

УДК 517.926.7

О РЕАЛИЗАЦИИ СЧЕТНЫХ СУЩЕСТВЕННЫХ СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ¹

А. Х. Сташ, Н. А. Лобода

В настоящей работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными коэффициентами. Подсчет показателей колеблемости происходит путем усреднения числа нулей (или знаков, или корней, или гиперкорней) проекции решения x дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получаются слабые показатели колеблемости, а если после, то — сильные показатели колеблемости. При вычислении показателей колеблемости решения y линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка осуществляется переход к вектор-функции $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$. Эти показатели тесно связаны с пересечениями решениями гиперплоскостей (проходящих через начало координат), т.е. с колеблемостью проекций этих решений на всевозможные прямые. Основным результатом работы заключается в конструктивном построении двумерной линейной ограниченной системы, обладающей тем свойством, что ее спектры всех верхних и нижних, сильных и слабых показателей колеблемости строгих и нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с любым наперед заданным замкнутым ограниченным счетным множеством неотрицательных рациональных чисел с единственной нулевой предельной точкой. Более того, для любого ненулевого решения построенной системы все показатели колеблемости совпадают между собой, причем каждое их значение является метрически и топологически существенным. При построении указанной системы и доказательстве основного результата использованы аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений и специальная методика управления фундаментальной матрицей двумерной дифференциальной системы.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, колеблемость, число нулей, показатель Ляпунова, частота Сергеева, показатель колеблемости, показатель блуждаемости.

A. Kh. Stash, N. A. Loboda. On the implementation of countable essential spectra of oscillation exponents in a linear homogeneous two-dimensional differential system.

Various types of oscillation exponents are studied for solutions of linear homogeneous differential systems with continuous bounded coefficients. The oscillation exponents are calculated by averaging the number of zeros (or signs, or roots, or hyperroots) of the projection of a solution x of a differential system onto some straight line, where this line is chosen so that the resulting average value is minimal. If minimization precedes averaging, then the weak oscillation exponents are obtained; otherwise, the strong ones. When calculating oscillation exponents of a solution y of a linear homogeneous n th-order differential equation, we pass to the vector function $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$. These exponents are closely related to the intersections of solutions with hyperplanes (passing through the origin), i.e. with the oscillation of projections of these solutions onto all possible straight lines. The main result of the paper is an explicit construction of a two-dimensional linear bounded system with the property that its spectra of all upper and lower, strong and weak oscillation exponents of strict and nonstrict signs, zeros, roots, and hyperroots coincide with any predetermined closed bounded countable set of nonnegative rational numbers with a single zero limit point. Moreover, for any nonzero solution of the constructed system, all oscillation exponents coincide, and each of their values is metrically and topologically essential. In the construction of the mentioned system and in the proof of the main result, we apply analytical methods of the qualitative theory of differential equations and a special method of controlling the fundamental matrix of a two-dimensional differential system.

Keywords: differential equation, linear system, oscillation, number of zeros, Lyapunov exponent, Sergeev frequency, oscillation exponent, wandering exponent.

MSC: 34A30, 34C10, 34D05

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-199-209

¹Исследования авторов выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074 по проекту “Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов”.

Введение

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через \mathcal{M}^n множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными ограниченными оператор-функциями $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ и положим

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

В работах И. Н. Сергеева [1–5] введены и исследованы различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем на полупрямой. Эти характеристики отвечают за колеблемость и блуждаемость решения. В статье [6] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым к тому моменту характеристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты были переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости. В работах [7–10] характеристические частоты называются частотами Сергеева.

В настоящей работе мы будем рассматривать следующие разновидности показателей:

- показатели колеблемости *строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней*;
- *верхние и нижние* показатели колеблемости (в случае их совпадения называемые *точными*);
- *сильные и слабые* показатели колеблемости (в случае их совпадения называемые *абсолютными*).

Сначала дадим основные определения.

О п р е д е л е н и е 1. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения (см. [1]).

О п р е д е л е н и е 2. Для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и вектор-функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ обозначим (см. [1–3]): $\nu^-(x, m, t)$ — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$; $\nu^\sim(x, m, t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$; $\nu^0(x, m, t)$ — число *нулей* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$; $\nu^+(x, m, t)$ — число *корней* (т.е. нулей с учетом их *кратности*) функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$; $\nu^*(x, m, t)$ — число *гиперкорней* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$, где в процессе подсчета этого количества каждый некрatный нуль считается ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

О п р е д е л е н и е 3. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости строгих и нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ соответственно зададим равенствами (см. [2–4])

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left(\check{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left(\check{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right), \end{aligned}$$

где $\alpha = -, \sim, 0, +, *$.

Для любых $0 < t_1 < t_2$ и $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ к определению 2 добавим обозначения

$$\nu^\alpha(x, m, t_1, t_2) = \nu^\alpha(x, m, t_2) - \nu^\alpha(x, m, t_1), \quad m \in \mathbb{R}_*^n, \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *.$$

О п р е д е л е н и е 4. Для функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ условимся о следующем (см. [5]):

1) если значение некоторого верхнего (с крышечкой) показателя колеблемости совпадает со значением одноименного нижнего (с галочкой) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки;

2) если значение некоторого слабого (с пустым кружочком) показателя колеблемости совпадает со значением одноименного сильного (с полным кружочком) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще.

О п р е д е л е н и е 5. Множество всех значений показателя $\varkappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовем *спектром* этого показателя системы $A \in \mathcal{M}^n$, причем значение $a \in \varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ назовем *существенным* [11;12], если подмножество $\{x(0) \mid x \in \mathcal{S}_*(A), \varkappa(x) = a\} \subset \mathbb{R}^n$ имеет положительную меру и заполняет некоторое непустое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Брауэра*, т.е. счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Через $\text{ess } \varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ обозначим множество всех *существенных значений* показателя \varkappa для системы A и назовем его *существенным спектром* системы A .

Ненулевые решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка в силу теоремы существования и единственности вовсе не имеют нулей, а значит, все их показатели колеблемости равны нулю. Известно, что спектры показателей колеблемости линейного однородного уравнения второго порядка состоят ровно из одного элемента [2], но зато спектры показателей двумерных систем могут достигать мощности континуума [13]. В последнем случае принципиально невозможно добиться того, чтобы сразу все значения какого-либо показателя оказались существенными.

Исследование спектров показателей колеблемости автономных систем было начато в работах [2; 14] и полностью завершено в [15]. В докладах И. Н. Сергеева [11; 12] было установлено, что спектры показателей колеблемости нулей любой автономной системы содержат только одно существенное значение.

В работе [16] установлено существование линейной двумерной дифференциальной системы, спектры показателей колеблемости которой содержат счетные существенные (и метрически, и топологически) множества неотрицательной полуоси. Кроме того, для любого заданного натурального числа N построена двумерная периодическая линейная дифференциальная система, спектры показателей колеблемости которой содержат один и тот же набор, состоящий из N различных существенных (и метрически, и топологически) значений. Возможность получения заданного конечного существенного спектра показателей колеблемости двумерной системы продемонстрирована в [17].

Е. М. Шишлянников установил [18], что для любого замкнутого ограниченного счетного множества неотрицательных рациональных чисел X с единственной нулевой предельной точкой существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$, на множестве решений которой показатель блуждаемости ρ является точным, абсолютным и обладает свойством $\rho(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \rho(\mathcal{S}_*(A)) = X$. В настоящей работе этот результат переносится и на все показатели колеблемости.

1. Вспомогательные определения и факты

В этом разделе приведем свойства специальных вектор-функций, необходимые для доказательства основного результата.

Для произвольной вектор-функций $z \in C^1(E, \mathbb{R}_*^2)$ (E — либо отрезок вида $[0, T]$, либо полуось \mathbb{R}_+) однозначно определим функцию $\phi_z: E \rightarrow \mathbb{R}$ соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|(\cos \phi_z(t), \sin \phi_z(t))^T = z(t), \quad t \in E, \quad \phi_z \in C^1(E).$$

Следуя Е.М. Шишлянникову [19; 20], для любых $T > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \pi/2]$ обозначим через $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$, $\overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0)$ и $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$ множества, которые состоят из всех вектор-функций $u \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$, удовлетворяющих условиям

- 1) $\phi(0) = \varphi_0$, где $\phi = \phi_u$;
- 2) функция ϕ монотонна на отрезках $[0, T/4]$ и $[T/4, T/2]$;
- 3) при каждом $t \in (0, T/2]$ верно равенство $\phi(T/2 + t) = \phi(T/2 - t)$;
- 4) для множества $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$ при каждом $t \in (0, T/2]$ выполнено включение $\phi(t) - \varphi_0 \in [0, \pi - \delta]$;
- 5) для множества $\overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0)$ при каждом $t \in (0, T/2]$ выполнено включение $\phi(t) - \varphi_0 \in [0, \pi)$;
- 6) для множества $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$ функция ϕ нестрого возрастает на отрезке $[0, T/2]$ и $\pi \leq \phi(T/2) - \varphi_0 \leq 3\pi/2$.

Для любой функции $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$ и для любых чисел $i \in \mathbb{N}$ и $T > 0$ определим функцию $u^i \equiv u_z^{T,i} \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$ с помощью равенства $u_z^{T,i}(t) \equiv z((i-1)T + t)$, $t \in [0, T]$.

Вычисление значений показателей колеблемости для некоторых функций из множества $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$ упрощает следующее утверждение.

Лемма 1. Если для чисел $a \in [0, 1]$, $T > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \pi/2]$, последовательности $l_i \in \{0, 1\}$, $i \in \mathbb{N}$, и решения $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$ имеют место соотношения

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p l_i = a, \quad u^i \in \mathcal{A}_{l_i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

где $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$, то справедлива цепочка равенств

$$\nu^-(z) = \nu^{\sim}(z) = \nu^0(z) = \nu^+(z) = \nu^*(z) = 2a\pi/T. \quad (1.1)$$

Доказательство. Фиксируем произвольный номер $i \in \mathbb{N}$. Для заданного решения $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$ найдется такой вектор $m_z \in \mathbb{R}_*^2$, что при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполняется

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \nu^\alpha(z, m, (i-1)T, iT) = \nu^\alpha(z, m_z, (i-1)T, iT) = \begin{cases} 2, & l_i = 1, \\ 0, & l_i = 0. \end{cases}$$

Отсюда для нижних слабых показателей колеблемости будем иметь

$$\begin{aligned} \check{\nu}^\alpha(z) &= \varliminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m, t) = \varliminf_{p \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \frac{\pi}{pT} \nu^\alpha(z, m, pT) \\ &= \varliminf_{p \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p \nu^\alpha(z, m, (i-1)T, iT) = \varliminf_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p \nu^\alpha(z, m_z, (i-1)T, iT) \\ &= \varliminf_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p 2l_i = \frac{2\pi}{T} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p l_i = \frac{2\pi}{T} a. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения для верхних слабых показателей колеблемости приводят к равенству $\hat{\nu}^\alpha(z) = 2a\pi/T$.

С учетом установленных равенств и определений показателей колеблемости, получим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{T} a = \check{\nu}_\circ^\alpha(z) \leq \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) \leq \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) &= \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m, t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m_z, t) = \\ &= \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \nu^\alpha(z, m_z, pT) = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{pT} \sum_{i=1}^p \nu^\alpha(z, m_z, (i-1)T, iT) = \frac{2\pi}{T} a, \end{aligned}$$

все нестрогие неравенства которого превращаются в равенства, а значит, справедливость цепочки равенств (1.1) установлена.

Лемма 1 доказана.

Если все составляющие функции z , как в условии леммы 1, начинаются в точке с угловой координатой φ_0 и все не совершают полный полуоборот (т. е. не лежат в множестве $\mathcal{A}_1(T, \varphi_0)$), то возможно отсутствие такого общего зазора δ , чтобы сразу все части решения лежали в множестве $\mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta)$. В этом случае мы не сможем применять лемму 1 при $l_i = 0$, $i \in \mathbb{N}$, и тогда будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 2. Пусть заданы решения $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$, угол $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ и число $T > 0$. Если существуют подмножество $N \subset \mathbb{N}$ и угол $\delta \in (0, \pi/2]$ такие, что

$$u^i \in \begin{cases} \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta), & i \in N' \equiv \mathbb{N} \setminus N, \\ \overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0) \setminus \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta), & i \in N, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \chi_N(i) = 0, \quad (1.3)$$

где χ_N — характеристическая функция множества N , т. е.

$$\chi_N(k) \equiv \begin{cases} 1, & k \in N, \\ 0, & k \notin N, \end{cases}$$

то выполняются равенства

$$\nu^-(z) = \nu^\sim(z) = \nu^0(z) = \nu^+(z) = \nu^*(z) = 0. \quad (1.4)$$

Доказательство. По заданным $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^2$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $T > 0$ выберем подмножество $N \subset \mathbb{N}$ и угол $\delta \in (0, \pi/2]$, для которых верны соотношения (1.2) и (1.3). Заметим, что для любой функции $u \in \overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0)$ найдется вектор $m_u \in \mathbb{R}_*^2$, для которых справедливы оценки

$$\nu^\alpha(u, m_u, T) \leq \begin{cases} 0, & u \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta), \\ 2, & u \in \overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_0) \setminus \mathcal{A}_0(T, \varphi_0, \delta), \end{cases} \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\},$$

а значит, для функции z и некоторого вектора $m_z \in \mathbb{R}_*^2$ при любых $t > 0$ и $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \nu^\alpha(z, m_z, t) &\leq \sum_{i=1}^{[t/T]} \nu^\alpha(u^i, m_z, (i-1)T, iT) + \nu^\alpha(u^{[t/T]+1}, m_z, [t/T]T, ([t/T]+1)T) \\ &\leq \sum_{i=1}^{[t/T]} \chi_{N'}(i) \cdot 0 + \sum_{i=1}^{[t/T]} 2\chi_N(i) + 2 \leq \sum_{i=1}^{[t/T]} 2\chi_N(i) + 2; \end{aligned}$$

отсюда получим

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m_z, t) \right) \leq \frac{\pi}{T} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{T[t/T]}{t} \right) \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{[t/T]} \left(2 + \sum_{i=1}^{[t/T]} 2\chi_N(i) \right) \right\} = 0.$$

Следовательно, для выбранного решения z приходим к оценке сверху его верхних сильных показателей колеблемости:

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m, t) \right) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{t} \nu^\alpha(z, m_z, t) \right) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Из определений показателей колеблемости вытекают очевидные неравенства

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z) \leq \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) \leq \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z), \quad \check{\nu}_\circ^\alpha(z) \leq \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) \leq \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z), \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Таким образом, получим справедливость цепочки равенств (1.4).

Лемма 2 доказана.

О п р е д е л е н и е 6. Семейство множеств $\{N_k \subset \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}\}$ назовем *разбиением* множества натуральных чисел \mathbb{N} , если выполнены равенство $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k = \mathbb{N}$ и для любых $k, k' \in \mathbb{N}$, $k \neq k'$ соотношение $N_k \cap N_{k'} = \emptyset$ (см. [18]).

Теперь сформулируем результаты из диссертации Е. М. Шишлянникова.

Лемма 3 (см. [18, лемма 7]). *Если последовательность рациональных чисел (a_k) начинается с числа 1 и строго убывает, то существует такое разбиение $\{N_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, что при любом k для множества $\Lambda_k \equiv \bigcup_{h=k}^{+\infty} N_h$ верно равенство $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \chi_{\Lambda_k}(i) = a_k$.*

Лемма 4 (см. [18, лемма 8]). *Для любых чисел $T > 0$ и $1 < c^- < c^+$ существуют вектор-функции $u, v \in C^1([0, T], \mathbb{R}_*^2)$, для которых верны следующие утверждения:*

(i) *выполняются равенства $u(0) = u(T) = (1, 0)^T$, $v(0) = v(T) = (0, 1)^T$, $\dot{u}(0) = \dot{u}(T) = \dot{v}(0) = \dot{v}(T) = (0, 0)^T$;*

(ii) *справедливы оценки $|u|, |v|, |\dot{u}|, |\dot{v}| \leq b \equiv \max\{|(x, y)^T|, |(x-1, y+1)^T| \cdot c^-\}$, где $x \equiv c^- c^+$, $y \equiv c^- + c^+ - 1$;*

(iii) *верна оценка $\det(u, v) \geq \epsilon \equiv \sin(3\pi/4 + \arctg(y/x)) > 0$;*

(iv) *имеет место включение $u \in \mathcal{A}_0(T, 0, \pi/2)$ и для любого $c \in \mathbb{R}$ верно одно из включений*

$$cu + v \in \begin{cases} \mathcal{A}_0(T, \varphi_c, d(c)), & c \in \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+], \\ \mathcal{A}_1(T, \varphi_c), & c \in [c^-, c^+], \end{cases}$$

где $\varphi_c \equiv \pi/2 - \arctg c$, а функция $d : \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+] \rightarrow (0, \pi/2]$ определена равенствами

$$d(c) = \begin{cases} \pi/4, & c \in (-\infty, 0], \\ \min\{\pi/2, D(c)\}, & c \in (0, c^-) \cup (c^+, y), \\ \varphi_c, & c \in [y, +\infty), \end{cases}$$

$$D : (0, c^-) \cup (c^+, y) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad D(c) = \arctg \frac{1}{c} - \arctg \frac{y-c}{x-c}.$$

2. Формулировка и доказательство основного результата

Обозначим через \mathcal{I} класс, состоящий из всех счетных ограниченных подмножеств $X \subset (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ (\mathbb{Q} — множество рациональных чисел), у каждого из которых 0 — единственная предельная точка.

Возможность реализации счетных из класса \mathcal{I} спектров показателей колеблемости дифференциальной системы гарантирует следующая

Теорема 1. *Для любого множества $X \in \mathcal{I}$ существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$, для которой справедливы равенства*

$$\nu^-(x) = \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A), \quad (2.1)$$

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \varkappa(\mathcal{S}_*(A)) = X \cup \{0\}, \quad \varkappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*. \quad (2.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано множество $X \in \mathcal{I}$ и $M \equiv \max X$.

1. Выберем числа c^-, c^+ и последовательность (c_k^+) , удовлетворяющие условиям

$$1 < c^- < c_1^+ < \dots < c_k^+ < \dots < c^+, \quad c^+ < c^- + c_1^+ - 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k^+ = c^+.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ по тройке чисел $T \equiv (2\pi)/M$, c^- и c_k^+ в соответствии с леммой 4 построим вектор-функции u_k, v_k , для которых найдем числа $b_k, \epsilon_k, x_k, y_k$ и определим функции d_k, D_k .

2. Положим $C_0 \equiv \mathbb{R} \setminus [c^-, c_k^+]$ и, заметив, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $C_0 \subset D(d_k) = \mathbb{R} \setminus [c^-, c^+]$ ($D(d_k)$ — область определения функции d_k), определим функцию $d : C_0 \rightarrow (0, \pi/2]$ такую, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ при всех $c \in C_0$ верно неравенство

$$d(c) \leq d_k(c). \quad (2.3)$$

А. Для любого $k \in \mathbb{N}$ из цепочки $c^+ < c^- + c_1^+ - 1 \equiv y_1$ получим неравенство $c^+ < c^- + c_k^+ - 1 \equiv y_k$. Положив $y \equiv c^- + c^+ - 1$, получим цепочку

$$1 < c^- < c_k^+ < c^+ < y_k < y. \quad (2.4)$$

Б. Если $c \in (-\infty, 0]$, то для любого k неравенство (2.3) верно при $d(c) = \pi/4$, а если $c \in [y, +\infty)$ — при $d(c) = \varphi_c$.

В. Заметим, что из цепочки (2.4) следует, что при любом k верно соотношение $C_k \equiv (0, c^-) \cup (c^+, y_k) \subset D(D_k) = (0, c^-) \cup (c_k^+, y_k)$ и положим $x \equiv c^- c^+$. При всех $c \in C_k$ для разности аргументов арктангенсов функции D_k верна оценка

$$\frac{1}{c} - \frac{y_k - c}{x_k - c} = \frac{(c - c^-)(c - c_k^+)}{c(x_k - c)} > e(c)(c - c_k^+) > 0, \quad e(c) \equiv \frac{c - c^-}{c(x - c)}, \quad (2.5)$$

причем, если $c < c^-$, то верна также оценка

$$|c - c_k^+| = c_k^+ - c \geq c_1^+ - c > 0, \quad (2.6)$$

а если $c > c^+$, то — оценка

$$|c - c_k^+| = c - c_k^+ > c - c^+ > 0. \quad (2.7)$$

Г. На множестве $(0, c^-) \cup (c^+, y)$ положим

$$D(c) = \begin{cases} \omega(c)e(c)(c - c_1), & c \in (0, c^-), \\ \omega(c)e(c)(c - c^+), & c \in (c^+, y), \end{cases}$$

где $\omega(c) = \min_{\xi \in (0, \tilde{c}]}$ arctg'(ξ) = arctg'(\tilde{c}) > 0, $\tilde{c} = \max\{1, 1/c\}$.

Из оценок (2.5)–(2.7) получим, что при любом k при всех $c \in C_k$ для функции D_k верно неравенство $D(c) \leq D_k(c)$, откуда следует, что при всех $c \in (0, c^-) \cup (c^+, y)$ для функции $d(c) \equiv \min\{D(c), \pi/2, \varphi_c\}$ верно неравенство (2.3). Функция d определена.

3. Для строго убывающей последовательности (a_k) , определяемой равенствами

$$X' \equiv \{a/M \mid a \in X\}, \quad a_1 = 1, \quad a_k \equiv \max(X' \setminus \{a_h \mid h = \overline{1, k-1}\}), \quad k \geq 2,$$

в соответствии с леммой 3 построим разбиение $\{N_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Для любого $i \in \mathbb{N}$ выберем k так, что $i \in N_k$ и положим $\kappa(i) = k$, задав тем самым функцию $\kappa : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Определим вектор-функции z_1, z_2 равенствами

$$u_{z_1}^{T,i} \equiv u_{\kappa(i)}, \quad u_{z_2}^{T,i} \equiv v_{\kappa(i)}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

А. Из утверждения (i) леммы 4 следует, что вектор-функции z_1 и z_2 непрерывно-дифференцируемы.

Б. Из утверждения (ii) леммы 4 и построения (2.8) вытекает, что при

$$b = \sup\{b_k, k \in \mathbb{N}\} = \max\{|(x, y)^T|, |(x-1, y+1)^T| \cdot c^-\}$$

и для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $|z_1(t)|, |z_2(t)|, |\dot{z}_1(t)|, |\dot{z}_2(t)| \leq b$.

В. Для любого k из соотношений

$$\frac{y_k}{x_k} = \frac{c_k^+ + (c^- - 1)}{c^- c_k^+} = \frac{c_k^+ c_1^+ + c_1^+ (c^- - 1)}{c^- c_k^+ c_1^+} \leq \frac{c_k^+ c_1^+ + c_k^+ (c^- - 1)}{c^- c_k^+ c_1^+} = \frac{c_1^+ + (c^- - 1)}{c^- c_1^+} = \frac{y_1}{x_1}$$

выводим цепочку

$$\epsilon_1 = \sin(3\pi/4 + \arctg(y_1/x_1)) \leq \sin(3\pi/4 + \arctg(y_k/x_k)) = \epsilon_k,$$

из которой, опираясь на утверждение (iii) леммы 4, получим при всех $t \in \mathbb{R}_+$ оценку снизу $\det(z_1(t), z_2(t)) \geq \epsilon_1$, а значит, матрица $Z = (z_1(\cdot), z_2(\cdot)) = (z_{ij})$ является фундаментальной для ограниченной системы $A = \dot{Z}Z^{-1} = (\dot{z}_{ij})(Z_{jk})/\det Z \in \mathcal{M}^2$, где Z_{jk} — алгебраическое дополнение элемента z_{jk} .

4. Для любого решения $z \in \mathcal{Z} \equiv \{cz_1 + z_2 \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{z_1\}$, снова опираясь на равенства (2.8) и утверждение (iv) леммы 4, определим значение a , при котором выполнено

$$\check{\nu}^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = a, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

А. Если $z = z_1$, то решение z удовлетворяет условиям леммы 1 при $l_i = 0$, $i \in \mathbb{N}$, $a = 0$, $\varphi_0 = 0$ и $\delta = \pi/2$, поэтому

$$\check{\nu}^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}. \quad (2.9)$$

Б. Если $z = cz_1 + z_2$ и $c \in C_0$, то из построения функции d в п.2 настоящего доказательства, следует, что для решения z выполнены условия леммы 1 при $l_i = 0$, $i \in \mathbb{N}$, $a = 0$, $\varphi_0 = \varphi_c$ и $\delta = d(c)$, а значит, и в этом случае справедливы равенства (2.9).

В. Если $z = cz_1 + z_2$ и при некотором $k \in \mathbb{N}$ верно включение $c \in (c_{k-1}^+, c_k^+]$ (при $k = 1$ считаем, что $c_0^+ \equiv c^-$), то $c \notin [c^-, c_h^+]$ при $h \leq k-1$ и $c \in [c^-, c_h^+]$ при $h \geq k$, поэтому из леммы 1 и леммы 3 при

$$l_i = \chi_{\Lambda_k}(i), \quad i \in \mathbb{N}, \quad \Lambda_k \equiv \bigcup_{h=k}^{+\infty} N_h, \quad a = a_k, \quad \varphi_0 = \varphi_c, \quad \delta = \min_{h=1, k-1} d_h(c)$$

(при $k = 1$, число $\delta \in (0, \pi/2]$ — произвольное) с учетом $\frac{2\pi}{T}a_k = \frac{2\pi M}{2\pi}a_k = Ma_k$ получаем

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = Ma_k, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Аналогично, при $z = c^- z_1 + z_2$ получим

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(z) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(z) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(z) = Ma_1, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Г. Пусть $z = c^+ z_1 + z_2$.

а) Из леммы 4 вытекает включение $c^+ u_k + v_k \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_{c^+}, d_k(c^+)) \subset \overline{\mathcal{A}}_0(T, \varphi_{c^+})$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

б) Из цепочки (2.4) получим $c^+ \in (c_k^+, y_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, поэтому определено значение $D_k(c^+)$.

Для разности аргументов арктангенсов в формуле, определяющей $D_k(c^+)$, имеет место равенство

$$\frac{1}{c^+} - \frac{y_k - c^+}{x_k - c^+} = \frac{(c^+ - c^-)(c^+ - c_k^+)}{c^+(x_k - c^+)},$$

из которого следует, что последовательность $(D_k(c^+))$ убывает и стремится к нулю.

в) Пусть номер k' такой, что выполнено неравенство $D_{k'}(c^+) \leq \min\{\pi/2, \varphi_{c^+}\}$.

г) Нуль является единственной предельной точкой множества X , поэтому последовательность (a_k) стремится к нулю. Для любого $\epsilon > 0$ выберем такой номер $k \geq k'$, что $a_k < \epsilon$.

Далее, фиксируем $\delta \in (D_k(c^+), D_{k-1}(c^+))$ и, опираясь на пп. а)–в), получим, что для любого $h \in \{1, \dots, k-1\}$ выполнено $c^+u_h + v_h \in \mathcal{A}_0(T, \varphi_{c^+}, \delta)$.

д) Из пп. а), г) и построения (2.8) следует, что для решения z выполнены соотношения (1.2) при $N = \Lambda_k$, а в силу леммы 3 выполнено и неравенство (1.3), а значит, решение z удовлетворяет условиям леммы 2 при $\varphi_0 = \varphi_{c^+}$; отсюда получаем снова равенства (2.9).

Для остальных решений построенной системы $A \in \mathcal{M}^2$ заданные значения показателей колеблемости из множества X повторяются, поскольку для любого решения $\tilde{z} \in \mathcal{S}_*(A) \setminus \mathcal{Z}$ существует такая функция $z \in \mathcal{Z}$, что при некотором $r \neq 0$ выполнено равенство $\tilde{z} = rz$.

Следовательно, справедливы цепочки равенств (2.1) и $\varkappa(\mathcal{S}_*(A)) = \varkappa(\mathcal{Z}) = X \cup \{0\}$, $\varkappa = \nu^-, \nu^{\sim}, \nu^0, \nu^+, \nu^*$.

5. При любом фиксированном $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ для значения $a_k \in X$ ($a_0 \equiv 0$) и при всех $\varkappa = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}, \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}, \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}, \check{\nu}_{\circ}^{\alpha}$, $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, имеет место включение

$$\{z(0) \mid z \in \mathcal{S}_*(A), \varkappa(z) = a_k\} \supset \{q(cz_1(0) + z_2(0)) \mid c \in C_k, q > 0\} \equiv \Omega(a_k).$$

Векторы $z_1(0)$ и $z_2(0)$ линейно независимы, поэтому множество $\Omega(a_k)$ — внутренняя область некоторого ненулевого угла. Следовательно, оно имеет положительную меру и содержит некоторое открытое подмножество. Таким образом, выполнено равенство (2.2).

Теорема полностью доказана.

Заключение

В данной работе для определенного класса счетных множеств, доказано существование двумерной линейной ограниченной дифференциальной системы, у которой спектры всех показателей колеблемости совпадают с заданным множеством из этого класса, причем все значения существенны. Интересным остается вопрос о возможности реализации произвольного счетного существенного спектра какого-либо показателя колеблемости двумерной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сергеев И.Н.** Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. **Сергеев И.Н.** Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. математическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172. <https://doi.org/10.4213/im5035>
3. **Сергеев И.Н.** Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138. <https://doi.org/10.4213/sm7928>
4. **Сергеев И.Н.** Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183.
5. **Сергеев И.Н.** Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. Семинара им. И. Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.
6. **Сергеев И.Н.** Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 732–751. <https://doi.org/10.4213/mzm10555>
7. **Барабанов Е.А., Войделевич А.С.** К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1302–1320. <https://doi.org/10.1134/S0374064116100034>
8. **Барабанов Е.А., Войделевич А.С.** К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1595–1609. <https://doi.org/10.1134/S0374064116120013>
9. **Быков В.В.** О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 419–425. <https://doi.org/10.1134/S0374064116040026>

10. **Войделевич А.С.** О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32>
11. **Сергеев И.Н.** Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1661–1662.
12. **Сергеев И.Н.** Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1567–1568.
13. **Сташ А.Х.** Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 143–144. <https://doi.org/10.1134/S0374064115010161>
14. **Бурлаков Д.С., Цой С.В.** Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. Семинара им. И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93.
15. **Сташ А.Х.** Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 558–568. <https://doi.org/10.20537/vm190407>
16. **Сташ А.Х.** О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 157–171. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-2-157-171>
17. **Сташ А.Х., Лобода Н.А.** О реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 4. С. 500–507. <https://doi.org/10.31857/S0374064124040053>
18. **Шишлянников Е.М.** Свойства ляпуновских показателей колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем: дис... канд. физ.-мат. наук / Моск. гос. ун-т. Москва, 2019. 79 с.
19. **Шишлянников Е.М.** Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 5. С. 14–21.
20. **Шишлянников Е.М.** Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Мат. сб. 2018. Т. 209, № 12. С. 149–164. <https://doi.org/10.4213/sm8995>

Поступила 10.09.2024

После доработки 27.11.2024

Принята к публикации 2.12.2024

Сташ Айдамир Хазретович
канд. физ.-мат. наук, доцент
декан ф-та математики и компьютерных наук
Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Лобода Надежда Алексеевна
старший преподаватель
Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
e-mail: n-loboda@yandex.ru

REFERENCES

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793. <https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6>
2. Sergeev I.N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162. <https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578>
3. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems. *Sb. Math.*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132. <https://doi.org/10.1070/SM2013v204n01ABEH004293>
4. Sergeev I.N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems. *Izv. In-ta Mat. Inf. UdGU*, 2015, no. 2(46), pp. 171–183 (in Russian).
5. Sergeev I.N. Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 234, no. 4, pp. 497–522. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4025-4>

6. Sergeev I.N. Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems. *Math. Notes*, 2016, vol. 99, no. 5, pp. 729–746. <https://doi.org/10.1134/S0001434616050114>
7. Barabanov E.A., Voidelevich A.S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation: I. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1249–1267. <https://doi.org/10.1134/S0012266116100013>
8. Barabanov E.A., Voidelevich A.S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation: II. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1523–1538. <https://doi.org/10.1134/S0012266116120016>
9. Bykov V.V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solution of linear differential equation. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 413–420. <https://doi.org/10.1134/S0012266116040029>
10. Voidelevich A.S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equation. *J. Belarus. Gos. Univ. Matem. Inf.*, 2019, no. 1, pp. 28–32 (in Russian).
11. Sergeev I.N. Metrically typical and essential values of exponents of linear systems. *Diff. Uravn.*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1661–1662 (in Russian).
12. Sergeev I.N. Topologically typical and essential values of exponents of linear systems, *Diff. Uravn.*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1567–1568 (in Russian).
13. Stash A.Kh. Existence of a two-dimensional linear system with continual spectra of total and vector frequencies. *Diff. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 146–148. <https://doi.org/10.1134/S0012266115010164>
14. Burlakov D.S., Tsoii S.V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2554-7>
15. Stash A.Kh. Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Math. Mekh. Komp. Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 558–568 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm190407>
16. Stash A.Kh. On essential values of oscillation exponents for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 321, suppl. 1, pp. S216–S229. <https://doi.org/10.1134/S0081543823030185>
17. Stash A.Kh., Loboda N.A. On the realization of finite essential spectra of oscillation exponents of two-dimensional differential systems. *Diff. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 4, pp. 472–478. <https://doi.org/10.1134/S0012266124040062>
18. Shishlyannikov E.M. Properties of Lyapunov exponents of oscillation and wandering of solutions of differential systems: *Diss... Cand. Phys. Math. Sci.*: 01.01.02, MGU, Moscow, 2019, 79 p.
19. Shishlyannikov E.M. Two dimensional differential systems with arbitrary finite spectra of wandering exponent. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2017, vol. 72, no. 5, pp. 192–198. <https://doi.org/10.3103/S0027132217050023>
20. Shishlyannikov E.M. The existence of a two-dimensional bounded system with continual and coinciding spectra of frequencies and of wandering exponents. *Sb. Math.*, 2018, vol. 209, no. 12, pp. 1812–1826. <https://doi.org/10.1070/SM8995>

Received September 10, 2024

Revised November 27, 2024

Accepted December 2, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state task no. 075-03-2024-074) within the project “Study of asymptotic oscillation characteristics of differential equations and systems as well as optimization methods.”

Aydamir Khazretovich Stash, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science, Adyghe State University, Maykop, 385000 Russia,
e-mail: aidamir.stash@gmail.com .

Loboda Nadejda Alekseevna, Adyghe State University, Maykop, 385000 Russia,
e-mail: n-loboda@yandex.ru .

Cite this article as: A. Kh. Stash, N. A. Loboda. On the implementation of countable essential spectra of oscillation exponents in a linear homogeneous two-dimensional differential system. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 199–209 .