ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 1 2025

УДК 512.55

ПУЧКОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРИЗАЦИИ PQ-БЭРОВСКИХ ПОЛУКОЛЕЦ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Н. С. Протасов, В. В. Чермных

Изучается полукольцо с инволюцией, в котором аннулятор произвольного главного правого идеала порождается проекцией (pq-бэровские $*$-полукольца). Для $*$-полуколец построены три пучка, аналоги пучков Ламбека, Пирса и Корниша. Показано, что для pq-бэровских $*$-полуколец три пучка изоморфны. Отсюда следует, что произвольное pq-бэровское $*$-полукольцо $*$-изоморфно полукольцам глобальных сечений этих пучков. Получено описание pq-бэровских $*$-полуколец без нильпотентных элементов и строго риккартовых $*$-полуколец в терминах сечений пучков. Эти результаты позволяют выяснить строение элементов указанных $*$-полуколец.

Ключевые слова: полукольцо с инволюцией, pq-бэровское $*$-полукольцо, строго риккартово $*$-полукольцо, пучки $*$-полуколец.

N. S. Protasov, V. V. Chermnykh. Sheaf representations and characterizations of pq-Baer semirings with involution.

We study a semiring with involution in which the annihilator of an arbitrary principal right ideal is generated by the projection (pq-Baer $*$-semiring). For $*$-semirings, three sheaves are constructed, analogues of the Lambek, Pierce and Cornish sheaves. It is shown that for pq-Baer $*$-semirings these sheaves are isomorphic. This implies that an arbitrary pq-Baer $*$-semiring is $*$-isomorphic to the $*$-semirings of sections of these sheaves. A description of pq-Baer $*$-semirings without nilpotent elements and strongly Rickart $*$-semirings in terms of sections of sheaves is obtained. These results make it possible to clarify the structure of the elements of the indicated $*$-semirings.

Keywords: semiring with involution, pq-Baer $*$-semiring, strongly Rickart $*$-semiring, sheaves of $*$-semirings.

MSC: 16Y60

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-166-174

Введение

В статье авторов [1] изучались pq-бэровские $*$-полукольца, для которых, в частности, было получено изоморфное пучковое представление. Построенный при этом пучок $*$-полуколец $(\mathbb{L}(S), \operatorname{Sp} S)$ близок к конструкции ламбековского пучка полуколец [2]. Известен еще один тип пучка полуколец с инволюцией — пучок Пирса, введенный в рассмотрение Р. В. Марковым; им же доказана изоморфность пирсовского представления для произвольного $*$-полукольца [3]. В [1] в числе сформулированных открытых проблем ставится вопрос об описании класса $*$-полуколец, для которых совпадают пирсовский и ламбековский пучки. В настоящей работе мы даем частичный ответ на поставленный вопрос, доказав, что ламбековский и пирсовский пучки совпадают для произвольного pq-бэровского $*$-полукольца. Кроме того, для pq-бэровского $*$-полукольца мы рассматриваем еще один пучок $*$-полуколец $(\mathbb{K}(S), \operatorname{Sp} S)$, который можно считать аналогом пучка Корниша. Пучок Корниша впервые был построен для ограниченных дистрибутивных решеток [4], затем был обобщен для полуколец [2]. В теореме 1 установлено, что пучки Пирса, Ламбека и Корниша изоморфны для произвольного pq-бэровского $*$-полукольца. Отметим, что совпадение пучковых конструкций является важной составляющей теории пучковых представлений. Значение теоремы 1 заключается также в следствии 1 о трех изоморфных пучковых представлениях pq-бэровского $*$-полукольца.

Наряду с теоремой 1 основными результатами предлагаемой статьи являются теоремы 2 и 3, которые в терминах сечений пучков характеризуют pq-бэровские $*$-полукольца без нильпотентных элементов и строго риккартовы $*$-полукольца. Эти результаты позволяют выяснить строение элементов указанных $*$-полуколец (предложение 3).

Напомним основные определения и используемые обозначения.

Под *полукольцом* мы понимаем алгебраическую структуру, отличающуюся от ассоциативного кольца, возможно, необратимостью сложения; полукольца, рассматриваемые в статье, с единицей. Полукольцо S называется *$*$-полукольцом* (или *полукольцом с инволюцией*), если существует антиавтоморфизм $*: a \mapsto a^*$ полукольца S: $a^{**} = a$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$.

Пусть S — $*$-полукольцо. Через $e^\perp$ обозначаем (однозначно определенный, если существует, мультипликативный идемпотент) *дополнение к* $e \in S$, если $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = e^\perp e = 0$. Множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S обозначается через BS.

Дополняемый идемпотент $e \in S$ называется *проекцией*, если он *самосопряжен*, т. е. $e = e^*$; множество всех проекций $*$-полукольца S обозначим через $\tilde{S}$.

Центральный дополняемый самосопряженный идемпотент называется *центральной проекцией*, а множество всех центральных проекций обозначается через B^*S. Элемент $c(a)$ $*$-полукольца S называется *центральным покрытием элемента* $a \in S$, если $ac(a) = a$ и $c(a)$ — наименьшая центральная проекция с таким свойством. В определении центральной проекции используется отношение порядка $e \leq f \Leftrightarrow e = ef$, введенное на множестве $\tilde{S}$ всех проекций $*$-полукольца S [1, лемма 1, предложение 1].

Правый аннулятор множества A обозначается через $\mathrm{ann}_r(A)$. Основным объектом исследований в статье является следующее полукольцо с инволюцией.

О п р е д е л е н и е 1. Полукольцо с инволюцией S называется *pq-бэровским* $*$-полукольцом, если для любого $a \in S$ найдется такая проекция $e \in S$, что $\mathrm{ann}_r(aS) = eS$.

Идеал A $*$-полукольца называется *центральным*, если $a \in A$ влечет $c(a) \in A$; центральный собственный идеал P называется *первичным центральным идеалом*, если для любых центральных идеалов A, B из $AB \subseteq P$ следует $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. Обозначим через $\mathrm{Sp}\, S$ множество всех первичных центральных идеалов. Если S есть *pq-бэровское* $*$-полукольцо, то $\mathrm{Sp}\, S$ становится нульмерным компактом относительно топологии Зарисского. Открытыми множествами пространства $\mathrm{Sp}\, S$ являются множества $D(A) = \{P \in \mathrm{Sp}\, S : P \nsupseteq A\}$ для произвольного центрального идеала A, а множества вида $D(e) = D(eS)$, где e — центральная проекция, образуют базу открыто-замкнутых множеств.

Мы исходим из общепринятого определения пучка универсальных алгебр через расслоенное пространство. Определение пучка $*$-полуколец можно найти в [1, определение 7]. Поскольку в наших исследованиях мы рассматриваем только факторные пучки и представления (см., например, [2, с. 124]), то при построении пучков применяем известную конструкцию, восходящую к Дейви [5, Lemma 2.1]. Конструкция опирается на понятие открытой системы конгруэнций [1, лемма A]. Для построения ламбековского пучка $(\mathbb{L}(S), \mathrm{Sp}\, S)$ $*$-полуколец используем открытую систему конгруэнций вида

$$a \equiv b \pmod{\lambda_P} \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in B^*S \setminus P.$$

В [1, теорема 1] доказано, что произвольное pq-бэровское $*$-полукольцо изоморфно $*$-полукольцу $\Gamma(\mathbb{L})$ всех глобальных сечений пучка $(\mathbb{L}(S), \mathrm{Sp}\, S)$. Напомним, что в этой теореме рассматривается *$*$-гомоморфизм Гельфанда* — отображение $\hat{}: S \to \Gamma(\mathbb{L})$, которое каждому элементу $a \in S$ сопоставляет глобальное сечение $\hat{a}$, где $\hat{a}(P)$ — класс элемента $a \in S$ в фактор-$*$-полукольце S/λ_P. Ниже мы исследуем $*$-гомоморфизм Гельфанда $*$-полукольца S в $*$-полукольца глобальных сечений других пучков; образ элемента $s \in S$ обозначается через $\hat{s}$.

1. Три пучка pq-бэровского $*$-полукольца

В этом разделе рассмотрим конструкции ламбековского, пирсовского пучка $*$-полуколец и пучок Корниша, а также докажем их совпадение для pq-бэровского $*$-полукольца. Конструкции первых двух пучков нам известны [1; 3], поэтому начнем с построения пучка Корниша.

Пусть S — pq-бэровское $*$-полукольцо. Как и для пучка Ламбека, в качестве базисного пространства пучка Корниша выберем пространство $\operatorname{Sp} S$ всех первичных центральных идеалов $*$-полукольца S. Напомним [1, предложение 5], что $\operatorname{Sp} S$ является нульмерным компактом. По аналогии с пучком Корниша для дистрибутивных решеток и полуколец рассмотрим слои пучка, имеющие вид $S/\kappa_P, P \in \operatorname{Sp} S$, для конгруэнций

$$a \equiv b\,(\operatorname{mod} \kappa_P) \Leftrightarrow a + u = b + v \text{ для некоторых } u, v \in 0_P.$$

Заметим, что идеал $0_P = \{a \in S : \operatorname{ann}_r(aS) \nsubseteq P\}$ в случае pq-бэровского $*$-полукольца S совпадает с первичным центральным идеалом P. Действительно, согласно [1, предложение 2, п. 2)] и [1, лемма 4, п. 2) и п. 4)] получаем

$$0_P = \{a \in S : \operatorname{ann}_r(aS) \nsubseteq P\} = \{a \in S : c(a)^{\perp} S \nsubseteq P\} = \{a \in S : c(a) \in P\} = P.$$

Хорошо известно, что отношение κ_P есть *отношение Бёрна* по идеалу P и оно является полукольцевой конгруэнцией. Покажем стабильность κ_P относительно инволюции. Пусть $a \equiv b\,(\operatorname{mod} \kappa_P)$, тогда $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in 0_P = P$. По [1, лемма 4] $c(u), c(v) \in P$, а поскольку $c(u) = c(u^*), c(v) = c(v^*)$, то $u^*, v^* \in P$. Получаем $a^* + u^* = b^* + v^*$, поэтому $a^* \equiv b^*\,(\operatorname{mod} \kappa_P)$. Убедились, что κ_P действительно является конгруэнцией на pq-бэровском $*$-полукольце.

Для обоснования утверждения, что конструкция $(\mathbb{K}(S), \operatorname{Sp} S)$ есть пучок, необходимы рассуждения, подобные тем, что проводились при построении ламбековского пучка $\mathbb{L}(S)$. А именно надо установить, что семейство конгруэнций $\{\kappa_P : P \in \operatorname{Sp} S\}$ на pq-бэровском $*$-полукольце S является открытым. Это будет вытекать из совпадения конгруэнций λ_P и κ_P для любого $P \in \operatorname{Sp} S$, что сейчас и продемонстрируем.

Предложение 1. *Для любого $P \in \operatorname{Sp} S$ pq-бэровского $*$-полукольца S и любых $a, b \in S$ $a \equiv b\,(\operatorname{mod} \lambda_P)$ тогда и только тогда, когда $a \equiv b\,(\operatorname{mod} \kappa_P)$.*

Доказательство. Пусть $a \equiv b\,(\operatorname{mod} \lambda_P)$, в таком случае $ae = be$ для некоторой центральной проекции $e \notin P$. Значит, $ae + ae^{\perp} + be^{\perp} = be + ae^{\perp} + be^{\perp}$, откуда $a + be^{\perp} = b + ae^{\perp}$. Элементы $be^{\perp}$ и $ae^{\perp}$ лежат в P, следовательно, $a \equiv b\,(\operatorname{mod} \kappa_P)$. Обратно, пусть $a \equiv b\,(\operatorname{mod} \kappa_P)$. Тогда $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in P$. По [1, лемма 4] $c(u), c(v) \in P$, поэтому $c(u)^{\perp} c(v)^{\perp} \notin P$. Далее, $uc(u)^{\perp} = (uc(u))c(u)^{\perp} = 0$ и аналогично $vc(v)^{\perp} = 0$. Значит, $ac(u)^{\perp} c(v)^{\perp} = bc(u)^{\perp} c(v)^{\perp}$, ввиду чего $a \equiv b\,(\operatorname{mod} \lambda_P)$. □

Пучки $(\mathbb{L}(S), \operatorname{Sp} S)$ и $(\mathbb{K}(S), \operatorname{Sp} S)$ совпадают, поскольку у них одинаковые базисные пространства, а соответствующие слои “канонически” $*$-изоморфны. Базисное пространство пирсовского пучка отлично от $\operatorname{Sp} S$, поэтому нам потребуются определения гомоморфизма и изоморфизма пучков, которые дадим для пучков $*$-полуколец.

Определение 2. Пусть Π — пучок $*$-полуколец Π_x над пространством X, Λ — пучок $*$-полуколец Λ_y над пространством Y. *Гомоморфизмом* пучка Π в пучок Λ называется непрерывное отображение $\varphi : Y \to X$ и семейство $\{f_y : y \in Y\}$ $*$-гомоморфизмов $f_y : \Pi_{\varphi(y)} \to \Lambda_y$ таких, что для любого локального сечения α на открытом множестве $U \subseteq X$ пучка Π отображение β, определенное по формуле $\beta(y) = f_y(\alpha(\varphi(y)))$, $y \in \varphi^{-1}(U)$, непрерывно. Если φ — гомеоморфизм, а все f_y — $*$-изоморфизмы, то гомоморфизм пучков называется *изоморфизмом.*

Покажем, что для pq-бэровского $*$-полукольца S пучок $(\mathbb{L}(S), \operatorname{Sp} S)$ изоморфен пирсовскому пучку, построенному для S.

Напомним, пирсовский пучок $(\mathbb{P}(S), \operatorname{Max} B^*S)$ произвольного $*$-полукольца S задается следующим образом. Его базисное пространство $\operatorname{Max} B^*S$ — это пространство максимальных идеалов булевой алгебры всех центральных проекций B^*S с топологией Стоуна. Открытые множества в $\operatorname{Max} B^*S$ имеют вид $d(A) = \{M \in \operatorname{Max} B^*S : M \nsupseteq A\}$, A — идеал в B^*S. Пространство $\operatorname{Max} B^*S$ является нульмерным компактом с базисными открыто-замкнутыми множествами $d(e) = \{M \in \operatorname{Max} B^*S : M \not\ni e\}$, $e \in B^*S$. Слои накрывающего пространства $\mathbb{P}(S)$

пирсовского пучка суть фактор-$*$-полукольца S/ρ_M по конгруэнциям ρ_M:

$$a \equiv b\,(\mathrm{mod}\,\rho_M) \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in B^*S \setminus M.$$

Следующая лемма уточняет вид базисного пространства пирсовского пучка для pq-бэровского $*$-полукольца.

Лемма 1. *Для pq-бэровского $*$-полукольца S справедливо* $\mathrm{Max}\,B^*S = \mathrm{Max}\,BS$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из $B^*S = BS$ [1, лемма 6, п.2)]. □

Рассмотрим pq-бэровское $*$-полукольцо S. В силу [1, предложение 4] $\varphi : \mathrm{Max}\,BS \to \mathrm{Sp}\,S$, заданное $\varphi(M) = MS$, — биективное отображение.

Лемма 2. *Для pq-бэровского $*$-полукольца S пространства* $\mathrm{Max}\,BS$ *и* $\mathrm{Sp}\,S$ *гомеоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы установим, что φ непрерывно и открыто.

Рассмотрим произвольное открытое множество $D(A) \subseteq \mathrm{Sp}\,S$ для центрального идеала A. Множество $A \cap BS$ является идеалом булевой алгебры BS. Пусть $M \in \varphi^{-1}(D(A))$, тогда $\varphi(M) = MS \not\supseteq A$. Значит, найдется элемент $a \in A \setminus MS$. Идеал A центральный, поэтому $c(a) \in A$. Кроме того, $a = ac(a) \notin MS$, следовательно, $c(a) \in A \setminus MS$. Получили, что $MS \nsubseteq A$, откуда $M \nsubseteq A \cap BS$ и $M \in d(A \cap BS)$. Показали включение $\varphi^{-1}(D(A)) \subseteq d(A \cap BS)$. Пусть $N \in d(A \cap BS)$. Тогда $N \not\supseteq A \cap BS$, таким образом, найдется $e \in (A \cap BS) \setminus N$. Очевидно, $e \in A \setminus NS$ и $A \nsubseteq NS$. Получили $NS \in D(A)$, откуда $N = \varphi^{-1}(NS) \in \varphi^{-1}D(A)$. Установили, что $d(A \cap BS) \subseteq \varphi^{-1}D(A)$, и значит, $\varphi^{-1}(D(A)) = d(A \cap BS)$, и φ — непрерывное отображение.

Убедимся, что φ — открытое отображение. Пусть A — идеал в BS и $d(A)$ — произвольное открытое множество в $\mathrm{Max}\,BS$. Обозначим $\bar{A} = \cap\{NS : N \in \mathrm{Max}\,BS \text{ и } A \subseteq N\}$. Все NS являются первичными центральными идеалами, поэтому $\bar{A}$ — центральный идеал из S. Пусть $M \in d(A)$, соответственно $M \not\supseteq A$. Так как $\bar{A} \supseteq AS$, то $MS \not\supseteq \bar{A}$. В этом случае $MS = \varphi(M) \in D(\bar{A})$, поэтому $\varphi(d(A)) \subseteq D(\bar{A})$. Обратно, пусть $P \in D(\bar{A})$. Поскольку $P = MS$ для некоторого $M \in \mathrm{Max}\,BS$, то $MS \not\supseteq \bar{A}$, откуда $M \not\supseteq A$. Получили $M \in d(A)$, значит, $P = MS = \varphi(M) \in \varphi(d(A))$, и $D(\bar{A}) \subseteq \varphi(d(A))$. Таким образом, биекция φ является непрерывным и открытым отображением, следовательно, гомеоморфизмом. □

Лемма 3. *Пусть S — pq-бэровское $*$-полукольцо, $\varphi : \mathrm{Max}\,BS \to \mathrm{Sp}\,S$ — отображение, при котором $\varphi(M) = MS = P$. Тогда для любого $M \in \mathrm{Max}\,BS$ отображение*

$$f_M(\hat{s}(P)) = \hat{s}(M),$$

является $*$-изоморфизмом между $*$-полукольцами S/λ_P и S/ρ_M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что через $\hat{s}$, $s \in S$, мы обозначаем глобальное сечение пучка, а через $\hat{s}(P)$ — его значение в слое над точкой P базисного пространства.

Непосредственно проверяется, что f_M есть $*$-гомоморфизм. Очевидно, что f_M — сюръективное отображение, ввиду чего необходимо обосновать его инъективность. Пусть для некоторых $s, t \in S$ выполняется $\hat{s}(M) = \hat{t}(M)$. Согласно этому $s \equiv t\,(\mathrm{mod}\,\rho_M)$, что означает $se = te$ для некоторого $e \in BS \setminus M$. В таком случае из $se + se^{\perp} + te^{\perp} = te + se^{\perp} + te^{\perp}$ получаем $s + te^{\perp} = t + se^{\perp}$. Если предположить, что $e^{\perp}c(e) \neq 0$, то найдется первичный центральный идеал Q, не содержащий $e^{\perp}c(e)$. Но тогда Q не содержит ни $e^{\perp}$, ни $c(e)$, а в силу центральности и e. Это противоречит первичности Q, следовательно, $e^{\perp}c(e) = 0$. Имеем $(s + te^{\perp})c(e) = (t + se^{\perp})c(e)$, откуда $sc(e) = tc(e)$ для центральной проекции $c(e)$. Из $e = ec(e) \notin M$ вытекает $c(e) \notin M$, а из $\varphi(M) = MS = P$ имеем $c(e) \notin P$. Тогда $\hat{s}(P) = \hat{t}(P)$, и f_M — инъекция. □

Теорема 1. *Для произвольного pq-бэровского $*$-полукольца S являются изоморфными пучки* $(\mathbb{P}(S), \operatorname{Max} BS)$, $(\mathbb{K}(S), \operatorname{Sp} S)$ *и* $(\mathbb{L}(S), \operatorname{Sp} S)$.

Доказательство. Совпадение пучков Корниша и Ламбека для произвольного pq-бэровского $*$-полукольца было установлено выше.

Пусть α — произвольное локальное сечение пучка $\mathbb{L}(S)$ на открытом множестве $D(A)$. Тогда α является ограничением на $D(A)$ глобального сечения $\hat{s}$ для некоторого $s \in S$. Для любого $M \in \varphi^{-1}(D(A))$ выполняется $f_M(\hat{s}(\varphi(M))) = \hat{s}(M)$, поэтому отображение $\beta(M) = f_M(\hat{s}(\varphi(M)))$ есть ограничение сечения $\hat{s}$ пучка $\mathbb{P}(S)$ на $d(A \cap BS)$, а значит, непрерывно на $\varphi^{-1}(D(A))$. В силу лемм 1–3 получаем требуемый изоморфизм пучков. □

Из теоремы 1 и [1, теорема 1] выводим

Следствие 1. *Произвольное pq-бэровское $*$-полукольцо S $*$-изоморфно $*$-полукольцу всех глобальных сечений каждого из пучков* $(\mathbb{P}(S), \operatorname{Max} BS)$, $(\mathbb{K}(S), \operatorname{Sp} S)$ *и* $(\mathbb{L}(S), \operatorname{Sp} S)$.

2. Пучковые характеризации $*$-полуколец

Полукольцо S называется *симметрическим в нуле*, если для любых $a, b, c \in S$ $abc = 0$ влечет $acb = 0$. Кольца с таким квазитождестом были определены Ламбеком под названием симметрических колец [6].

Определение 3. Полукольцо S с инволюцией назовем *риккартовым справа* $*$-полукольцом, если для произвольного $a \in S$ выполняется $\operatorname{ann}_r(a) = eS$ для некоторой проекции $e \in S$; *риккартово слева* $*$-полукольцо определяется симметричным образом; риккартово справа и слева $*$-полукольцо назовем *риккартовым*.

Следующее предложение показывает, что класс симметрических в нуле риккартовых $*$-полуколец совпадает с классом pq-бэровских $*$-полуколец без нильпотентных элементов.

Предложение 2. *Для $*$-полукольца S равносильны утверждения:*
1) *S — pq-бэровское $*$-полукольцо без нильпотентных элементов*;
2) *S — риккартово $*$-полукольцо без нильпотентных элементов*;
3) *S — симметрическое в нуле риккартово $*$-полукольцо.*

Доказательство. Покажем, что полукольцо S без нильпотентных элементов является симметрическим в нуле. Во-первых, если $ab = 0$, то $0 = b(ab)a = (ba)^2$, поэтому $ba = 0$. Убедились, что S — полукольцо с квазитождеством $ab = 0 \Rightarrow ba = 0$; такие полукольца называются *коммутативными в нуле*. Во-вторых, пользуясь коммутативностью в нуле и отсутствием ненулевых нильпотентных элементов, получаем последовательность импликаций

$$abc = 0 \Rightarrow ac(bca)cbc = 0 \Rightarrow acbc = 0 \Rightarrow acb(cb) = 0 \Rightarrow cbacb = 0 \Rightarrow acbacb = 0 \Rightarrow acb = 0.$$

Легко проверить, что в симметрическом в нуле полукольце S для любого $a \in S$ выполняется $\operatorname{ann}_r(aS) = \operatorname{ann}_r(a)$, поэтому pq-бэровское $*$-полукольцо без нильпотентных элементов является симметрическим в нуле риккартовым $*$-полукольцом. Таким образом, справедливы импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3).

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть S — симметрическое в нуле риккартовое $*$-полукольцо. Пусть $a^2 = 0$. Тогда $\operatorname{ann}_r(a) = eS$ для некоторой проекции e. Из $a \in eS$ получаем $ea = a$. С другой стороны, симметрическое в нуле полукольцо коммутативно в нуле, поэтому $0 = ae = ea = a$ и S — полукольцо без нильпотентных элементов. Очевидно, что $\operatorname{ann}_r(aS)$ порождается той же проекцией, что и $\operatorname{ann}_r(a)$. □

Замечание. Как видно из доказательства предложения 2, верен аналог утверждения при замене $*$-полукольца на полукольцо, а в доказательстве — при замене проекции на дополняемый идемпотент.

Напомним, что пучок (P, X) называется *хаусдорфовым*, если накрывающее пространство P хаусдорфово и *полухаусдорфовым*, если любые две различные точки накрывающего пространства P, одна из которых принадлежит образу нулевого сечения, имеют непересекающиеся открытые окрестности. Пучок (P, X) является полухаусдорфовым, если и только если *нуль-множество* $\mathrm{z}(\sigma) = \{x \in X : \sigma(x) = 0(x)\}$ любого глобального сечения σ открыто-замкнуто в X. Ясно, что в таком случае открыто-замкнутым окажется и *носитель* $\mathrm{supp}(\varphi) = X \setminus \mathrm{z}(\varphi)$ произвольного глобального сечения φ.

Теорема 2. *Равносильны следующие утверждения*:

1) S *— pq-бэровское $*$-полукольцо без нильпотентных элементов*;

2) S *— симметрическое в нуле риккартово $*$-полукольцо;*

3) S *$*$-изоморфно $*$-полукольцу всех глобальных сечений полухаусдорфова пучка $*$-полуколец без делителей нуля.*

Доказательство. Пункты 1) и 2) равносильны согласно предложению 2.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть S — симметрическое в нуле риккартово $*$-полукольцо. Его пучок $(\mathbb{L}(S), \mathrm{Sp}\, S)$ изоморфен пирсовскому пучку $(\mathbb{P}(S), \mathrm{Max}\, BS)$ полукольца S по теореме 1. Из [7, предложение 4] следует, что $(\mathbb{P}(S), \mathrm{Max}\, BS)$, а значит и $(\mathbb{L}(S), \mathrm{Sp}\, S)$, — полухаусдорфов пучок полуколец без делителей нуля. Слои пучка $(\mathbb{L}(S), \mathrm{Sp}\, S)$ являются $*$-полукольцами, а в соответствии с [1, теорема 1] $*$-полукольцо всех его глобальных сечений $*$-изоморфно S.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть (P, X) — полухаусдорфов пучок $*$-полуколец без делителей нуля, α — произвольное глобальное сечение пучка P. Рассмотрим глобальное сечение ε такое, что

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0(x), \text{ если } x \in \mathrm{supp}(\alpha), \\ 1(x), \text{ если } x \in \mathrm{z}(\alpha) \end{cases}$$

— характеристическое сечение открыто-замкнутого множества $\mathrm{z}(\alpha)$. Легко проверяется, что $\alpha\varepsilon = 0$ и ε — центральная проекция $*$-полукольца $\Gamma(P)$. Пусть ρ — произвольное глобальное сечение такое, что $\alpha\rho = 0$. Тогда $\mathrm{z}(\rho) \supseteq \mathrm{supp}(\alpha) = \mathrm{z}(\varepsilon)$, поэтому $\varepsilon\rho = \rho$. Получили, что $\mathrm{ann}_r(\alpha) \subseteq \varepsilon\Gamma(P)$. Очевидно обратное включение, отсюда $\mathrm{ann}_r(\alpha) = \varepsilon\Gamma(P)$ и $\Gamma(P)$ — риккартово $*$-полукольцо.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(P)$ и $\alpha\beta\gamma = 0$. Каждый слой пучка P является полукольцом без делителей нуля, поэтому для каждой точки $x \in X$ хотя бы один из элементов $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ равен нулю, значит, $\alpha(x)\gamma(x)\beta(x) = 0(x)$. Следовательно, $\alpha\gamma\beta = 0$ и $\Gamma(P)$ — симметрическое в нуле полукольцо. □

Определение 4. Полукольцо S с инволюцией назовем *строго риккартовым справа* (*слева*) $*$-полукольцом, если для произвольных $a, b \in S$ выполняется $\mathrm{eq}_r(a, b) = eS$ ($\mathrm{eq}_l(a, b) = eS$) для некоторой центральной проекции $e \in S$; через $\mathrm{eq}_r(a, b) = \{s \in S : as = bs\}$ обозначен *правый уравнитель* элементов $a, b \in S$; *левый уравнитель* $\mathrm{eq}_l(a, b)$ определяется симметричным образом.

Полукольцо, в котором $\mathrm{eq}_r(a, b) = 0$ ($\mathrm{eq}_l(a, b) = 0$) для любых различных $a, b \in S$, называется *полукольцом без правых* (*левых*) *уравнителей*. Полукольцо без левых и правых уравнителей называется *полукольцом без уравнителей*. Полукольцо с квазитождеством $abc = abd \Leftrightarrow acb = adb$ ($ac = bc \Leftrightarrow ca = cb$) называется *симметрическим* (*слабо симметрическим*). Очевидно, что слабо симметрические полукольца — это в точности полукольца, у которых для любой пары элементов правый и левый уравнители совпадают.

Лемма 4. *Для $*$-полукольца S справедливы утверждения*:

1) *если S строго риккартово справа, то* $\mathrm{eq}_r(a, b) = \mathrm{eq}_r(a^*, b^*)$;

2) S *строго риккартово справа в точности тогда, когда S строго риккартово слева*;

3) *строго риккартово справа $*$-полукольцо является слабо симметрическим pq-бэровским $*$-полукольцом.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathrm{eq}_r(a,b) = eS$ для некоторого $e \in B^*S$. Тогда $ae = be$ влечет $a^*e = b^*e$. Следовательно, $\mathrm{eq}_r(a,b) = eS \subseteq \mathrm{eq}_r(a^*,b^*)$. Отсюда имеем $\mathrm{eq}_r(a,b) \subseteq \mathrm{eq}_r(a^*,b^*) \subseteq \mathrm{eq}_r(a^{**},b^{**}) = \mathrm{eq}_r(a,b)$.

2) Пусть S строго риккартово справа и $\mathrm{eq}_r(a,b) = eS$ для некоторого $e \in B^*S$. Пусть $r \in \mathrm{eq}_l(a,b)$; используя п. 1), получаем следующие импликации:

$$ra = rb \Rightarrow a^*r^* = b^*r^* \Rightarrow r^* \in \mathrm{eq}_r(a^*,b^*) = \mathrm{eq}_r(a,b) \Rightarrow er^* = r^* \Rightarrow re = r \Rightarrow \mathrm{eq}_l(a,b) \subseteq Se.$$

Очевидно включение $Se \subseteq \mathrm{eq}_l(a,b)$, поэтому $\mathrm{eq}_l(a,b) = Se$ и S — строго риккартово слева $*$-полукольцо. Обратная импликация доказывается по такой же схеме.

3) Слабая симметричность следует из $\mathrm{eq}_r(a,b) = eS = Se = \mathrm{eq}_l(a,b)$ для любых $a, b \in S$. Пусть a — произвольный элемент строго риккартова справа $*$-полукольца S. Тогда

$$\mathrm{ann}_r(aS) \subseteq \mathrm{ann}_r(a) = \mathrm{eq}_r(a,0) = eS$$

для некоторого $e \in B^*S$. В силу центральности e получаем $\mathrm{ann}_r(aS) = eS$, значит, S — pq-бэровское $*$-полукольцо. □

В силу п. 2) леммы 4 будем использовать термин *строго риккартово $*$-полукольцо.*

Теорема 3. *Равносильны следующие утверждения:*

1) *S — строго риккартово $*$-полукольцо;*

2) *S $*$-изоморфно $*$-полукольцу всех глобальных сечений хаусдорфова пучка $*$-полуколец без уравнителей.*

Доказательство. 1) ⇒ 2). Пусть S — строго риккартово $*$-полукольцо. Для любого $a \in S$ найдется такая центральная проекция e, что $\mathrm{ann}_r(a) = \mathrm{eq}_r(a,0) = eS$, поэтому S — риккартово $*$-полукольцо. По лемме 4 S — слабо симметрическое $*$-полукольцо. Далее проводятся такие же рассуждения, как и в доказательстве импликации 2) ⇒ 3) теоремы 2. Из [7, теорема 1] и теоремы [1, теорема 1] получаем, что $(\mathbb{P}(S), \mathrm{Sp}\,S)$ — хаусдорфов пучок слабо симметрических $*$-полуколец без уравнителей.

2) ⇒ 1). Известно, что множество, на котором совпадают два сечения хаусдорфова пучка, открыто-замкнуто. С учетом этого факта утверждение доказывается по той же схеме, что и импликация 3) ⇒ 2) теоремы 2. □

Полученные пучковые характеризации позволяют дать следующие описания элементов $*$-полуколец.

Предложение 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *каждый элемент pq-бэровского $*$-полукольца без нильпотентных элементов является произведением некоторых однозначно определенной центральной проекции и неделителя нуля;*

2) *каждый элемент строго риккартова $*$-полукольца является произведением некоторых однозначно определенной центральной проекции и неуравнителя.*

Доказательство. 1) Пусть S — pq-бэровское $*$-полукольцо без нильпотентных элементов. Вспомним, что S $*$-изоморфно $*$-полукольцу всех глобальных сечений пучка Ламбека $\mathbb{L}(S)$ [1, теорема 1], поэтому об элементах из $r \in S$ мы можем рассуждать как о соответствующих глобальных сечениях $\hat{r} \in \Gamma(\mathbb{L})$. Пусть a — произвольный элемент из S. Центральная проекция e, для которой $\mathrm{ann}_r(a) = eS$, обладает следующими свойствами: во-первых, $\mathrm{z}(\widehat{e^\perp}) = \mathrm{supp}(\hat{e}) = \mathrm{z}(\hat{a})$, а во-вторых, в каждом слое пучка $\mathbb{P}(S)$ сечение $\hat{e}$ (как и произвольная центральная проекция) принимает либо нулевое, либо единичное значение. Действительно, для произвольной центральной проекции $e \in B^*S$ либо $e \in P$, либо $e^\perp \in P$ [1, лемма 4, п. 4)]. В первом случае $e \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\lambda_P)$, поскольку $ee^\perp = 0e^\perp$, во втором случае $e \equiv 1 (\mathrm{mod}\,\lambda_P)$, так как $ee = 1e$. Далее заметим, что произвольный элемент $r \in S$ является неделителем нуля в точности тогда, когда сечение $\hat{r}$ в каждом слое отлично от нуля. Из $ae = 0$ получаем $a = e^{\perp}(a+e)$. Покажем, что $a+e$ — это неделитель нуля. Действительно, если $P \in \operatorname{Sp} S \setminus \mathrm{z}(\hat{a})$, то $\widehat{e^{\perp}}(P) \neq \hat{0}(P)$, поэтому $\hat{e}(P) = \hat{0}(P)$, и $\widehat{a+e}(P) = \hat{a}(P) \neq \hat{0}(P)$. Если же $P \in \mathrm{z}(\hat{a})$, то $\hat{e}(P) = \hat{1}(P)$, отсюда $\widehat{a+e}(P) = \hat{e}(P) = \hat{1}(P)$. Получили, что сечение $\widehat{a+e}$ отлично от нуля в любой точке $P \in \operatorname{Sp} S$, значит, $a+e$ — неделитель нуля в S.

Если $a = eu = fv$ для некоторых $e, f \in B^*S$ и неделителей нуля $u, v \in S$, то нуль-множества сечений $\hat{e}$ и $\hat{f}$ совпадают. Ясно, что это влечет $e = f$.

2) Доказывается аналогично рассуждениям, приведенным в п. 1). □

Заключение

В работе рассмотрены три пучковые конструкции пучков полуколец с инволюцией, показано их совпадение для произвольного pq-бэровского $*$-полукольца S. По этой причине S реализуется как полукольца сечений трех рассматриваемых пучков. Показано применение пучковой техники для изучения полуколец с инволюцией (для pq-бэровского $*$-полукольца без нильпотентных элементов и для риккартова $*$-полукольца).

В качестве дальнейшего развития возможно изучение задач о пучковых представлениях других полуколец с инволюцией: квазибэровских, бирегулярных, риккартовых $*$-полуколец. Поскольку любое $*$-полукольцо допускает изоморфное пирсовское представление, то интересной является задача характеризации полуколец с инволюцией свойствами их пирсовских слоев.

Авторы признательны рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Протасов Н.С., Чермных В.В.** О пучковом представлении pq-бэровского полукольца с инволюцией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 1, С. 190–202. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-1-190-202
2. **Чермных В.В.** Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 3. С. 111–227. https://doi.org/10.1007/s10958-012-1062-2
3. **Марков Р.В.** Пирсовское представление полуколец с инволюцией // Изв. вузов. Математика. 2014. № 4. С. 18–24. https://doi.org/10.3103/S1066369X14040033
4. **Cornish W.H.** 0-ideals, congruences and sheaf representations of distributive lattices // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1977. Vol. 22, no. 8. P. 200–215.
5. **Davey B.A.** Sheaf spaces and sheaves of universal algebras // Math. Z. 1973. Vol. 134, no. 4. P. 275–290. https://doi.org/10.1007/BF01214692
6. **Lambek J.** On representation of modules by sheaves of factor modules // Can. Math. Bull. 1971. Vol. 14, no. 3. P. 359–368. https://doi.org/10.4153/CMB-1971-065-1
7. **Марков Р.В., Чермных В.В.** Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 213–221.

Поступила 22.12.2024
После доработки 23.01.2025
Принята к публикации 27.01.2025

Протасов Никита Сергеевич
аспирант
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина
г. Сыктывкар
e-mail: protasovnekit@gmail.com

Чермных Василий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, главный науч. сотрудник

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина
г. Сыктывкар
e-mail: vv146@mail.ru

REFERENCES

1. Protasov N.S, Chermnykh V.V. On the sheaf representation of a pq-Baer $*$-semiring with involution. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 190–202 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-1-190-202
2. Chermnykh V.V. Functional representations of semirings. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 187, no. 2, pp. 187–267. https://doi.org/10.1007/s10958-012-1062-2
3. Markov R.V. Pierce sheaf for semirings with involution. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 14–19. https://doi.org/10.3103/S1066369X14040033
4. Cornish W.H. 0-ideals, congruences and sheaf representations of distributive lattices. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* 1977, vol. 22, no. 8, pp. 200–215.
5. Davey B.A. Sheaf spaces and sheaves of universal algebras. *Math. Z.* 1973, vol. 134, no. 4, pp. 275–290. https://doi.org/10.1007/BF01214692
6. Lambek J. On representation of modules by sheaves of factor modules. *Can. Math. Bull.* 1971, Vol. 14, no. 3, pp. 359–368. https://doi.org/10.4153/CMB-1971-065-1
7. Markov R.V., Chermnykh V.V. Semirings close to regular and their Pierce stalks. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 213–221 (in Russian).

Received December 22, 2024
Revised January 23, 2025
Accepted January 27, 2025

Nikita Sergeevich Protasov, doctoral student, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, 167001, Russia, e-mail: protasovnekit@gmail.com .

Vasiliy Vladimirovich Chermnykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, 167001, Russia, e-mail: vv146@mail.ru .

Cite this article as: N. S. Protasov, V. V. Chermnykh. Sheaf representations and characterizations of pq-Baer semirings with involution. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 166–174 .