ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 1 2025

УДК 512.542+519.175.1

БЕСКОНЕЧНЫЕ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ СО СЧЕТНЫМИ ДОПОЛНЕНИЯМИ В $\mathbb{C}$ МНОЖЕСТВ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ[1]

В. И. Трофимов

В предшествующей работе автора об операторах смежности локально конечных графов было доказано, что собственными значениями оператора смежности бесконечного локально конечного связного графа над полем нулевой характеристики могут не быть лишь алгебраические над простым подполем этого поля элементы (в частности, лишь алгебраические числа в случае поля $\mathbb{C}$). Там же были построены примеры бесконечных локально конечных связных графов, для которых отдельные алгебраические числа не являются собственными значениями их операторов смежности над $\mathbb{C}$. В настоящей работе строятся бесконечные локально конечные связные графы, для каждого из которых бесконечно многие алгебраические числа не являются собственными значениями оператора смежности над $\mathbb{C}$. Более точно, для любого простого числа p строится такой бесконечный локально конечный связный граф, что ни одно из положительных кратных p целых чисел не является собственным значением оператора смежности этого графа над $\mathbb{C}$. Кроме того, в работе приводится (основанное на результатах упоминавшейся предшествующей работы) необходимое условие того, что алгебраическое число не является собственным значением оператора смежности хотя бы какого-то бесконечного локально конечного связного графа.

Ключевые слова: локально конечный граф, матрица смежности, собственное значение.

V. I. Trofimov. Infinite locally finite connected graphs with countable complements in $\mathbb{C}$ of the sets of eigenvalues.

In a previous paper, the author proved that non-eigenvalues of the adjacency operator of an infinite locally finite connected graph over a field of characteristic 0 can be only algebraic over the prime subfield of the field elements (in particular, only algebraic numbers when the field is $\mathbb{C}$). There were also given examples of infinite locally finite connected graphs for which certain algebraic numbers are not eigenvalues of their adjacency operators over $\mathbb{C}$. In the present paper we give examples of infinite locally finite connected graphs for each of which infiniely many algebraic numbers are not eigenvalues of its adjacency operator over $\mathbb{C}$. More exactly, for every prime integer p, we construct an infinite locally finite connected graph such that no positive integer multiple of p is an eigenvalue of the adjacency operator over $\mathbb{C}$ of the graph. In addition, in the paper a necessary condition (based on results of the mentioned previous paper) is given for an algebraic number not to be an eigenvalue of the adjacency operator over $\mathbb{C}$ of at least one infinite locally finite connected graph.

Keywords: locally finite graph, adjacency matrix, eigenvalue.

MSC: 05C63, 05C50

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-228-235

1. Под графом в работе понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер. Если Γ — граф, то $V(\Gamma)$ — множество его вершин, $E(\Gamma)$ — множество его ребер, $d_\Gamma(.,.)$ — обычное расстояние между вершинами графа Γ. Для $v \in V(\Gamma)$ полагаем $\Gamma(v) = \{w \in V(\Gamma) : \{v, w\} \in E(\Gamma)\}$ — окрестность вершины v. Граф называется локально конечным, если окрестности всех его вершин конечны.

Пусть Γ — произвольный локально конечный граф и F — произвольное поле с некоторым (возможно, тривиальным) абсолютным значением $|.|_{\mathbf{v}}$. Пусть, кроме того, $F^{V(\Gamma)}$ — топологическое векторное пространство над полем F всех F-значных функций на $V(\Gamma)$ с естественной топологией произведения, определяемой задаваемой $|.|_{\mathbf{v}}$ метрикой на F. Тогда в [1] определен оператор $A_{\Gamma,F}$, называемый оператором смежности графа Γ над (наделенным абсолютным

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИММ УрО РАН, тема FUMF-2022-0003.

значением $|.|_{\mathbf{v}}$) полем F, как (непрерывный) линейный оператор из $F^{V(\Gamma)}$ в $F^{V(\Gamma)}$, отображающий произвольную функцию $f \in F^{V(\Gamma)}$ в такую функцию $A_{\Gamma,F}(f) \in F^{V(\Gamma)}$, что для каждой вершины $v \in V(\Gamma)$

$$(A_{\Gamma,F}(f))(v) = \sum_{w \in \Gamma(v)} f(w).$$

Соответственно элемент $\lambda \in F$ называется собственным значением оператора $A_{\Gamma,F}$, если найдется такая не тождественно равная нулю функции $f \in F^{V(\Gamma)}$, что для каждой вершины $v \in V(\Gamma)$

$$\lambda f(v) = \sum_{w \in \Gamma(v)} f(w).$$

Функция f при этом — собственная функция оператора $A_{\Gamma,F}$, соответствующая собственному значению λ.

Таким образом, оператор $A_{\Gamma,F}$, можно сказать, есть линейный оператор из $F^{V(\Gamma)}$ в $F^{V(\Gamma)}$, индуцируемый естественным образом матрицей смежности графа Γ над F. В случае конечных графов Γ операторы $A_{\Gamma,F}$, особенно для поля $F = \mathbb{C}$, их собственные значения и собственные функции являются объектами исследования обширного направления теории конечных графов (см., например, [2–4]. Теория собственных значений и собственных функций операторов $A_{\Gamma,F}$ для бесконечных локально конечных связных графов существенным образом разработана в [1].

Поскольку свойство элемента λ поля F быть собственным значением оператора $A_{\Gamma,F}$ не зависит от абсолютного значения $|.|_{\mathbf{v}}$, мы можем говорить о собственных значениях оператора смежности графа Γ над полем F (не конкретизируя $|.|_{\mathbf{v}}$) и даже, в качестве краткого синонима, о собственных значениях графа Γ над полем F (не конкретизируя $|.|_{\mathbf{v}}$). Аналогично, поскольку для произвольного $\lambda \in F$ свойство F-значной функции на $V(\Gamma)$ быть собственной функцией оператора $A_{\Gamma,F}$, соответствующей собственному значению λ, не зависит от абсолютного значения $|.|_{\mathbf{v}}$, мы можем говорить о собственных функциях оператора смежности графа Γ над полем F (не конкретизируя $|.|_{\mathbf{v}}$), соответствующих собственному значению λ, и, в качестве краткого синонима, о собственных функциях графа Γ над полем F (не конкретизируя $|.|_{\mathbf{v}}$), соответствующих собственному значению λ.

Согласно [1, теорема 6.1] для поля F характеристики 0 каждый его элемент, трансцендентный над простым подполем поля F, является собственным значением любого бесконечного локально конечного связного графа над полем F. В частности, лишь алгебраические числа могут не быть собственными значениями бесконечного локально конечного связного графа над полем $\mathbb{C}$. В [1, § 8] приведены примеры бесконечных связных локально конечных графов, для которых отдельные алгебраические числа не являются собственными значениями над полем $\mathbb{C}$. В разд. 2 настоящей работы (см. теорему 1) будут построены примеры бесконечных локально конечных связных графов с бесконечными множествами (с необходимостью алгебраических) комплексных чисел, не являющихся их собственными значениями над полем $\mathbb{C}$. Не вполне ясно, каково множество $\mathcal{X}$ всех алгебраических чисел, не являющихся собственными значениями над $\mathbb{C}$ хотя бы какого-то бесконечного связного локально конечного графа. Как отмечено в замечании 1 (см. ниже), множество $\mathcal{X}$ содержит множество всех вполне вещественных целых алгебраических чисел (совпадающее согласно [5] с множеством всех собственных значений над $\mathbb{C}$ конечных графов), но и некоторые другие алгебраические числа, причем не только вещественные. В разд. 3 настоящей работы (см. предложение 1) на основании [1] будет получено просто формулируемое *необходимое* условие принадлежности алебраического числа множеству $\mathcal{X}$.

2. Целью настоящего раздела статьи является построение примеров бесконечных локально конечных связных графов с бесконечными дополнениями в $\mathbb{C}$ множеств собственных значений их операторов смежности над $\mathbb{C}$. (Поскольку все эти дополнения состоят из алгебраических чисел, то они счетны.) Точнее (см. теорему 1 ниже), для каждого простого числа p будет построен такой бесконечный локально конечный связный граф, что ни одно из положительных целых чисел, кратных p, не будет является собственным значением его оператора смежности над $\mathbb{C}$.

Построению таких графов предпошлем доказательства трех используемых при их построении лемм.

Следующая лемма очевидна. Приводимое ниже ее доказательство преследует лишь цель придать конструктивность процедуре построения графов из теоремы 1.

Лемма 1. *Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел допускает такое разбиение*

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} D_m,$$

что для каждого $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ множество D_m не является ограниченным ни сверху, ни снизу.

Доказательство. Следующим образом индукцией по m определим множества D_m для всех $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Положим

$$D_1 := \{2i : i \in \mathbb{Z}\},$$

и, если для некоторого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ множества $D_1, \ldots, D_k$ уже определены, положим

$$D_{k+1} := \{x_k + 2^{k+1} i : i \in \mathbb{Z}\},$$

где x_k — наименьшее по абсолютной величине число из $\mathbb{Z} \setminus \cup_{1 \leq j \leq k} D_j$, причем положительное в случае, когда имеется два таких числа (впрочем, этот случай реализуется только при $k = 1$).

Ясно, что все так построенные множества $D_m, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, не являются ограниченными ни сверху, ни снизу и дают в объединении $\mathbb{Z}$.

Таким образом, для завершения доказательства предложения достаточно доказать, что для произвольных положительных целых чисел $m' < m''$ имеем $D_{m'} \cap D_{m''} = \varnothing$. Предположим, что, напротив, для некоторых положительных целых чисел $m' < m''$ найдется $x \in D_{m'} \cap D_{m''}$. Тогда $m' > 1$ и для некоторых $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}$ имеем

$$x_{m'-1} + 2^{m'} i_1 = x = x_{m''-1} + 2^{m''} i_2,$$

что влечет

$$x_{m''-1} = x_{m'-1} + 2^{m'}(i_1 - 2^{m''-m'} i_2).$$

Но согласно определению множества $D_{m'}$

$$x_{m'-1} + 2^{m'}(i_1 - 2^{m''-m'} i_2) \in D_{m'},$$

а согласно выбору числа $x_{m''-1}$

$$x_{m''-1} \notin D_{m'}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, и пусть Δ_n — граф с множеством вершин $V(\Delta_n) = \{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ и множеством ребер $E(\Delta_n) = \{\{u_0, u_1\}\} \cup \{\{u_i, u_j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$ (таким образом, Δ_n получается добавлением к полному графу K_n присоединенной к нему ребром вершины). Тогда для $f \in \mathbb{C}^{V(\Delta_n)}$ из*

$$(n-1) f(u) = \sum_{u' \in \Delta_n(u)} f(u')$$

для всех $u \in \{u_1, \ldots, u_n\}$ следует $f(u_0) = 0$ и $f(u_1) = \ldots = f(u_n)$.

Доказательство. Для произвольных $2 \leq i \leq j \leq n$ имеем

$$(n-1) f(u_i) = \sum_{u' \in \Delta_n(u_i)} f(u') = \Big(\sum_{u' \in \{u_1, \ldots, u_n\}} f(u') \Big) - f(u_i),$$

$$(n-1)f(u_j) = \sum_{u' \in \Delta_n(u_j)} f(u') = \Big(\sum_{u' \in \{u_1, \ldots, u_n\}} f(u') \Big) - f(u_j),$$

что влечет $f(u_i) = f(u_j)$. Таким образом, функция f принимает одно и то же значение, скажем c, во всех вершинах из $\{u_2, \ldots, u_n\}$. Тогда для $u \in \{u_2, \ldots, u_n\}$ имеем

$$(n-1)c = (n-1)f(u) = \sum_{u' \in \Delta_n(u)} f(u') = (n-2)c + f(u_1),$$

что влечет $f(u_1) = c$. Таким образом, $f(u_1) = \ldots = f(u_n) = c$. Далее,

$$(n-1)c = (n-1)f(u_1) = \sum_{u' \in \Delta_n(u_1)} f(u') = (n-1)c + f(u_0),$$

что влечет $f(u_0) = 0$.

Лемма 2 доказана.

Сходным образом доказывается справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ и Δ_n — граф из леммы 2. Пусть, кроме того, p — простое число и $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, причем $n \equiv r \equiv 1 \pmod p$. Тогда для $f \in \mathbb{Z}^{V(\Delta_n)}$ из*

$$(r-1)f(u) = \sum_{u' \in \Delta_n(u)} f(u')$$

для всех $u \in \{u_1, \ldots, u_n\}$ следует $f(u_0) \equiv 0 \pmod p$ и $f(u_1) \equiv \ldots \equiv f(u_n) \pmod p$.

Доказательство. Для произвольных $2 \leq i \leq j \leq n$ из

$$(r-1)f(u_i) = \sum_{u' \in \Delta_n(u_i)} f(u') = \Big(\sum_{u' \in \{u_1, \ldots, u_n\}} f(u') \Big) - f(u_i),$$

$$(r-1)f(u_j) = \sum_{u' \in \Delta_n(u_j)} f(u') = \Big(\sum_{u' \in \{u_1, \ldots, u_n\}} f(u') \Big) - f(u_j)$$

следует $f(u_i) = f(u_j)$. Таким образом, функция f принимает одно и то же значение, скажем c, во всех вершинах из $\{u_2, \ldots, u_n\}$. Тогда для $u \in \{u_2, \ldots, u_n\}$ имеем

$$(r-1)c = (r-1)f(u) = \sum_{u' \in \Delta_n(u)} f(u') = (n-2)c + f(u_1),$$

что влечет

$$0 \equiv (r-1)f(u) \equiv (n-2)c + f(u_1) \equiv -c + f(u_1) \pmod p.$$

Таким образом, $f(u_1) \equiv \ldots \equiv f(u_n) \equiv c \pmod p$. Наконец,

$$(r-1)f(u_1) = \sum_{u' \in \Delta_n(u_1)} f(u') = (n-1)c + f(u_0)$$

влечет

$$0 \equiv (r-1)f(u_1) \equiv (n-1)c + f(u_0) \equiv f(u_0) \pmod p.$$

Лемма 3 доказана.

Зафиксируем произвольное разбиение

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} D_m$$

из леммы 1. Используя это разбиение, мы для произвольного простого числа p определим бесконечный локально конечный связный граф $\Gamma^{[p]}$, для которого в теореме 1 (см. ниже) будет доказано, что ни одно из чисел $p\,l$, где $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, не является собственным значением его оператора смежности $A_{\Gamma^{[p]},\mathbb{C}}$.

Предварительно для каждого $s \in \mathbb{Z}$ определим граф $\Gamma_s^{[p]}$, полагая

$$V(\Gamma_s^{[p]}) = \{u_{s,0}, u_{s,1}, \dots, u_{s,p\,m+1}\},$$

где m определяется условием $s \in D_m$, и полагая

$$E(\Gamma_s^{[p]}) = \{\{u_{s,0}, u_{s,1}\}\} \cup \{\{u_{s,i}, u_{s,j}\} : 1 \leq i < j \leq p\,m+1\}.$$

(Таким образом, граф $\Gamma_s^{[p]}$ изоморфен графу $\Delta_{p\,m+1}$ из леммы 2, причем изоморфизмом является отображение $u_{s,j} \mapsto u_j$, $0 \leq j \leq p\,m+1$.) При этом предполагается, что $V(\Gamma_{s_1}^{[p]}) \cap V(\Gamma_{s_2}^{[p]}) = \varnothing$ при $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}, s_1 \neq s_2$.

Теперь определим граф $\Gamma^{[p]}$, полагая

$$V(\Gamma^{[p]}) = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} V(\Gamma_s^{[p]}),$$

$$E(\Gamma^{[p]}) = \Big(\bigcup_{s \in \mathbb{Z}} E(\Gamma_s^{[p]})\Big) \cup \{\{u_{s,0}, u_{s+1,0}\} : s \in \mathbb{Z}\}.$$

(Неформально граф $\Gamma^{[p]}$ можно мыслить как бесконечную цепочку, образованную последовательно соединенными ребрами вершинами $u_{s,0}$, $s \in \mathbb{Z}$, на которой на каждой вершине $u_{s,0}$, $s \in \mathbb{Z}$, “подвешен” граф $\Gamma_s^{[p]}$, т. е. на каждой вершине $u_{s,0}$, $s \in \mathbb{Z}$, на ребре $\{u_{s,0}, u_{s,1}\}$ “подвешен” полный граф $\mathrm{K}_{p\,m+1}$, где m определяется условием $s \in D_m$.)

Теорема 1. *Для произвольного простого числа p никакое число из $\{p\,l : l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma^{[p]},\mathbb{C}}$ графа $\Gamma^{[p]}$.*

Доказательство. Предположим, что, напротив, для некоторого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ число $p\,k$ является собственным значением $A_{\Gamma^{[p]},\mathbb{C}}$, и пусть f — собственная функция $A_{\Gamma^{[p]},\mathbb{C}}$, соответствующая собственному значению $p\,k$.

Так как

$$V(\Gamma^{[p]}) = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} V(\Gamma_s^{[p]}),$$

то для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ функция f принимает ненулевое значение в некоторой вершине подграфа $\Gamma_s^{[p]}$ графа $\Gamma^{[p]}$. Далее, согласно выбору множества D_k (см. лемму 1) найдутся такие $s_1, s_2 \in D_k$, что $s_1 < s < s_2$. При этом, применяя лемму 2 к подграфам $\Gamma_{s_1}^{[p]}$ и $\Gamma_{s_2}^{[p]}$ графа $\Gamma^{[p]}$ и ограничениям на множества их вершин функции f, заключаем, что $f(u_{s_1,0}) = 0 = f(u_{s_2,0})$. Но тогда ограничение функции f на множество вершин конечного подграфа $\Gamma_{s_1+1,s_2-1}^{[p]}$ графа $\Gamma^{[p]}$, порожденного $\cup_{s_1<s'<s_2} V(\Gamma_{s'}^{[p]})$, является собственной функцией оператора $A_{\Gamma_{s_1+1,s_2-1}^{[p]},\mathbb{C}}$, соответствующей собственному значению $p\,k$. Поэтому у $A_{\Gamma_{s_1+1,s_2-1}^{[p]},\mathbb{C}}$ имеется также целозначная собственная функция f^*, соответствующая собственному значению $p\,k$ (так как из наличия нетривиального комплекснозначного решения у конечной однородной системы линейных уравнений с целыми коэффициентами следует наличие у нее и нетривиального целозначного решения). При этом, не теряя общности, можно предполагать, что наибольший общий делитель значений функции f^* на вершинах графа $\Gamma_{s_1+1,s_2-1}^{[p]}$ равен 1. Но для произвольного $s_1 < s' < s_2$, применяя к подграфу $\Gamma_{s'}^{[p]}$ графа $\Gamma^{[p]}$ и ограничению на множество вершин этого подграфа функции f^* лемму 3 с $n = p\,m + 1$, где m определяется условием $s' \in D_m$, и с $r = pk + 1$, получаем, что $f^*(u_{s',0}) \equiv 0 \pmod p$ и $f^*(u_{s',1}) \equiv \ldots \equiv f^*(u_{s',n}) \pmod p$. Следовательно, для произвольного $s_1 < s' < s_2$ в силу

$$pkf^*(u_{s',0}) = \sum_{u' \in \Gamma^{[p]}_{s_1+1,s_2-1}(u_{s',0})} f^*(u')$$

имеем $f^*(u_{s',1}) \equiv 0 \pmod p$. Таким образом, $f^*(u) \equiv 0 \pmod p$ для всех вершин u графа $\Gamma^{[p]}_{s_1+1,s_2-1}$, что противоречит предположению, что наибольший общий делитель значений (ненулевой целозначной) функции f^* на вершинах графа $\Gamma^{[p]}_{s_1+1,s_2-1}$ равен 1.

Теорема доказана.

3. Используя равносильность условий (i) и (iv) теоремы 5.3 работы [1], для произвольного заданного бесконечного локально конечного связного графа Γ можно сформулировать в терминах его конечных подграфов необходимое и достаточное условие того, что заданный элемент λ поля F не является собственным значением графа Γ над F. В следующей формулировке этого условия мы будем использовать обозначение $\mathrm{B}_{v,n}$, где $v \in V(\Gamma)$ и $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, для индуцированного подграфа графа Γ, порожденного всеми его вершинами, удаленными от v на расстояние $\leq n$. Условие гласит: *для каждой вершины $v \in V(\Gamma)$ найдутся $n_v \in \mathbb{Z}_{>1}$ и F-значная функция f_v на множестве всех вершин графа B_{v,n_v} такие, что*

$$1 + \lambda f_v(v) = \sum_{w \in \mathrm{B}_{v,n_v}(v)} f_v(w), \tag{1}$$

$$\lambda f_v(u) = \sum_{w \in \mathrm{B}_{v,n_v}(u)} f_v(w) \ \textit{для всех}\ u \in V(\mathrm{B}_{v,n_v}) \setminus \{v\} \tag{2}$$

и

$$f_v(u) = 0 \ \textit{для всех}\ u \in V(\mathrm{B}_{v,n_v}),\ \textit{удаленных в}\ \mathrm{B}_{v,n_v}\ \textit{на расстояние}\ n_v\ \textit{от}\ v. \tag{3}$$

Однако может представлять интерес упомянутый в разд. 1 вопрос: какие (с необходимостью алгебраические согласно [1, теорема 6.1]) элементы поля $\mathbb{C}$ *не являются* собственными значениями оператора смежности $A_{\Gamma,\mathbb{C}}$ *хотя бы какого-то* бесконечного локально конечного связного графа Γ? Класс таких вещественных элементов весьма широк (см. замечание 1 ниже). Но этим свойством обладают и некоторые не являющиеся вещественными алгебраические числа. Так (см. [1, § 8.3]), этим свойством обладают все комплексные корни уравнения $x^3 + x^2 - 1 = 0$, два из которых не являются вещественными. Ниже, в предложении 1, мы приведем основанное на [1] просто формулируемое (но далеко не всегда легко проверяемое) *необходимое* условие того, что комплексное число λ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma,\mathbb{C}}$ *хотя бы какого-то* бесконечного локально конечного связного графа Γ.

Пусть $\mathcal{R}$ — множество всех корней характеристических многочленов матриц смежности над $\mathbb{C}$ конечных графов (другими словами, $\mathcal{R}$ — объединение спектров всех конечных графов; для дальнейшего отметим, что $\mathcal{R}$ совпадает с объединением спектров всех конечных связных графов с более чем одной вершиной). Далее, для произвольного конечного связного графа Δ с $|V(\Delta)| > 1$ и произвольных его вершин v_1, v_2 обозначим через M_{Δ,v_1,v_2} минор характеристической матрицы $\mathbf{A}_{\Delta,\mathbb{C}} - x\mathbf{E}$ матрицы смежности $\mathbf{A}_{\Delta,\mathbb{C}}$ графа Δ, получаемый вычеркиванием строки, соответствующей v_1, и столбца, соответствующего v_2. Согласно [1, предложение 7.2] минор M_{Δ,v_1,v_2} является *ненулевым* многочленом из $\mathbb{Z}[x]$. В частности, обозначая через $R(M_{\Delta,v_1,v_2})$ множество всех комплексных корней многочлена M_{Δ,v_1,v_2}, получаем, что $R(M_{\Delta,v_1,v_2})$ конечно. Для произвольного конечного связного графа Δ с $|V(\Delta)| > 1$ и произвольной его вершины v положим

$$\mathcal{RM}_{\Delta,v} := \bigcap_{\substack{u \in V(\Delta),\\ d_\Delta(v,u) = e(v)}} R(M_{\Delta,v,u}).$$

Здесь $e(v)$ — эксцентриситет вершины v графа Δ (т. е. максимум расстояний от вершины v до всех вершин графа Δ). Наконец, пусть $\mathcal{RM}$ есть объединение множеств $\mathcal{RM}_{\Delta,v}$ по всем конечным связным графам Δ с $|V(\Delta)| > 1$ и всем $v \in V(\Gamma)$. Тогда с использованием сформулированного в начале настоящего раздела условия легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. *Если элемент λ поля $\mathbb{C}$ не является собственным значением оператора смежности $A_{\Gamma,\mathbb{C}}$ какого-либо бесконечного локально конечного связного графа Γ, то*

$$\lambda \in \mathcal{R} \cup \mathcal{RM}.$$

В частности, для некоторого конечного связного графа Δ с $|V(\Delta)| > 1$ такой элемент λ принадлежит спектру Δ или является корнем минора порядка $|V(\Delta)| - 1$ характеристической матрицы $\mathbf{A}_{\Delta,\mathbb{C}} - x\mathbf{E}$ матрицы смежности $\mathbf{A}_{\Delta,\mathbb{C}}$ графа Δ.

Доказательство. Предположим, что, напротив, для некоторого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{R} \cup \mathcal{RM})$ и некоторого бесконечного локально конечного связного графа Γ выполнены сформулированные в начале настоящего раздела условия. Тогда (в обозначениях этих условий) матрица $\mathbf{A}_{\mathrm{B}_{v,n_v},\mathbb{C}} - \lambda\mathbf{E}$ невырожденная ввиду $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$. Как следствие, функция f_v, удовлетворяющая (1) и (2), однозначно определена, а (3) означает, что для каждой вершины $u \in V(\mathrm{B}_{v,n_v})$, удаленной на расстояние n_v от v в графе B_{v,n_v}, имеем $\lambda \in R(M_{\mathrm{B}_{v,n_v},v,u})$. Но тогда $\lambda \in \mathcal{RM}_{\mathrm{B}_{v,n_v},v}$, что противоречит $\lambda \notin \mathcal{RM}$.

Замечание 1. Согласно [5] множество $\mathcal{R}$ совпадает с множеством всех вполне вещественных целых алгебраических чисел. Наряду с этим согласно [6] множество всех вполне вещественных целых алгебраических чисел совпадает с множеством корней характеристических многочленов матриц смежности конечных деревьев. С использованием последнего результата и конструкции из [1, замечание 8.1] можно показать, что для каждого $\lambda \in \mathcal{R}$ найдется такое бесконечное локально конечное дерево T_λ, что λ не является собственным значением оператора смежности $A_{\mathrm{T}_\lambda,\mathbb{C}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трофимов В. И.** Об операторах смежности локально конечных графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2024. Т. 88, № 3. С. 139–191. https://doi.org/10.4213/im9408
2. **Cvetković D., Doob M., Sachs H.** Spectra of graphs: theory and applications. NY e.a.: Acad. Press, 1980. 368 p.
3. **Cvetković D., Rowlinson P., Simić S.** Eigenspaces of graphs. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 258 p.
4. **Brouwer A. T., Haemers W. H.** Spectra of graphs. NY: Springer, 2012. 250 p.
5. **Estes D. R.** Eigenvalues of symmetric integer matrices // J. Number Theory. 1992. Vol. 42. P. 292–296.
6. **Salez J.** Every totally real algebraic integer is a tree eigenvalue // J. Comb. Theory. Ser. B. 2015. Vol. 111. P. 249–256. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.09.001

Поступила 7.11.2024
После доработки 14.11.2024
Принята к публикации 18.11.2024

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
профессор, Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Trofimov V.I. On adjacency operators of locally finite graphs. *Izvestiya: Mathematics*, 2024, vol. 88, no. 3, pp. 542–589. https://doi.org/10.4213/im9408e
2. Cvetković D., Doob M., Sachs H. *Spectra of graphs: theory and applications.* NY e. a.: Acad. Press, 1980, 368 p.
3. Cvetković D., Rowlinson P., Simić S. *Eigenspaces of graphs.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997, 258 p.
4. Brouwer A.T., Haemers W.H. *Spectra of graphs.* NY: Springer, 2012, 250 p.
5. Estes D.R. Eigenvalues of symmetric integer matrices. *J. Number Theory*, 1992, vol. 42, pp. 292–296.
6. Salez J. Every totally real algebraic integer is a tree eigenvalue. *J. Comb. Theory. Ser. B.*, 2015, vol. 111, pp. 249–256. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.09.001

Received November 7, 2024
Revised November 14, 2024
Accepted November 18, 2024

Funding Agency: The work was supported under state a contract of IMM UB RAS, project no. FUMF-2022-0003.

Vladimir Ivanovich Trofimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Lead. Sci. Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Professor, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: trofimov@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. I. Trofimov. Infinite locally finite connected graphs with countable complements in $\mathbb{C}$ of the sets of eigenvalues, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 228–235 .