для любой точки $y \in Y$ существует счетная база открыто-замкнутых окрестностей $\mathfrak{B}_y = \{U(y, r_k)\}_{k=1}^{\infty}$, где $U(y, r_k) = \{y' \in Y : \rho(y', y) < r_k\}$ и ρ — метрика в пространстве Y . Поскольку Y разреженно, в $Y^{\{\alpha\}}$ существует изолированная точка y^* .

С л у ч а й 1. α — непредельный ординал.

В этом случае точка $y^* \in Y^{\{\alpha\}} \subset Y^{\{\alpha-1\}}$ не имеет компактной окрестности в $Y^{\{\alpha-1\}}$, а значит и в Y . Рассмотрим последовательность открыто-замкнутых в $Y^{\{\alpha-1\}}$ подмножеств $\{U(y^*, r_k) \setminus U(y^*, r_{k+1})\}_{k=2}^{\infty} \cap Y^{\{\alpha-1\}}$. Из этой последовательности можно выделить последовательность некомпактных подмножеств $\{U(y^*, r_{k_n}) \setminus U(y^*, r_{k_{n+1}})\} \cap Y^{\{\alpha-1\}}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $L_n = \{y_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ — замкнутое дискретное подмножество в $\{U(y^*, r_{k_n}) \setminus U(y^*, r_{k_{n+1}})\} \cap Y^{\{\alpha-1\}}$. Тогда множество $L = \{y_i^n : i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y^*\}$ — замкнутое подпространство в Y с одной предельной точкой y^* и для любого $i \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_i^n = y^*$.

Поскольку семейство одноточечных множеств $\{y_i^n : i \in \mathbb{N}\}$ дискретно, существуют открыто-замкнутые попарно непересекающиеся окрестности $U_{in} = U(y_i^n, r_i^n) \subset Y$, такие что $r_i^n < \frac{1}{in}$. Множество U_{in} открыто-замкнуто и $y_i^n \in U_{in}$, поэтому $U_{in}^{\{\alpha-1\}} \neq \emptyset$. Нетрудно видеть, что подмножество $M = \bigsqcup_{i,n} U(y_i^n, r_i^n) \bigsqcup \{y^*\}$ — замкнутое подмножество в Y и

$C_p(M|\{y^*\}) \simeq \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U(y_i^n, r_i^n)) \right) \right)_{c_0}$. Для любого $f \in C_p(M|\{y^*\})$ определим функцию

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(y), & y \in M, \\ 0, & y \notin M. \end{cases}$$

Все множества U_{in} открыто-замкнутые, отсюда функция $\tilde{f} \in C_p(Y|\{y^*\})$. Отображение $V : C_p(M, \{y^*\}) \rightarrow C_p(Y|\{y^*\})$, $V(f) = \tilde{f}$ — линейный гомеоморфизм пространства $C_p(M|\{y^*\})$ на замкнутое подпространство $Z \subset C_p(Y|\{y^*\})$. Оператор $P : C_p(Y|\{y^*\}) \rightarrow Z$ $Ph = V(h|_M) = \widetilde{h|_M}$ — линейный непрерывный оператор проектирования $C_p(Y|\{y^*\})$ на подпространство Z . Это означает, что подпространство $C_p(M|\{y^*\})$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(Y|\{y^*\})$, а следовательно и в $C_p(Y)$.

С л у ч а й 2. В этом случае, как и в предыдущем, выбираем изолированную в $Y^{\{\alpha\}}$ точку y^* . Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ — возрастающая последовательность ординалов такая, что $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$. Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ $y^* \in Y^{\{\alpha_n\}}$, то при любом $k \in \mathbb{N}$ множества $U(y^*, r_k) \cap Y^{\{\alpha_n\}}$ некомпактны. Выбираем замкнутое дискретное множество $\{y_i^1\}_{i=1}^\infty \subset U(y^*, r_1) \cap Y^{\{\alpha_1\}}$. Затем выбираем окрестность $U(y^*, r_{k_2})$ такую, что $U(y^*, r_{k_2}) \cap \{y_i^1\}_{i=1}^\infty = \emptyset$, и замкнутое дискретное множество $\{y_i^2\}_{i=1}^\infty \subset U(y^*, r_{k_2}) \cap Y^{\{\alpha_2\}}$ и т. д. Тогда множество $L = \{y_i^n : i, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y^*\}$ — замкнутое подпространство в Y с одной предельной точкой y^* и $\{y_i^n\}_{i,n=1}^\infty \in Y^{\{\alpha_n\}}$. Далее, как и в случае (а) предложения 3, получаем дополняемое подпространство в $C_p(Y)$, линейно гомеоморфное $\left(\prod_{n=1}^\infty \left(\prod_{i=1}^\infty C_p(U_{in}) \right) \right)_{c_0}$, где $U_{in}^{\{\alpha_n\}} \neq \emptyset$ для любого $i \in \mathbb{N}$. \square

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть X, Y — метрические пространства, $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, $K \subset Y$ — компакт и $T : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ — непрерывное линейное отображение. Тогда существуют открытое множество $U \supset K$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что для любой функции $f \in C_p(X)$ выполнено условие $f|_{\bigsqcup_{n=1}^{n_0} X_n} \equiv 0 \Rightarrow Tf|_U \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Рассмотрим множество $U_1 = \{y \in Y : \rho(y, K) < 1\}$ и $n = 1$. По предположению, найдется функция $f_1 \in C_p(X)$ такая, что $f_1|_{X_1} \equiv 0$, а $Tf_1|_{U_1} \neq 0$, т. е. $Tf_1(y_1) \neq 0$ для некоторой точки $y_1 \in U_1$. Далее рассмотрим множество $U_2 = \{y \in Y : \rho(y, K) < 1/2\}$ и $n = 2$. По предположению найдется функция $f_2 \in C_p(X)$ такая, что $f_2|_{X_1 \sqcup X_2} \equiv 0$, а $Tf_2(y_2) \neq 0$ для некоторой точки $y_2 \in U_2$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность функций $f_n \in C_p(X)$, $f|_{\bigsqcup_{k=1}^n X_k} \equiv 0$,

таких что $Tf_n(y_n) \neq 0$ для некоторых $y_n \in U_n = \{y \in Y : \rho(y, K) < 1/n\}$. Поскольку для любой последовательности чисел $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ последовательность функций $\{c_n f_n\}_{n=1}^\infty \subset C_p(X)$ сходится к нулевой функции, а отображение T непрерывно, то и последовательность $\{c_n T f_n\}_{n=1}^\infty \subset C_p(Y)$ также сходится к нулевой функции. Следовательно, для любой точки $y \in Y$ множество $\{n : Tf_n(y) \neq 0\}$ конечно. Отсюда вытекает, что существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset C_p(X)$ такая, что

$$Tf_{n_k}(y_{n_k}) \neq 0, \text{ но } Tf_{n_m}(y_{n_k}) = 0 \text{ при } m > k. \quad (2.1)$$

Теперь выберем последовательность чисел $\{c_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ так, чтобы

$$c_1 T f_{n_1}(y_{n_1}) > 1, \quad c_1 T f_{n_1}(y_{n_2}) + c_2 T f_{n_2}(y_{n_2}) > 2 \quad \dots \quad c_1 T f_{n_1}(y_{n_k}) + \dots + c_k T f_{n_k}(y_{n_k}) > k \dots \quad (2.2)$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^\infty c_k f_{n_k}$ сходится в пространстве $C_p(X)$, мы можем рассмотреть функцию

$f = \sum_{k=1}^\infty c_k f_{n_k}$ и функцию $Tf = \sum_{k=1}^\infty c_k T f_{n_k} \in C_p(Y)$. В силу условий (2.1) и (2.2) получаем

$Tf(y_{n_k}) = \sum_{m=1}^\infty c_m T f_{n_m}(y_{n_k}) = \sum_{m=1}^k c_m T f_{n_m}(y_{n_k}) > k$. Но это противоречит непрерывности функции Tf , так как $\rho(y_{n_k}, K) < 1/n_k$ и, значит, существует точка $y_0 \in K$, предельная для точек $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. \square

Следствие 1. Пусть X, Y — метрические пространства, $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, Y^{(1)}$ — компакт, а $X_n^{(1)} \neq \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда пространство $C_p(X)$ не линейно гомеоморфно никакому замкнутому подпространству $C_p(Y)$ и, следовательно, $C_p(X)$ дополняемо не вкладывается в пространство $C_p(Y)$.

Доказательство. Предположим, что существует линейный гомеоморфизм $T : C_p(X) \xrightarrow{na} M \subset C_p(Y)$, где M — замкнутое подпространство в $C_p(Y)$. Тогда по теореме 1 существуют окрестность U компакта $Y^{(1)}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $TC_p(X_n) \subset C_p(Y \setminus U)$. Так как $X_n^{(1)} \neq \emptyset$, то $C_p(X_n)$ содержит замкнутое подпространство L , линейно гомеоморфное c_0 . Следовательно, TL — замкнутое бесконечномерное линейное подпространство в $C_p(Y \setminus U)$, где $Y \setminus U$ — дискретное пространство. Но это невозможно. Действительно, если существует линейный гомеоморфизм V пространства c_0 на замкнутое подпространство в $C_p(Y \setminus U)$, то последовательность $\{c_n V e_n(y)\}_{n=1}^\infty$ сходится к нулю для любого $y \in Y \setminus U$ и любой последовательности скаляров $\{c_n\}_{n=1}^\infty$. Это означает, что множество $n : V e_n(y) \neq 0$ конечно для любого $y \in Y \setminus U$ и, таким образом, можно определить функцию

$$h(y) = \sum_{n=1}^\infty V e_n(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N V e_n(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} V(e_1 + \dots + e_N)(y).$$

Но это противоречит замкнутости пространства $Vc_0 \subset C_p(Y \setminus U)$, так как функции $V(e_1 + \dots + e_N)(y) \in Vc_0$, а $h \notin Vc_0$. \square

Следствие 2. Пусть X, Y — метрические пространства, $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, Y = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ и $T : \prod_{n=1}^\infty C_p(X_n) \rightarrow \left(\prod_{n=1}^\infty (Y_n)\right)_{c_0}$ — линейное непрерывное отображение. Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $T\left(\prod_{n=n_0+1}^\infty C_p(X_n)\right) \subset \prod_{n=1}^{n_0} C_p(Y_n)$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $Y^* = \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right) \sqcup \{*\}$, где база окрестностей точки $* \in Y^*$ состоит из множеств $\left(\bigsqcup_{k \geq n} Y_k\right) \sqcup \{*\}$, $n \in \mathbb{N}$. Нетрудно видеть, что $\left(\prod_{n=1}^\infty C_p(Y_n)\right)_{c_0} \simeq C_p(Y^*|\{*\}) \subset C_p(Y)$. Полагая в теореме 1 $K = \{*\}$, получаем утверждение следствия 2. \square

Теорема 2. Пусть X, Y — метрические пространства, $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, Y = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ и $T : \left(\prod_{n=1}^\infty C_p(Y_n)\right)_{c_0} \rightarrow \prod_{n=1}^\infty C_p(X_n)$ — линейный гомеоморфизм на дополняемое подпространство в $\prod_{n=1}^\infty C_p(X_n)$. Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что подпространство $\left(\prod_{n=n_0+1}^\infty C_p(Y_n)\right)_{c_0}$ дополняемо вкладывается в пространство $\prod_{n=1}^{n_0} C_p(X_n)$.

Доказательство. Пусть $P : C_p(X) \rightarrow T(C_p(Y))_{c_0}$ — непрерывная линейная проекция пространства $C_p(X)$ на $T(C_p(Y))_{c_0}$. Тогда $T^{-1}P : C_p(X) \rightarrow (C_p(Y))_{c_0}$ — непрерывная линейная сюръекция. По следствию 2 существует $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого

$$\left(T^{-1}P\left(C_p\left(\bigsqcup_{i=n_0+1}^\infty X_i\right)\right)\right) \Big|_{\bigsqcup_{n=n_0+1}^\infty Y_n} \equiv 0. \tag{2.3}$$

Для любой функции $f \in C_p(Y)$ положим $(R_{n_0}f)(y) = f(y)$, если $y \in \bigsqcup_{k=n_0+1}^{\infty} Y_k$, и $(R_{n_0}f)(y) = 0$, если $y \in \bigsqcup_{k=1}^{n_0} Y_k$. Рассмотрим оператор

$$V = TR_{n_0}T^{-1}P : C_p(X) \longrightarrow TC_p\left(\bigsqcup_{n=n_0+1}^{\infty} Y_k\right).$$

Оператор V является оператором проектирования пространства $C_p(X)$ на подпространство $TC_p\left(\bigsqcup_{n=n_0+1}^{\infty} Y_k\right)$. Действительно, если $h \in TC_p\left(\bigsqcup_{n=n_0+1}^{\infty} Y_k\right)$, то $h = Ty$, где $y|_{\bigsqcup_{k=1}^{n_0} Y_k} \equiv 0$. Тогда $Vh = TR_{n_0}T^{-1}P(h) = TR_{n_0}T^{-1}P(Ty) = TR_{n_0}(y) = Ty = h$. Если же $h \in \prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n)$, то в силу (2.3) получаем $R_{n_0}T^{-1}P(h) = 0$ и, следовательно, $Vh = 0$, т. е.

$$\prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n) \subset V^{-1}(0).$$

Поскольку $\prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n)$ дополняемо в $C_p(X)$, а значит, и в $V^{-1}(0)$, то $V^{-1}(0) = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n) \oplus Z$, где Z — дополняемое подпространство в $V^{-1}(0)$, а отсюда и в $C_p(X)$.

Итак, с одной стороны,

$$C_p(X) \simeq T\left(\prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(Y_n)\right)_{c_0} \oplus V^{-1}(0) \simeq T\left(\prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(Y_n)\right)_{c_0} \oplus \prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n) \oplus Z,$$

с другой стороны, $C_p(X) \simeq \prod_{n=1}^{n_0} C_p(X_n) \oplus \prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n)$. Все дополнения к пространству $\prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n)$ в пространстве $C_p(X)$ линейно гомеоморфны, поэтому получаем

$$\prod_{n=1}^{n_0} C_p(X_n) \simeq T\left(\prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(Y_n)\right)_{c_0} \oplus Z,$$

т. е. пространство $\left(\prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(Y_n)\right)_{c_0}$ дополняемо вкладывается в $\prod_{n=1}^{n_0} C_p(X_n)$. \square

Из теоремы 1 и теоремы 2 выводим

Следствие 3. *Пространство $(s \times s \times \dots)_{c_0}$ дополняемо не вкладывается в пространство $(c_0 \times c_0 \times \dots)$ и пространство $(c_0 \times c_0 \times \dots)$ дополняемо не вкладывается в пространство $(s \times s \times \dots)_{c_0}$*

Теорема 3. *Пусть K, Y — счетные метрические пространства, K — компакт и $T : C_p(K) \longrightarrow C_p(Y)$ — линейный гомеоморфизм пространства $C_p(K)$ на дополняемое подпространство в $C_p(Y)$. Тогда существует компактное подмножество $Y_0 \subset Y$ такое, что $C_p(K)$ дополняемо вкладывается в $C_p(Y_0)$.*

Доказательство. Пусть $P : C_p(Y) \xrightarrow{na} TC_p(K)$ — линейный непрерывный проектор. Тогда оператор $V = T^{-1} \circ P : C_p(Y) \xrightarrow{na} C_p(K)$ — линейная непрерывная сюръекция. Рассмотрим отображение $V^* : L_p(K) \longrightarrow L_p(Y)$, которое действует по формуле $V^*(F) = F \circ V$ для любого линейного непрерывного функционала $F \in L_p(K)$. Для каждой точки $k \in K$ функционал $\delta_k \in L_p(K)$ ($\delta_k(f) = f(k)$ для любой функции $f \in C_p(K)$). Поскольку $L_p(Y) =$

$sp\{\delta_y : y \in Y\}$, то каждой точке $k \in K$ соответствует множество $\text{supp } k = \{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$ такое, что $V^*\delta_k = c_1\delta_{y_1} + \dots + c_n\delta_{y_n}$ для некоторых $c_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, n$. Множество $Y_0 = \overline{\text{supp } K} = \overline{\cup\{\text{supp } k : k \in K\}} \subset Y$ является компактным подмножеством в Y [10]. По предложению 1

$$C_p(Y) = L_{Y_0} \oplus C_p(Y|Y_0) \simeq C_p(Y_0) \times C_p(Y|Y_0). \quad (2.4)$$

С другой стороны,

$$C_p(Y) = TC(K) \oplus P^{-1}(0), \quad (2.5)$$

так как $P : C_p(Y) \xrightarrow{na} TC_p(K)$ — линейный непрерывный проектор. Рассмотрим функцию $g \in C_p(Y|Y_0)$ и точку $k \in K$. Поскольку $\text{supp } k \subset Y_0$, то $g|_{\text{supp } k} \equiv 0$. Следовательно,

$$(T^{-1}P)g = Vg(k) = \delta_k(Vg) = (V^*\delta_k)(g) = (c_1\delta_{y_1} + \dots + c_n\delta_{y_n})g = c_1g(y_1) + \dots + c_n g(y_n) = 0,$$

ибо $\{y_1, \dots, y_n\} = \text{supp } k \subset Y_0$. Таким образом, $(T^{-1} \circ P)g \equiv 0$. Поскольку T — линейная биекция на свой образ, то $Pg \equiv 0$. Итак, получаем $C_p(Y|Y_0) \subset P^{-1}(0)$. В силу условия (2.4) пространство $C_p(Y|Y_0)$ дополняемо в $C_p(Y)$, а значит и в $P^{-1}(0)$, т. е. существует подпространство $\mathbb{Z} \subset P^{-1}(0)$ такое, что $P^{-1}(0) = C_p(Y|Y_0) \oplus \mathbb{Z}$.

Согласно (2.5) $C_p(Y) = TC_p(K) \oplus C_p(Y|Y_0) \oplus \mathbb{Z}$. Все дополнения к пространству $C_p(Y|Y_0)$ в пространстве $C_p(Y)$ линейно гомеоморфны, поэтому, учитывая (2.4), получаем $TC_p(K) \oplus \mathbb{Z} \simeq C_p(Y_0)$, т. е. $TC_p(K)$ — дополняемое подпространство в $C_p(Y_0)$. \square

Следствие 4. Пусть X, Y — счетные разреженные метрические пространства, $Y^{(\alpha\omega)} = \emptyset$ для некоторого ординала $\alpha < \omega_1$, а $X^{(\alpha\omega)} \neq \emptyset$. Тогда пространство $C_p(X)$ дополняемо не вкладывается в пространство $C_p(Y)$ и, следовательно, пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ не линейно гомеоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $X^{(\alpha\omega)} \neq \emptyset$, то существует компактное подмножество $K \subset X$ такое, что $K^{(\alpha\omega)} \neq \emptyset$ (см. [2]). По предложению 1 пространство $C_p(K)$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(X)$. Если предположить, что пространство $C_p(X)$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(Y)$, то исходя из теоремы 3 существует компакт $Y_0 \subset Y$ такой, что $C_p(K)$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(Y_0)$, т. е. пространство $C_p(K)$ линейно гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству $Z \subset C_p(Y_0)$, причем $Y_0^{(\alpha\omega)} = \emptyset$. По теореме о замкнутом графике пространство $C(K)$ линейно гомеоморфно замкнутому подпространству в $C(Y_0)$. Но это противоречит теореме Бессаги и Пелчинского о классификации пространств непрерывных функций на счетных компактах [11]. \square

Теорема 4. Если X — счетное локально компактное метрическое пространство, а Y не является локально компактным, то пространство $C_p(Y)$ дополняемо не вкладывается в $C_p(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно показать, что пространство $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} K_n$, где K_n компактны для любого $n \in \mathbb{N}$ и открыто-замкнуты в X . Следовательно, $C_p(X) \simeq \prod_{n=1}^{\infty} C_p(K_n)$.

Так как по условию $Y^{\{1\}} \neq \emptyset$, то по предложению 4 в пространстве $C_p(Y)$ есть дополняемое подпространство, линейно гомеоморфное $\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U_{in}) \right) \right)_{c_0}$, где $U_{in} \neq \emptyset$ для любых $i, n \in \mathbb{N}$.

По теореме 2 существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что пространство $\left(\prod_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U_{in}) \right) \right)_{c_0}$ дополняемо вкладывается в $\prod_{n=1}^{n_0} C_p(K_n)$. Тогда для любого $m > n_0$ $\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U_{im})$ дополняемо вкладывается в $\prod_{n=1}^{n_0} C_p(K_n) \simeq C_p(K)$, где $K = \bigsqcup_{n=1}^{n_0} K_n$. Но это невозможно по теореме 1. \square

Теорема 5. Пусть X, Y — счетные разреженные метрические пространства, $h(X) = \alpha$, а $h(Y) > \alpha$. Тогда пространство $C_p(Y)$ дополняемо не вкладывается в пространство $C_p(X)$ и, следовательно, пространства $C_p(Y)$ и $C_p(X)$ не линейно гомеоморфны.

Доказательство. Доказательство проведем методом трансфинитной индукции по высоте пространства X .

Если $h(X) = 1$, а $h(Y) > 1$, то пространство $C_p(Y)$ дополняемо не вкладывается в пространство $C_p(X)$ по теореме 4.

Пусть теперь $\alpha > 1$ — произвольный счетный ординал, $h(X) = \alpha$ и для всех $\beta < \alpha$ утверждение теоремы 5 верно. Предположим, что пространство $C_p(Y)$, где $Y^{\{\alpha\}} \neq \emptyset$ дополняемо, вкладывается в пространство $C_p(X)$.

С л у ч а й 1. α — предельный ординал. Ввиду предложения 4 в пространстве $C_p(Y)$ существует дополняемое подпространство, линейно гомеоморфное $\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U_{in}) \right) \right)_{c_0}$, где для любого $n \in \mathbb{N}$ существует ординал $\alpha_n < \alpha$ такой, что $U_{in}^{\{\alpha_n\}} \neq \emptyset$ для всех $i \in \mathbb{N}$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$.

По предложению 2 пространство $C_p(X) \simeq \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$, где $X_n^{\{\beta_n\}} = \emptyset$ для некоторого $\beta_n < \alpha$.

Согласно теореме 2 существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\left(\prod_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U_{in}) \right) \right)_{c_0}$ дополняемо вкладывается в пространство $\prod_{n=1}^{n_0} C_p(X_n)$. Положим $\beta_0 = \max\{\beta_n : n \leq n_0\}$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, существует $m > n_0$ такой, что $\alpha_m > \beta_0$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ пространство $C_p(U_{im})$ дополняемо вкладывается в пространство $\prod_{n=1}^{n_0} C_p(X_n) = C_p(X_0)$, где $X_0 = \bigsqcup_{n=1}^{n_0} X_n$ и $X_0^{\{\beta_0\}} = \emptyset$. Но это невозможно по предположению индукции, потому что $U_{im}^{\{\beta_0\}} \supset U_{im}^{\{\alpha_m\}} \neq \emptyset$, а $X_0^{\{\beta_0\}} = \emptyset$.

С л у ч а й 2. $\alpha = (\alpha - 1) + 1$. По предложению 3 возможны два случая:

(а) $C_p(X) \simeq \left(\prod_{i=1}^{\infty} C_p(V_n) \right)_{c_0}$, где $h(V_n) \leq \alpha - 1$. По предположению пространство $C_p(Y)$ дополняемо вкладывается в $C_p(X)$, поэтому и произведение $\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U_{i1})$ также дополняемо вкладывается в $C_p(X)$. С учетом следствия 2 существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\prod_{i=n_0+1}^{\infty} C_p(U_{i1})$ дополняемо вкладывается в пространство $\prod_{i=1}^{n_0} C_p(V_n) = C_p(\bigsqcup_{n=1}^{n_0} V_n)$; это невозможно по предположению индукции, так как по предложению 4 $(U_{i1}^{\{\alpha-1\}}) \neq \emptyset$, а $h(\bigsqcup_{n=1}^{n_0} V_n) \leq \alpha - 1$.

(б) $C_p(X) \simeq \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$, где $X_n^{\{\alpha-1\}}$ — непустой компакт для любого $n \in \mathbb{N}$.

По теореме 2 существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\left(\prod_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U_{in}) \right) \right)_{c_0}$ дополняемо вкладывается в $\prod_{n=1}^{n_0} C_p(X_n) = C_p(\bigsqcup_{n=1}^{n_0} X_n)$. Ясно, что $\left(\bigsqcup_{n=1}^{n_0} X_n \right)^{\{\alpha-1\}}$ компактно. Исходя из предложения 3 (случай (а)) $C_p(\bigsqcup_{n=1}^{n_0} X_n) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} C_p(V_k) \right)_{c_0}$, где $h(V_k) \leq \alpha - 1$. Поскольку для любого $m > n_0$ $\prod_{i=1}^{\infty} C_p(U_{im})$ также дополняемо вкладывается в $C_p(\bigsqcup_{n=1}^{n_0} X_n)$, то по следствию 2 существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\prod_{i=k_0+1}^{\infty} C_p(U_{im})$ дополняемо вкладывается

ется в $\prod_{k=1}^{k_0} C_p(V_k) = C_p\left(\bigsqcup_{k=1}^{k_0} V_k\right)$. Это противоречит предположению индукции, так как $\left(\bigsqcup_{k=1}^{k_0} V_k\right)^{\{\alpha-1\}} = \emptyset$, а $U_{im}^{\{\alpha-1\}} \neq \emptyset$. \square

Теорема 6. Пусть X, Y — счетные разреженные метрические пространства, $h(X) = h(Y) = \alpha$, $\alpha = (\alpha - 1) + 1$, $X^{\{\alpha-1\}}$ компактно, а $Y^{\{\alpha-1\}}$ — локально компактное некомпактное пространство. Тогда пространство $C_p(Y)$ дополняемо не вкладывается в пространство $C_p(X)$.

Доказательство. Поскольку $X^{\{\alpha\}} = Y^{\{\alpha\}} = \emptyset$, то по предложению 3 $C_p(X) = \left(\prod_{n=1}^{\infty} C_p(V_n)\right)_{c_0}$, где $h(V_n) \leq \alpha - 1$, а $C_p(Y) = \prod_{n=1}^{\infty} C_p(Y_n)$, где $Y_n^{\{\alpha-1\}}$ компактные. Если предположить, что $C_p(Y)$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(X)$, то по следствию 2 для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ пространство $\prod_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(Y_n)$ дополняемо вкладывается в $\prod_{n=1}^{n_0} C_p(V_n)$. Но это невозможно ввиду теоремы 5, так как $Y_n^{\{\alpha-1\}} \neq \emptyset$, т. е. $h(Y_n) > \alpha - 1$, а $\left(\bigsqcup_{n=1}^{n_0} V_n\right)^{\{\alpha-1\}} = \emptyset$, т. е. $h\left(\bigsqcup_{n=1}^{n_0} V_n\right) \leq \alpha - 1$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Baars J., de Groot J.** An isomorphical classification on functions spaces of zero-dimensional locally compact separable metric spaces // Comment. Math. Univ. Carol. 1988. Vol. 29, no. 3. P. 577–595. URL: <http://dml.cz/dmlcz/106673>.
2. **Baars J., de Groot J.** On the l -equivalence of metric spaces // Fundam. Math. 1991. Vol. 137. P. 25–43. <https://doi.org/10.4064/fm-137-1-25-43>
3. **Хмылева Т.Е., Кириенко А.Е.** Локальная компактность и гомеоморфизмы пространств непрерывных функций // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2010. Т. 11, № 3. С. 61–68.
4. **Гулько С.П., Окунев О.Г.** Локальная компактность и M -эквивалентность // Вопросы геометрии и топологии. Петрозаводск, 1986. С. 14–23.
5. **Baars J.** On the l_p^* -equivalence of metric spaces // Topol. Appl. 2021. Vol. 298, art. no. 107729. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107729>
6. **Cembranos P., Mendoza J.** The Banach spaces $l_\infty(c_0)$ and $c_0(l_\infty)$ are not isomorphic // Topol. Appl. 2010. Vol. 367, no. 2. P. 461–463. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.01.057>
7. **Хмылева Т.Е.** Об изоморфности пространств непрерывных ограниченных функций // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1981. Т. 113. С. 243–246.
8. **Куратовский К.** Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 606 p.
9. **Mazur S., Orlics W.** On linear methods of summability // Studia Math. 1954. Vol. 14. P. 129–160. <https://doi.org/10.4064/sm-14-2-129-160>
10. **Van Mill J.** The infinite-dimensional topology of functions spaces. Amsterdam: Elsevier, 2001. 606 p.
11. **Bessaga S., Pelczynski A.** Spaces of continuous functions // Studia Math. 1960. Vol. 19. P. 53–62. <https://doi.org/10.4064/sm-19-1-53-62>

Поступила 27.11.2024

После доработки 14.02.2025

Принята к публикации 17.02.2025

Хмылева Татьяна Евгеньевна

канд.-физ.-мат. наук

доцент

кафедра математического анализа и теории функций

Томский государственный университет

г. Томск

e-mail: tex2150@yandex.ru

REFERENCES

1. Baars J., de Groot J. An isomorphical classification on functions spaces of zero-dimensional locally compact separable metric spaces. *Comment. Math. Univ. Carol.*, 1988, vol. 29, no. 3, pp. 577–595. Available at: <https://dml.cz/dmlcz/106673>.
2. Baars J., de Groot J. On the l -equivalence of metric spaces. *Fundam. Math.*, 1991, vol. 137, pp. 25–43. <https://doi.org/10.4064/fm-137-1-25-43>
3. Khmyleva T.E., Kirienko A.E. Local compactness and homeomorphisms of spaces of continuous functions. *Vestnik Tomskogo Gos. Universiteta*, 2010, vol. 11, no. 3, pp. 61–68 (in Russian).
4. Gulko S.P., Okunev O.G. Local compactness and M -equivalence. In: *Voprosy Geometrii i Topologii: Mezhdvuz. Sb.*, Petrozavodsk, 1986, pp. 14–23 (in Russian).
5. Baars J. On the l_p^* -equivalence of metric spaces. *Topol. Appl.*, 2021, vol. 298, art. no. 107729. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107729>
6. Cembranos P., Mendoza J. The Banach spaces $l_\infty(c_0)$ and $c_0(l_\infty)$ are not isomorphic. *Topol. Appl.*, 2010, vol. 367, no. 2, pp. 461–463. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.01.057>
7. Khmyleva T.E. Isomorphisms of spaces of bounded continuous functions. *J. Math. Sci.*, 1981, vol. 22, no. 6, pp. 1860–1862. <https://doi.org/10.1007/BF01882590>
8. Kuratowski K. *Topology*. NY, Acad. Press, 1966. Translated to Russian under the title *Topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1966, 594 p.
9. Mazur S., Orlics W. On linear methods of summability. *Studia Math.*, 1954, vol. 14, pp. 129–160. <https://doi.org/10.4064/sm-14-2-129-160>
10. Van Mill J. *The infinite-dimensional topology of functions spaces*. Vol. 64, Amsterdam, Elsevier, 2001, 642 p. ISBN: 9780444508492.
11. Bessaga S., Pelczynski A. Spaces of continuous functions. *Studia Math.*, 1960, vol. 19, pp. 53–62. <https://doi.org/10.4064/sm-19-1-53-62>

Received November 27, 2024

Revised February 14, 2025

Accepted February 17, 2025

Tatyana Khmyleva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Tomsk State University, 634050 Russia, e-mail: tex2150@yandex.ru.

Cite this article as: T.E. Khmyleva. On complementarity and linear homeomorphism of $C_p(X)$ spaces for countable metric spaces X . *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 236–246.