ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 1 2025

УДК 512.542, 519.6

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ π-ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП НЕКОТОРЫХ D_π-ГРУПП

И. Н. Белоусов, В. И. Зенков

В работе исследуются D_π-группы с единичным разрешимым радикалом, не имеющие неединичных нормальных π-подгрупп, в которых все простые неабелевы факторы их субнормального ряда являются простыми спорадическими группами. Доказано, что в таких группах для любой π-холловой подгруппы H существует элемент g такой, что $H \cap H^g = 1$. Тем самым решен вопрос 20.123 (c) Коуровской тетради и при указанных условиях дан положительный ответ на вопрос 18.31.

Ключевые слова: холлова подгруппа, D_π-группа.

I. N. Belousov, V. I. Zenkov. On intersections of π-Hall subgroups of some D_π-groups.

We study D_π-groups with a unit solvable radical that do not have nontrivial normal π-subgroups in which all simple nonabelian factors of their subnormal series are simple sporadic groups. It is proved that in such groups, for any π-Hall subgroup H, there exists an element g such that $H \cap H^g = 1$. Thus, Question 20.123 (c) of the Kourovka Notebook is solved and, under the above conditions, a positive answer is given to Question 18.31.

Keywords: Hall subgroup, D_π-group.

MSC: 20D10, 20B40

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-19-35

1. Введение

Все рассматриваемые в статье группы будут конечными. Символ π всегда обозначает некоторое множество простых чисел. Через π' будет обозначаться множество всех простых чисел, не лежащих в π. Число элементов множества M обозначается как $|M|$. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначим множество простых делителей числа n, а через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$.

Напомним, что подгруппа H группы G называется π-холловой подгруппой, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Если к тому же любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе и все π-холловы подгруппы сопряжены, то будем говорить, что G обладает свойством D_π.

В качестве примера π-холловых подгрупп могут служить силовские подгруппы, для которых множество π состоит из одного числа. В случае простой неабелевой группы G в [1] доказано, что для любых ее силовских подгрупп A и B найдется такой элемент $g \in G$, что $A \cap B^g = 1$. В общем же случае это утверждение неверно, и соответствующий пример почти простой группы также приведен в [1].

Тем не менее в работе [2] второго автора было доказано, что в любой группе G для любой силовской p-подгруппы H группы G (здесь $\pi(H) = \{p\}$) найдутся такие элементы x и y в G, что $H \cap H^x \cap H^y = O_p(G)$. В качестве второго примера D_π-групп с π-холловой подгруппой можно рассмотреть π-разрешимые группы, для которых Е. П. Вдовин в [3] и независимо S. Dolfi в [4] доказали, что в π-разрешимой группе G с π-холловой подгруппой H также

$$H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G)$$

для некоторых элементов x и y в G. На основании этого несколькими годами позже в [5] была выдвинута гипотеза 7.3 о том, что в любой D_π-группе G с π-холловой подгруппой H

справедливо равенство

$$H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G). \tag{1.1}$$

Этот вопрос был представлен в “Коуровской тетради” [6] под номером 18.31.

В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен, что и было показано вторым автором в [7], где контрпримерами служат расширения некоторых групп $L_2(q)$ с помощью определенных полевых автоморфизмов. Возникает вопрос: насколько существенным является для построения контрпримеров наличие в них групп лиева типа?

В “Коуровской тетради” [6] под номером 20.123 поставлен вопрос о справедливости равенства (1.1) для D_π-группы G, в которой все простые неабелевы факторы ее субнормального ряда являются спорадическими или знакопеременными.

Важную роль в решении подобных задач играет информация об описании π-холловых подгрупп в простых D_π-группах. Усилия многих математиков по описанию D_π-групп были завершены Д. О. Ревиным в [8], а также Д. О. Ревиным и Е. П. Вдовиным в [9]. В частности, в [8] приведено описание π-холловых подгрупп в конечных простых неабелевых группах, из которого следует, что в классе знакопеременных D_π-групп собственными π-холловыми подгруппами являются силовские подгруппы и только они, а в спорадических D_π-группах собственными π-холловыми подгруппами могут быть не только силовские подгруппы.

В работе [10] было доказано, что в группе $G = \mathrm{Aut}(K)$, где K — спорадическая группа, имеем

$$A \cap B^g = 1$$

для любой пары нильпотентных подгрупп A и B и некоторого элемента g группы G. В частности, это справедливо для любых силовских подгрупп A и B группы G, т. е. в случае когда A и B являются примарными холловыми в G. Поэтому возникает вопрос о том, верно ли, что в спорадической D_π-группе G для любой ее π-холловой подгруппы H найдется такой элемент g, что $H \cap H^g = 1$?

Как оказалось, справедливо даже более сильное утверждение. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — D_π-группа с единичным разрешимым радикалом, $O_\pi(G) = 1$, и все простые неабелевы факторы ее композиционного ряда являются простыми спорадическими группами. Тогда для любой π-холловой подгруппы H группы G найдется элемент $g \in G$ такой, что справедливо равенство*

$$H \cap H^g = 1.$$

Требование единичности разрешимого радикала существенно, так как в группе $G_1 \cong E_9 \leftthreetimes D_8$ с точным действием $H_1 \cong D_8$ на $O(G_1) \cong E_9$ по [2, теорема B (1a)] имеем $H_1 \cap H_1^{g_1} \neq 1$ для любого $g_1 \in G_1$, поэтому в группе $G \cong G_1 \wr K$, где K — произвольная спорадическая группа, по [8, теорема 1] имеем $H \cap H^g \neq 1$, для любого g из G и $H \cong S \in Syl_2(G)$.

Условие $O_\pi(G) = 1$ необходимо для исключения случая $\pi(G) \subseteq \pi$, когда $G = O_\pi(G) = H$.

2. Предварительные сведения

Наши обозначения в основном стандартны и их можно найти в [11; 12]. Нам понадобится также рассмотреть специальный случай орбиты фиксированной π-холловой подгруппы в D_π-группе при ее действии сопряжениями на множестве всех π-холловых подгрупп. В работе речь будет идти о регулярных орбитах фиксированной π-холловой подгруппы H в D_π-группе G при ее действии сопряжениями на множестве всех π-холловых подгрупп. Итак, предположим для краткости, что $O_\pi(G) = 1$ и $H \cap H^g = 1$ для некоторого $g \in G$. Тогда число подгрупп, сопряженных с H^g под действием H, равно $|H : N_H(H^g)|$. Так как H^g — π-холлова подгруппа, то $N_H(H^g) = H \cap H^g = 1$. Следовательно, под действием H сопряжениями на множестве

π-холловых подгрупп группы G возникает $|H|$ сопряженных с H^g подгрупп, каждая из которых пересекается с H тривиально. В таком случае будем говорить о регулярной орбите на множестве сопряженных с H в G подгрупп. Возможно найдется подгруппа H^{g_1} для некоторого $g_1 \in G$, которая не лежит в рассмотренной выше орбите для H и для которой $H \cap H^{g_1} = 1$. Тогда для H при ее аналогичном действии на H^{g_1} возникает вторая регулярная орбита и т.д. В данной работе число подобного рода регулярных орбит для π-холловых подгрупп в простых неабелевых группах, которые являются главными факторами для D_π-группы, а также число регулярных орбит в группах автоморфизмов таких групп сыграло ключевую роль при изучении пересечений этих π-холловых подгрупп.

Допустим $O_\pi(G) = 1$ и в G для π-холловой подгруппы H существует хотя бы одна регулярная орбита. Тогда любая подгруппа из этой орбиты сопряжена с H некоторым элементом $g \in G$. По определению регулярной орбиты имеем $H \cap H^g = 1$. Отсюда следует

Предложение 1. *Пусть G — D_π-группа такая, что $O_\pi(G) = 1$. Обозначим через Ω множество всех π-холловых подгрупп группы G, и пусть $H \in \Omega$. Тогда $H \cap H^g = 1$ для некоторого элемента $g \in G$, если и только если при действии подгруппы H сопряжениями на множестве Ω существует регулярная орбита.*

Приведем другие факты об орбитах простых неабелевых групп, которые понадобятся для ее доказательства.

Для D_π-группы G с $O_\pi(G) = 1$ обозначим через $Orb_\pi(G)$ число регулярных орбит фиксированной π-холловой подгруппы H на множестве всех π-холловых подгрупп группы G. В силу сопряженности π-холловых подгрупп в D_π-группе это число не зависит от выбора H и является инвариантом группы. Таким образом, если $O_\pi(G) = 1$, то по предложению 1 эквивалентны утверждения $Orb_\pi(G) \geq 1$ и $H \cap H^g = 1$ для некоторого $g \in G$.

Лемма 1. *Пусть G — почти простая группа, P — силовская p-подгруппа в G, p простое и $M \geq N_G(P)$, где M — некоторая подгруппа в G. Если $Orb_p(G) \geq 1$ и $Orb_p(M/O_p(M)) \geq n$, то $Orb_p(G) \geq n$.*

Доказательство. Условие $Orb_p(G) \geq 1$ влечет, что $P \cap P^g = 1$ для некоторого $g \in G$.

Рассмотрим подгруппу $D = M \cap P^g$. Так как D — p-подгруппа в M, то $D \leq P^m$ для некоторого $m \in M$. Поскольку $M \geq P \geq O_p(M)$ и $P \cap P^g = 1$, то $P^g \cap O_p(M) = 1$ и тем более $D \cap O_p(M) = 1$. По условию $Orb_p(\bar{M}) \geq n$, где $\bar{M} = M/O_p(M)$. В частности, подгруппа $\overline{P^m}$ при ее действии сопряжениями на силовских p-подгруппах из $\bar{M}$ имеет не менее n регулярных орбит. Но тогда у подгруппы P^m при ее действии сопряжениями на полных прообразах соответствующих силовских p-подгрупп из $\bar{M}$ найдутся n регулярных орбит силовских p-подгрупп из M, которые пересекаются с P^m по $O_p(M)$. Так как $D \cap O_p(M) = 1$, то P^g пересекаются по единице с каждой такой силовской p-подгруппой, взятой из из n орбит, выбранных выше. Относительно действия сопряжениями подгруппы P^g на множестве силовских подгрупп группы G рассмотрим орбиты подгрупп P^{m_1} и P^{m_2}, где $m_1, m_2 \in G$. Если эти орбиты совпадают, то $P^{m_1} = P^{m_2 h}$, где $h \in P^g$. Но $P^{m_2 h} = P^{m_1 m_1^{-1} m_2 h} = (P^{m_1})^{m_1^{-1} m_2 h}$. Поэтому элемент $m_1^{-1} m_2 h$ нормализует подгруппу P^{m_1}. Так как $N_G(P^{m_1}) \leq M$, то $h \in M$. Отсюда $h \in M \cap P^g = D$. Но D не может сопрягать подгруппы из разных орбит. Противоречие. Значит, относительно действия группы P^m на множестве $Syl_p(M)$ лежат в разных орбитах при действии группы P^g на множестве $Syl_p(M)$. Но число регулярных орбит для P^m в M не меньше n. Следовательно, число регулярных орбит для P^g в G не меньше n.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть K — простая спорадическая группа, $G = \mathrm{Aut}(K)$ и $S \in Syl_2(G)$. Тогда $N_G(S) = S$, за исключением группы J_1, в которой $|N_G(S) : S| = 21$.*

Доказательство. Согласно [13, с. 40–69] имеем $N_{Soc(G)}(S \cap Soc(G)) = S \cap Soc(G)$ для всех групп, за исключением J_1, J_2, J_3, Suz и HN. Но из [11, с. 36, 42, 82, 131, 166] соответственно следует, что в этих случаях $N_G(S) = S$, за исключением группы J_1, в которой $|N_G(S) : S| = 21$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $G = \mathrm{Aut}(K)$, *где* K *— простая спорадическая группа,* P *— силовская* p*-подгруппа в* G *и* $\langle a_i \rangle$ *для* $i = 1, \ldots, n$ *— система представителей классов сопряженности подгрупп порядка* p *в группе* G. *Тогда*

$$Orb_p(G) \geq \Big(|G : N_G(P)| - \Big(\sum_{i=1}^{n} |P \cap \langle a_i \rangle^G|^2 |N_G(\langle a_i \rangle)|/|N_G(P)|\Big)\Big)/|P|. \tag{2.1}$$

Доказательство. Согласно [14, предложение 21] число силовских p-подгрупп, содержащих подгруппу $\langle a_i \rangle$, равно $|\langle a_i \rangle^G \cap P||N_G(\langle a_i \rangle)|/|N_G(P)|$.

Так как число сопряженных с $\langle a_i \rangle$ подгрупп в P равно $|\langle a_i \rangle^G \cap P|$, то для фиксированного i будет не более чем $|\langle a_i \rangle^G \cap P|^2 |N_G(\langle a_i \rangle)|/|N_G(P)|$ силовских p-подгрупп в G, пересекающихся с P по сопряженной $\langle a_i \rangle$ подгруппе. Следовательно, силовских p-подгрупп группы G, нетривиально пересекающихся с P, не более чем $\sum_{i=1}^{n} |P \cap \langle a_i \rangle^G|^2 |N_G(\langle a_i \rangle)|/|N_G(P)|$.

Поскольку число всех силовских p-подгрупп в G равно $|G : N_G(P)|$, то

$$Orb_p(G) \geq \Big(|G : N_G(P)| - \Big(\sum_{i=1}^{n} |P \cap \langle a_i \rangle^G|^2 |N_G(\langle a_i \rangle)|/|N_G(P)|\Big)\Big)/|P|.$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1 в случае почти простой группы и $\pi(H) = \{2\}$

Лемма 4. *Пусть* $G \cong \mathrm{Aut}(M_i)$, *где* M_i *для* $i \in \{11, 12, 23, 24\}$ *— группа Матье. Тогда* $Orb_2(G) \geq 5$ *и* $Orb_2(\mathrm{Aut}(M_{22})) = 5$.

Доказательство. Непосредственные вычисления в GAP. Код программы и результаты ее выполнения можно найти в [16] или [22, разд. 1]. □

Лемма 5. *Пусть* $G \cong \mathrm{Aut}(J_i)$, *где* J_i *для* $i \in \{1, 2\}$ *— группа Янко. Тогда* $Orb_2(G) > 5$.

Доказательство. Непосредственные вычисления в GAP [16] или [22, разд. 1]. □

Лемма 6. $Orb_2(G) \geq 15$ *для* $G \cong \mathrm{Aut}(J_3)$ *и* $Orb_2(G) \geq 10$ *для* $G \cong J_3$.

Доказательство. Пусть $G \cong \mathrm{Aut}(J_3)$ и $K = Soc(G)$. Согласно [11, с. 82] для подгруппы K имеем $K\cdot > 17 : 4\cdot > D_{34}$. По [11, с. 83] в группе K один класс инволюций. Пусть z — инволюция из K и b — элемент порядка 17, инвертируемый z. Рассмотрим подгруппу $D = C_G(z) \cap C_G(z^b)$. Если $D \neq 1$, то для некоторого $1 \neq d \in D$ имеем $C_G(d) > \langle z, z^b \rangle \cong D_{34}$. Но согласно [11, с. 82] в G нет неединичных элементов, у которых порядок централизатора делится на 34. Отсюда $D = 1$. В силу леммы 2 $N(H) = H$ для $H \in Syl_2(G)$, а значит, справедливо неравенство

$$|\{H^g \mid H \cap H^g = 1\}| > |C_G(z) : N_{C_G(z)}(H^b)| = |C_G(z)|.$$

Следовательно, $Orb_2(G) \geq |C_G(z)|/|H| = |Syl_2(C_G(z))| \geq 15$ и выполнено утверждение леммы для $G \cong \mathrm{Aut}(J_3)$.

Пусть теперь $G \cong J_3$. Тогда число силовских 2-подгрупп из G, пересекающихся с фиксированной силовской 2-подгруппой H, может быть меньше, чем в $\mathrm{Aut}(J_3)$, не более чем в 3 раза, так как $N_{\mathrm{Aut}}(G)(H)/H \cong S_3$. С другой стороны, силовская 2-подгруппа из G в два раза меньше порядка силовской 2-подгруппы из $\mathrm{Aut}(G)$. Поэтому число орбит в G, с одной стороны, не более чем в 3 раза меньше 15 и, с другой стороны, в 2 раза больше, чем в $\mathrm{Aut}(K)$. Таким образом, $Orb_2(G) \geq 2Orb_2(\mathrm{Aut}(G))/3 \geq 10$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $G \cong \mathrm{Aut}(J_4)$. *Тогда* $Orb_2(G) \geq 5$.

Доказательство. Согласно [11, с.190] имеем $G \cong \mathrm{Aut}(J_4) \cong J_4$ и G содержит максимальную подгруппу $M \cong 2^{11} : M_{24}$, где $|G : M|$ нечетен. Ввиду [2, теорема 2] имеем $Orb_2(G) \geq 1$ и по лемме 2 $N_G(S) = S$ для $S \in Syl_2(G)$. Следовательно, по лемме 4 и лемме 1 получаем, что $Orb_2(J_4) \geq 5$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* $G \cong \mathrm{Aut}(K) \cong K \cong Co_1$. *Тогда* $Orb_2(G) \geq 5$.

Доказательство. Согласно [11, с.183] G содержит максимальную подгруппу M такую, что $\bar{M} = M/O_2(M) \cong M_{24}$ и $M > N_G(S)$ для $S \in Syl_2(G)$. По лемме 4 $Orb_2(M_{24}) \geq 5$ и тогда, по лемме 1, имеем $Orb_2(G) \geq 5$.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $G \cong \mathrm{Aut}(K) \cong K \cong Co_2$. *Тогда* $Orb_2(G) \geq 5$.

Доказательство. В соответствии с [11, с.154] G содержит максимальную подгруппу M такую, что $\bar{M} = M/O_2(M) \cong M_{22}$ и $M > N_G(S)$ для $S \in Syl_2(G)$. По лемме 4 $Orb_2(M_{22}) \geq 5$ и поэтому по лемме 1 получаем $Orb_2(G) \geq 5$.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть G изоморфна группе автоморфизмов одной из групп Co_3, McL, Suz, He, HN, $O'N$ или Ru. Тогда* $Orb_2(G) \geq 15$.

Доказательство. Пусть H — силовская 2-подгруппа из G и $C = C_G(Z(H))$. Тогда $|C : N_C(H)|$ — это число сопряженных с H подгрупп под действием C. Покажем, что в каждом случае для C найдется сопряженная с H в G подгруппа H^g такая, что $C \cap H^g = 1$ для некоторого g из G. Далее, поскольку число сопряженных с H^g под действием C равно $|C : N_C(H^g)|$ и по лемме 2 $N_G(H) = H$, то $N_C(H^g) = 1$. Следовательно, $Orb_2(G) \geq |C : N_C(H^g)|/|H| = |C|/|H| \geq |Syl_2(C)|$.

В каждом случае в качестве элемента g можно взять любой порождающий некоторой силовской q-подгруппы простого порядка для достаточно большого q. Для каждой группы из утверждения леммы укажем соответствующее q и нижнюю границу для $Orb_2(G)$:

G	q	$\lvert C : N_C(H^g)\rvert/\lvert H\rvert$
Co_3	23	2835
$\mathrm{Aut}(McL)$	11	315
$\mathrm{Aut}(Suz)$	13	405
$\mathrm{Aut}(He)$	17	21
$\mathrm{Aut}(HN)$	19	225
$\mathrm{Aut}(O'N)$	31	315
Ru	13	15

Код программы в GAP, используемый для вычисления указанных значений, можно найти в [16] и [22, разд. 2].

Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть G изоморфна одной из следующих групп* $\mathrm{Aut}(F_{22}), \mathrm{Aut}(F_{23})$ *или* $\mathrm{Aut}(F_{24})$. *Тогда* $Orb_2(G) \geq 5$.

Доказательство. Согласно [11, с. 196, 212, 234] $\mathrm{Aut}(F_i)$ для $i \in \{22, 23, 24\}$ содержит максимальную подгруппу M, содержащую $N_G(S)$ для $S \in Syl_2(G)$, для которой $M/O_2(M) = \mathrm{Aut}(M_i)$. Так как по лемме 4 $Orb_2(M_i) \geq 5$, то $Orb_2(G) \geq 5$ по лемме 1.

Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть группа G является группой Th или Ly. Тогда* $Orb_2(G) \geq 5$.

Доказательство. Ввиду [11, с. 211, 209] в этих группах единственный класс инволюций и инволюция i из этого класса инвертирует в Th подгруппу порядка 19, а в группе Ly — подгруппу порядка 67. Докажем, что найдется $g \in G$, для которого $C_G(i) \cap C_G(i^g) = 1$. Действительно, если бы $D = C_G(i) \cap C_G(i^g) \neq 1$, то для любого $1 \neq d \in D$ имело бы место включение $C_G(d) \geq \langle i, i^g \rangle$. В этом случае, взяв в качестве g элемент порядка 19 в Th или порядка 67 в Ly, инвертируемый инволюцией i, получили бы противоречие с таблицей характеров этих групп [11, с. 211, 209], поскольку таких элементов в G нет.

Для данной силовской 2-подгруппы H пусть i — центральная инволюция. По лемме 2 $N_G(H) = H$, значит, $N_{C_G(i)}(H^g) \leq C_G(i) \cap H^g \leq C_G(i) \cap C_G(i^g) = 1$ и $|C_G(i) : N_{C_G(i)}(H^g)| = |C_G(i)|$. Следовательно, $Orb_2(G) \geq |C_G(i)|/|H| \geq 5$.

Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $G \cong B$ — бэби монстр. Тогда* $Orb_2(G) \geq 5$.

Доказательство. Согласно [11, с. 242] B содержит 2-локальную подгруппу M, содержащую $N_G(S)$ для $S \in Syl_2(G)$, для которой $M/O_2(M) \cong \mathrm{Aut}(M_{22})$. По лемме 4 имеем $Orb_2(M/O_2(M)) \geq 5$. Следовательно, по лемме 1 $Orb_2(G) \geq 5$.

Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $G \cong M$ — монстр. Тогда* $Orb_2(G) \geq 5$.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей леммы с учетом [11, с. 254] G содержит 2-локальную подгруппу M, где $M > N_G(S)$ для $S \in Syl_2(G)$ и $M/O_2(M) \cong M_{24}$. По лемме 4 $Orb_2(M_{24}) \geq 5$. Следовательно, по лемме 1 $Orb_2(G) \geq 5$.

Лемма доказана.

Из лемм 4–14 следует доказательство теоремы 1 для почти простой группы в случае $\pi(H) = \{2\}$. Сформулируем этот факт в виде предложения.

Предложение 2. *В почти простой D_π-группе G со спорадическим цоколем и π-холловой подгруппой H четного порядка имеем $\pi = \{2\}$ и $Orb_\pi(G) \geq 5$.*

4. Доказательство теоремы 1 в случае почти простой группы и $2 \notin \pi(H)$

Как следует из [8, теорема 3 (условие II)], $|\pi(H)| \leq 2$. Рассмотрим сначала случай, когда $|\pi(H)| = 2$.

Лемма 15. *Пусть $G = \mathrm{Aut}(K)$, где K — простая спорадическая группа, G — D_π-группа, H — ее π-холлова подгруппа и $|\pi(H)| = 2$. Тогда порядок H нечетен и выполняется одно из следующих утверждений:*

(i) *$H = P \leftthreetimes Q$ — группа Фробениуса, в которой $P \cong C_p$ и $Q \cong C_q$, где p и q — простые числа, либо*

(ii) *$H = P \leftthreetimes Q$ — группа Фробениуса с неабелевым ядром порядка 11^3, $K \cong J_4$, $\pi = \{5, 11\}$ и H сильно 11-вложена в G, либо*

(iii) *H абелева $K \cong J_1$, $\pi = \{3, 5\}$ или $K \cong J_4$, $\pi = \{5, 7\}$.*

В случае неабелевой H выполняется равенство

$$Orb_\pi(G) = [(|G : N_G(H)| - 1) - (|N : N_N(H)| - 1)|P|]/|H|, \qquad (4.1)$$

где $N = N_G(Q)$.

Доказательство. Согласно [11, табл. 1] имеем $|\mathrm{Aut}(K) : Inn(K)| \leq 2$. Из [8, условие II] следует, что в в D_π-группе K π-холлова подгруппа четного порядка является 2-группой. Значит, из $|\pi(H)| = 2$ следует, что порядок подгруппы H нечетен. Кроме того, в [8, условие II] доказано, что либо H абелева и выполняется (iii), либо H неабелева и $H = P \rtimes Q$ — бипримарная группа Фробениуса с циклическим ядром и дополнением, либо H — группа Фробениуса, изоморфная $11^{1+2}_+ \rtimes 5$ и сильно 11-вложенная в G. Утверждения (i)–(iii) доказаны.

Рассмотрим подгруппу $D = H \cap H^g$, где $g \in G$ и H неабелева. Предположим, что $1 \neq D \neq H$. В этом случае $D \cong C_q$. Так как $D \leq H^g$, то $D^{g^{-1}} \leq H$. Значит, силовские q-подгруппы D и $D^{g^{-1}}$ сопряжены в H, т.е. $D^{g^{-1}} = D^h$ для некоторого элемента $h \in H$, откуда следует, что $hg \in N_G(D)$. Поэтому $hg = n \in N = N_G(D)$. Тогда $g = h^{-1}n$. Этот вид элемента g расшифровывает действие g на H: вначале g с помощью h действует в H на сопряженных с D подгруппах, откуда получаем $|H : N_H(Q)| = |P|$ сопряженных с D под действием H подгрупп, где P — ядро группы H, а Q — дополнение. Далее действует элемент n, который определяет сопряженные с H в G подгруппы, нормализуемые подгруппой $Q = D$. Число таких подгрупп равно $|N : N_N(H)|$.

Если зафиксировать H, то отличных от H подгрупп, нормализуемых D, будет $|N : N_N(H)| - 1$. Пусть H^g — произвольная подгруппа этого множества. Так как она пересекается с H по подгруппе D, то любая сопряженная с ней подгруппа под действием H будет пересекаться с соответствующей сопряженной с D подгруппой и только с ней в силу того, что H — группа Фробениуса. Таким образом, для каждой подгруппы этого множества из $|N : N_N(H)| - 1$ подгрупп, сопряженных в G с H, существует орбита длины $|P|$ подгрупп, которые сопряжены под действием H с выбранной и имеют с H пересечение порядка q.

Изначально g был выбран произвольным в G со свойством $1 \neq H \cap H^g \neq H$, поэтому описанные выше орбиты длины $|P|$ сопряженных с H подгрупп в количестве $|N : N_N(H)| - 1$ дают множество всех сопряженных с H в G подгрупп, которые отличны от H и имеют с H неединичное пересечение. Поскольку всего в G с H сопряжено $|G : N_G(H)|$ подгрупп, то число подгрупп, сопряженных с H и пересекающихся с H по 1, равно

$$|G : N_G(H)| - 1 - (|N : N_N(H)| - 1)|P| = G(H, P, Q).$$

Следовательно, $Orb_\pi(G) = G(H, P, Q)/|H|$. Формула (4.1) доказана.

Лемма доказана.

Далее в леммах 16–18 для сокращения записи будем использовать введенное в доказательстве леммы 15 обозначение $G(H, P, Q) = |G : N_G(H)| - 1 - (|N : N_N(H)| - 1)|P|$.

Лемма 16. *Пусть $G = \mathrm{Aut}(K)$, где K — простая спорадическая группа, H — π-холлова подгруппа в D_π-группе G и $|\pi(H)| = 2$. В этом случае $Orb_\pi(G) \geq 2$ и $Orb_\pi(G) = 2$ тогда и только тогда, когда $G \cong M_{11}$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $G = M_{11}$. Здесь согласно [8, условие II] подгруппа $H = P \rtimes Q$, где $P \cong C_{11}$ и $Q \cong C_5$. Ввиду [13, с. 40] $|G : N_G(H)| = 2^4 \cdot 3^2$, $|N : N_N(H)| = 4$. Поэтому $G(H, P, Q) = 2^4 \cdot 3^2 - 1 - 3 \cdot 11 = 143 - 33 = 110$. Следовательно, по формуле (4.1) $Orb_{\{5,11\}}(M_{11}) = 2$.

Так как в M_{22} согласно [8, условие II] порядок подгруппы H совпадает с порядком соответствующей подгруппы в M_{11} и $|N : N_N(H)|$ также равен 4, в силу

$$|M_{22} : N_{M_{22}}(C_{11} \rtimes C_5)| > |M_{11} : N_{M_{11}}(C_{11} \rtimes C_5)|$$

$Orb_{\{5,11\}}(M_{22}) > 2$. Если же точно, то $Orb_{\{5,11\}}(M_{22}) = (2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 - 34)/55 = 155$.

Рассмотрим случай $G = M_{12}$. Тогда исходя из [8, условие II] подгруппа $H = P \leftthreetimes Q \cong C_{11} \leftthreetimes C_5$, а по [13, с. 41] имеем

$$G(H,P,Q) = (2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11/(5 \cdot 11)) - 1 - 7 \cdot 11 = 2^6 \cdot 3^3 - 78 = 6(2^5 \cdot 3^2 - 13) = 6 \cdot 275.$$

Значит, по формуле (4.1), $Orb_{\{5,11\}}(M_{12}) = 30$.

Пусть $G \cong M_{23}$.

Если $\pi(H) = \{5, 11\}$, то согласно [8, условие II] и [13, с. 43] $G(H,P,Q) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 23 - 1 - 11^2 = 185350$. Следовательно, в силу формулы (4.1) $Orb_{\{5,11\}}(M_{23}) = 3370$.

Если же $\pi(H) = \{11, 23\}$, то ввиду [8, условие II] и [13, с. 43] $G(H,P,Q) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 - 4 \cdot 23 = 185350$. Поэтому по формуле (4.1) $Orb_{\{11,23\}}(M_{23}) = 159$.

Пусть $G \cong M_{24}$. Тогда в соответствии с [8, условие II] имеем $\pi(H) = \{5, 11\}$ или $\{11, 23\}$.

Если $\pi(H) = \{5, 11\}$, то согласно [8, условие II] и [13, с. 44] имеем $G(H,P,Q) = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 23 - 1 - 23 \cdot 11$. Вследствие этого по формуле (4.1) $Orb_{\{5,11\}}(M_{24}) = 40462$.

Пусть $\pi(H) = \{11, 23\}$. В этом случае $G(H,P,Q) = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 - 9 \cdot 23$. Значит, по формуле (4.1) $Orb_{\{11,23\}}(M_{24}) = 3824$.

Пусть $G \cong J_1$. Тогда по [8, условие II] получаем $\pi(H) = \{3,5\}, \{3,7\}, \{3,19\}$ или $\{5,11\}$.

Если $\pi(H) = \{3, 5\}$, то согласно [13, с. 45] подгруппа H абелева, $N_G(P) = N_G(Q) = N_G(H)$. Следовательно, $G(H,P,Q) = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 - 1$ в силу того что $H \cap H^g = 1$ при $H \neq H^g$. Значит, по формуле (4.1) $Orb_{\{3,5\}}(J_1) = G(H,P,Q)/15 = 195$.

Если $\pi(H) = \{3, 7\}$, то ввиду [13, с. 45] имеем $G(H,P,Q) = 2^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 - 1 - 9 \cdot 7$ и по формуле (4.1) $Orb_{\{3,7\}}(J_1) = G(H,P,Q)/21 = 196$.

Если $\pi(H) = \{3, 19\}$, то в соответствии с [13, с. 45] имеем $G(H,P,Q) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 - 1 - 9 \cdot 19$ и по формуле (4.1) $Orb_{\{3,19\}}(J_1) = 24$.

Если $\pi(H) = \{5, 11\}$, то в силу [13, с. 45] получаем $G(H,P,Q) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 - 1 - 5 \cdot 11$ и по формуле (4.1), $Orb_{\{5,11\}}(J_1) = 28$.

Пусть $G \cong J_4$. Далее с учетом [8, условие II] имеем $\pi(H) = \{5,7\}, \{5,11\}, \{5,31\}, \{7,29\}$ или $\{7, 43\}$.

Если $\pi(H) = \{5, 7\}$, то согласно [13, с. 48] подгруппа H абелева. При этом число подгрупп, пересекающихся с H точно по подгруппе P, равно $|N_G(P) : N_{N_G(P)}(Q)| - 1$, и аналогично для подгруппы Q имеем $|N_G(Q) : N_{N_G(Q)}(P)| - 1$, а число всех отличных от H подгрупп, сопряженных с H в G, равно $|G : N_G(H)| - 1$. $N_{N_G(P)}(Q) = N_G(Q) \cap N_G(P) = N_G(H) = N_{N_G(Q)}(P)$, поэтому

$$G(H,P,Q) \geq |G : N_G(H)| - 1 - (|N_G(P) : N_G(H)| - 1 + |N_G(Q) : N_G(H)| - 1$$

$$= |G : N_G(H)| - |N_G(P) : N_G(H)| - |N_G(Q) : N_G(H)| + 1 > (|G| - |N_G(P)| - |N_G(Q)|)/|N_G(H)|.$$

Значит, $Orb_{\{5,7\}}(G) > (|G| - |N_G(P)| - |N_G(Q)|)/(|H||N_G(H)|)$. Согласно [11, с. 189] в G по одному классу подгрупп порядка 5, 7 и 35, причем по [13, с. 48] имеем $N_G(Q) = (7 \cdot 3) \times \Sigma_5$. Так как $N_G(H) = N_G(Q) \cap N_G(P)$, то $N_G(H) \cong (7 \cdot 3) \times (5 \cdot 4)$. К тому же $N_G(P) \cong (5 \times 2^3 \# L_3(2)) \cdot 4$. Поэтому $Orb_{\{5,11\}}(J_4) >> 2$.

Если $\pi(H) = \{5, 31\}$, то в соответствии с [13, с. 48] имеем $C_{J_4}(5A) = (5 \times (2^3 \# L_3(2))) \cdot 4$. Теперь по формуле (2.1)

$$Orb_{\{5,31\}}(J_4) \geq |J_4 : 31 \cdot 10| - 1 - 31 \cdot (2^3 \cdot L_3(2)) \cdot 4/31$$

$$= (2^{20} \cdot 3^{13} \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 - 31 \cdot 2^4 \cdot 8!)/31 > 2.$$

Если $\pi(H) = \{7, 29\}$, то по [13, с. 48] $N_{J_4}(7A) = (7 \cdot 3) \times \Sigma_5$. Теперь из формулы (2.1) следует, что $Orb_{\{7,29\}}(J_4) \geq Orb_{\{5,31\}}(J_4) > 2$.

Если $\pi(H) = \{7, 43\}$, то по формуле (2.1) и [13, с. 48] получаем

$$Orb_{\{7,43\}}(J_4) = (2^{20} \cdot 3^{13} \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 - 1 - 43 \cdot 3|A_5|)/43 > 2.$$

Пусть $G \cong O'N$. Тогда в силу [8, условие II] $\pi(H) = \{5, 11\}$ или $\{5, 31\}$ и по формуле (4.1) и [13, с. 61] имеем $Orb_{\{5,11\}}(G) = (|G : N_G(T)| - 1 - (|N_G(Q) : Q| - 1)|P|) > 2$.

Пусть $G \cong Ly$. Далее ввиду [8, условие II] $\pi(H) = \{11, 67\}$ и по формуле (4.1) и [13, с. 59] получаем $Orb_{\{11,67\}}(G) = (|G : N_G(T)| - 1 - (|N : N_N(H)| - 1)|P|)/|H| > 2$.

Пусть $G \cong Ru$. В таком случае согласно [8, условие II] имеем $\pi(H) = \{7, 29\}$, а по (4.1) и [13, с. 60] находим $Orb_{\{7,29\}}(G) = (|G : N_G(P)| - 1 - (|N : N_N(H)| - 1)|P|)/|H| > 2$.

Пусть $G \cong Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}$ или Fi'_{24}. Здесь исходя из [8, условие II] имеем $\pi(H) = \{11, 23\}$, а по формуле (4.1) и [13, с. 52] получаем

$$Orb_{\{11,23\}}(G) \geq (|Co_3 : N_{Co_3}(23)| - 1 - 23 \cdot 120)/(23 \cdot 11) > 2.$$

Пусть $G \cong B$. Тогда согласно [8, условие II] имеем $\pi(H) = \{11, 23\}$ или $\{23, 47\}$ и $Orb_{\pi(H)}(G) = (|G : N_G(H)| - 1 - (|N : N_N(H)| - 1)|P|)/|H|$, а по формуле (4.1) и [13, с. 68] $Orb_{\pi(H)}(G) > (|B : N_B(47A)| - 1 - 23 \cdot 5 \cdot 240)/(47 \cdot 23) > 2$.

Пусть $G \cong M$. Далее с учетом [8, условие II] получаем $\pi(H) = \{23, 47\}$ или $\{29, 59\}$ и $Orb_{\pi(H)}(G) = (|G : N_G(H)| - 1 - (|N : N_N(H)| - 1)|P|)/|H|$, а по (4.1) и [13, с. 69] $Orb_{\pi(H)}(G) > (|M : N_M(59A)| - 1 - 23 \cdot 11 \cdot 24)/(29 \cdot 59) > 2$.

Лемма доказана.

Лемма 16 закрывает случай $|\pi(H)| = 2$. Рассмотрим теперь оставшийся случай $|\pi(H)| = 1$. Разобьем его на два подслучая абелевой и неабелевой подгруппы H.

4.1. H абелева

Лемма 17. *Пусть $G = \mathrm{Aut}(K)$, где K — простая спорадическая группа и T — силовская абелева подгруппа нечетного порядка в G. Тогда для $\pi(T) = \{t\}$ число $Orb_t(G) \geq 2$.*

Доказательство. Нормализаторы подгрупп порядка t для всех спорадических групп описаны в [13, с. 40–70]. Поэтому с использованием [13, с. 40–70] для всех спорадических групп с циклической силовской t-подгруппой, т.е. когда $T = \langle a \rangle$, по формуле (2.1) имеем $Orb_t(G) \geq 2$.

Если $|T| > t$ и T — элементарная абелева, то ввиду [13, с. 40–70] подгруппа $T \cong E_{t^2}$ и справедливо одно из утверждений:

(1) $T \cong E_9$ и $G \cong M_{11}, M_{22}, M_{23}, HS$; (2) $T \cong E_{7^2}$ и $G \cong Co_1, Th, B$; (3) $T \cong E_{5^2}$ и $G \cong Suz, He, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}$; (4) $T \cong E_{11^2}$ и $G \cong M$.

(1) $T \cong E_9$.

(1а) $G \cong M_{11}$. В этом случае исходя из [13, с. 40], $|G : N_G(T)| = 55$. Так как $N_G(T) \cong \Sigma_3 \times \Sigma_3$, то $N_G(a) \leq N_G(T)$ и по формуле (2.1) $Orb_3(M_{11}) = (55 - 1)/9 = 6$.

(1б) $G \cong M_{22}$. В этом случае согласно [13, с. 42] имеем $|\langle a \rangle^G \cap T| = 4, N_G(\langle a \rangle) \cong (3 \times A_4) \cdot 2$ и $N_G(T) \cong 3^2 : Q_8$. По формуле (2.1) получаем

$$Orb_3(G) \geq (|G : N_G(T)| - 16 \cdot 6 \cdot 12/(9 \cdot 8))/9 = (2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 - 2^4)/9 > 2.$$

(1в) $G \cong M_{23}$. Ввиду [13, с. 43] $G > G_1 \cong M_{22}$, поэтому по (1б) имеем $Orb_3(M_{23}) > 2$.

(1г) $G \cong HS$. Поскольку в соответствии с [13, с. 54] $G > G_1 \cong M_{22}$, то по (1б) $Orb_3(HS) > 2$.

(2) $T \cong E_{7^2}$.

(2а) $G \cong Co_1$. Так как с учетом [11, с. 183] $Co_1 > A_7 \times L_2(7)$ и $N_{A_7}(C_7) \cong C_7 \rtimes C_3$, то по формуле (2.1)

$$Orb_7(A_7) = (|A_7 : C_7 \rtimes C_3| - 1 - (|N_{A_7}(C_3) : C_3| - 1) \cdot 7)/7 = (120 - 1 - 11 \cdot 7)/7 = 6.$$

Следовательно, $Orb_7(Co_1) \geq 6$.

(2б) $G \cong Th$. Поскольку $Th > {}^3D_4(2) > C_7 \times L_2(7)$ и $N_G(T)$ транзитивно переставляет подгруппы порядка 7 из $O_7(N_G(T))$, то $1 \neq T \cap T^g \neq T$ для $7 \cdot 7$ сопряженных с T подгрупп. Значит, по формуле (2.1)

$$Orb_7(Th) = (|G : N_G(T)| - 1 - 49)/7 = (2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 - 1 - 49)/7 > 2.$$

(2в) $G \cong B$. Так как $B > C_7 \times 2L_3(4)$ и $Orb_7(2L_3(4)) = (|2L_3(4) : N_{2L_3(4)}(C_7)| - 1)/7 = 137$, то по формуле (2.1) $Orb_7(B) \geq 137$.

(3) $T \cong E_{5^2}$.

(3а) $G \cong Suz$. Имеем $Suz > A_6 \times A_5$ и $Orb_5(A_6) = (|A_6 : N_G(T)| - 1-)/5 = 7$. В этом случае по лемме 1 $Orb_7(Suz) \geq 7$.

(3б) $G \cong He$. Так как $He > S_4(4) > (A_5 \times A_5)2$ (два класса) по [11, с. 104 и 44], то по (2.1)

$$Orb_5(S_4(4)) = (|S_4(4) : (C_5 \leftthreetimes C_2) \wr C_2| - 1 - 4 \cdot 5)/5^2 = (2^5 \cdot 3^2 \cdot 17 - 1 - 20)/25 > 2.$$

Следовательно, $Orb_5(He) \geq 2$.

(3в) $G \cong Fi_{22}$. Согласно [13, с. 62] содержит один класс подгрупп порядка 5, причем $C_G(a) \cong C_5 \times \Sigma_5$ и $|N_G(T)| = 5^2 \cdot 96$. Тогда по формуле (2.1) имеем

$$Orb_5(G) \geq (|G : N_G(T)| - 1 - 30)/5^2 = (2^12 \cdot 3^8 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - 31)/25 > 2.$$

(3г) $G \cong Fi_{23}$. Поскольку в силу [13, с. 63] $Fi_{23} > 2Fi_{22}$, то $Orb_5(Fi_{23}) > 2$.

(3д) $G \cong Fi'_{24}$. Согласно [13, с. 64] $Fi'_{24} > 2Fi_{22}$, поэтому $Orb_5(Fi'_{24}) > 2$.

(4) $T \cong E_{11^2}$. Так как $G \cong M$, то с учетом [13, с. 69] $G > C_{11} \times M_{12}$. Имеем $Orb_{11}(M_{12}) > Orb_{\{5,11\}}(M_{12}) > 2$. Следовательно, по лемме 1 $Orb_{11}(M) > 2$.

Лемма доказана.

4.2. H неабелева

Далее мы будем рассматривать случай, когда подгруппа T имеет нечетный порядок и неабелева. Тогда $|T| \geq t^3$ для некоторого нечетного числа t.

Лемма 18. *Пусть $G = \mathrm{Aut}(K)$, где K — простая спорадическая группа и T — неабелева силовская подгруппа нечетного порядка в G. Тогда для $\pi(T) = \{t\}$ число $Orb_t(G) \geq 2$.*

Доказательство. По лемме 3 имеем

$$Orb_t(G) \geq \Big(|G : N_G(P)| - \Big(\sum_{i=1}^{n} |P \cap \langle a_i \rangle^G|^2 |N_G(\langle a_i \rangle)| / |N_G(P)|\Big)\Big)/|P|.$$

Заменяя $\sum_{i=1}^{n} |P \cap \langle a_i \rangle^G|^2$ на $|P \cap \sum_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle^G|^2$, а $|N_G(\langle a_i \rangle)|$ на $\max\limits_i |N_G(\langle a_i \rangle)|$ получаем

$$Orb_t(G) > (|G : N_G(P)| - |P|^2 \max_i |N_G(\langle a_i \rangle)| / |N_G(P)|))/|P|.$$

На основе этой более простой формулы и информации о нормализаторах простых элементов и нормализаторах силовских подгрупп в G из [13] построим табл. 1, ограничивающую $Orb_t(G)$ снизу.

Рассмотрим последовательно оставшиеся случаи неабелевой t-подгруппы H нечетного порядка. Силовскую p-подгруппу из H будем обозначать через S_p.

- $G \cong J_2$

Согласно [11, с. 42] $t = 3$, J_2 содержит максимальные подгруппы $U_3(3)$ и $N(3A) > 3\#PGL_2(9)$, поэтому T имеет в $U_3(3)$ орбиту, которая порождает $U_3(3)$. По теореме Бэра — Судзуки (см. например [12, теорема 2.66]) $T \cap (3A)^9 = 1$ для некоторого g из G. Так как $T \cap N(3A) \leq S \in Syl_3(N(3A))$, то $T \cap T^x = 1$ для орбиты длины $|T|/3$ силовских подгрупп из $N(3A)$. Если бы в G для T существовала единственная орбита, то $U_3(3)$ содержала бы $3\#PGL_2(9)$. Но 5 не делит $|U_3(3)|$. Противоречие. Следовательно, $Orb_3(J_2) \geq 2$.

Т а б л и ц а 1

Оценка числа орбит для некоторых спорадических групп

G	$\lvert P\rvert$	$\lvert N_G(P)\rvert$	$\max\limits_i \lvert N_G(\langle a_i\rangle)\rvert$	$\frac{\lvert G\rvert-\lvert P\rvert^2 \max\limits_i \lvert N_G(\langle a_i\rangle)\rvert}{\lvert N_G(P)\rvert\lvert P\rvert}$
M_{12}	3^3	$3^3\cdot 4$	$3^3\cdot 4$	151/27
M_{24}	3^3	$3^3\cdot 8$	$2^4\cdot 3^3\cdot 5$	$> 4\cdot 10^4$
J_4	3^3	$3^3\cdot 2^5$	$2^9\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$	$> 3\cdot 10^{15}$
J_4	11^3	$11^3\cdot 5\cdot 2^4\cdot 3$	$11^3\cdot 5\cdot 2^4\cdot 3$	$> 2\cdot 10^{11}$
Co_1	5^4	$5^4\cdot 2^4$	$10\cdot 2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2$	$> 6\cdot 10^{11}$
Co_2	3^6	$3^6\cdot 2^5$	$2^9\cdot 3^5\cdot 5$	$> 2\cdot 10^6$
Co_2	5^3	$2^5\cdot 3\cdot 5^3$	$2^5\cdot 3\cdot 5^3$	$> 2\cdot 10^7$
Co_3	5^3	$2^4\cdot 3\cdot 5^3$	$2^4\cdot 3\cdot 5^3$	$> 6\cdot 10^5$
HS	5^3	$2^4\cdot 5^3$	$2^4\cdot 5^3$	6551/125
McL	5^3	$2^3\cdot 3\cdot 5^3$	$2^3\cdot 3\cdot 5^3$	283751/125
He	3^3	$3^3\cdot 2^3$	$2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$	18608170/27
He	7^3	$2\cdot 3^2\cdot 7^3$	$2\cdot 3^2\cdot 7^3$	535151/343
Ly	3^7	$2^5\cdot 3^7$	$2^8\cdot 3^7\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11$	$> 10^8$
Ly	5^6	$5^3\cdot 3\cdot 2^3$	$5^3\cdot 3\cdot 2^3$	$> 10^9$
Ru	3^3	$2^4\cdot 3^3$	$2^5\cdot 3^3\cdot 5$	337784710/27
Ru	5^3	$2^5\cdot 5^3$	$2^5\cdot 5^3$	36465911/125
$O'N$	3^4	$2^6\cdot 3^4\cdot 5$	$2^4\cdot 3^4\cdot 5$	71106943/324
$O'N$	7^3	$2^3\cdot 3\cdot 7^3$	$2^3\cdot 3\cdot 7^3$	55860911/343
Fi'_{24}	7^3	$7^3\cdot 3^2\cdot 2^2$	$2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7^2$	$> 2\cdot 10^{17}$
HN	3^6	$2^3\cdot 3^6$	$2^8\cdot 3^5\cdot 5\cdot 7$	$> 6\cdot 10^7$
Th	3^{10}	$3^{10}\cdot 2^2$	$2^7\cdot 3^7\cdot 7\cdot 13$	$> 10^5$
Th	5^3	$5^3\cdot 3\cdot 2^5$	$5^3\cdot 3\cdot 2^5$	$> 6\cdot 10^{10}$
B	3^{13}	$3^{13}\cdot 2^3$	$2^{19}\cdot 3^{10}\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$	$> 2\cdot 10^{20}$
B	5^6	$5^6\cdot 2^4$	$2^{12}\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 7\cdot 11$	$> 10^{24}$
M	3^{20}	$3^{20}\cdot 2^5$	$3\cdot \lvert Fi_{24}\rvert$	$> 2\cdot 10^{33}$
M	5^9	$5^9\cdot 3\cdot 2^5$	$20\cdot \lvert HN\rvert$	$> 2\cdot 10^{39}$
M	7^6	$7^6\cdot 3^2\cdot 2^2$	$42\cdot \lvert He\rvert$	$> 10^{42}$
M	13^3	$13^3\cdot 2^5\cdot 3^2$	$13^3\cdot 2^5\cdot 3^2$	$> 5\cdot 10^{44}$

- $G \cong J_3$

Ввиду [11, с. 82] $G\cdot > M \cong N(S_3) = E_{3^2}3^{1+2}.C_8$, причем $Z(S_3) = E_{3^2}$. Кроме того, единственный класс элементов в G, чей централизатор содержит элементы порядка 9 из G, — это элементы класса $3B$, которые лежат в $Z(S_3)$. Так как $N(3B) = E_{3^2}3^{1+2}.C_2$ и $G\cdot > M_1 = 19\cdot 9$, то для элемента a порядка 3 из класса $3B$, нормализующего подгруппу B порядка 19, имеем $\langle a, a^b\rangle = C$, где $\langle b\rangle = B$.

Рассмотрим подгруппу $D = N(3B)\cap N(3B)^b$. Если $D \neq 1$, то для некоторого $1 \neq d \in D$ имеем $d \in N_g\langle a, a^b\rangle = N(C)$. Элемент d не может быть 3-элементом, иначе $C_G(d) \geq C$, что, как отмечено выше, невозможно. Но d не может иметь и четный порядок, так как в G нет инволюций, нормализующих C. Следовательно, $D = 1$. Поэтому $|N(3B) : N_{N(3B)}(3B)^b| = 1$. Значит, при действии сопряжением элементами из $N(3B)$ существует $|N(3B)| = 2|S_3|$ сопряженных с S_3 подгрупп, которые пересекаются с S_3 по единице. Отсюда $Orb_3(G) \geq 2$.

- $G \cong Co_1$

Исходя из [11, с. 183] группа G содержит подгруппу $M \cong 3^6{\cdot}2M_{12}$, для которой $|G|_3 = |M|_3$ и $N(P) \leq M$ для $P \in Syl_3(M)$. По табл. 1 $Orb_3(M_{12}) \geq 2$. Следовательно, $Orb_3(2M_{12}) \geq 2$. Так как $\bar{M} = M/O_3(M) \cong 2M_{12}$ и согласно [16] для некоторого $g \in G$ подгруппа $O_3(M)\cap P^g$

тривиальна. Поэтому по лемме 1 имеем $Orb_3(G) \geq 2$.

- $G \cong Co_3$

В этом случае в соответствии с [13, с. 52] $t = 5$ или $t = 3$. При $t = 5$ по табл. 1 имеем $Orb_5(G) \geq 2$. Если же $t = 3$, то по [13, с. 52] $N(J(T)) \cong E_{3^5} \cdot (C_2 \times M_{11})$. Поскольку $N_G(T) < N(J(T))$ и по табл. 1 $Orb_3(N(J(T)))/O_3(N(J(T))) = 2$, то по лемме 1 $Orb_3(Co_3) > 2$.

- $G \cong McL$

В этом случае согласно [13, с. 55], $t = 5$ или $t = 3$ и подгруппа $\langle a \rangle$ при $a = 5A$ слабо замкнута в T относительно G и $N(a)$ — сильно 5-вложенная подгруппа. Следовательно, $Orb_5(G) = (|G : N(T)| - 1)/5^3 > 2$. Если $t = 3$, то $Orb_3(N(a)) = Orb_3(SL_2(5)) = 2$ при $a = 3A$. Так как $N(a) > T$, то по лемме 1 $Orb_3(G) \geq 2$.

- $G \cong Suz$

Ввиду [13, с. 56] порядок $J(S_3)$ равен 3^5, поэтому $N(J(S_3))$ содержит $N(T)$. Согласно [13, с. 57] $N(J(S_3)) = 3^5 \cdot M_{11}$. По леммам 1 и 2 из $Orb_3(M_{11}) \geq 2$ имеем $Orb_3(G) \geq 2$.

- $G \cong Fi_{22}$

Согласно [11, с. 156] группа G содержит 2 класса максимальных в G подгрупп M_1 и M_2, изоморфных $\Omega_7(3)$, причем $|G|_3 = |\Omega_7(3)|_3$. Так как $Orb_3(M_1) = Orb_3(M_2) = 1$ по [2, лемма 3.13] и каждая из подгрупп M_1 и M_2 порождена соответствующей орбитой сопряженных с S_3 подгрупп, то $Orb_3(G) \geq 2$.

- $G \cong Fi_{23}$

Пусть $C = C_G(Z(T))$, где $T = S_3$. Исходя из [16] имеем $C \cap T^g = 1$ для некоторого $g \in G$, поэтому $|C : N_C(T^g)|/|T| \geq |C|/|N(T)|$, и по [13, с. 63] $|C| = 3^{13}2^{10}$, $|N(T)| = 3^{13}2^3$. Значит, $|C : N_C(T^g)|/|T| \geq 2^7$. Следовательно, $Orb_3(G) \geq 128$.

- $G \cong Fi_{24}$

Так как согласно [16] имеем $C \cap T^g = 1$ для некоторого $g \in G$, то $|C : N_C(T^g)|/|T| \geq |C|/|N(T)|$ и по [13, с. 64] $|C| = 3^{16}2^{11}5 \cdot 11$, $|N(T)| = 3^{16}2^4$. Значит, $|C : N_C(T^g)|/|T| \geq 2^7 5 \cdot 11$. Поэтому $Orb_3(G) \geq 7040$.

- $G \cong HN$

Ввиду [13, с. 66] имеем $N(a) \cong (5^{1+4}.(2^{1+4}.(5 \cdot 4)))$, где a — элемент из G типа $5A$ и $N(P) < N(a)$, где $P \in Syl_5(G)$. Из вида $N(P) \cong (5^{1+5}.5)(4 \times 2)$ следует, что в подгруппе $2^{1+4}.(5 \cdot 4)$ элемент порядка 5 действует без неподвижных точек на факторгруппе группы 2^{1+4} по ее центру. Поэтому $Orb_5(N(a)/O_5(N(a))) = (16 - 1)/5 = 3$. Следовательно, по лемме 1 имеем $Orb_5(G) \geq 3$.

Лемма доказана.

Из лемм 16–18 следует

Предложение 3. *Пусть $G = \mathrm{Aut}(K)$, где K — простая спорадическая D_π-группа, H — π-холлова подгруппа в G и $\pi(H) \neq \{2\}$. Тогда $Orb_t(G) \geq 2$ и эта оценка неулучшаема в силу $Orb_{\{5,11\}}(M_{11}) = 2$.*

5. Доказательство теоремы 1 в общем случае

Пусть G — контрпример к теореме 1 минимального порядка.

Лемма 19. *Справедливо равенство $F^*(G) = E(G)$.*

Доказательство. Допустим $F^*(G) \neq E(G)$. Так как $F^*(G) = F(G)E(G)$, то $F^* \neq 1$. Но $F(G)$ нормальная в G подгруппа и разрешима. Получаем противоречие с условием теоремы.

Лемма доказана.

Лемма 20. *Подгруппа H разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что подгруппа H неразрешима. Тогда H содержит простую неабелеву секцию S. По теореме Фейта — Томпсона [19] порядок H четен. Значит, $2 \in \pi(H)$. Если $3 \in \pi(H)$, то по [8, теорема 1] $\{2,3\} \subseteq \pi(E(G))$. Это противоречит описанию π-холловых подгрупп в спорадических группах [8, теорема 3, условие 2]. То есть 3 не делит$|H|$. Тогда по теореме Глаубермана [20] подгруппа H содержит секцию $S \cong Sz(q)$. Следовательно, $5 \in \pi(H)$. По [8, теорема 1] имеем $5 \in \pi(E(G))$. Снова по описанию π-холловых подгрупп в спорадических группах [8, теорема 3, условие 2] получаем, что $E(G)$ порождается некоторой силовской 2-подгруппой и некоторой силовской 5-подгруппой. Таким образом, $E(G)$ лежит в H. Но $E(G)$ — нормальная π-подгруппа в H. Противоречие с тем, что $O_\pi(G) = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 21. *Справедливо равенство $G = E(G)H$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $G_1 = E(G)H < G$. Тогда по [17, теорема 1.4] G_1 является D_π-группой. Рассмотрим $F^*(G_1) = F(G_1)E(G_1)$. По лемме 20 $E(G_1) = E(G)$, а по лемме 19 $E(G) = F^*(G)$. Следовательно, если $F(G_1) \neq 1$, то $F(G_1)$ централизует $E(G_1) = E(G) = F^*(G)$. Но по [12, предложение 1.27] $F(G_1)$ лежит в $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$. Значит, $F(G_1)$ лежит в $Z(F^*(G))$; противоречие с тем, что разрешимый радикал G равен 1.

Лемма доказана.

Лемма 22. *Подгруппа H транзитивно действует на компонентах из $E(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если H действует интранзитивно на $E(G)$, то $E(G) = E_1(G) \times E_2(G)$, где $E_1(G)$ и $E_2(G)$ — H-допустимые подгруппы. Следовательно, $C_1 = C_G(E_1(G)) \trianglelefteq G$ и $C_2 = C_G(E_2(G)) \trianglelefteq G$. По [8, теорема 1] группы $C_1, C_2, G/C_1, G/C_2$ обладают D_π-свойством. Кроме того, $C_1 \cap C_2 \leq C_G(E(G)) = 1$, так как по лемме 19 $C_G(E(G)) = C_G(F^*(G))$, а по [12, предложение 1.27] $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G) = E(G)$. Поэтому по теореме Ремака [21, теорема 4.3.9] группа $G \cong G/(C_1 \cap C_2)$ изоморфно вкладывается в $G/C_1 \times G/C_2$. По индукции в $\bar{G} = G/C_1$ найдется элемент $\bar{g}$ из $E(\bar{G}) \cong E_1(G)$ и в $\widetilde{G} = G/C_2$ элемент $\widetilde{g}$ из $E(\widetilde{G}) \cong E_2(G)$ такие, что $\widetilde{H} \cap \widetilde{H}^{\bar{g}} = \widetilde{1}$ и $\bar{H} \cap \bar{H}^{\widetilde{g}} = \bar{1}$, где $\bar{H}$ и $\widetilde{H}$ — образы H в $\bar{G}$ и $\widetilde{G}$ соответственно. Но тогда и $(\bar{H} \times \widetilde{H}) \cap (\bar{H} \times \widetilde{H})^{\bar{g}\widetilde{g}} = \bar{1} \times \widetilde{1} \cong 1$ и тем более $H \cap H^{g_1 g_2} = 1$, где g_1 и g_2 — прообразы $\bar{g}$ и $\widetilde{g}$ соответственно. Противоречие с тем, что $H \cap H^x \neq 1$ для любого $x \in G$.

Лемма доказана.

Рассмотрим подстановочное представление φ, возникающее при действии G сопряжениями на множестве $Com(G) = \{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$ компонент из $E(G)$. Так как по лемме 22 подгруппа H действует транзитивно на элементах из $Com(G)$, то $m = |G : N_G(K_1)|$. Но $E(G) \leq \ker\varphi = T$, поэтому $G = E(G)H = TH$ и $G/T = TH/T \cong H/(T \cap H)$ изоморфно вкладывается в Σ_m.

Лемма 23. *Если $|H|$ четен, то $\pi(E(G) \cap H) = \{2\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $|H|$ четен, то $2 \in \pi(H)$, а по [8, теорема 3 (условие II)] $\pi(E(G) \cap H) = \{2\}$.

Лемма доказана.

Лемма 24. *Порядок подгруппы H четен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $|H|$ нечетен. Следовательно, факторгруппа $\bar{G} = G/T$, которая изоморфно вкладывается в Σ_m, имеет нечетный порядок. Значит, по теореме Глака [15, следствие 1] множество индексов $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, которые нумеруют компоненты в $E(G) = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_m$, можно разбить на два непересекающихся подмножества M_1 и M_2 так, что только единичный элемент факторгруппы $\bar{G}$ стабилизирует M_1 и M_2.

Построим нужную нам π-холлову подгруппу H_0 группы G, которая пересекается с H тривиально. Рассмотрим произвольную подгруппу $K_i \in \{K_1, \dots, K_m\}$. По предложению 1 и леммам 16–18 в K_i имеется две регулярные орбиты для $H \cap K_i$. В компоненте K_i выбираем произвольную холлову π-подгруппу H_i из этих двух орбит. Назовем эту орбиту первой. В силу транзитивности H на множестве $\{K_1, \dots, K_m\}$ для любого $h \in H$ считаем, что H_i^h лежит в первой орбите компоненты K_i^h. Это определяет первую орбиту во всех компонентах из $E(G)$. Так как регулярных орбит в K_i как минимум две, то мы можем в этой компоненте рассмотреть любую отличную от первой орбиты и назвать ее второй. Выбрав во второй орбите произвольную холлову π-подгруппу H_i^*, аналогичным образом с использованием транзитивности H получаем вторую орбиту во всех компонентах из $E(G)$. Далее рассматриваем распределение индексов компонент из $E(G)$, начиная с K_i. Индекс i попадает в одно из множеств M_1 или M_2. Обозначим через K множество компонент из $E(G)$, индексы которых лежат в том же множестве, что и i, а через K^* оставшиеся компоненты. Так как компоненты коммутируют и в каждой компоненте есть холловы π-подгруппы из первой и второй регулярной орбиты для $H \cap E(G)$, то одна из холловых π-подгрупп H_0' из $E(G)$ является произведением холловых π-подгрупп лежащих в первой орбите компонент из K умноженным на произведение холловых π-подгрупп лежащих во второй орбите компонент из K^*. Поскольку H_0' является π-холловой подгруппой в $E(G)$, то по D_π-свойству она лежит в некоторой π-холловой подгруппе H_0 из G. Докажем, что $H_0 \cap H = 1$.

Рассмотрим $D = H \cap H_0$ и $1 \neq d \in D$. Допустим, что d стабилизирует разложение M_1, M_2. Тогда по теореме [15, следствие 1] элемент d нормализует каждую компоненту. Значит, $d \in E(G)$, но тогда $d \in H_0 \cap H \cap E(G) = (H_0 \cap E(G)) \cap (H \cap E(G)) = H_0' \cap (H \cap E(G)) = 1$; противоречие. Следовательно, d не стабилизирует это разложение. Поэтому d переводит некоторую компоненту, индексированную элементом одного множества, в компоненту, индексированную элементом другого множества. Так как $d \in H$, то d переводит холлову π-подгруппу из первой орбиты данной компоненты в холлову π-подгруппу первой же орбиты другой компоненты. С другой стороны, $d \in H_0$, а значит, должен переводить ту же самую холлову π-подгруппу из первой орбиты данной компоненты в холлову π-подгруппу второй орбиты другой компоненты; противоречие.

Лемма доказана.

Из лемм 23, 24 следует, что $\pi(E(G) \cap H) = \{2\}$.

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

Будем пользоваться обозначениями, введенными в леммах 19-24 и их доказательствах.

Поскольку $3 \in \pi(K_i)$, то по леммам 23, 24 имеем $3 \notin \pi(H)$. Тогда по [18, теорема 2.3] существует разбиение множества $M = M_1 \dot\cup M_2 \dot\cup M_3$ на три подмножества такое, что только единичный элемент из $H/(H \cap T)$ стабилизирует это разбиение.

Так как $\pi(H) \cap \pi(K_i) = \{2\}$, то по лемме 7 подгруппа $H_T = H \cap T$ изоморфно вкладывается в π-холлову подгруппу H_R из $P = \mathrm{Aut}_T(K_1) \times \dots \times \mathrm{Aut}_T(K_n)$. Проведем построение пары подгрупп H_{R_0} в P согласно указанному разбиению. Подгруппа H, действуя на компонентах, аналогичным образом действует и на подгруппах из P, изоморфных $\mathrm{Aut}_T(K_i)$. Рассмотрим произвольную подгруппу из P, изоморфную $\mathrm{Aut}_T(K_i)$. Индекс i определяет множество M_j, которому он принадлежит. Распределим все индексы $\mathrm{Aut}_T(K_i)$ по множествам M_1, M_2, M_3. Рассмотрим группу K_{M_1} порожденную всеми $\mathrm{Aut}_T(K_i)$, где $i \in M_1$. Так как все $\mathrm{Aut}_T(K_i)$ коммутируют, то $K_{M_1} = \prod_{i \in M_1} \mathrm{Aut}_T(K_i)$. Поскольку по [8, теорема 1] $\mathrm{Aut}_T(K_i)$ — D_π-группа, то по предложению 2 она содержит по крайней мере пять регулярных орбит пар силовских 2-подгрупп относительно $H_R \cap K_{M_1}$. Подобным образом строим группы K_{M_2} и K_{M_3}. Выберем в K_{M_1} силовскую 2-подгруппу H_1, построенную по фиксированной орбите для $\mathrm{Aut}_T(K_i)$ с помощью формулы $\prod_{i \in M_1} \mathrm{Aut}_T(K_i)$. Аналогично в K_{M_2} и K_{M_3} выберем силовские 2-подгруппы H_2, H_3 из орбит, отличных от уже использованных ранее. Тогда $H_{R_0} = H_1 \times H_2 \times H_3$ является π-холловой подгруппой в P. Следовательно, она сопряжена с H_R. Так как по построению $H_R \cap H_{R_0} = 1$, то H_T пересекается со своей сопряженной из H_{R_0} также по 1. Подгруппа H_{R_0}

вкладывается в некоторую сопряженную с H подгруппу H_0.

Рассмотрим подгруппу $D = H \cap H_0$. Пусть d — произвольный элемент из D. Если d стабилизирует рассматриваемое разбиение, то по [19] d лежит в поточечном стабилизаторе и $d \in (H \cap T) \cap (H_0 \cap T)$, а как показано выше, $(H \cap T) \cap (H_0 \cap T) = 1$; противоречие с выбором G. Если d не стабилизирует разложение, то, поскольку d из H, d переводит некоторую компоненту $\mathrm{Aut}_T(K_l)$ с индексом из M_i в компоненту $\mathrm{Aut}_T((K_l)^d)$ с индексом из M_j с $i \neq j$. Элемент d переводит выбранную орбиту из $\mathrm{Aut}_T(K_l)$ в орбиту с тем же номером из $\mathrm{Aut}_T((K_l)^d)$. С другой стороны $d \in H_0$, следовательно d переводит ту же самую орбиту в орбиту с другим номером из $\mathrm{Aut}_T((K_l)^d)$; противоречие.

Теорема 1 полностью доказана.

Заключение

В работе решен вопрос 20.123 (c) Коуровской тетради и при условиях, указанных в этом вопросе, дан положительный ответ на вопрос 18.31. В дальнейшем предполагается решение задачи при условии, что простые неабелевы факторы D_π-группы G являются либо спорадическими, либо знакопеременными группами (см. [6, вопрос 20.123(b)]) и решение при этих условиях вопроса 18.31.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зенков В.И., Мазуров В.Д.** О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.
2. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных гурппах // Фундамент. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 1–92.
3. **Vdovin E.P.** Regular orbits of solvable linear p'-groups // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2007. Vol. 4. P. 345–360.
4. **Dolfi S.** Large orbits in coprime actions of solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360, no. 1. P. 135–152. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04155-4
5. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Теоремы силоского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5 (401). С. 3–46.
6. The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 20th ed. [e-resource]. Linkoln; Novosibirsk: University of Lincoln, U.K.; Inst. Math. SO RAN Publ., 2024. 274 p. URL: `https://kourovka-notebook.org/`.
7. **Зенков В.И.** О пересечениях π-холловых подгрупп в конечных D_π-группах // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 866–869. https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.412
8. **Ревин Д.О.** Свойства D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика, 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
9. **Revin D.O., Vdovin E.P.** On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra, 2010. Vol. 324, no. 12. P. 3614–3652
10. **Зенков В.И.** О пересечениях нильпотентных подгрупп в конечных группах со спорадическим цоколем // Алгебра и логика, 2020. Т. 59, № 4. С. 458–470. https://doi.org/10.33048/alglog.2020.59.403
11. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** O Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
12. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. Москва: Мир, 1985. 352 с.
13. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of finite groups of characteristic 2 type. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1983. (Ser. Mem. Am. Math. Soc., 42).
14. **Кабанов В.В., Кондратьев А.С.** Силовские 2-подгруппы конечных групп (обзор) / Институт математики и механики УНЦ Академии наук СССР. Свердловск, 1979. 144 с. (Full text)
15. **Gluck D.** Trivial set-stabilizers in finite permutation groups // Canad. J. Math. 1983. Vol. 35. P. 59–67. https://doi.org/10.4153/CJM-1983-005-2

16. **Belousov I.N.** I: Intersections π-Hall D_π-subgroups in finite simple sporadic groups; II: Finding a Lower Bound for $Orb_p(G)$ using the Sylow p-subgroup center centralizer. URL: `https://github.com/BelousovIN/Intersection_Subgroup`. In: The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.14.0; 2024. (`https://www.gap-system.org`).
17. **Вдовин Е.П., Манзаева Н.Ч., Ревин Д.О.** О наследуемости π-теоремы Силова подгруппами // Мат. сб. 2020. Т. 211, № 3. С. 3–31.
18. **Halasi Z., Podoski K.**, Every coprime linear group admits a base of size two // Transactions of the american mathematical society. 2016. Vol. 368, no. 8. P. 5857–5887.
19. **Feit W., Thompson J.G.** Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math., 1963. Vol. 13, no. 3. P. 775–787. https://doi.org/10.2140/pjm.1963.13.775
20. **Glauberman G.** Factorizations in local subgroups of finite groups. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc, 1977.
21. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1977. 240 с.
22. Дополнительные материалы к статье: И. Н. Белоусов, В. И. Зенков. “О пересечениях π-холловых подгрупп некоторых конечных D_π-групп”. Онлайн-версия содержит дополнительные материалы, размещенные на `http://journal.imm.uran.ru/Suppl_inf_2025-v.31-1` (Full text) .

Поступила 18.11.2024
После доработки 23.01.2025
Принята к публикации 27.01.2025

Белоусов Иван Николаевич,
канд. физ.-мат. наук,
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: i_belousov@mail.ru

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: v1i9z52@mail.ru

REFERENCES

1. Zenkov V.I., Mazurov V.D. On the intersection of Sylow subgroups in finite groups. *Algebra and Logic*, 1996, vol. 35, no. 4, pp. 236–240. https://doi.org/10.1007/BF02367025
2. Zenkov V.I. The intersections of nilpotent subgroups in finite groups. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1996, vol. 2, no. 1, pp. 1–92 (in Russian).
3. Vdovin E.P. Regular orbits of solvable linear p'-groups. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2007, vol. 4, pp. 345–360.
4. Dolfi S. Large orbits in coprime actions of solvable groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008, vol. 360, no. 1, pp. 135–152. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04155-4
5. Vdovin E.P., Revin D.O. Theorems of Sylow type. *Russian Math. Surv.*, 2011, vol. 66, no. 5, pp. 829–870. https://doi.org/10.1070/RM2011v066n05ABEH004762
6. The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 20th ed. [e-resource]. Linkoln, Novosibirsk, University of Lincoln, U.K.; Inst. Math. SO RAN, 2024, 274 p. Available at: `https://kourovka-notebook.org/`.
7. Zenkov V.I. On intersections of π-Hall subgroups in finite D_π-groups. *Sib. Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 4, pp. 720-–722. https://doi.org/10.1134/S0037446622040127
8. Revin D.O. The D_π-property in finite simple groups. *Algebra and Logic*, 2008, vol. 47, no. 3, pp. 210–227. https://doi.org/10.1007/s10469-008-9010-4

9. Revin D.O., Vdovin E.P. On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups. *J. Algebra*, 2010, vol. 324, no. 12, pp. 3614–3652. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.09.014
10. Zenkov V.I. Intersections of nilpotent subgroups in finite groups with sporadic socle. *Algebra and Logic*, 2020, vol. 59, no. 4, pp. 313–321. https://doi.org/10.1007/s10469-020-09603-x
11. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups*. Oxford, Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 978-0-19-853199-9.
12. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification*. New York, Springer, 1982, 333 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-8497-7 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu*, Moscow, Mir Publ., 1985, 352 p.
13. Gorenstein D., Lyons R. *The local structure of finite groups of characteristic* 2 *type*. Mem. Amer. Math. Soc., vol. 42, edt. 276, Providence, RI, Am. Math. Soc., 1983, 731 p. https://doi.org/10.1090/memo/0276
14. Kabanov V.V., Kondrat'ev A.S. *Silovskiye* 2*-podgruppy konechnykh grupp* (obzor) [Sylow 2-subgroups of finite groups (Review)]. Sverdlovsk: Institute of Mathematics and Mechanics of the USSR Academy of Sciences Publ., 1979, 144 p. (Full text)
15. Gluck D. Trivial set-stabilizers in finite permutation groups. *Canad. J. Math.*, 1983, vol. 35, no. 1, pp. 59–67. https://doi.org/10.4153/CJM-1983-005-2
16. Belousov I.N. I: Intersections π-Hall D_π-subgroups in finite simple sporadic groups, II: Finding a Lower Bound for $Orb_p(G)$ using the Sylow p-subgroup center centralizer. Available at: `https://github.com/BelousovIN/Intersection_Subgroup`, In: The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.14.0; 2024. (`https://www.gap-system.org`).
17. Vdovin E.P., Manzaev N.Ch., Revin D.O. On the heritability of the Sylow π-theorem by subgroups. *Sb. Math.*, 2020, vol. 211, no. 3, pp. 309–335. https://doi.org/10.1070/SM9185
18. Halasi Z., Podoski K. Every coprime linear group admits a base of size two. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2016, vol. 368, no. 8, pp. 5857–5887. https://doi.org/10.1090/tran/6544
19. Feit W., Thompson J.G. Solvability of groups of odd order. *Pacific J. Math.*, 1963, vol. 13, no. 3, pp. 775–787. https://doi.org/10.2140/pjm.1963.13.775
20. Glauberman G. Factorizations in local subgroups of finite groups. In: *CBMS Regional Conf. Ser. Math.*, vol. 33, Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1977. https://doi.org/10.1090/cbms/033
21. Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp* [Fundamentals of group theory], Moscow, Nauka Publ., 1982, 240 p.
22. Supplementary Materials for the article I. N. Belousov, V. I. Zenkov. "On intersections of π-Hall subgroups of some D_π-groups". The online version contains supplementary material available at `http://journal.imm.uran.ru/Suppl_inf_2025-v.31-1` (Full text) .

Received November 18, 2024
Revised January 23, 2025
Accepted January 27, 2025

Ivan Nikolaevich Belousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, 620000 Russia, e-mail: i_belousov@mail.ru .

Victor Ivanovich Zenkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, 620000 Russia, e-mail: v1i9z52@mail.ru .

Cite this article as: I. N. Belousov, V. I. Zenkov. On intersections of π-Hall subgroups of some D_π-groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 19–35 .