

УДК 512.54.03, 515.122.4, 515.123.4, 512.562

**О ROELCKE-ПРЕДКОМПАКТНОСТИ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ ОБЩИХ  
ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ****Б. В. Сорин**

Устанавливается (топологическая) изоморфность группы автоморфизмов однородного линейно упорядоченного множества  $X$  и (топологического) сплетения групп автоморфизмов регулярного промежутка  $J$  и факторпространства  $X/J$ . Дана характеристика Roelcke-предкомпактности групп автоморфизмов общих линейно упорядоченных множеств. Установлена эквивалентность Roelcke-предкомпактности группы автоморфизмов общего линейно упорядоченного множества в перестановочной топологии и топологии поточечной сходимости при наличии простого собственного регулярного промежутка.

Ключевые слова: Roelcke-предкомпактность, однородное линейно упорядоченное множество, группа автоморфизмов, сплетение групп.

**B. V. Sorin. On Roelcke precompactness of automorphism groups of general chains.** The (topological) isomorphism of the automorphism group of a homogeneous chain  $X$  and the (topological) wreath product of automorphism groups of a regular interval  $J$  with respect to the group of automorphisms of the quotient space  $X/J$  is established. A characterization of the Roelcke-precompactness of automorphism groups of general chains is given. The equivalence of the Roelcke precompactness of the automorphism group of a general chain in permutation topology and pointwise convergence topology in the presence of a simple proper regular interval is established.

Keywords: Roelcke precompactness, homogeneous chains, automorphisms group, wreath product.

**MSC:** 06A06, 20B35, 22A05, 54H15, 54E15

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2025-31-1-175-184

**1. Введение**

Понятие Roelcke-предкомпактных групп введено W. Roelcke в [1]. Roelcke-предкомпактность группы — вполне ограниченность наибольшей нижней грани правой и левой равномерностей на топологической группе — достаточно слабое свойство, присущее многим интересным топологическим группам [2]. При этом условии Roelcke-предкомпактности групп предоставляет возможность распространить на них многие результаты, справедливые для компактных групп. В [3] исследование Roelcke-предкомпактности группы связывается с задачей оценки в некотором смысле ее “малости”. Также Roelcke-равномерность имеет достаточно простое описание, что удобно при проведении исследований. Среди последних результатов отметим работу Т. Tsankov [4], в которой охарактеризованы (польские) Roelcke-предкомпактные группы перестановок (в перестановочной топологии) счетных дискретных пространств как пределы обратных спектров олигоморфных групп. В [5] даны равномерная характеристика олигоморфности и распространение характеристики из [4] на группы перестановок произвольных дискретных пространств.

Roelcke-предкомпактность группы сохраняющих порядок гомеоморфизмов отрезка в компактно-открытой топологии (совпадающей с топологией поточечной сходимости) установлена в [6]. В [7; 8] доказано, что топология поточечной сходимости является допустимой групповой топологией для групп автоморфизмов линейно упорядоченных множеств. Данное обстоятельство позволяет изучать вопрос Roelcke-предкомпактности группы преобразований в перестановочной топологии и топологии поточечной сходимости. Roelcke-предкомпактность ультратранзитивных подгрупп группы автоморфизмов ультраоднородных линейно упорядоченных (и циклических) множеств в перестановочной топологии доказана в [9, предложение 6.6].

В [5] показано, что для простых линейно упорядоченных множеств Roelcke-предкомпактность группы автоморфизмов однородного линейно упорядоченного множества в перестановочной топологии равносильна ее Roelcke-предкомпактности в топологии поточечной сходимости и зависит от свойств однородности множества. Если линейно упорядоченное множество жесткое, то его группа автоморфизмов не Roelcke-предкомпактна, если 2-однородно (эквивалентно ультраоднородно), то Roelcke-предкомпактна.

В работе проводится исследование Roelcke-предкомпактности групп преобразований общих однородных линейно упорядоченных множеств, использующее связь структуры линейного упорядоченного множества со структурой его группы автоморфизмов. Структура однородных линейно упорядоченных множеств рассмотрена Т. Ohkuma в [10]. Изучение структур групп автоморфизмов начато в [8].

В разд. 2 представлены необходимые основные сведения и факты из теории однородных линейно упорядоченных множеств, свойств Roelcke-предкомпактности групп, вводится групповая топология на сплетении групп (*wreath product*), устанавливается (топологическая) изоморфность группы автоморфизмов однородного линейно упорядоченного множества  $X$  и (топологического) сплетения групп автоморфизмов регулярного промежутка  $J$  и факторпространства  $X/J$  (теорема 1). В предложении 4 дано достаточное условие Roelcke-предкомпактности топологического сплетения групп.

Основным результатом является теорема 2 разд. 3, в которой дана характеристика Roelcke-предкомпактности групп автоморфизмов общих линейно упорядоченных множеств с использованием редукции. Она позволяет положительно решить вопрос об эквивалентности Roelcke-предкомпактности группы автоморфизмов общего линейно упорядоченного множества в перестановочной топологии и топологии поточечной сходимости при наличии простого собственного регулярного промежутка (следствие 1). Приводимые примеры демонстрируют возможности применения полученного результата.

Рассматриваются бесконечные множества, топологические пространства — тихоновские. Используются терминология и обозначения из работ [11] и [1]:  $\mathbb{N}$  — натуральные числа,  $\mathbb{Z}$  — целые числа,  $\mathbb{Q}$  — рациональные,  $\mathbb{R}$  — действительные числа,  $N_G(e)$  — семейство открытых окрестностей единицы топологической группы  $G$ . Левое действие элемента  $g$  группы на точку  $x$  обозначается как  $gx$  или  $g(x)$ . Равенство (топологических) групп означает их (топологическую) изоморфность.

Автор благодарен профессору К. Л. Козлову за многочисленные полезные обсуждения, связанные с темой статьи.

## 2. Предварительные сведения

### 2.1. Однородные линейно упорядоченные множества

Если  $X$  и  $Y$  — линейно упорядоченные множества, то через  $X \otimes_{\ell} Y$  обозначается их *произведение*  $X \times Y$  с лексикографическим порядком, через  $X \diamond Y$  — их *конкатенация* (на дизъюнктном объединении  $X$  и  $Y$  линейный порядок следующий:  $x < y$ , если  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , ограничения линейного порядка на  $X$  и  $Y$  совпадают с линейными порядками на  $X$  и  $Y$  соответственно).

Подмножество  $Y$  линейно упорядоченного множества  $X$  называется *промежутком* (*выпуклым множеством*), если для любых  $x \leq y \in Y$  и  $x \leq z \leq y \implies z \in Y$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $X$  — линейно упорядоченное множество,  $\text{Aut}(X)$  — группа сохраняющих порядок биекций (автоморфизмов)  $X$ .

Множество  $X$  называется *однородным линейно упорядоченным множеством*, если действие  $\text{Aut}(X) \curvearrowright X$  транзитивно (т.е. для любых  $x, y \in X$  существует  $f \in \text{Aut}(X)$  такой, что  $f(x) = y$ ).

**Факты 1.** (1) Однородное линейно упорядоченное множество или одноточечно, или бесконечно.

(2) Однородное линейно упорядоченное множество  $X$  или *дискретно* (для любого  $x \in X$  существует  $x^+$ ,  $x < x^+$ , и  $(x, x^+) = \emptyset$  [12]; такие множества рассмотрены в [13]), или *плотно* (для любых  $x < y \in X$  существует  $z \in (x, y)$  [12]).

**О п р е д е л е н и е 2.** (i) Промежуток  $J$  однородного линейно упорядоченного множества  $X$  называется *регулярным* [10, определение 5] (или *о-блоком* [14; 15]), если

$$\forall x, y \in J, \forall g \in \text{Aut}(X) ((gx \in J) \implies (gy \in J)).$$

(ii) Однородное линейно упорядоченное множество  $X$  называется *простым* [10, определение 6], если в  $X$  нет собственных регулярных промежутков (несобственные — или точки, или все  $X$ ). Группа  $\text{Aut}(X)$  в этом случае называется *о-примитивной* [14].

(iii) Однородное линейно упорядоченное множество, не являющееся *простым*, будем (в работе) называть *общим*.

(iv) Линейно упорядоченное множество  $X$  называется *2-однородным*, если для любых пар точек  $x < y$  и  $x' < y'$  существует  $g \in \text{Aut}(X)$  такой, что  $g(x) = x'$ ,  $g(y) = y'$ . Группа  $\text{Aut}(X)$  в этом случае называется *о-2-транзитивной* [14; 15].

(v) Однородное линейно упорядоченное множество  $X$  называется *жестким* (*rigid*) [16] (или *имеющим единственный автоморфизм* [10, определение 4]), если для любых  $x, y \in X$  существует единственный  $g \in \text{Aut}(X)$  такой, что  $g(x) = y$ . Группа  $\text{Aut}(X)$  в этом случае называется *регулярной* или *однозначно транзитивной* [16].

**Факты 2.** (1) 2-однородное линейно упорядоченное множество плотное.

(2) 2-однородное линейно упорядоченное множество является *ультраоднородным* [14, лемма 4.2] (см, также [7]), т. е. для любых семейств различных  $n$  точек  $x_1 < \dots < x_n$  и  $y_1 < \dots < y_n$  существует  $g \in \text{Aut}(X)$  такой, что  $g(x_k) = y_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(3) Собственный регулярный промежуток  $J$  однородного линейно упорядоченного множества  $X$  является однородным линейно упорядоченным множеством. Группа  $\text{Aut}(J)$  (любой автоморфизм  $J$  продолжается до автоморфизма  $X$ , совпадающего с тождественным отображением на  $X \setminus J$ ) называется *характеристической группой  $J$*  [10, п. (3.1)].

(4) Если  $J$  — регулярный промежуток, то отношение эквивалентности

$$x \sim_J y \iff \forall g \in \text{Aut}(X) ((g(x) \in J) \implies (g(y) \in J))$$

определяет однородное линейно упорядоченное множество  $X/J = X/ \sim_J$ , классы эквивалентности линейно изоморфны [10, § 4] и  $X = X/J \otimes_\ell J$  (точке  $x \in X$  соответствует точка  $(J_x, t_x) \in X/J \otimes_\ell J$ ,  $J_x \in X/J$  — класс эквивалентности точки  $x$  относительно  $\sim_J$ ), где  $X/J$  — однородное линейно упорядоченное множество [10, теорема 7] (см. также [15]).

(5) Для однородного линейно упорядоченного множества  $X$  следующие условия эквивалентны [10, п. 2, п. 3.5] и [14; 17]:

- $X$  простое,
- $X$  или 2-однородно, или жестко.

Однородное *непрерывное* [12] линейно упорядоченное множество  $X$  является простым [10, § 3.1]. Из описания жестких множеств (см., например, [16]) следует, что оно 2-однородно.

**З а м е ч а н и е 1.** Собственный регулярный промежуток  $J$  является открыто-замкнутым подмножеством *линейно упорядоченного пространства*  $(X, \tau)$  ( $\tau$  — топология линейного порядка на  $X$ ) [10, теорема 7] и, следовательно, *обобщенного линейно упорядоченного пространства*  $(X, \tau_d)$  ( $\tau_d$  — дискретная топология на  $X$ ).

## 2.2. Топологизация группы преобразований

Действие группы  $G$  на множестве  $X$  называется *эффективным* (или *точным*), если ядро действия  $\{g \in G \mid g(x) = x, \forall x \in X\}$  — единица  $G$ . Если  $G$  эффективно действует на  $X$ , то  $G \subset S(X)$ , где  $S(X)$  — группа всех биекций  $X$ .

*Стабилизатор* точек  $x_1, \dots, x_n$

$$\text{St}_{x_1, \dots, x_n} = \{g \in G \mid g(x_i) = x_i, i = 1, \dots, n\}$$

является подгруппой группы  $G$ .

Если  $X$  — топологическое пространство,  $\text{Hom}(X)$  — группа его гомеоморфизмов, то группа  $G$  эффективно действует на пространстве  $X$ , при условии, что  $G \subset \text{Hom}(X)$ . Если  $X$  — дискретное пространство, то  $\text{Hom}(X) = S(X)$ .

*Допустимой групповой топологией* [18] на группе  $G$ , эффективно действующей на топологическом пространстве  $X$ , называется топология, в которой группа является топологической группой и ее действие  $G \curvearrowright X$  непрерывно.

Для эффективного действия группы  $G$  на дискретном пространстве  $X$  *перестановочная топология*  $\tau_\partial$ , предбазу окрестностей единицы которой образуют открыто-замкнутые подгруппы — стабилизаторы точек, является наименьшей допустимой групповой топологией. Группа  $G$  в перестановочной топологии *неархимедова* (базу окрестностей единицы образуют открыто-замкнутые подгруппы).

Если *топология поточечной сходимости*  $\tau_p$  (предбазу образуют множества вида  $[x, O] = \{f \in G \mid f(x) \in O\}$ ,  $O$  открыто в  $X$ ) является допустимой групповой топологией на группе  $G$  гомеоморфизмов пространства  $X$ , действующей эффективно, то она является наименьшей допустимой групповой топологией [19, лемма 3.1],  $\tau_\partial \geq \tau_p$ ,  $\tau_\partial$  — допустимая групповой топологией и  $\tau_\partial = \tau_p$ , если  $X$  — дискретное пространство.

Если  $X$  — однородное линейно упорядоченное множество, то элементы группы  $\text{Aut}(X)$  являются гомеоморфизмами линейно упорядоченного пространства  $(X, \tau)$  и обобщенного линейно упорядоченного пространства  $(X, \tau_d)$ .

**Предложение 1** [5, предложение 1.10; 8]. Пусть  $X$  — однородное линейно упорядоченное множество.

(1) На группе  $\text{Aut}(X)$  топология поточечной сходимости  $\tau_p$  является наименьшей допустимой групповой топологией для действия  $\text{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau)$ . Топология  $\tau_\partial$  является допустимой групповой топологией, и  $\tau_\partial \geq \tau_p$ . Если  $X$  дискретно, то  $\tau_\partial = \tau_p$ .

(2) На группе  $\text{Aut}(X)$  перестановочная топология  $\tau_\partial$  является наименьшей допустимой групповой топологией для действия  $\text{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau_d)$ .

Пусть  $(\text{Aut}(X), \tau_\partial)$  — подгруппа  $(S(X), \tau_\partial)$ .

## 2.3. Roelcke-равномерность на топологической группе

Необходимые сведения о *Roelcke-равномерности*  $L \wedge R$  на группе  $G$  (наибольшей нижней грани правой  $R$  и левой  $L$  равномерностей) изложены в [1]. Базу Roelcke-равномерности образуют покрытия  $\{OgO \mid g \in G\}$ ,  $O \in N_G(e)$ , где  $N_G(e)$  — семейство открытых окрестностей единицы  $e$  группы  $G$ . Группа  $G$  *Roelcke-предкомпактна*, если Roelcke-равномерность вполне ограничена. Напомним основные свойства Roelcke-предкомпактности топологических групп.

**Факты 3.** (1) Всюду плотная подгруппа  $H$  группы  $G$  Roelcke-предкомпактна в том и только в том случае, если группа  $G$  Roelcke-предкомпактна [1, предложение 3.24] и [4, предложение 2.2]. Более того, Roelcke-компактификации  $H$  и  $G$  изоморфны [11, следствие 8.3.11].

(2) Открытая подгруппа Roelcke-предкомпактной группы Roelcke-предкомпактна [1, предложение 3.24].

(3) Непрерывный гомоморфный образ Roelcke-предкомпактной группы — Roelcke-предкомпактная группа [4, предложение 2.2].

(4) Если нормальная подгруппа  $H$  и факторгруппа  $G/H$  группы  $G$  Roelcke-предкомпактны, то группа  $G$  Roelcke-предкомпактна [4, предложение 2.2].

(5) Предел обратного спектра из Roelcke-предкомпактных групп и гомоморфизмов Roelcke-предкомпактен [4, предложение 2.2].

(6) Произведение топологических групп Roelcke-предкомпактно в том и только в том случае, если сомножители — Roelcke-предкомпактные группы [1, предложение 3.35].

Если на группе  $G$  даны две групповые топологии  $\sigma \leq \tau$ , то из задания баз Roelcke-равномерностей следует, что  $(L \wedge R)_\sigma \subset (L \wedge R)_\tau$  для равномерностей на группе в соответствующих топологиях.

Можно записать известные результаты в виде следующих предложений.

**Предложение 2** [5, следствие 1.2, замечание 1.3]. *Если  $(G, \tau_\partial)$  Roelcke-предкомпактна, то  $(G, \tau_p)$  Roelcke-предкомпактна.*

*Если  $(G, \tau_p)$  не Roelcke-предкомпактна, то группа  $G$  в любой допустимой групповой топологии также не Roelcke-предкомпактна.*

*Из Roelcke-предкомпактности  $(G, \tau_p)$ , вообще говоря, не следует Roelcke-предкомпактность  $(G, \tau_\partial)$ .*

**Предложение 3** [5, следствие 3.6]. *Пусть  $X$  — простое линейно упорядоченное множество. Тогда*

- (1)  $X$  жестко  $\iff$  группа  $\text{Aut}(X)$  не является Roelcke-предкомпактной в любой допустимой групповой топологии, при действии на соответствующем  $X$  однородном обобщенном линейно упорядоченном пространстве.
- (2)  $X$  2-однородно  $\iff$  группа  $(\text{Aut}(X), \tau_\partial)$  Roelcke-предкомпактна  $\iff$  группа  $(\text{Aut}(X), \tau_p)$  Roelcke-предкомпактна.
- (3) Группа  $(\text{Aut}(X), \tau_\partial)$  Roelcke-предкомпактна в том и только в том случае, если группа  $(\text{Aut}(X), \tau_p)$  Roelcke-предкомпактна.

## 2.4. Сплетение групп (wreath product)

Пусть  $G$  — группа,  $H$  — подгруппа группы перестановок  $S(X)$  множества  $X$  (определено действие  $H \curvearrowright X$ ). Корректно определено действие  $H$  на группе  $G^X$  (перестановка координат в произведении):

$$(h\varphi)(x) = \varphi(h^{-1}x), \quad x \in X, \quad \text{где } h \in H, \varphi \in G^X. \quad (Wr)$$

Сплетением групп  $G \text{Wr}_X H$  (также используется обозначение  $G \wr_X H$ )  $G$  и  $H$  называется полупрямое произведение  $G^X \rtimes H$  групп  $G^X$  и  $H$ .

Если  $G$  — топологическая группа, топологическая группа  $G^X$  — тихоновское произведение групп  $G$ , группа  $H$  — в перестановочной топологии (при действии  $H \curvearrowright X$ ), то действие  $H \curvearrowright G^X$ , определенное в  $(Wr)$ , непрерывно и топологическое полупрямое произведение  $G^X \rtimes H$  является топологической группой [1, предложение-определение 6.15].

Сплетение групп  $G \text{Wr}_X H$  с топологией произведения  $G^X \times H$  топологических групп  $G^X$  и  $H$  назовем *топологическим сплетением групп* и будем обозначать через  $G \text{Wr}_X^\tau H$ . Если  $X$  — линейно упорядоченное множество и  $H = \text{Aut}(X)$ , то индекс  $X$  здесь будем опускать:  $G \text{Wr}^\tau H$ .

**Теорема 1.** *Пусть  $J$  — собственный регулярный промежуток однородного линейно упорядоченного множества  $X$ . Тогда*

- (1)  $\text{Aut}(X) = \text{Aut}(J) \text{Wr} \text{Aut}(X/J)$ ;

- (2)  $(\text{Aut}(X), \tau_p) = (\text{Aut}(J), \tau_p) \text{Wr}^\tau (\text{Aut}(X/J), \tau_\partial)$ ;  
(3)  $(\text{Aut}(X), \tau_\partial) = (\text{Aut}(J), \tau_\partial) \text{Wr}^\tau (\text{Aut}(X/J), \tau_\partial)$ ;  
(4)  $(\text{Aut}(X), \tau_p)/(\text{Aut}(J), \tau_p)^{X/J} = (\text{Aut}(X), \tau_\partial)/(\text{Aut}(J), \tau_\partial)^{X/J} = (\text{Aut}(X/J), \tau_\partial)$ ;  
(5) действие  $\text{Aut}(J) \text{Wr} \text{Aut}(X/J) \curvearrowright X/J \otimes_\ell J$  задается правилом

$$((g_\iota)_{\iota \in X/J}, h), (J_x, t_x) \rightarrow (hJ_x, g_{hJ_x} t_x), \quad (g_\iota)_{\iota \in X/J} \in \text{Aut}(J)^{X/J}, \quad h \in \text{Aut}(X/J). \quad (\star)$$

Действия  $(\text{Aut}(J), \tau_p) \text{Wr}^\tau (\text{Aut}(X/J), \tau_\partial) \curvearrowright (X = X/J \otimes_\ell J, \tau_p)$  и

$$(\text{Aut}(J), \tau_\partial) \text{Wr}^\tau (\text{Aut}(X/J), \tau_\partial) \curvearrowright (X = X/J \otimes_\ell J, \tau_\partial),$$

определяемые правилом  $(\star)$ , непрерывны.

**Доказательство.** Утверждения (1) и (2) являются переформулировкой теоремы 8 из [8], использующей инвариантность отношения  $\sim_J$  относительно автоморфизмов (см. также [20], где фактически доказано утверждение (1), и [15, § 6]).

В [8, теорема 8] определен изоморфизм групп

$$k : \text{Aut}(J) \text{Wr} \text{Aut}(X/J) \rightarrow \text{Aut}(X)$$

такой, что  $k((g_\iota)_{\iota \in X/J}, h)(J_x, t_x) = (hJ_x, g_{hJ_x} t_x)$ , где  $(g_\iota)_{\iota \in X/J} \in \text{Aut}(J)^{X/J}$ ,  $h \in \text{Aut}(X/J)$  и  $(J_x, t_x) \in X/J \otimes_\ell J$ . Проверим, что изоморфизм групп  $k$  корректно определяет действие  $(\star)$  из п. (5).

Элемент  $(e_{\text{Aut}(J)^{X/J}} = (e_\iota)_{\iota \in X/J}, e_{X/J})$ , где  $e_\iota$  — единица группы  $\text{Aut}(J)$ ,  $\iota \in X/J$ ,  $e_{X/J}$  — единица группы  $\text{Aut}(X/J)$ , является единицей группы  $\text{Aut}(J) \text{Wr} \text{Aut}(X/J)$ . Очевидно, что  $k(e_{\text{Aut}(J)^{X/J}}, e_{X/J})(J_x, t_x) = (J_x, t_x)$  для любой точки  $(J_x, t_x) \in X/J \otimes_\ell J$ .

Для  $g, h \in \text{Aut}(X/J)$ ,  $\varphi = (\varphi_\iota)_{\iota \in X/J}$ ,  $\psi = (\psi_\iota)_{\iota \in X/J} \in \text{Aut}(J)^{X/J}$  и  $(J_x, t_x) \in X/J \otimes_\ell J$  имеем

$$k(\psi, h)(J_x, t_x) = (hJ_x, \psi_{hJ_x} t_x), \quad k(\varphi, g)(hJ_x, \psi_{hJ_x} t_x) = ((gh)J_x, (\varphi_{(gh)J_x} \psi_{hJ_x}) t_x).$$

Так как  $(\varphi, g)(\psi, h) = (\varphi(g\psi), gh) = ((\varphi_\iota)_{\iota \in X/J} (\psi_{g^{-1}\iota})_{\iota \in X/J}, gh) = ((\varphi_\iota \psi_{g^{-1}\iota})_{\iota \in X/J}, gh)$  по определению операции произведения в полупрямом произведении по действию (см., например, [1, предложение-определение 6.11]) и определению операции произведения в  $\text{Aut}(J)^{X/J}$ , имеем

$$k((\varphi, g)(\psi, h))(J_x, t_x) = ((\varphi_\iota \psi_{g^{-1}\iota})_{\iota \in X/J}, gh)(J_x, t_x) = ((gh)J_x, (\varphi_{(gh)J_x} \psi_{hJ_x}) t_x).$$

Тем самым действие  $(\star)$  в п. (5) корректно определено и каждый элемент группы  $\text{Aut}(J) \text{Wr} \text{Aut}(X/J)$  — автоморфизм  $X$ .

Для точки  $x = (J_x, t_x) \in X/J \otimes_\ell J = X$  стабилизатор точки  $x$  при действии  $\text{Aut}(X) \curvearrowright X$  обозначим через  $\text{St}_x$ , стабилизатор точки  $t_x \in J$  при действии  $\text{Aut}(J) \curvearrowright J$  обозначим как  $\text{St}_{t_x}$ , стабилизатор точки  $J_x \in X/J$  при действии  $\text{Aut}(X/J) \curvearrowright X/J$  — как  $\text{St}_{J_x}$ . Здесь  $J_x$  и  $J$  — изоморфные линейно упорядоченные множества (факт 2 (4)),

$$\text{pr}_x : (\text{Aut}(J))^{X/J} = \prod_{\iota \in X/J} \text{Aut}(J_\iota) \rightarrow \text{Aut}(J_x) = \text{Aut}(J)$$

— проекция произведения на сомножитель.

Утверждение (3) следует из совпадения окрестностей предбазы: окрестности  $\text{St}_x$  из предбазы перестановочной топологии  $\text{Aut}(X)$  ( $x = (J_x, t_x) \in X/J \otimes_\ell J = X$ ) совпадают с множествами  $\text{pr}_x^{-1} \text{St}_{t_x} \times \text{St}_{J_x}$  из предбазы топологии  $(\text{Aut}(J), \tau_\partial) \text{Wr}^\tau (\text{Aut}(X/J), \tau_\partial) = (\text{Aut}(J), \tau_\partial)^{X/J} \times (\text{Aut}(X/J), \tau_\partial)$ . Утверждение (4) является следствием пп. (2) и (3).

В силу утверждений (1)–(3) действия  $(\star)$  в п. (5) непрерывны.  $\square$

**Предложение 4.** Пусть  $G$  — топологическая группа, топологическая группа  $G^X$  — тихоновское произведение групп  $G$  и группа  $H$  в перестановочной топологии при действии  $H \curvearrowright X$ .

Сплетение групп  $G \text{Wr}_X^\tau H$  Roelcke-предкомпактно, если группы  $G$  и  $H$  Roelcke-предкомпактны.

**Доказательство.** Согласно факту 3 (6) группа  $G^X$  Roelcke-предкомпактна. По факту 3 (4) ( $H$  — факторгруппа группы  $G \text{Wr}_X^\tau H$  относительно нормальной подгруппы  $G^X$ )  $G \text{Wr}_X^\tau H$  Roelcke-предкомпактно.  $\square$

### 3. Roelcke-предкомпактность групп автоморфизмов общих однородных линейно упорядоченных множеств

Пусть  $X$  — однородное линейно упорядоченное множество,  $J$  — собственный регулярный промежуток, являющийся открыто-замкнутым подмножеством  $(X, \tau)$  (и, следовательно,  $(X, \tau_d)$ ) по замечанию 1, дополнение до которого — дизъюнктные открыто-замкнутые промежутки  $J^- = \{t \in X \mid t < x, \forall x \in J\}$  и  $J^+ = \{t \in X \mid t > x, \forall x \in J\}$  (не обязательно однородные). Положим  $H = \{g \in \text{Aut}(X) \mid \forall x \in J, g(x) \in J\}$ .

- Лемма 1.** (1)  $H$  — открытая подгруппа  $(\text{Aut}(X), \tau_p)$  (и, следовательно,  $(\text{Aut}(X), \tau_\partial)$ );  
 (2)  $(H, \tau_p) = (\text{Aut}(J^-), \tau_p) \times (\text{Aut}(J), \tau_p) \times (\text{Aut}(J^+), \tau_p)$ ,  
 $(H, \tau_\partial) = (\text{Aut}(J^-), \tau_\partial) \times (\text{Aut}(J), \tau_\partial) \times (\text{Aut}(J^+), \tau_\partial)$ ;  
 (3) для любой точки  $x = (J, t_x)$  ( $x \in J, t_x \in J, \text{St}_{t_x}$  — стабилизатор точки  $t_x$  относительно действия  $\text{Aut}(J) \curvearrowright J$ )

$$\text{St}_x = \text{Aut}(J^-) \times \text{St}_{t_x} \times \text{Aut}(J^+).$$

**Доказательство.** (1) Так как  $J$  — регулярный промежуток, то  $H = [x, J] = \{g \in \text{Aut}(X) \mid g(x) \in J\}$ , где  $x \in J$ . Значит,  $H$  — открытая подгруппа  $(\text{Aut}(X), \tau_p)$  (и, следовательно,  $(\text{Aut}(X), \tau_\partial)$ ).

(2)  $X = J^- \diamond J \diamond J^+$ , и любой автоморфизм  $X$  принадлежит  $H$  в том и только в том случае, если он является комбинацией автоморфизмов  $J^-$ ,  $J$  и  $J^+$ . Тем самым  $H = \text{Aut}(J) \times \text{Aut}(J^-) \times \text{Aut}(J^+)$ .

Так как топология поточечной сходимости является допустимой групповой топологией на группе автоморфизмов линейно упорядоченного пространства по п. (1) предложения 1 (для однородного линейно упорядоченного пространства) и по [8, следствие 2] (в общем случае) и  $\tau_p \leq \tau_\partial$ , то топологические группы в п. (2) корректно определены. Их топологическая изоморфность легко проверяется.

Утверждение (3) следует из п. (2) и определения регулярного промежутка.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $X$  — общее однородное линейно упорядоченное множество. Следующие условия эквивалентны:

- (1) топологическая группа  $(\text{Aut}(X), \tau_p)$  (соответственно  $(\text{Aut}(X), \tau_\partial)$ ) Roelcke-предкомпактна;
- (2) для любого собственного регулярного промежутка  $J$  топологические группы  $(\text{Aut}(J), \tau_p)$  (соответственно  $(\text{Aut}(J), \tau_\partial)$ ) и  $(\text{Aut}(X/J), \tau_\partial)$  Roelcke-предкомпактны;
- (3) существует собственный регулярный промежуток  $J$  такой, что топологические группы  $(\text{Aut}(J), \tau_p)$  (соответственно  $(\text{Aut}(J), \tau_\partial)$ ) и  $(\text{Aut}(X/J), \tau_\partial)$  Roelcke-предкомпактны.

**Доказательство.** (1)  $\implies$  (2). Пусть  $J$  — собственный регулярный промежуток  $X$ . Из п. (4) теоремы 1 и факта 3 (3) следует Roelcke-предкомпактность  $(\text{Aut}(X/J), \tau_\partial)$ .

Подгруппа  $(H = \{g \in \text{Aut}(X) \mid \forall x \in J, g(x) \in J\}, \tau_p)$  (соответственно  $(H, \tau_\partial)$ ) Roelcke-предкомпактна как открытая подгруппа группы  $(\text{Aut}(X), \tau_p)$  (соответственно  $(\text{Aut}(X), \tau_\partial)$ ) по факту 3 (2). Из п. (2) леммы 1 и факта 3 (6) следует Roelcke-предкомпактность  $(\text{Aut}(J), \tau_p)$  (соответственно  $(\text{Aut}(J), \tau_\partial)$ ).

Импликация (2) $\implies$ (3) очевидна. (3) $\implies$ (1) следует из теоремы 1 и предложения 4.  $\square$

Из теоремы 2 и предложения 3 имеем

**Следствие 1.** *Для общего однородного линейно упорядоченного множества  $X$ , имеющего простой собственный промежуток, условия Roelcke-предкомпактности групп  $(\text{Aut}(X), \tau_p)$  и  $(\text{Aut}(X), \tau_\partial)$  эквивалентны.*  $\square$

**П р и м е р ы.** (1) Группа автоморфизмов лексикографически упорядоченного произведения 2-однородных линейно упорядоченных множеств  $X$  и  $Y$  Roelcke-предкомпактна в топологиях  $\tau_p$  и  $\tau_\partial$ .

Действительно,  $X \otimes_\ell Y$  — или простое линейно упорядоченное множество, или общее. Если оно простое, то не может быть жестким. Значит, или  $X \otimes_\ell Y$  2-однородное, или  $Y$  является собственным регулярным промежутком (если существует собственный регулярный промежуток, содержащийся в  $Y$ , то  $Y$  не 2-однородно; если существует собственный регулярный промежуток, содержащий  $Y$ , то  $X \otimes_\ell Y$  2-однородно). В первом случае группа  $\text{Aut}(X \otimes_\ell Y)$  Roelcke-предкомпактна по предложению 3 (однако  $\text{Aut}(X \otimes_\ell Y) \neq \text{Aut}(Y) \text{Wr Aut}(X)$ ). Во втором случае она Roelcke-предкомпактна по теореме 2 и предложению 3. Заметим, что обе возможности реализуются:  $\mathbb{R} \otimes_\ell \mathbb{R}$  — общее линейно упорядоченное множество, а  $\mathbb{Q} \otimes_\ell \mathbb{Q}$  (линейно) изоморфно  $\mathbb{Q}$  и, следовательно, является простым.

(2) Группа автоморфизмов лексикографически упорядоченного квадрата  $\mathbf{K}$  Roelcke-предкомпактна в топологиях  $\tau_p$  и  $\tau_\partial$ , так как

$$\text{Aut}(\mathbf{K}) = \text{Aut}(\mathbb{R}) \times (\text{Aut}(\mathbb{R}) \text{Wr Aut}(\mathbb{R})) \times \text{Aut}(\mathbb{R})$$

и  $\text{Aut}(\mathbb{R}) \text{Wr Aut}(\mathbb{R})$  — группа автоморфизмов множества  $\mathbb{R} \otimes_\ell \mathbb{R}$  [8, следствие 5].

(3) По индукции, используя (1), можно показать, что группа автоморфизмов лексикографически упорядоченного конечного произведения 2-однородных линейно упорядоченных множеств Roelcke-предкомпактна в топологиях  $\tau_p$  и  $\tau_\partial$ .

$\otimes_\ell^n \mathbb{R} = (\otimes_\ell^{n-1} \mathbb{R}) \otimes_\ell \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , с лексикографическим порядком  $((x_1, \dots, x_n) < (y_1, \dots, y_n))$ , если  $x_j < y_j$ , где  $j = \min\{k \mid x_k \neq y_k\}$ , — общее линейно упорядоченное множество (можно воспользоваться тем, что  $\mathbb{R}$  не имеет щелей, а в  $\otimes_\ell^n \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , щели содержатся в любом непустом промежутке с концами в точках, у которых первые  $n - 1$  координат различны) и его группа автоморфизмов  $\text{Aut}(\otimes_\ell^n \mathbb{R})$  есть последовательное взятие сплетений групп автоморфизмов собственных регулярных промежутков

$$\text{Wr}^n \text{Aut}(\mathbb{R}) = \text{Aut}(\mathbb{R}) \text{Wr}(\text{Wr}^{n-1} \text{Aut}(\mathbb{R})), \quad n \in \mathbb{N},$$

(действие  $\text{Wr}^n \text{Aut}(\mathbb{R})$  на  $\otimes_\ell^n \mathbb{R}$  определяется как в теореме 1 (5)). Из структуры действия следует, что собственными регулярными промежутками  $\otimes_\ell^n \mathbb{R}$  являются  $\mathbb{R}$ ,  $\otimes_\ell^2 \mathbb{R}$ ,  $\dots$ ,  $\otimes_\ell^{n-1} \mathbb{R}$ .

(4) Группа автоморфизмов дискретного однородного линейно упорядоченного множества  $X$  не Roelcke-предкомпактна в топологиях  $\tau_p$  и  $\tau_\partial$ . Действительно, из [10, пример § 3.1] следует, что либо  $X$  эквивалентно  $\mathbb{Z}$ , либо  $\mathbb{Z}$  — собственный регулярный промежуток и  $X \otimes_\ell \mathbb{Z}$ . Остается применить теорему 2 и предложение 3.

Отметим, что  $\mathbb{Z} \otimes_\ell \mathbb{Q}$  (линейно) изоморфно  $\mathbb{Q}$  и, значит, 2-однородно. Его группа автоморфизмов Roelcke-предкомпактна. Однако  $\text{Aut}(\mathbb{Z} \otimes_\ell \mathbb{Q}) \neq \text{Aut}(\mathbb{Q}) \text{Wr Aut}(\mathbb{Z})$  и по предложению 4 группа  $\text{Aut}(\mathbb{Q}) \text{Wr Aut}(\mathbb{Z})$  не Roelcke-предкомпактна в топологиях  $\tau_p$  и  $\tau_\partial$  с учетом предложения 3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Roelcke W., Dierolf S.** Uniform structures on topological groups and their quotients. NY: McGraw-Hill Inc., 1981.
2. **Uspenskij V.V.** Compactifications of topological groups // Proc. of the Ninth Prague Topological Symposium. Prague, 2001. P. 331–346. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0204144>
3. **Pestov V.** Topological groups: Where to from here? // Topol. Proc. 1999. Vol. 24 (Summer). P. 421–506. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9910144>
4. **Tsankov T.** Unitary representations of oligomorphic groups // Geometric and Functional Analysis. 2012. Vol. 22, no. 2. P. 528–555. <https://doi.org/10.1007/s00039-012-0156-9>
5. **Sorin B.V.** The Roelcke precompactness and compactifications of transformation groups of discrete spaces and homogeneous chains. 2024. 24 p. URL: <https://arxiv.org/abs/2310.18570v2>.
6. **Gaughan E.D.** Topological group structures of infinite symmetric groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1976. Vol. 58, no. 3. P. 907–910. <https://doi.org/10.1073/pnas.58.3.907>
7. **Ovchinnikov S.** Topological automorphism group of chains // Mathwear&Soft Computing. 2001. Vol. 8. P. 47–60.
8. **Сорин Б.В.** Компактификации групп гомеоморфизмов линейно упорядоченных компактов // Мат. заметки. 2022. Vol. 112, no. 1. P. 118–137. <https://doi.org/10.4213/mzm13606>
9. **Glasner E., Megrelishvili M.** Circular orders, ultra-homogeneous order structures and their automorphism groups // Contemporary Mathematics. 2021. Vol. 772. P. 133–154. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.06583>
10. **Ohkuma T.** Structure of homogeneous chains // Kodai Math. Sem. Rep. 1953. Vol. 5, no. 1. P. 1–12. <https://doi.org/10.2996/kmj/1138843293>
11. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
12. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир 1970. 416 p.
13. **Ohkuma T.** On discrete homogeneous chains // Kodai Math. Sem. Rep. 1952. Vol. 4, no. 1. P. 23–30. <https://doi.org/10.2996/kmj/1138843210>
14. **Glass A.M.W.** Groups of automorphisms of totally ordered sets: Techniques, model theory and applications to decision problems // Groups, Modules, and Model Theory — Surveys and Recent Developments (In Memory of Rüdiger Göbel) / eds. M. Droste et al. Cham: Springer, 2017. P. 109–134. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-51718-6\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-51718-6_6)
15. **McCleary S.H.** Lattice-ordered permutation groups: The structure theory // Ordered Groups and Infinite Permutation Groups / eds. W. Charles Holland. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1996. P. 29–62. [https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3443-9\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3443-9_2)
16. **Glass A.M.W., Gurevich Yu., Holland W.C., Shelah S.** Rigid homogeneous chains // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1981. Vol. 89, no. 7. P. 7–17. <https://doi.org/10.1017/S0305004100057881>
17. **Holland W.C.** Transitive lattice-ordered permutations groups // Math. Z. 1965. Vol. 87. P. 420–433. <https://doi.org/10.1007/BF01111722>
18. **Arens R.** Topologies for homeomorphism groups // Amer. J. Math. 1946. Vol. 68, no. 4. P. 593–610. <https://doi.org/10.2307/2371787>
19. **Kozlov K.L.** Uniform equicontinuity and groups of homeomorphisms // Topol. Appl. 2022. Vol. 311. Art. no. 107959. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107959>
20. **Holland W.C., McCleary S.H.** Wreath products of ordered permutations groups // Pac. J. Math. 1969. Vol. 31, no. 3. P. 703–716.

Поступила 14.12.2024

После доработки 23.01.2025

Принята к публикации 27.01.2025

Сорин Борис Владимирович

соискатель

механико-математический факультет

каф. общей топологии и геометрии

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

г. Москва

e-mail: bvs@imtprofi.ru

## REFERENCES

1. Roelcke W., Dierolf S. *Uniform structures on topological groups and their quotients*. NY, McGraw-Hill Inc., 1981, 276 p. ISBN-10: 0070534128.
2. Uspenskij V.V. Compactifications of topological groups. In: *Proc. Ninth Prague Topological Symposium*, Prague, Czech Republic, 2001, pp. 331–346. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0204144>
3. Pestov V. Topological groups: Where to from here? *Topology Proc.*, 1999, vol. 24, pp. 421–506. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9910144>
4. Tsankov T. Unitary representations of oligomorphic groups. *Geom. Funct. Anal.*, 2012, vol. 22, no. 2, pp. 528–555. <https://doi.org/10.1007/s00039-012-0156-9>
5. Sorin B.V. *The Roelcke precompactness and compactifications of transformations groups of discrete spaces and homogeneous chains*. 2024, 24 p. Available at: <https://arxiv.org/abs/2310.18570v2>.
6. Gaughan E.D. Topological group structures of infinite symmetric groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1976, vol. 58, no. 3, pp. 907–910. <https://doi.org/10.1073/pnas.58.3.907>
7. Ovchinnikov S. Topological automorphism group of chains. *Mathwear and Soft Comp.*, 2001, vol. 8, pp. 47–60.
8. Sorin B.V. Compactifications of homeomorphism groups of linearly ordered compacta. *Math Notes*, 2022, vol. 112, no. 1, pp. 126–141. <https://doi.org/10.1134/S0001434622070148>
9. Glasner E., Megrelishvili M. Circular orders, ultra-homogeneous order structures and their automorphism groups in topology. Chapter in: *Topology, geometry, and dynamics: V.A. Rokhlin Memorial*, Contemp. Math., eds.: A. M. Vershik, V. M. Buchstaber, A. V. Malyutin, 2021, vol. 772, pp. 133–154. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.06583>
10. Ohkuma T. Structure of homogeneous chains. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1953, vol. 5, no. 1, pp. 1–12. <https://doi.org/10.2996/kmj/1138843293>
11. Engelking R. *General topology*, 2nd ed. Sigma Ser. Pure Math., vol. 6, Berlin, Heldermann Verlag, 1989, 529 p. ISBN: 9783885380061.
12. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*. Warszawa, PWN Polish Scient. Publ., 1967. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
13. Ohkuma T. On discrete homogeneous chains. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1952, vol. 4, no. 1, pp. 23–30. <https://doi.org/10.2996/kmj/1138843210>
14. Glass A.M.W. Groups of automorphisms of totally ordered sets: techniques, model theory and applications to decision problems. In: *Groups, modules, and model theory — Surveys and recent developments*. Droste M., Fuchs L., Goldsmith B., Strüngmann L. (eds). Cham, Springer, 2017, pp. 109–134. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-51718-6\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-51718-6_6)
15. McCleary S.H. Lattice-ordered permutation groups: the structure theory. In: *Ordered groups and infinite permutation groups. Mathematics and its applications*, vol. 354. Holland W.C. (eds). Springer, Boston, MA, 1996, pp. 29–62. [https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3443-9\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3443-9_2)
16. Glass A.M.W., Gurevich Yu., Holland W.C., Shelah S. Rigid homogeneous chains. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1981, vol. 89, no. 7, pp. 7–17. <https://doi.org/10.1017/S0305004100057881>
17. Holland W.C. Transitive lattice-ordered permutations groups. *Math. Z.*, 1965, vol. 87, pp. 420–433. <https://doi.org/10.1007/BF01111722>
18. Arens R. Topologies for homeomorphism groups. *Amer. J. Math.*, 1946, vol. 68, no. 4, pp. 593–610. <https://doi.org/10.2307/2371787>
19. Kozlov K.L. Uniform equicontinuity and groups of homeomorphisms. *Topol. Appl.*, 2022, vol. 311, art. no. 107959. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107959>
20. Holland W.C., McCleary S.H. Wreath products of ordered permutations groups. *Pacific J. Math.*, 1969, vol. 31, no. 3, pp. 703–716.

Received December 14, 2024

Revised January 23, 2025

Accepted January 27, 2025

*Boris Vladimirovich Sorin*, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Dept. of General Topology and Geometry, Moscow, 119991 Russia,  
e-mail: bvs@imtprof.ru.

Cite this article as: B. V. Sorin. On Roelcke precompactness of automorphism groups of general chains. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 175–184.