ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 1 2025

УДК 512.534.5, 512.536.72, 512.536.75, 515.123.56, 515.126.27

# ЭЛЛИСОВСКИЕ ЭКВИРАВНОМЕРНОСТИ НА УЛЬТРАТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ ЦИКЛИЧЕСКИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

**Г. Б. Сорин**

Рассмотрено действие группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X,R)$ (в топологии поточечной сходимости) на ультраоднородном циклически упорядоченном пространстве $(X,R)$ (в топологии циклического порядка). Показано, что для этого действия существует единственная эквиравномерность на $(X,R)$, дано описание соответствующей собственной эллисовской полугрупповой компактификации $\mathrm{Aut}(X,R)$ и проведено сравнение соответствующей эллисовской эквиравномерности на $\mathrm{Aut}(X,R)$ с Roelcke-равномерностью ($\mathrm{Aut}(X,R)$ Roelcke-предкомпактна).

Ключевые слова: циклически упорядоченное множество, автоморфизм, полугруппа, равномерность, компактификация.

**G. B. Sorin. Ellis uniformities on ultratransitive groups of automorphisms of cyclically ordered spaces.**

The action of the automorphism group $\mathrm{Aut}(X,R)$ (in the topology of pointwise convergence) on the ultrahomogeneous cyclically ordered space $(X,R)$ (in the topology of cyclic order) is considered. It is shown that for this action there exists a unique equiuniformity on $(X,R)$, a description of the corresponding proper Ellis semigroup compactification of $\mathrm{Aut}(X,R)$ is given, and a comparison is made of the corresponding Ellis equiuniformity on $\mathrm{Aut}(X,R)$ with Roelcke-uniformity ($\mathrm{Aut}(X,R)$ Roelcke-precompact).

Keywords: cyclically ordered set, automorphism, semigroup, uniformity, compactification.

**MSC:** 22F50, 54H15, 20B27, 20E22, 08A35

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-185-198

## Введение

У любой топологической группы $G$ существует (собственная) компактификация $\beta_G G$ (*greatest ambit*) [1], являющаяся правой топологической полугруппой, и $G$ — ее подполугруппа. Дополнительно $\beta_G G$ является максимальной эквивариантной компактификацией $G$ (группа $G$ рассматривается как $G$-пространство с действием самой на себе умножением слева). Подробная теория право топологических полугрупповых компактификаций (не обязательно собственных) топологических групп изложена в [2]. В работе [3] показано, что если для действия группы $G$ на топологическом пространстве $X$ топология поточечной сходимости $\tau_p$ является допустимой групповой топологией, то по каждой вполне ограниченной эквиравномерности на $X$ можно построить эквиравномерность на $G$ (названную *эллисовской эквиравномерностью*), пополнение по которой — компактная правая топологическая полугруппа, и $G$ — ее подполугруппа. Такие компактификации группы $G$ названы собственными эллисовскими полугрупповыми компактификациями $G$. Этот подход использует конструкцию Р. Эллиса [4], широко применяемую в топологической динамике.

В работе рассматривается действие группы $\mathrm{Aut}(X,R)$ автоморфизмов (в топологии поточечной сходимости) на ультраоднородном циклически упорядоченном пространстве $(X,R)$ (в топологии циклического порядка). Показано, что для этого действия существует единственная

[1]Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

эквиравномерность на $(X,R)$, дано описание соответствующей собственной эллисовской полугрупповой компактификации $\mathrm{Aut}(X,R)$ и проведено сравнение соответствующей эллисовской эквиравномерности на $\mathrm{Aut}(X,R)$ с Roelcke-равномерностью.

Для получения результатов проведены следующие шаги.

I. Доказано, что 2-однородное циклически упорядоченное множество ультраоднородно (теорема 1). Полученная теорема усиливает [5, лемма 6], где доказано, что 3-однородное циклически упорядоченное множество, содержащее не менее 4 элементов, является ультраоднородным.

Также отметим, что каждое линейно упорядоченное множество является циклически упорядоченным (линейный порядок рассматривается как естественное сечение циклического порядка). Однако существует ультраоднородное линейно упорядоченное множество, для которого соответствующее циклически упорядоченное множество не 2-однородно (пример 1).

II. В [6] описана решетка всех топологий обобщенного циклического порядка (GCO топологий) на ц.у. множестве $(X,R)$. В разд. 3 установлено, что среди всех GCO топологий на плотном 1-однородном $(X,R)$ существует ровно 4 топологии, в которых все автоморфизмы непрерывны (предложение 1). Аналогичные результаты для группы автоморфизмов линейно упорядоченных множеств получены в [7, § 1.5].

Далее этот результат использован для получения допустимых групповых топологий на $\mathrm{Aut}(X,R)$: топологии поточечной сходимости при действии на циклически упорядоченном пространстве $((X,R),\tau_R)$ и перестановочной топологии при действии на циклически упорядоченном дискретном пространстве $((X,R),\tau_d)$. Известно [8; 9], что топология поточечной сходимости является наименьшей допустимой групповой топологией на группе автоморфизмов линейно упорядоченного пространства. В разд. 3 получен аналогичный результат для группы автоморфизмов циклически упорядоченного пространства (теорема 2).

III. В разд. 4 и 5 рассматривается ультратранзитивное действие группы $\mathrm{Aut}(X,R)$ в топологии поточечной сходимости на пространстве $X$ (в топологии циклического порядка). В разд. 4 описана максимальная эквивариантная компактификация $X$. В разд. 5 описана эллисовская эквиравномерность на $\mathrm{Aut}(X,R)$. Пополнение по этой равномерности является компактной правой топологической полугруппой, но не является полутопологической полугруппой (теорема 3). Полученная компактификация группы $\mathrm{Aut}(X,R)$ отлична от Roelcke-компактификации этой группы (предложение 9).

В [10, предложение 6.6] рассмотрена группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},R)$ — группа автоморфизмов счетного ультраоднородного циклически упорядоченного множества — в перестановочной топологии и доказана ее Roelcke-предкомпактность. Из [7, следствие 4.3] следует, что эллисовская эквиравномерность на группе автоморфизмов линейно упорядоченного пространства (в топологии поточечной сходимости) строго больше Roelcke-равномерности.

В качестве примера полученные результаты применены к группе автоморфизмов счетного плотного ц.у. множества $(\mathbb{Q},R)$.

Будем придерживаться обозначений и терминологии из [11; 12]. Все пространства предполагаются тихоновскими. Через $\omega_1$ обозначим первый несчетный ординал, через $e$ — единицу группы, через $N_G(e)$ — семейство окрестностей единицы группы $G$. Для группы $G$ неравенство $G<H$ обозначает, что $G$ является подгруппой группы $H$ (возможно $G=H$).

## 1. Основные понятия и обозначения

Определение 1 [13]. Трехместное отношение $R$, также обозначаемое $[\cdot,\cdot,\cdot]$, на множестве $X$ называется *отношением циклического порядка*, если выполнены следующие условия:

1) *цикличность*: $[a,b,c] \implies [b,c,a]$;
2) *асимметричность*: $[a,b,c] \implies (b,a,c)\notin R$;
3) *транзитивность*: $[a,b,c]\wedge[a,c,d] \implies [a,b,d]$;
4) *полнота порядка*: для любых попарно различных $a,b,c\in X$ либо $[a,b,c]$, либо $[a,c,b]$.

Если $R$ удовлетворяет указанным условиям, то пара $(X, R)$ называется *циклически упорядоченным* (ц.у.) множеством.

Упорядоченный набор $(x_1, \dots, x_n)$ будем обозначать $\overline{x}$. Отношение $[\cdot, \cdot, \cdot]$ можно распространить на конечные наборы.

Определение 2. Пусть $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — набор точек из $X$, $n \geq 3$. Будем говорить, что $\overline{x}$ — *цикл в* $X$ и писать $[x_1, \dots, x_n]$, если $\forall i < j < k$ $[x_i, x_j, x_k]$.

Также будем считать, что (1) набор длины $n = 1$ является циклом; (2) набор $\overline{x} = (x_1, x_2)$ длины $n = 2$ является циклом, если $x_1 \neq x_2$.

В частности, $[x_1, \dots, x_n]$ означает, что точки $x_1, \dots, x_n$ попарно различны.

Индексы элементов $x_1, \dots, x_n$ цикла $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ рассматриваются как вычеты $\mod n$.

Для точек $a, b$ в ц.у. множестве $(X, R)$ определен *интервал* $(a, b)_X = \{x \in X \mid [a, x, b]\}$. Иногда индекс в обозначении интервала будем опускать. По аналогии с линейно упорядоченными множествами можно определить полуинтервалы $[a, b)_X, (a, b]_X$ и отрезок $[a, b]_X$. Подмножество $A$ в $(X, R)$ называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ множество $A$ содержит хотя бы один из интервалов $(a, b), (b, a)$. Циклический порядок на $X$ называется *плотным*, если каждый интервал $(a, b)$ (при $a \neq b$) непуст. Подробную информацию о ц.у. множествах можно найти в [6; 13; 14].

Базу *топологии* $\tau_R$ *циклического порядка* на $(X, R)$ образуют всевозможные интервалы.

*Сечением* на $(X, R)$ называется такое отношение линейного порядка $<$ на $X$, что $a < b < c \implies [a, b, c]$. Для каждой точки $x \in X$ множество $<_x = \{(a, b) \in X^2 \mid [x, a, b]\} \cup \{(x, a) \in X^2 \mid a \in X \setminus \{x\}\}$ является сечением на $(X, R)$. *Щелью* на $(X, R)$ называется сечение $<$ такое, что в $(X, <)$ нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов. Множество всех щелей на $(X, R)$ обозначим через $\Gamma$, а через $cX$ — *наименьшую циклически упорядоченную компактификацию* пространства $(X, R, \tau_R)$ [6, следствие 4]. Пространство $cX$ получено из $X$ заполнением каждой щели одной точкой [6, § 3] с естественным продолжением порядка. По [14, теорема 2.19] циклически упорядоченное пространство компактно тогда и только тогда, когда на нем нет щелей.

Под равномерностью $\mathcal{U}$ на множестве $X$ понимается семейство равномерных покрытий (см., например, [11, § 8.1]). На топологическом пространстве $X$ рассматриваются равномерности, согласованные с исходной топологией $X$. Пополнение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ обозначается как $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}})$ или просто — $\widetilde{X}^{\mathcal{U}}$.

*Правая* (соответственно *левая*) *равномерность* на топологической группе $G$ обозначается через $\mathcal{R}$ (соответственно $\mathcal{L}$); ее базу образуют покрытия $\{Og \mid g \in G\}$ (соответственно $\{gO \mid g \in G\}$), где $O$ пробегает множество всех окрестностей единицы группы $G$ [12, лемма 2.1] или [11, пример 8.1.17]. *Roelcke-равномерностью* (обозначаемой $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$, см. [12, определение 2.5]) на топологической группе $G$ называется точная верхняя грань всех равномерностей, меньших левой равномерности $\mathcal{L}$ и правой равномерности $\mathcal{R}$ (см. [12, пример 0.24 b]). Roelcke-равномерность является равномерностью на топологической группе. Топологическая группа называется *Roelcke-предкомпактной*, если Roelcke-равномерность вполне ограничена. Базу Roelcke-равномерности на $G$ образуют покрытия $\{OgO \mid g \in G\}$, где $O$ пробегает множество всех окрестностей единицы группы $G$. Пополнение $G$ по равномерности $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$ обозначим через $\widetilde{G}^{\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}}$.

$G \curvearrowright X$ обозначает действие группы $G$ на множестве $X$, которое является эффективным левым действием. Также это действие будем обозначать как $\alpha : G \times X \to X$. Для каждого $x \in X$ определено *орбитное отображение* $\alpha_x : G \to X : g \mapsto \alpha(g, x)$. Для краткости вместо $\alpha(g, x)$ будем писать $g(x)$ или $gx$, а для $O \subset G$ и $x \in X$ вместо $\alpha(O, x)$ — $Ox$.

Для действия $G \curvearrowright X$ и набора $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ точек в $X$ через $St_{\overline{x}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} St_{x_i} = \{g \in G \mid \forall i = 1, \dots, n \ gx_i = x_i\}$ обозначен стабилизатор этого набора, т. е. стабилизатор каждой точки из набора. $St_{\overline{x}}$ является подгруппой в $G$.

Для действия $G \curvearrowright X$ группы $G$ на пространстве $X$ через $O_U^x = \{g \in G \mid gx \in U\}$, где $x \in X$, $U$ открыто в $X$, обозначаются элементы предбазы *топологии поточечной сходимости* $\tau_p$ на $G$. Если пространство $X$ дискретно, то соответствующая топология поточечной сходимости на $G$ называется *перестановочной топологией* и обозначается $\tau_\partial$.

Для топологической группы $G$, топологического пространства $X$ и непрерывного действия $\alpha : G \times X \to X$ тройка $(G, X, \alpha)$ называется *$G$-пространством*. Для краткости это $G$-пространство будем обозначать $X$. Отображение $f : X \to Y$ $G$-пространств $(G, X, \alpha_X)$ и $(G, Y, \alpha_Y)$ называется *эквивариантным*, если $\alpha_Y(g, f(x)) = f(\alpha_X(g, x))$, $g \in G$, $x \in X$.

Пусть $(G, X, \alpha)$ — $G$-пространство. Равномерность $\mathcal{U}$ на пространстве $X$ называется *эквиравномерностью* [15], если действие $\alpha : G \curvearrowright X$ *насыщено* (каждый гомеоморфизм из $G$ равномерно непрерывен) и *ограничено* (для каждого покрытия $u \in \mathcal{U}$ существуют окрестность $O$ единицы группы $G$ и покрытие $v \in \mathcal{U}$ такие, что $Ov = \{OV \mid V \in v\}$ вписано в $u$). Если $\mathcal{U}$ является эквиравномерностью, то действие $\alpha$ продолжается до непрерывного действия $\widetilde{\alpha} : G \curvearrowright \widetilde{X}$, где $\widetilde{X} = (\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}})$ — пополнение $(X, \mathcal{U})$ и $\widetilde{\mathcal{U}}$ является эквиравномерностью на $\widetilde{X}$ (для $G$-пространства $(G, \widetilde{X}, \widetilde{\alpha})$) [16]. При этом естественное вложение $i : X \to \widetilde{X}$ есть эквивариантное отображение. Если $\mathcal{U}$ вполне ограничена, то $G$-пространство $(G, (\widetilde{X}, i), \widetilde{\alpha})$ называется *эквивариантной компактификацией* $G$-пространства $(G, X, \alpha)$. Для краткости в этом случае будем говорить, что $\widetilde{X}$ является эквивариантной компактификацией $X$.

$G$-пространство, имеющее эквивариантную компактификацию, называется *$G$-тихоновским*. $G$-пространство $(G, X, \alpha)$ является $G$-тихоновским тогда и только тогда, когда на $X$ существует эквиравномерность. Для $G$-тихоновского пространства $(G, X, \alpha)$ семейство эквиравномерностей на $X$ имеет наибольший элемент — *максимальную эквиравномерность* [15], которую обозначим $\mathcal{U}$. Компактификация Самюэля пространства $X$ относительно $\mathcal{U}$ [11, задача 8.5.7] является *максимальной эквивариантной компактификацией* $\beta_G X$ *$G$-пространства* $X$ (любая эквивариантная компактификация $X$ является образом $\beta_G X$ при некотором эквивариантном отображении компактификаций — непрерывном эквивариантном отображении, тождественном на $X$). В частности, если $\mathcal{U}$ вполне ограничена, то $\widetilde{X}^{\mathcal{U}}$ — максимальная эквивариантная компактификация $X$.

Для заданного действия $\alpha : G \times X \to X$ группы $G$ на топологическом пространстве $X$ топология $\tau$ на $G$ называется *допустимой групповой топологией*, если $(G, \tau)$ — топологическая группа и отображение $\alpha$ непрерывно.

Топологическое пространство $S$, являющееся полугруппой, называется *правой топологической полугруппой* (соответственно *полутопологической полугруппой*), если $\forall f, g \in S$ отображение $f \mapsto fg$ непрерывно (соответственно если отображение $(f, g) \mapsto fg$ раздельно непрерывно ($\forall f, g \in S$ отображения $f \mapsto fg$ и $f \mapsto gf$ непрерывны)). Подробную информацию о топологических группах и полугруппах можно найти в работах [17] и [2].

## 2. Ультраоднородные ц.у. множества и группы автоморфизмов

Отображение $f : X \to X$ называется *автоморфизмом* ц.у. множества $(X, R)$, если $f$ является биекцией, сохраняющей циклический порядок, т. е. $\forall a, b, c \in X$ $[a, b, c] \iff [fa, fb, fc]$. Множество всех автоморфизмов $(X, R)$ образует группу, обозначаемую $\mathrm{Aut}(X, R)$.

Для $G < \mathrm{Aut}(X, R)$ действие $G \curvearrowright (X, R)$ группы $G$ на ц.у. множестве $X$ называется *$n$-транзитивным*, если для каждого $k \leq n$ и для любых циклов $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ существует $g \in G$ такое, что $gx_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Другими словами для каждого $k \leq n$ и для любых циклов $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ отображение $\varphi : \{x_1, \ldots, x_k\} \to \{y_1, \ldots, y_k\} : x_i \mapsto y_i$ продолжается до отображения $f : X \to X$ из группы $G$.

Действие $G \curvearrowright (X, R)$ называется *ультратранзитивным*, если оно $n$-транзитивно для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Циклически упорядоченное множество $(X, R)$ называется *$n$-однородным* (*ультраоднородным*), если действие $\mathrm{Aut}(X, R) \curvearrowright (X, R)$ $n$-транзитивно (ультратранзитивно).

**Лемма 1.** *Для циклически упорядоченного множества $(X,R)$ рассмотрим биекцию $f: X \to X$. Пусть для точек $x \in X$ и $y = f(x)$ отображение $f : (X, <_x) \to (X, <_y)$ сохраняет линейный порядок ($a <_x b \implies fa <_y fb$). Тогда $f \in \mathrm{Aut}(X,R)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что $f$ сохраняет отношение циклического порядка на $X$. Пусть $[a,b,c]$. Тогда либо $a <_x b <_x c$, либо $b <_x c <_x a$, либо $c <_x a <_x b$. Следовательно, либо $fa <_y fb <_y fc$, либо $fb <_y fc <_y fa$, либо $fc <_y fa <_y fb$. В любом случае имеем $[fa, fb, fc]$. То есть $\forall a,b,c$ $[a,b,c] \implies [fa,fb,fc]$.

Так как отображение $f^{-1} : (X, <_y) \to (X, <_x)$ сохраняет линейный порядок, то $\forall a,b,c$ $[fa, fb, fc] \implies [a,b,c]$. Значит, $f \in \mathrm{Aut}(X,R)$.

Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Если ц.у. множество $(X,R)$ 2-однородно, то оно ультраоднородно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $|X| < 3$, то в $X$ не существует подмножеств мощности $n \geq 3$, тем самым действие $\mathrm{Aut}(X,R) \curvearrowright X$ ультратранзитивно. Далее считаем, что $|X| \geq 3$.

Фиксируем произвольное натуральное $n \geq 3$, а также произвольные циклы $\overline{x}, \overline{y}$ из $n$ точек и отображение $\varphi : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{y_1, \ldots, y_n\} : x_i \mapsto y_i$. Построим $f \in \mathrm{Aut}(X,R)$, продолжающий $\varphi$.

Имеем

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=1}^{n} [y_i, y_{i+1}].$$

В силу 2-транзитивности действия $\mathrm{Aut}(X,R) \curvearrowright (X,R)$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ отображение $\varphi\big|_{\{x_i, x_{i+1}\}} : \{x_i, x_{i+1}\} \to \{y_i, y_{i+1}\}$ продолжается до автоморфизма $(X,R)$. Ограничение этого автоморфизма на отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ обозначим через $f_i$. Для каждого $i$ отображения $f_i : [x_i, x_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}]$ и $f_{i+1} : [x_{i+1}, x_{i+2}] \to [y_{i+1}, y_{i+2}]$ согласованы на пересечении их областей определения — множестве $\{x_{i+1}\}$. Значит, отображение $f$, являющееся комбинацией отображений $f_i$ $(i = 1, \ldots n)$, биективно.

Рассмотрим сечения $(X,R)$ в точках $x_0 \in (x_n, x_1)$ и $y_0 = f(x_0) \in (y_n, y_1)$. Так как $f_i$ сохраняет циклический порядок для точек из отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, то $f_i$ сохраняет линейный порядок (в смысле леммы 1) для точек этого отрезка. Пусть $a, b \in X$. Можно считать, что $a <_{x_0} b$. Тогда существуют натуральные $i \leq j$, такие что $a \in [x_i, x_{i+1}]$, $b \in [x_j, x_{j+1}]$. Если $i = j$, то $f_i(a) <_{y_0} f_i(b)$ и $f(a) <_{y_0} f(b)$ Если $i < j$, то $a \leq_{x_0} x_{i+1} <_{x_0} x_{i+2} <_{x_0} \cdots <_{x_0} x_{j-1} <_{x_0} x_j \leq_{x_0} b$. Отсюда $f(a) <_{y_0} f(b)$. То есть $f : (X, <_{x_0}) \to (X, <_{y_0})$ сохраняет линейный порядок. По лемме 1 $f \in \mathrm{Aut}(X,R)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если $(X,R)$ 2-однородно и $|X| \geq 3$, то множество $X$ бесконечно и циклический порядок плотен.

Ниже приведен пример ц.у. множества $(X,R)$, которое не является 2-однородным, но обладает сечением $<$ таким, что линейно упорядоченное множество $(X,<)$ 2-однородно.

П р и м е р 1. $(X,<)$ — лексикографически упорядоченно произведение $\omega_1 \otimes_l \mathbb{Q}$. На множестве $X$ определим отношение циклического порядка следующим образом: $[a,b,c] \iff (a < b < c) \vee (b < c < a) \vee (c < a < b)$. Полученное ц.у. множество 1-однородно. Оно не 2-однородно: для точек $a \neq b$ не существует $g \in \mathrm{Aut}(X,R)$, отображающего цикл $(a,b)$ в цикл $(b,a)$ (поскольку интервалы $(a,b)_X$ и $(b,a)_X$ неравномощны). При этом линейно упорядоченное множество $(X,<)$ 2-однородно, т. е. для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых наборов $x_1 < \cdots < x_n$ и $y_1 < \cdots < y_n$ существует $g \in \mathrm{Aut}(X,<)$ такое, что $f(x_i) = y_i$.

## 3. Допустимые групповые топологии на $\mathrm{Aut}(X,R)$

Пусть $(X,R)$ — ц.у. множество. Через $\tau_R$ обозначена топология циклического порядка на $X$. Ее базу образуют интервалы $(a,b)\subset X$, где $a,b\in X$. Отметим, что каждый интервал является выпуклым подмножеством $(X,R)$.

Определение 3 [6]. Топология $\tau$ на $X$ называется

1) GCO (*generalized cyclically ordered*) *топологией*, если $\tau\supset\tau_R$ и $\tau$ имеет базу из выпуклых множеств;

2) GCO топологией в точке $x\in X$, если топологии $\tau$ принадлежат все интервалы, содержащие точку $x$, и $\tau$ имеет базу в точке $x$, состоящую из выпуклых множеств.

Семейство $T$ всех GCO топологий на $(X,R)$ образует решетку и $|T|\le 2^{|X|}$ [6, теорема 2, предложение 3]. В частности, решетка $T$ содержит следующие элементы:

1) топология циклического порядка $\tau_R$ — наименьший элемент $T$;
2) топология $\tau_\to$, базу которой образуют полуинтервалы $[a,b)$, где $a,b\in X$, $a\ne b$;
3) топология $\tau_\leftarrow$, базу которой образуют полуинтервалы $(a,b]$, где $a,b\in X$, $a\ne b$;
4) дискретная топология $\tau_d$.

Замечание 2. Эквивалентный подход к понятию GCO пространства дан в статье [14].

**Предложение 1.** *Пусть* $(X,R)$ — 1-*однородное ц.у. множество с плотным порядком. Множество всех* GCO *топологий на* $(X,R)$ *в которых все автоморфизмы* $(X,R)$ *непрерывны имеет вид* $\{\tau_R,\tau_\to,\tau_\leftarrow,\tau_d\}$.

Доказательство. По [6, теорема 2] множество $T$ всех GCO топологий на $(X,R)$ образует решетку, изоморфную решетке $\prod\limits_{x\in X} t(x)$, где $t(x)$ — решетка GCO топологий в точке $x\in X$.

Так как порядок $R$ плотен, то для каждого $x\in X$ решетка $t(x)$ состоит из 4 элементов, т. е. каждая GCO топология в точке $x$ имеет базу в точке $x$ одного из 4 видов:

1) базу топологии в точке $x$ образуют все интервалы $(a,b)\ni x$, где $a,b\in X\setminus\{x\}$;
2) базу топологии в точке $x$ образуют все полуинтервалы $[x,b)$, где $b\in X\setminus\{x\}$;
3) базу топологии в точке $x$ образуют все полуинтервалы $(a,x]$, где $a\in X\setminus\{x\}$;
4) база топологии в точке $x$ содержит множество $\{x\}$.

Пусть $\tau\in T$ и $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ непрерывно для каждого $f\in\mathrm{Aut}(X,R)$. Тогда каждый элемент $\mathrm{Aut}(X,R)$ является гомеоморфизмом $(X,\tau)$ на себя. Так как $(X,R)$ 1-однородно, то $\forall x,y\in X$ $\exists$ гомеоморфизм $f\in\mathrm{Aut}(X,R): fx=y$. Отсюда следует: если база топологии в некоторой точке $x\in X$ задана одним из способов 1–4 (см. выше), то база топологии во всех точках должна быть задана тем же способом.

Тогда решетка $T$ изоморфна $t(x)$ для некоторого (любого) $x$ и состоит из 4 элементов: 1) если базу топологии в некоторой точке $x$ образуют все интервалы $(a,b)\ni x$, то также устроена база топологии в остальных точках $X$ — имеем топологию циклического порядка $\tau_R$; аналогично для случаев 2)–4) имеем топологии $\tau_\to,\tau_\leftarrow,\tau_d$ соответственно.

Предложение доказано.

Если топология $\tau$ на $\mathrm{Aut}(X,R)$ является допустимой групповой топологией, то каждый $f\in\mathrm{Aut}(X,R)$ — непрерывное отображение $X\to X$. В соответствии с предложением 1 рассмотрим топологии поточечной сходимости $\tau_p(\tau_R),\tau_p(\tau_\to),\tau_p(\tau_\leftarrow),\tau_p(\tau_d)$ на $\mathrm{Aut}(X,R)$ для действия $\mathrm{Aut}(X,R)\curvearrowright X$ в случае, когда топология на $X$ есть соответственно $\tau_R,\tau_\to,\tau_\leftarrow,\tau_d$.

Топология $\tau_p(\tau_d)$ есть топология поточечной сходимости при действии на дискретном $X$ (т.е. перестановочная топология $\tau_\partial$). Она является групповой топологией на $\mathrm{Aut}(X,R)$ [12, гл. 2, упр. 3]. Базу топологии группы в единице образуют стабилизаторы конечных наборов точек в $X$. Очевидно, эта топология является допустимой. Группа $\mathrm{Aut}(X,R)$ в перестановочной топологии является *неархимедовой* (семейство открыто-замкнутых подгрупп образует базу топологии в единице). Так как топология $\tau_\partial$ является допустимой групповой топологией (для действия $G \curvearrowright (X, \tau_d)$), то она является наименьшей допустимой групповой топологией [18, лемма 3.1] (см. предложение 4 ниже).

Перестановочная топология на $\mathrm{Aut}(X,R)$ есть наименьшая допустимая топология для действия $\mathrm{Aut}(X,R) \curvearrowright (X, \tau_\to)$ (и действия $\mathrm{Aut}(X,R) \curvearrowright (X, \tau_\leftarrow)$). Доказательство этих утверждений аналогично случаю линейно упорядоченных множеств и их групп автоморфизмов [7, предложение 1.10].

Перейдем к топологии $\tau_p := \tau_p(\tau_R)$.

**Теорема 2.** *Топология поточечной сходимости $\tau_p$ является наименьшей допустимой групповой топологией на $\mathrm{Aut}(X,R)$ для действия $\alpha : (\mathrm{Aut}(X,R), \tau_p) \curvearrowright (X, \tau_R)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы состоит в проверке следующих 3-х фактов:

1) $\tau_p$ — групповая топология на $\mathrm{Aut}(X,R)$ (предложение 2);

2) $\tau_p$ — допустимая групповая топология для действия $\mathrm{Aut}(X,R) \curvearrowright (X, \tau_R)$ (предложение 3);

3) среди всех допустимых групповых топологий для действия $\mathrm{Aut}(X,R) \curvearrowright (X, \tau_R)$ топология $\tau_p$ является наименьшей (предложение 4).

Доказательства этих фактов в значительной степени повторяют доказательства аналогичных утверждений в случае группы автоморфизмов линейно упорядоченного множества [8].

**Предложение 2.** *$\tau_p$ является групповой топологией на $\mathrm{Aut}(X,R)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим непрерывность произведения. Пусть $f_0 g_0 = h_0 \in W = O^a_{(b,c)}$, т. е. $f_0 g_0(a) \in (b,c)$. Каждый из интервалов $(b, f_0 g_0(a))$ и $(f_0 g_0(a), c)$ может либо быть пустым, либо непустым, следовательно, имеем 4 случая.

С л у ч а й 1. $\exists r \in (b, f_0 g_0(a))$ и $\exists s \in (f_0 g_0(a), c)$. Следовательно $f_0^{-1}(r) \in (f_0^{-1}(b), g_0(a))$ и $f_0^{-1}(s) \in (g_0(a), f_0^{-1}(c))$. Тогда $g_0 \in V = O^a_{(f_0^{-1}(r), f_0^{-1}(s))}$ и $f_0 \in U = O^{f_0^{-1}(r)}_{(b,c)} \cap O^{f_0^{-1}(s)}_{(b,c)}$. Для произвольной пары $(f,g) \in U \times V$ имеем $g(a) \in (f_0^{-1}(r), f_0^{-1}(s))$ и $fg(a) \in (b,c)$. Таким образом, $fg \in W$ и $UV \subset W$.

С л у ч а й 2. $\nexists r \in (b, f_0 g_0(a))$ и $\nexists s \in (f_0 g_0(a), c)$. Тогда $(b,c) = \{f_0 g_0(a)\}$ и $(f_0^{-1}(b), f_0^{-1}(c)) = \{g_0(a)\}$. Положим $V = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(X,R) \mid \varphi(a) = g_0(a)\}$ и $U = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(X,R) \mid \varphi(g_0(a)) = f_0 g_0(a)\}$. Тогда для произвольной точки $(f,g) \in U \times V$ имеем $fg \in W$, значит, $UV \subset W$.

С л у ч а й 3. $\nexists r \in (b, f_0 g_0(a))$ и $\exists s \in (f_0 g_0(a), c)$. Тогда $g_0 \in V = O^a_{(f_0^{-1}(b), f_0^{-1}(s))}$ и $f_0 \in U = O^{g_0(a)}_{(b,c)} \cap O^{f_0^{-1}(s)}_{(b,c)}$. Следовательно, $fg \in W$ для любой пары $(f,g) \in U \times V$, значит, $UV \subset W$.

С л у ч а й 4. $\exists r \in (b, f_0 g_0(a))$ и $\nexists s \in (f_0 g_0(a), c)$. Аналогично случаю 3.

Проверим непрерывность инволюции $i : g \mapsto g^{-1}$ в точке $f$. Пусть $f^{-1} \in O^x_{(a,b)}$, т. е. $f^{-1}(x) \in (a,b)$ и $x \in (f(a), f(b))$.

С л у ч а й 1. $\exists d \in (f(b), f(a))$. Тогда $[f(b), d, f(a)] \wedge [f(a), x, f(b)]$. Используя цикличность, эту конъюнкцию можно записать двумя способами: $[f(a), x, f(b)] \wedge [f(a), f(b), d]$ и $[f(b), d, f(a)] \wedge [f(b), f(a), x]$. Применяя свойство транзитивности к каждой из конъюнкций, получим соответственно $[f(a), x, d]$ и $[f(b), d, x]$; вновь применив цикличность, имеем $[d, f(a), x]$ и $[x, f(b), d]$. Следовательно $f \in O^a_{(d,x)} \cap O^b_{(x,d)}$. Положим $U = O^a_{(d,x)} \cap O^b_{(x,d)}$. Тогда $i(U) \subset O^x_{(a,b)}$. Действительно, пусть $g \in U$. Тогда $[d, g(a), x] \wedge [x, g(b), d]$. По свойствам цикличности и транзитивности будем иметь $[g(b), d, g(a)] \wedge [g(a), x, g(b)]$. В частности, $x \in (g(a), g(b))$, т. е. $g^{-1}(x) \in (a,b)$ и $i(g) \in O^x_{(a,b)}$.

С л у ч а й 2. $\nexists d \in (f(b), f(a))$. Тогда $f \in U = O^a_{(f(b),x)} \cap O^b_{(x,f(a))}$. Причем $(f(b), x) = [f(a), x)$ и $(x, f(a)) = (x, f(b)]$. Фиксируем произвольное $g \in U$.

Рассмотрим 2 подслучая:

С л у ч а й 2.1. $g(a) = f(a)$. Тогда $[x, g(b), f(a)]$ примет вид $[x, g(b), g(a)]$. То есть $x \in (g(a), g(b))$, следовательно, $i(g) \in O^x_{(a,b)}$.

С л у ч а й 2.2. $g(a) \neq f(a)$. Тогда $g(a) \in (f(b), x) \setminus \{f(a)\} = [f(a), x) \setminus \{f(a)\} = (f(a), x)$. Откуда $[x, f(a), g(a)]$. С учетом свойства транзитивности и $[x, g(b), f(a)]$ имеем $[x, g(b), g(a)]$. Следовательно, $i(g) \in O^x_{(a,b)}$.

Предложение доказано.

**Предложение 3.** *Топология $\tau_p$ является допустимой групповой топологией для действия $\alpha : (\mathrm{Aut}(X, R), \tau_p) \curvearrowright (X, \tau_R)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что действие $\alpha : (\mathrm{Aut}(X, R), \tau_p) \times (X, \tau_R) \to (X, \tau_R) : (f, x) \mapsto f(x)$ непрерывно.

Фиксируем $(a, b) \in \tau_R$. Считаем, что $(a, b) \neq \varnothing$. Положим $W = \alpha^{-1}((a, b)) = \{(f, x) \in \mathrm{Aut}(X, R) \times X \mid f(x) \in (a, b)\}$. Достаточно доказать, что $W$ открыто в произведении $\mathrm{Aut}(X) \times X$. Фиксируем $(f_0, x_0) \in W$. Достаточно найти окрестность $U \ni f_0$ и окрестность $V \ni x_0$ такие, что $U \times V \subset W$.

Так как $(f_0, x_0) \in W$, то $f_0(x_0) \in (a, b)$. Поскольку $f_0 \in \mathrm{Aut}(X, R)$, то $x_0 \in (f_0^{-1}(a), f_0^{-1}(b))$. Рассмотрим интервалы $(f_0^{-1}(a), x_0)$ и $(x_0, f_0^{-1}(b))$. Каждый из них может либо быть пустым, либо непустым. Таким образом, имеем 4 случая.

С л у ч а й 1. $\exists c \in (f_0^{-1}(a), x_0)$ и $\exists d \in (x_0, f_0^{-1}(b))$. Положим $V = (c, d)$ и $U = O^c_{(a,b)} \cap O^d_{(a,b)}$. Для произвольной пары $(f, x) \in U \times V$ имеем: $x \in V$ и $f(c), f(d) \in (a, b)$. Так как $f$ — автоморфизм, то $f(V) \subset (a, b)$. Тогда $(f_0, x_0) \in U \times V \subset W$.

С л у ч а й 2. $\nexists c \in (f_0^{-1}(a), x_0)$ и $\nexists d \in (x_0, f_0^{-1}(b))$. Положим $V = (f_0^{-1}(a), f_0^{-1}(b)) = \{x_0\}$ и $U = O^{x_0}_{(a,b)}$. Тогда $(f_0, x_0) \in U \times V \subset W$.

С л у ч а й 3. $\nexists c \in (f_0^{-1}(a), x_0)$ и $\exists d \in (x_0, f_0^{-1}(b))$. Положим $V = (f_0^{-1}(a), d) = [x_0, d)$ и $U = O^{x_0}_{(a,b)} \cap O^d_{(a,b)}$. Для произвольной пары $(f, x) \in U \times V$ имеем: $x \in V$ и $f(V) \subset (a, b)$. Тогда $(f_0, x_0) \in U \times V \subset W$.

С л у ч а й 4. $\exists c \in (f_0^{-1}(a), x_0)$ и $\nexists d \in (x_0, f_0^{-1}(b))$. Обоснование аналогично случаю 3.

Предложение доказано.

**Предложение 4** [18, лемма 3.1]. *Пусть $G$ — группа. Если топология поточечной сходимости $\tau_p$ является допустимой групповой топологией на $G$ для эффективного действия $G \curvearrowright X$ на топологическом пространстве $X$, то $\tau_p$ является наименьшей допустимой групповой топологией на $G$.*

Это завершает доказательство теоремы 2.

## 4. Максимальная эквивариантная компактификация ультраоднородного $G$-пространства $(X, R, \tau_R)$

В разд. 4 и разд. 5 $X = (X, R, \tau_R)$ — ультраоднородное ц.у. множество в топологии циклического порядка, $G = (\mathrm{Aut}(X, R), \tau_p)$. Ультратранзитивное действие $\alpha : G \curvearrowright X$ определено стандартным образом. По теореме 2 тройка $(G, X, \alpha)$ является $G$-пространством.

Пусть $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ — цикл в $X$. Положим $O_{\overline{a}} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O^{a_i}_{(a_{i-1}, a_{i+1})} = \{f \in G \mid \forall i = 1, \dots, n\ f a_i \in (a_{i-1}, a_{i+1})\} \in N_G(e)$.

З а м е ч а н и е 3. Семейство окрестностей вида $O_{\overline{a}}$, где $\overline{a}$ пробегает все циклы в $X$, является базой топологии $\tau_p$ в единице.

Так как действие $G \curvearrowright X$ ультратранзитивно, то для каждого цикла $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ в $X$ и каждого $x \in X$ либо $x = a_i$ для некоторого $i$ и $O_{\overline{a}} x = (a_{i-1}, a_{i+1})$, либо $x \in (a_i, a_{i+1})$ для некоторого $i$ и $O_{\overline{a}} x = (a_{i-1}, a_{i+2})$.

Семейство покрытий вида

$$\omega_{\overline{a}} = \{O_{\overline{a}}x \mid x \in X\} = \{(a_{i-1}, a_{i+1}), (a_{i-1}, a_{i+2})\}_{i=1}^{n}$$

где $\overline{a}$ пробегает все циклы в $X$, является базой некоторой равномерности $\mathcal{U}_X$ на множестве $X$.

З а м е ч а н и е 4. Так как $(X, R)$ ультраоднородно, то порядок $R$ плотен. Тогда для заданного цикла $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ выберем на каждом интервале $(a_i, a_{i+1})$ по две точки: $b_i, c_i$. Множество $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^{n}$ конечно, значит, его элементы можно переобозначить через $d_j$, $j = 1, \ldots, 3n$ так, что $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_{3n})$ — цикл. Очевидно, покрытие $\omega_{\overline{d}}$ вписано в покрытие $\{(a_{i-1}, a_{i+1})\}_{i=1}^{n}$. Таким образом, покрытия $\{(a_{i-1}, a_{i+1})\}_{i=1}^{n}$, где $\overline{a}$ — цикл в $X$ образуют базу $\mathcal{U}_X$.

З а м е ч а н и е 5. Так как покрытие $\omega_{\overline{a}}$ конечно для всех циклов $\overline{a}$, то равномерность $\mathcal{U}_X$ вполне ограничена. Равномерность $\mathcal{U}_X$ согласована с топологией $\tau_R$. Таким образом, пополнение $\widetilde{X}^{\mathcal{U}_X}$ — компактификация пространства $X$.

Из [19, лемма 1, предложение 3] следует

**Предложение 5.** *Пусть $(G, X, \alpha)$ — $G$-пространство. Если равномерность $\mathcal{V}$ на множестве $X$, базу которой образуют покрытия $\{Ox \mid x \in X\}$, $O \in N_G(e)$, согласована с топологией на $X$, то $\mathcal{V}$ является максимальной эквиравномерностью на $X$.*

Из предложения 5 и замечания 5 следует, что $\mathcal{U}_X$ является вполне ограниченной максимальной эквиравномерностью на $X$. Тогда пополнение $\widetilde{X}^{\mathcal{U}_X} = \beta_G X$ — максимальная эквивариантная компактификация $G$-пространства $(G, X, \alpha)$. Следующие предложения 6 и 7 в явном виде описывают компактификацию $\beta_G X$ и действие $\widetilde{\alpha} : G \times \beta_G X \to \beta_G X$.

**Предложение 6.** *$\beta_G X = cX$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пространство $cX$ наделено топологией циклического порядка и не имеет щелей, следовательно, $cX$ — компакт ([14, теорема 2.19]). Тогда $cX$ является компактификацией $X$.

1) В любое открытое покрытие компакта $cX$ можно вписать конечное покрытие из интервалов в пространстве $cX$, концы которых лежат во множестве $X$. В ограничение последнего покрытия на $X$ можно вписать покрытие из $\mathcal{U}_X$.

2) Каждое покрытие $\omega_{\overline{a}} = \{(a_{i-1}, a_{i+1}), (a_{i-1}, a_{i+2})\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{U}_X$ продолжается до открытого покрытия компакта $cX$: достаточно

(а) заменить каждый интервал $(a_{i-1}, a_{i+1})$ в пространстве $X$ на интервал $(a_{i-1}, a_{i+1})_{cX}$ в пространстве $cX$;

(б) заменить каждый интервал $(a_{i-1}, a_{i+2})$ в $X$ на интервал $(a_{i-1}, a_{i+2})_{cX}$ в $cX$.

Из 1) и 2) следует, что $(X, \mathcal{U}_X)$ — всюду плотное равномерное подпространство компакта $cX$ (на котором выбрана единственная согласованная с топологией равномерность). Таким образом, $\beta_G X = cX$.

Предложение доказано.

Напомним, что нарост $\beta_G X \setminus X = \Gamma$ есть множество всех щелей на $(X, R)$.

**Предложение 7.** *Продолжение $\widetilde{\alpha} : G \times \beta_G X \to \beta_G X$ действия $\alpha : G \times X \to X$ определяется правилом*

$$\forall g \in G \ \forall <_u \in \Gamma \ g(<_u) = \{(ga, gb) \in X^2 \mid a <_u b\}. \qquad (*)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что $(*)$ определяет продолжение действия $\alpha$ до некоторого непрерывного действия $\pi : G \times \beta_G X \to \beta_G X$. Тогда отображения $\pi$ и $\widetilde{\alpha}$ равны, так как являются непрерывными отображениями, совпадающими на всюду плотном подпространстве $G \times X \subset G \times \beta_G X$, со значениями в хаусдорфовом пространстве.

В этом доказательстве через $gz$, где $g \in G, z \in \beta_G X$, обозначается $\pi(g, z)$. Проверим, что $\pi$ является действием. Очевидно, что единица группы $e \in G$ задает тождественное отображение $\beta_G X \to \beta_G X$. Пусть $<_u \in \Gamma$, тогда $\forall a, b, c \in X$ $a <_u b <_u c \implies [a, b, c]$ и в линейно упорядоченном множестве $(X, <_u)$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элементов. Для каждого $g \in G$ имеем $\forall a, b, c \in X$ $(a\ g(<_u)\ b\ g(<_u)\ c) \implies (g^{-1}a <_u g^{-1}b <_u g^{-1}c) \implies [g^{-1}a, g^{-1}b, g^{-1}c] \implies [a, b, c]$. Последняя импликация имеет место, так как $g^{-1} \in \mathrm{Aut}(X, R)$. То есть $g(<_u)$ — сечение на $X$. Из заданного правила также следует, что $g(<_u)$ является линейным порядком на $X$ без наименьшего и наибольшего элементов. То есть $g(<_u) \in \Gamma$. Следовательно, $\pi$ — действие, и $\Gamma$ — инвариантное подмножество.

Проверим непрерывность $\pi$. По предложению 6 $\beta_G X$ является ц.у. множеством с топологией циклического порядка. Поскольку правило $(*)$ задает продолжение каждого $g \in G$ до автоморфизма ц.у. множества $\beta_G X$, то отображение $g : \beta_G X \to \beta_G X$ является гомеоморфизмом. Таким образом, для доказательства непрерывности действия $\pi : G \times \beta_G X \to \beta_G X$ достаточно проверить его непрерывность в точке $(e, z)$, где $z \in \beta_G X$. Для произвольной окрестности $U \ni \pi(e, z) = z$ существует интервал $(a, b)_{\beta_G X} \subset U$, содержащий $z$, где $a, b \in X$. Также существует меньший интервал $(c, d)_{\beta_G X}$, такой что $z \in (c, d)_{\beta_G X} \subset (a, b)_{\beta_G X} \subset U$. При этом $c, d \in X$, $c \neq a, d \neq b$. Положим $O = O^c_{(a,b)_X} \cap O^d_{(a,b)_X} \in N_G(e)$. Тогда $\pi(O \times (c, d)_{\beta_G X}) \subset (a, b)_{\beta_G X} \subset U$. Таким образом, действие $\pi$ непрерывно.

Предложение доказано.

**Предложение 8.** *Если для каждой щели $<_u \in \Gamma$ и подгруппы $St_{<_u} = \{g \in G \mid g(<_u) = <_u\}$ действие $St_{<_u} \curvearrowright (X, <_u)$ ультратранзитивно, то $\beta_G X$ является единственной эквивариантной компактификацией $X$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую эквивариантную компактификацию $bX$ $G$-пространства $(G, X, \alpha)$. Тогда $bX$ является образом $\beta_G X$ при эквивариантном отображении компактификаций, т. е. существует непрерывное отображение $q : \beta_G X \to bX$, такое что $q$ тождественно на $X$ и $\forall g \in G$ $\forall z \in \beta_G X$ $q(gz) = g(qz)$. Предположим, что компактификации $\beta_G X$ и $bX$ неэквивалентны. Тогда существуют различные $<_u, <_v \in \beta_G X \setminus X = \Gamma$ со свойством $q(<_u) = q(<_v)$. Так как $<_u$ и $<_v$ являются щелями на $(X, R)$ и так как действие $St_{<_u} \curvearrowright (X, <_u)$ ультратранзитивно, то для любого интервала $(a, b) \subset \beta_G X$ существует $g \in G$ такое, что $g(<_u) = <_u$ и $g(<_v) \in (a, b)$. Отсюда в силу эквивариантности отображения $q$ и равенства $q(<_u) = q(<_v)$ имеем $\forall (a, b) \subset \beta_G X$ $\exists g \in G : q(<_u) = q(g(<_u)) = g(q(<_u)) = g(q(<_v)) = q(g(<_v))$, где $g(<_v) \in (a, b)$. Следовательно, $g(<_v) \in q^{-1}(q(<_u)) \cap (a, b)$. Из произвольности интервала $(a, b)$ вытекает, что множество $q^{-1}(q(<_u))$ всюду плотно в $\beta_G X$. В силу непрерывности $q$ множество $q^{-1}(q(<_u))$ замкнуто (так как $bX$ хаусдорфово), значит, $q^{-1}(q(<_u)) = \beta_G X$. Противоречие с тем, что $q$ тождественно на $X$. Таким образом, $\beta_G X$ — единственная эквивариантная компактификация $X$.

Предложение доказано.

Вопрос. Является ли действие $St_{<_u} \curvearrowright (X, <_u)$ ультратранзитивным для каждой щели $<_u$ на ультраоднородном ц.у. множестве $(X, R)$? Это условие выполнено для счетного ультраоднородного ц.у. множества (см. пример 2 в конце разд. 5).

## 5. Эллисовская эквиравномерность на группе $(\mathrm{Aut}(X, R), \tau_p)$, действующей ультратранзитивно

В этом разделе мы используем результаты разд. 4 об ультраоднородном $G$-пространстве $(G, X, \alpha) = ((\mathrm{Aut}(X, R), \tau_p), (X, \tau_R), \alpha)$ для описания полугрупповой компактификации группы $G$.

Множество отображений $\beta_G X \to \beta_G X$ с операцией композиции является полугруппой. Так как действие $G \curvearrowright \beta_G X$ непрерывно и индуцированная этим действием топология поточечной сходимости совпадает с $\tau_p$ [3, лемма 1.4], то имеем вложение $i : G \to \beta_G X^{\beta_G X}$, являющееся гомоморфизмом полугрупп [3, теорема 2.7]. Оно определено следующим образом. Действие $G \curvearrowright \beta_G X$ определяет гомоморфизм $G \to S(\beta_G X)$ группы $G$ в группу перестановок множества $\beta_G X$ (так как действие эффективно, то этот гомоморфизм инъективен). Множество $S(\beta_G X)$ всех биекций $\beta_G X$ на себя содержится во множестве $\beta_G X^{\beta_G X}$ всех отображений $\beta_G X \to \beta_G X$. Тем самым определено инъективное отображение множеств $G \to \beta_G X^{\beta_G X}$. Оно является топологическим вложением, так как $\beta_G X^{\beta_G X}$ наделено топологией произведения, а $G$ — топологией поточечной сходимости (см. [4] и [3]).

По предложению 6 базу равномерности на $\beta_G X$ образуют покрытия

$$\Omega_{\overline{a}} = \{(a_{i-1}, a_{i+1})_{\beta_G X}, (a_{i-1}, a_{i+2})_{\beta_G X}\}_{i=1}^{n},$$

где $\overline{a}$ пробегает все циклы в $X$.

Будем отождествлять $G$ и $i(G)$. Единственная равномерность на компакте $\beta_G X^{\beta_G X}$ индуцирует на подпространстве $G$ равномерность, называемую *эллисовской эквиравномерностью* (см. [3]), которую обозначим $\nu$. Пополнение пространства $(G, \nu)$ — замыкание $G$ в $\beta_G X^{\beta_G X}$ — является компактификацией группы $G$, обозначаемой $bG$ и называемой *собственной эллисовской полугрупповой компактификацией.*

**Теорема 3.** *$bG$ — правая топологическая полугруппа, состоящая из всех $f \in \beta_G X^{\beta_G X}$, удовлетворяющих свойству монотонности*:

$$\forall a, b, c \in \beta_G X\ [fa, fb, fc] \implies [a, b, c].$$

*$bG$ не является полутопологической полугруппой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in bG$. Допустим, что $f : \beta_G X \to \beta_G X$ не является монотонным, т. е. $\exists a, b, c \in \beta_G X : [fa, fb, fc] \wedge [a, c, b]$. Так как $[fa, fb, fc]$, то существуют попарно непересекающиеся окрестности $U_1, U_2, U_3$ точек $fa, fb, fc$ соответственно, такие что $[y_1, y_2, y_3]$ для всех $y_1 \in U_1, y_2 \in U_2, y_3 \in U_3$. Тогда $f \in O = \{g \in \beta_G X^{\beta_G X} \mid ga \in U_1, gb \in U_2, gc \in U_3\}$ — открыто в $\beta_G X^{\beta_G X}$. Но $G \cap O = \varnothing$. Действительно, пусть $g \in G \cap O$. Так как $[a, c, b]$ и $g \in G$, то $[ga, gc, gb]$. Так как $g \in O$, то $[ga, gb, gc]$ — противоречие. Следовательно, $G \cap O = \varnothing$. Тогда $f \notin bG$. Полученное противоречие показывает, что каждое $f \in bG$ монотонно.

Пусть теперь отображение $f : \beta_G X \to \beta_G X$ монотонно. Покажем, что $f \in bG$. Рассмотрим произвольную окрестность $O \ni f$ в пространстве $\beta_G X^{\beta_G X}$. Достаточно доказать, что $G \cap O \neq \varnothing$. Можно считать, что $O = \{g \in \beta_G X^{\beta_G X} \mid gx_1 \in U_1, \ldots, gx_n \in U_n\}$, где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — цикл в $\beta_G X$, для каждого $i$ $U_i$ — интервал, содержащий $fx_i$, причем (1) $U_i \cap U_j = \varnothing$, если $fx_i \neq fx_j$, и (2) $U_i = U_j$, если $fx_i = fx_j$.

Так как $f$ монотонно, то для различных множеств $U_i, U_j, U_k$ и произвольных точек $z_i \in U_i, z_j \in U_j, z_k \in U_k$, где $i < j < k$, имеем $[z_i, z_j, z_k]$. Так как $X$ всюду плотно в $\beta_G X$, то каждое из множеств $U_i \cap X$ бесконечно. Тогда существует цикл $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ в $X$ такой, что для каждого $i$ $y_i \in U_i$. В силу ультратранзитивности действия $G \curvearrowright X$ существует $g \in G$ со свойством $gx_i = y_i$ для каждого $i$. Тогда $g \in O$. Следовательно, $G \cap O \neq \varnothing$.

Доказано, что для отображение $f : \beta_G X \to \beta_G X$ является монотонным тогда и только тогда, когда $f \in bG$. Так как $bG$ есть замыкание $G$ в произведении $\beta_G X^{\beta_G X}$, то $bG$ — обертывающая полугруппа Эллиса, которая является правой топологической полугруппой (см. [3, § 1.2]). Первая часть теоремы доказана.

Покажем, что $bG$ не является полутопологической полугруппой.

Фиксируем различные $a, b \in \beta_G X$. Разобьем $\beta_G X$ на два полуинтервала: $\beta_G X = [a, b) \cup [b, a)$. Определим $f(x) = a\ \forall x \in [a, b)$ и $f(x) = b\ \forall x \in [b, a)$. Полученное отображение $f : \beta_G X \to \beta_G X$ является монотонным, поэтому по теореме 3 $f \in bG$. Покажем, что умножение на $f$ слева $p_f : bG \to bG : g \mapsto fg$ не является непрерывным. Имеем $p_f(f) = f$. Пусть $U$ — окрестность $a$, не содержащая $b$. Тогда $f \in O = \{g \in bG \mid ga \in U\}$ открыто. Для любой окрестности $W \ni f$

существует $g \in W$ такое, что $ga \in [b, a)$. Тогда $p_f(g)(a) = b \notin U$. То есть $p_f(W) \not\subset O$. Таким образом, $p_f$ разрывно в точке $f$.

Теорема доказана.

Так как $\nu$ является равномерностью на $G$ как на подпространстве в $\beta_G X^{\beta_G X}$, то ее базу образуют покрытия $\sigma_{\overline{x}}^{\overline{z}} = \{\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_{\overline{x}} f St_{z_i} \mid f \in G\}$, где $\overline{x}$ — цикл в $X$, $\overline{z}$ — цикл в $\beta_G X$.

**Предложение 9.** $bG \neq \widetilde{G}^{\mathcal{L}\wedge\mathcal{R}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $bG = \widetilde{G}^{\nu}$, то из равенства $bG = \widetilde{G}^{\mathcal{L}\wedge\mathcal{R}}$ следует, что ограничение на $G$ единственной равномерности на компакте $bG$ совпадает с Roelcke-равномерностью (т. е. $\nu = \mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$). Поэтому достаточно показать, что $\nu \neq \mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$. Покажем, что $\nu \setminus \mathcal{L} \wedge \mathcal{R} \neq \varnothing$. Так как $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, то достаточно показать, что $\nu \setminus \mathcal{L} \neq \varnothing$. Рассмотрим покрытие $\sigma_{\overline{x}}^{\overline{x}} = \{\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_{\overline{x}} f St_{x_i} \mid f \in G\} \in \nu$, где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — цикл в $X$. Фиксируем произвольный цикл $\overline{y}$ в $X$. Достаточно доказать, что покрытие $\lambda_{\overline{y}} = \{f O_{\overline{y}} \mid f \in G\} \in \mathcal{L}$ не вписано в $\sigma_{\overline{x}}^{\overline{x}}$. Можно считать, что $\overline{x}$ содержится в $\overline{y}$, $x_1 = y_1$ и $y_2 \in (x_1, x_2)$. Фиксируем $a \in (y_1, y_2) \cap X$. В силу ультратранзитивности действия $G \curvearrowright (X, R)$ имеем: (1) существует $f \in G$ такое, что $fx_1 = x_1$, $fa = x_3$; (2) существует $t \in O_{\overline{y}}$ такое, что $ty_1 = a$. Пусть $g = ft \in fO_{\overline{y}}$. Тогда $gx_1 = gy_1 = fty_1 = fa = x_3$. Следовательно, $g \notin \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_{\overline{x}} f St_{x_i}$, так как иначе $g \in O_{\overline{x}} f St_{x_1}$ и для некоторого $s \in O_{\overline{x}}$ выполнено $gx_1 = sfx_1 = sx_1 \in (x_n, x_2)$ — противоречие с $gx_1 = x_3$. То есть $fO_{\overline{y}} \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_{\overline{x}} f St_{x_i} \neq \varnothing$. Значит, $\lambda_{\overline{y}}$ не вписано в $\sigma_{\overline{x}}^{\overline{x}}$.

Предложение доказано.

Пусть задано действие $\alpha : G \times X \to X$ группы $G$ на множестве $X$. Тогда для каждого натурального $n$ определено *диагональное действие* $\alpha^n : G \times X^n \to X^n$, задаваемое соотношением $\forall g \in G\ \forall x_1, \ldots, x_n \in X\ \alpha^n(g, (x_1, \ldots, x_n)) = (\alpha(g, x_1), \ldots, \alpha(g, x_n))$. Действие $\alpha : G \times X \to X$ называется *олигоморфным*, если для каждого натурального $n$ диагональное действие $\alpha^n : G \times X^n \to X^n$ имеет конечное число орбит [7].

П р и м е р 2. Через $S$ обозначим окружность — отрезок $[0, 1]$ в евклидовой топологии с отождествленными концами. Через $\mathbb{Q}$ обозначим подпространство всех рациональных чисел на $S$. Циклический порядок на $S$ задается обходом против часовой стрелки. Отношение порядка наследуется подмножеством $\mathbb{Q}$. Положим $G = (\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, R), \tau_p)$. Легко видеть, что действие $G \curvearrowright \mathbb{Q}$ ультратранзитивно. Тогда это действие олигоморфно, поэтому по [7, теорема 3.3] группа $G$ Roelcke-предкомпактна в перестановочной топологии $\tau_\partial$. Так как $\tau_\partial > \tau_p$, то $G$ Roelcke-предкомпактна в топологии поточечной сходимости.

По теореме 2 $\mathbb{Q}$ является $G$-пространством. По предложению 6 максимальная эквивариантная компактификация $\mathbb{Q}$ — окружность: $\beta_G \mathbb{Q} = S$. Из теоремы Кантора (каждое счетное плотное линейно упорядоченное множество без наибольшего и наименьшего элементов изоморфно $(\mathbb{Q}, <)$) следует посылка предложения 8 (стабилизаторы щелей действуют ультратранзитивно), следовательно, $S$ — единственная эквивариантная компактификация $\mathbb{Q}$. По теореме 3 $bG$ является правой топологической полугруппой, состоящей из всех монотонных отображений $S \to S$. По предложению 9 $bG$ отлична от Roelcke-компактификации группы $G$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brook R.B.** A construction of the greatest ambit // Math. Syst. Theory. 1970. Vol. 4, no. 3. P. 243–248. https://doi.org/10.1007/BF01691107
2. **Berglund J.F., Junghenn H.D., Milnes P.** Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity. Berlin; Heidelberg: Springer, 1978. 243 p. https://doi.org/10.1007/BFb0061381

3. **Kozlov K.L., Sorin B.V.** Enveloping Ellis semigroups as compactifications of transformations groups. 2024. 30 p. URL: `https://arxiv.org/abs/2412.04281`. https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.04281
4. **Ellis R.** A semigroup associated with a transformation group // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 94. P. 272–281. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1960-0123636-3
5. **Tararin V.M.** On $c-3$-transitive automorphism groups of cyclically ordered sets // Math. Notes. 2002. Vol. 71, no. 1. P. 110–117. https://doi.org/10.1023/A:1013934509265
6. **Sorin G.B.** Lattices of extensions of cyclically ordered sets and compactifications of generalized cyclically ordered spaces // Math. Notes. 2024. Vol. 116, no. 4. P. 763–776. https://doi.org/10.1134/S0001434624090335
7. **Sorin B.V.** The roelcke precompactness and compactifications of transformations groups of discrete spaces and homogeneous chains. 2024. 24 p. URL: `https://arxiv.org/abs/2310.18570`. https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.18570
8. **Ovchinnikov S.** Topological automorphism group of chains // Mathwear and Soft Comp. 2001. Vol. 8, no. 1. P. 47–60. URL: `http://eudml.org/doc/39188`
9. **Sorin B.V.** Compactifications of homeomorphism groups of linearly ordered compacta // Math Notes. 2022. Vol. 112, no. 1. P. 126–141. https://doi.org/10.1134/S0001434622070148
10. **Glasner E., Megrelishvili M.** Circular orders, ultra-homogeneous order structures and their automorphism groups // Contemp. Math. 2021. Vol. 772. P. 133–154. `https://arxiv.org/abs/1803.06583`. https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.06583
11. **Engelking R.** General topology. Warsaw: PWN, 1977. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
12. **Roelcke W., Dierolf S.** Uniform structures on topological groups and their quotients. NY: McGraw-Hill Inc., 1981. 276 p. ISBN-10: 0070534128 .
13. **Novák V.** Cuts in cyclically ordered sets // Czech. Math. J. 1984. Vol. 34, no. 2. P. 322–333. https://doi.org/10.21136/CMJ.1984.101955
14. **Megrelishvili M.** Orderable groups and semigroup compactifications // Monatsh Math. 2023. Vol. 200. P. 903–932. https://doi.org/10.1007/s00605-022-01787-x
15. **Megrelishvili M.G.** Equivariant completions and bicompact extensions // Commun. Acad. Sci. Georgian SSR. 1984. Vol. 115, no. 1. P. 21–24 (in Russian).
16. **Megrelishvili M.** Equivariant completions // Comment. Math. Univ. Carolin. 1994. Vol. 35, no. 3. P. 539–547. URL: `http://eudml.org/doc/247581`
17. **Arhangel'skii A.V., Tkachenko M.G.** Topological groups and related structures. Paris: Atlantis Press, World Sci. Publ., 2008. 781 p. https://doi.org/10.2991/978-94-91216-35-0
18. **Kozlov K.L.** Uniform equicontinuity and groups of homeomorphisms // Topol. Appl. 2022. Vol. 311, art. no. 107959. https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107959
19. **Chatyrko V.A., Kozlov K.L.** The maximal $G$-compactifications of $G$-spaces with special actions // Proc. Ninth Prague Topological Symposium. (Prague, 2001). Toronto: Topology Atlas, 2002. P. 15–21. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0204118

Поступила 23.12.2024
После доработки 20.02.2025
Принята к публикации 24.02.2025

Сорин Георгий Борисович
аспирант
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
г. Москва
e-mail: georgsorin@yandex.ru

## REFERENCES

1. Brook R.B. A construction of the greatest ambit. *Math. Syst. Theory*, 1970, vol. 4, no. 3, pp. 243–248. https://doi.org/10.1007/BF01691107
2. Berglund J.F., Junghenn H.D., Milnes P. *Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity.* Berlin, Heidelberg, Springer, 243 p. 1978. https://doi.org/10.1007/BFb0061381

3. Kozlov K.L., Sorin B.V. *Enveloping Ellis semigroups as compactifications of transformations groups*. 2024. 30 p. Available at: `https://arxiv.org/abs/2412.04281`. https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.04281
4. Ellis R. A semigroup associated with a transformation group. *Trans. Amer. Math. Soc.*,1960, vol. 94, pp. 272–281. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1960-0123636-3
5. Tararin V.M. On $c-3$-transitive automorphism groups of cyclically ordered sets. *Math. Notes*, 2002, vol. 71, no. 1, pp. 110–117. https://doi.org/10.1023/A:1013934509265
6. Sorin G.B. Lattices of extensions of cyclically ordered sets and compactifications of generalized cyclically ordered spaces. *Math. Notes*, 2024, vol. 116, no. 4, pp. 763–776. https://doi.org/10.1134/S0001434624090335
7. Sorin B.V. *The roelcke precompactness and compactifications of transformations groups of discrete spaces and homogeneous chains*. URL: `https://arxiv.org/abs/2310.18570`. https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.18570
8. Ovchinnikov S. Topological automorphism group of chains. *Mathwear and Soft Comp.*, 2001, vol. 8, no. 1, pp. 47–60. Available at: http://eudml.org/doc/39188 .
9. Sorin B.V. Compactifications of homeomorphism groups of linearly ordered compacta. *Math Notes*, 2022, vol. 112, no. 1, pp. 126–141. https://doi.org/10.1134/S0001434622070148
10. Glasner E., Megrelishvili M. *Circular orders, ultra-homogeneous order structures and their automorphism groups. Contemp. Math.*, 2021, vol. 772, pp. 133–154. `https://arxiv.org/abs/1803.06583`. https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.06583
11. Engelking R. *General topology*, Warsaw, PWN, 1977. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
12. Roelcke W., Dierolf S. *Uniform structures on topological groups and their quotients*. NH, McGraw-Hill Inc., 1981, 276 p. ISBN-10: 0070534128 .
13. Novák V. Cuts in cyclically ordered sets. *Czech. Math. J.*, 1984, vol. 34, no. 2, pp. 322–333. https://doi.org/10.21136/CMJ.1984.101955
14. Megrelishvili M. Orderable groups and semigroup compactifications. *Monatsh Math.*, 2023, vol. 200, pp. 903–932. https://doi.org/10.1007/s00605-022-01787-x
15. Megrelishvili M.G. Equivariant completions and bicompact extensions. *Commun. Acad. Sci. Georgian SSR*, 1984, vol. 115, no. 1, pp. 21–24 (in Russian).
16. Megrelishvili M. Equivariant completions. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1994, vol. 35, no. 3, pp. 539–547. Available at: http://eudml.org/doc/247581
17. Arhangel'skii A.V., Tkachenko M.G. *Topological groups and related structures*. Paris, Atlantis Press, World Sci. Publ., 2008, 781 p. https://doi.org/10.2991/978-94-91216-35-0
18. Kozlov K.L. Uniform equicontinuity and groups of homeomorphisms. *Topol. Appl.*, 2022, vol. 311, art. no. 107959. https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107959
19. Chatyrko V.A., Kozlov K.L. The maximal $G$-compactifications of $G$-spaces with special actions. In: *Proc. Ninth Prague Topological Symposium*, (Prague, 2001), Topology Atlas, Toronto, 2002, pp. 15–21. https://doi.org/0.48550/arXiv.math/0204118

Received December 23, 2024
Revised February 20, 2025
Accepted February 24, 2025

**Funding Agency:** The paper was published with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no.075-15-2022-284.

*Georgii Borisovich Sorin,* doctoral student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: georgsorin@yandex.ru .

Cite this article as: G. B. Sorin. Ellis uniformities on ultratransitive groups of automorphisms of cyclically ordered spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 185–198 .