

УДК 517.977

## ЧЕТТЕРИНГ-ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧАХ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, АФФИННЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Н. Б. Мельников, М. И. Ронжина

Рассматривается задача стабилизации для систем, аффинных по управлению и нелинейных по фазовым переменным. Изучается гамильтонова система принципа максимума Понтрягина в окрестности особой экстремали второго порядка. Доказана теорема существования четтеринг-экстремалей, достигающих особой экстремали за конечное время. Теорема иллюстрируется на примере стабилизации с обратной связью для системы шар и балка.

Ключевые слова: стабилизация с обратной связью, особые экстремали второго порядка, четтеринг-управление, система шар-балка.

**N. B. Melnikov, M. I. Ronzhina. Chattering trajectories in stabilization problems for nonlinear control-affine systems.**

The stabilization problem is considered for systems that are affine in control and nonlinear in phase variables. The Hamiltonian system of Pontryagin's maximum principle is studied in a neighborhood of a second-order singular extremal. An existence theorem is proved for chattering extremals reaching the singular extremal in a finite time. The theorem is illustrated by the example of feedback stabilization for the ball and beam system.

Keywords: feedback stabilization, singular extremals of the second order, chattering control, ball-beam system.

MSC: 65K10, 37N40, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-138-153

### 1. Введение

Важный класс систем управления образуют механические и электромеханические системы, у которых управлений меньше, чем степеней свободы (см., например, [1–3]):

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F(q)u, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad m < n,$$

где  $q$  — обобщенные координаты,  $u$  — управление. Построение методов стабилизации для этого класса систем остается актуальной проблемой в связи с приложениями в робототехнике.

Общий метод построения стабилизирующего управления состоит в переходе к подходящей задаче оптимального управления (при наличии неполной информации см., например, [4]). Мы рассматриваем задачу с квадратичным критерием качества, зависящим от  $x = (q, \dot{q})$ , и со скалярным управлением  $u$  из отрезка, содержащего ноль. Гамильтониан принципа максимума Понтрягина в такой задаче — это функция, аффинная по управлению  $H(\psi, x, u) = H_0(\psi, x) + uH_1(\psi, x)$ . Поэтому задача может иметь *особые* экстремали  $(\psi(t), x(t))$ , такие что  $H_1(\psi(t), x(t)) \equiv 0$  на некотором интервале времени.

Говорят, что особая экстремаль  $(\psi(t), x(t))$  имеет *существенный*  $l$ -й порядок, если управление  $u$  входит в  $2l$ -ю производную по времени функции  $H_1(\psi(t), x(t))$  и соотношения

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^i}{dt^i} H_1(\psi, x) = 0, \quad i = 1, \dots, 2l - 1, \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2l}}{dt^{2l}} H_1(\psi, x) \neq 0, \quad (1.1)$$

справедливы для всех  $(\psi, x)$  в некоторой *окрестности* особой траектории. Если соотношения выполняются только в точках самой особой траектории, говорят, что особая экстремаль имеет *локальный*  $l$ -й порядок.

Фуллером был построен пример задачи управления, где неособая экстремаль, выходящая на особую экстремаль второго порядка, должна иметь бесконечное число разрывов управления на конечном интервале времени [5]. Такое управление получило название *четтеринга*. Согласно теореме Келли — Коппа — Мойера, если особая экстремаль имеет *существенный* второй порядок и удовлетворяет строгому условию Келли

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4}{dt^4} H_1(\psi(t), x(t)) < 0, \quad (1.2)$$

тогда любая неособая экстремаль, выходящая на особую, должна быть четтеринг-экстремалью. Если особая экстремаль имеет *локальный* второй порядок, то существование четтеринг-экстремалей требует дополнительных условий [6; 7].

В задаче стабилизации для систем, аффинных по управлению и *линейных* по фазовым переменным, особые экстремали локального второго порядка часто образуют поверхность коразмерности два (см., например, [8]). Для систем с двумя степенями свободы особая поверхность коразмерности два явно выражается через переменные состояния и скорости (см., например, [9]). В задаче стабилизации для *нелинейных* систем известные теоремы существования четтеринг-экстремалей [6; 7] могут быть неприменимы.

В настоящей работе доказана теорема существования четтеринг-экстремалей в задаче стабилизации для нелинейных систем, аффинных по управлению (упрощенный вариант теоремы см. в [10]). Доказательство использует разрешение особенности отображения Пуанкаре для построения инвариантного многообразия (см. [11]). Теорема проиллюстрирована на примере стабилизации с обратной связью для системы шар и балка [12]. Во многих работах шар моделируют как точечную массу [1; 13] либо используют другие предположения, связанные с шаром, которые не имеют физического обоснования (см. обзор [14]). Мы рассматриваем общий случай, когда балка закреплена в середине, а шар может катиться вдоль балки без проскальзывания.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 сначала обсуждаются известные результаты о существовании четтеринг-экстремалей в окрестности особых траекторий второго порядка [6; 7], затем доказывается основной результат настоящей работы. В разд. 3 мы рассматриваем стабилизацию системы шар и балка. Сначала описан оптимальный синтез для линеаризованной системы. Затем демонстрируется применение основной теоремы для исследования нелинейной системы управления. В заключении коротко сформулированы основные результаты работы.

## 2. Четтеринг-экстремали в окрестности особой поверхности

Рассматриваем гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина, аффинную по управлению, с гамильтонианом  $H(\psi, x, u) = H_0(\psi, x) + uH_1(\psi, x)$  в расширенном фазовом пространстве  $(\psi, x) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Без ограничения общности считаем, что управление симметрично,  $|u| \leq 1$ . При сформулированных ниже условиях поведение неособых экстремалей в окрестности особой экстремали второго порядка аналогично поведению экстремалей в задаче Фуллера [5].

**Теорема 1** (О четтеринг-расслоении [6]). Пусть исходная гамильтонова система в окрестности особой точки второго порядка  $(z, w) = (0, w_0)$  приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + f_1(z, w, u), & \dot{z}_3 &= z_4 + f_3(z, w, u), & \dot{w} &= F(z, w, u), \\ \dot{z}_2 &= z_3 + f_2(z, w, u), & \dot{z}_4 &= \alpha(w) + \beta(w)u + f_4(z, w, u), & u &= \operatorname{sgn} z_1. \end{aligned}$$

Пусть функции  $f_i(z, w, u)$  являются малыми возмущениями относительно действия группы Фуллера  $g_\lambda(z) = (\lambda^4 z_1, \lambda^3 z_2, \lambda^2 z_3, \lambda z_4)$ ,  $\lambda > 0$ , т. е.  $f_i(g_\lambda(z), w, u) = O(\lambda^{5-i})$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Если в точке  $w_0$  выполнены неравенства  $\beta(w_0) < 0$ ,  $|\alpha(w_0)| < -\beta(w_0)$ , то существует окрестность  $\mathcal{O}$  точки  $w_0$  в  $\mathbb{R}^{2n-4}$  такая что для любого  $w \in \mathcal{O}$  через точку  $(0, w)$  проходит двумерное подмногообразие, заполненное траекториями с учащающимися переключениями.

В задачах стабилизации особое управление тождественно равно нулю, поэтому можно считать, что  $\alpha(w_0) = 0$  и  $\beta(w_0) = -1$ . Если особая поверхность заполнена особыми экстремалиями *существенного* второго порядка, функции  $f_i(z, w, u)$  равны нулю тождественно в некоторой окрестности особой поверхности. Если особые экстремали имеют локальный второй порядок,  $f_i(z, w, u)$  могут быть отличны от нуля. Условия на  $f_i(z, w, u)$  в теореме 1 могут быть ослаблены в переменных  $z$  и  $w$  специального вида [7, теорема 1.1], но в конкретных системах эти переменные  $z$  и  $w$  могут оказаться функционально зависимыми.

Сначала сформулируем и докажем результат для задачи стабилизации в нуле системы с двумя степенями свободы, которые часто встречаются в приложениях [1–3].

**Теорема 2.** Пусть  $(z, w) \in \mathbb{R}^8$  — система координат такая, что начало координат  $(z, w) = (0, 0)$  — единственная особая экстремаль второго порядка и гамильтонова система принципа максимума Понтрягина записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + f_1(z, w, u), & \dot{w}_1 &= w_2 + h_1(z, w, u), & u &= \operatorname{sgn} z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 + f_2(z, w, u), & \dot{w}_2 &= w_3 + h_2(z, w, u), \\ \dot{z}_3 &= z_4 + f_3(z, w, u), & \dot{w}_3 &= w_4 + h_3(z, w, u), \\ \dot{z}_4 &= \alpha(z, w) + \beta(z, w)u + f_4(z, w, u), & \dot{w}_4 &= \gamma(z, w) + \nu(z, w)u + h_4(z, w, u), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\alpha(0, 0) = 0$ ,  $\beta(0, 0) = -1$ ,  $\gamma(0, 0) = 0$ ,  $\nu(0, 0) = -1$ . Пусть функции  $f_i$  и  $h_i$  удовлетворяют соотношениям малости

$$f_i(g_\lambda(z), g_\lambda(w), u) = O(\lambda^{5-i}), \quad h_i(g_\lambda(z), g_\lambda(w), u) = O(\lambda^{5-i}), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

а функции  $\alpha$ ,  $1 + \beta$ ,  $\gamma$ ,  $1 + \nu$  удовлетворяют соотношениям малости

$$\alpha(g_\lambda(z), g_\lambda(w)), \quad 1 + \beta(g_\lambda(z), g_\lambda(w)), \quad \gamma(g_\lambda(z), g_\lambda(w)), \quad 1 + \nu(g_\lambda(z), g_\lambda(w)) = O(\lambda) \quad (2.3)$$

при  $\lambda \rightarrow 0$ , где  $g_\lambda(z)$  — действие группы Фуллера. Тогда существует двумерная интегральная поверхность, состоящая из четтеринг-экстремалей, которые достигают начала координат за конечное время.

**Доказательство.** Идея доказательства состоит в следующем. Сначала рассматриваем невозмущенную систему

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & \dot{z}_2 &= z_3, & \dot{z}_3 &= z_4, & \dot{z}_4 &= -u, & u &= \operatorname{sgn} z_1. \\ \dot{w}_1 &= w_2, & \dot{w}_2 &= w_3, & \dot{w}_3 &= w_4, & \dot{w}_4 &= -u, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения по  $z$  совпадают с гамильтоновой системой задачи Фуллера (с точностью до переобозначения переменных). Если начальные условия по  $z$  и  $w$  одинаковы, то одинаковы и соответствующие решения  $z(t)$  и  $w(t)$ . Следовательно, для невозмущенной системы уравнений (2.4) мы получаем двумерную поверхность в  $\mathbb{R}^8$ , которая состоит из четтеринг-траекторий  $(z(t), w(t))$ , идущих в начало координат. Далее необходимо показать, что для возмущенной системы (2.1) эта двумерная интегральная поверхность сохраняется. Для этого мы вводим отображение Пуанкаре поверхности переключения системы (2.1) и ищем инвариантную кривую этого отображения. Основная трудность состоит в том, что кривая переключения проходит через точку  $(z, w) = (0, 0)$ , в окрестности которой отображение Пуанкаре не является гладким. Поэтому доказательство существования инвариантной кривой использует технику разрешения особенности.

**Шаг 1.** Определяем отображение Пуанкаре  $\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  поверхности переключения  $\Sigma = \{(z, w) \mid z_1 = 0\}$  на себя. Отображение Пуанкаре  $\Phi$  сопоставляет произвольной точке  $(z^0, w^0) \in \Sigma$  точку первого пересечения с поверхностью  $\Sigma$  траектории системы (2.1), выходящей из  $(z^0, w^0)$ .

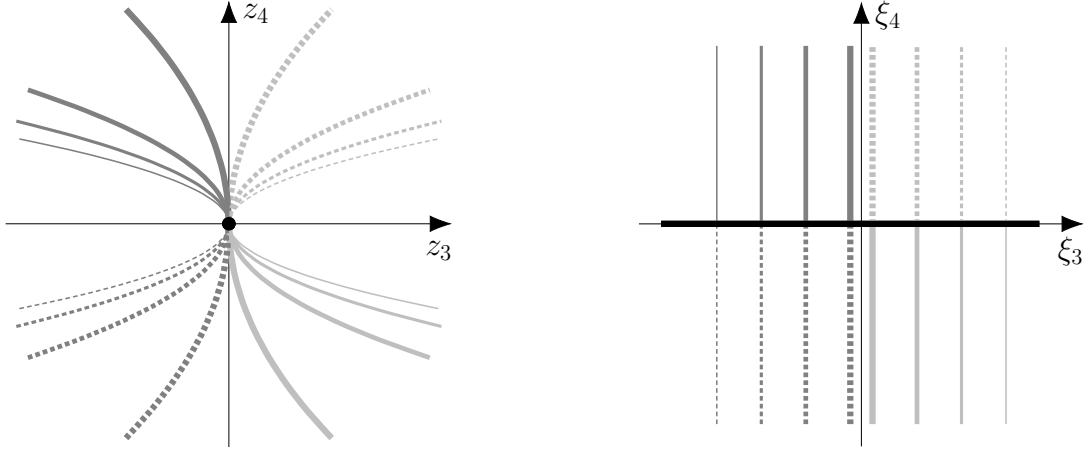


Рис. 1. Разрешение особенности отображения Пуанкаре.

Разрешение особенности двукратного отображения Пуанкаре  $\Phi^2$  в окрестности инвариантной кривой делаем с помощью следующей замены координат  $(z, w) \rightarrow (\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} z_1 &= \xi_4^4 \xi_1, & z_2 &= \xi_4^3 \xi_2, & z_3 &= \xi_4^2 \xi_3, & z_4 &= \xi_4, \\ w_1 &= \xi_4^4 \eta_1, & w_2 &= \xi_4^3 \eta_2, & w_3 &= \xi_4^2 \eta_3, & w_4 &= \xi_4 \eta_4. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эта замена переменных сопоставляет точке  $(z, w) = (0, 0)$  гиперплоскость  $\xi_4 = 0$  в системе координат  $(\xi, \eta)$ , а орбиты группы Фуллера переводит в прямые, перпендикулярные этой гиперплоскости (рис. 1). Далее мы докажем, что в координатах  $(\xi, \eta)$  отображение Пуанкаре корректно определено и является гладким.

Прежде всего нас интересует явный вид двукратного отображения Пуанкаре  $\Phi^2$  поверхности переключения  $\Sigma = \{(\xi, \eta) \mid \xi_1 = 0, \xi_2 \neq 0\}$  при движении по траекториям системы (2.1). Считаем, что первое отображение поверхности переключения  $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  отвечает  $u = -1$ :  $\Phi(\xi_1^{(0)} = 0, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)}, \xi_4^{(0)}, \eta^{(0)}) = (\xi_1^{(1)} = 0, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)})$ , а второе — отвечает  $u = 1$ :  $\Phi(\xi_1^{(1)} = 0, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)}) = (\xi_1^{(2)} = 0, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, \xi_4^{(2)}, \eta^{(2)})$ . Тогда двукратное отображение Пуанкаре  $\Phi^2$  имеет вид  $\Phi^2(\xi_1^{(0)} = 0, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)}, \xi_4^{(0)}, \eta^{(0)}) = (\xi_1^{(2)} = 0, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, \xi_4^{(2)}, \eta^{(2)})$ . Мы покажем, что в координатах  $(\xi, \eta)$  отображение  $\Phi^2$  для системы (2.1) совпадает с таким же отображением для невозмущенной системы (2.4) с точностью до членов более высокого порядка малости по  $\xi_4$ .

**Лемма 1.** Для первого отображения Пуанкаре  $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  при  $u = -1$  имеем (индекс ноль для краткости опущен)

$$\begin{aligned} \xi_2^{(1)} &= \frac{\xi_2 + \tau_1 \xi_3 + (1/2)\tau_1^2 + (1/6)\tau_1^3}{(1 + \tau_1)^3} + \xi_4 \Theta_2(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau_1), \\ \xi_3^{(1)} &= \frac{\xi_3 + \tau_1 + (1/2)\tau_1^2}{(1 + \tau_1)^2} + \xi_4 \Theta_3(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau_1), \\ \xi_4^{(1)} &= \xi_4(1 + \tau_1) + \xi_4^2 \Theta_4(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau_1), \\ \eta_1^{(1)} &= \frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_1 + (1/2)\eta_3 \tau_1^2 + (1/6)\eta_4 \tau_1^3 + (1/24)\tau_1^4}{(1 + \tau_1)^4} + \xi_4 N_1(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau_1), \\ \eta_2^{(1)} &= \frac{\eta_2 + \eta_3 \tau_1 + (1/2)\eta_4 \tau_1^2 + (1/6)\tau_1^3}{(1 + \tau_1)^3} + \xi_4 N_2(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau_1), \\ \eta_3^{(1)} &= \frac{\eta_3 + \eta_4 \tau_1 + (1/2)\tau_1^2}{(1 + \tau_1)^2} + \xi_4 N_3(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau_1), \\ \eta_4^{(1)} &= \frac{\eta_4 + \tau_1}{1 + \tau_1} + \xi_4 N_4(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau_1), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\tau_1(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta)$  — наименьший положительный корень уравнения

$$\xi_2 + (1/2)\tau_1\xi_3 + (1/6)\tau_1^2 + (1/24)\tau_1^3 + \xi_4\Theta_1(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau_1) = 0,$$

если  $\xi_4 > 0$ , и  $\tau_1(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta)$  — наибольший отрицательный корень этого уравнения, если  $\xi_4 < 0$ .

**Доказательство.** (i) Сначала рассматриваем невозмущенную систему (2.4). Интегрируем обе части каждого уравнения при  $u = -1$  с учетом  $z_1(0) = 0$ . Выполняя замену (2.5) и вводя новую переменную  $\tau = t/\xi_4$ , получаем

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= 0, & \eta_1^{(1)} &= \frac{\eta_1 + \eta_2\tau_1 + (1/2)\eta_3\tau_1^2 + (1/6)\eta_4\tau_1^3 + (1/24)\tau_1^4}{(1 + \tau_1)^4}, \\ \xi_2^{(1)} &= \frac{\xi_2 + \xi_3\tau_1 + (1/2)\tau_1^2 + (1/6)\tau_1^3}{(1 + \tau_1)^3}, & \eta_2^{(1)} &= \frac{\eta_2 + \eta_3\tau_1 + (1/2)\eta_4\tau_1^2 + (1/6)\tau_1^3}{(1 + \tau_1)^3}, \\ \xi_3^{(1)} &= \frac{\xi_3 + \tau_1 + (1/2)\tau_1^2}{(1 + \tau_1)^2}, & \eta_3^{(1)} &= \frac{\eta_3 + \eta_4\tau_1 + (1/2)\tau_1^2}{(1 + \tau_1)^2}, \\ \xi_4^{(1)} &= \xi_4(1 + \tau_1), & \eta_4^{(1)} &= \frac{\eta_4 + \tau_1}{1 + \tau_1}; \end{aligned}$$

здесь  $\tau_1$  — наименьший положительный корень уравнения  $\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3\tau + \frac{1}{6}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^3 = 0$ , если  $\xi_4 > 0$ , и  $\tau_1$  — наибольший отрицательный корень этого уравнения, если  $\xi_4 < 0$  (в обоих случаях  $t_1 = \xi_4\tau_1$  — наименьшее время, такое что  $\xi_1^{(1)} = 0$ ).

(ii) Теперь рассматриваем систему (2.1). Как и выше, выполняя замену времени, такую что  $dt = \xi_4 d\tau$ , для  $z$  получаем (для  $w$  — аналогично)

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= \xi_4(z_2 + f_1(z, w, u)), & \frac{dz_2}{d\tau} &= \xi_4(z_3 + f_2(z, w, u)), \\ \frac{dz_3}{d\tau} &= \xi_4(z_4 + f_3(z, w, u)), & \frac{dz_4}{d\tau} &= \xi_4(\alpha(z, w) + \beta(z, w)u + f_4(z, w, u)). \end{aligned}$$

Интегрируя с учетом  $z_1(0) = 0$  при  $u = -1$  и выполняя замену (2.5), находим

$$\begin{aligned} (\xi_4^{(1)})^4 \xi_1^{(1)} &= \int_0^\tau \xi_4^4 \xi_2 d\sigma + \int_0^\tau \xi_4 f_1(z(\xi, \eta), w(\xi, \eta), -1) d\sigma, \\ (\xi_4^{(1)})^3 \xi_2^{(1)} &= (\xi_4^{(0)})^3 \xi_2^{(0)} + \int_0^\tau \xi_4^3 \xi_2 d\sigma + \int_0^\tau \xi_4 f_2(z(\xi, \eta), w(\xi, \eta), -1) d\sigma, \\ (\xi_4^{(1)})^2 \xi_3^{(1)} &= (\xi_4^{(0)})^2 \xi_3^{(0)} + \int_0^\tau \xi_4^2 \xi_3 d\sigma + \int_0^\tau \xi_4 f_3(z(\xi, \eta), w(\xi, \eta), -1) d\sigma, \\ \xi_4^{(1)} &= \xi_4^{(0)} + \int_0^\tau \xi_4 \alpha(z(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\sigma - \int_0^\tau \xi_4 \beta(z(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\sigma \\ &\quad + \int_0^\tau \xi_4 f_4(z(\xi, \eta), w(\xi, \eta), -1) d\sigma. \end{aligned} \tag{2.7}$$

При малых  $\xi_4^{(0)}$  с учетом (2.2) и (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \xi_4 f_i(z(\xi, \eta), w(\xi, \eta), -1) d\sigma &= O((\xi_4^{(0)})^{6-i}), & \int_0^\tau \xi_4 \alpha(z(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\sigma &= O((\xi_4^{(0)})^2), \\ \int_0^\tau \xi_4 \beta(z(\xi, \eta), w(\xi, \eta)) d\sigma &= -\xi_4^{(0)}\tau + O((\xi_4^{(0)})^2). \end{aligned}$$

Следовательно, последнее уравнение (2.7) принимает вид  $\xi_4^{(1)} = \xi_4^{(0)}(1 + \tau) + O((\xi_4^{(0)})^2)$ . Подставляя полученное соотношение в остальные уравнения (2.7) и интегрируя, как в случае невозмущенной системы, получаем утверждение леммы.

Аналогично доказывается

**Лемма 2.** Для второго отображения Пуанкаре  $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  при  $u = 1$  имеем

$$\begin{aligned}
 \xi_2^{(2)} &= \frac{\xi_2^{(1)} + \tau_2 \xi_3^{(1)} + (1/2)\tau_2^2 - (1/6)\tau_2^3}{(1 - \tau_2)^3} + \xi_4^{(1)} \Theta_2^{(1)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)}, \tau_2), \\
 \xi_3^{(2)} &= \frac{\xi_3^{(1)} + \tau_2 - (1/2)\tau_2^2}{(1 - \tau_2)^2} + \xi_4^{(1)} \Theta_3^{(1)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)}, \tau_2), \\
 \xi_4^{(2)} &= \xi_4^{(1)}(1 - \tau_2) + (\xi_4^{(1)})^2 \Theta_4^{(1)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)}, \tau_2), \\
 \eta_1^{(2)} &= \frac{\eta_1^{(1)} + \eta_2^{(1)}\tau_2 + (1/2)\eta_3^{(1)}\tau_2^2 + (1/6)\eta_4^{(1)}\tau_2^3 - (1/24)\tau_2^4}{(1 - \tau_2)^4} \\
 &\quad + \xi_4^{(1)} N_1^{(1)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)}, \tau_2), \\
 \eta_2^{(2)} &= \frac{\eta_2^{(1)} + \eta_3^{(1)}\tau_2 + (1/2)\eta_4^{(1)}\tau_2^2 - (1/6)\tau_2^3}{(1 - \tau_2)^3} + \xi_4^{(1)} N_2^{(1)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)}, \tau_2), \\
 \eta_3^{(2)} &= \frac{\eta_3^{(1)} + \eta_4^{(1)}\tau_2 - (1/2)\tau_2^2}{(1 - \tau_2)^2} + \xi_4^{(1)} N_3^{(1)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \tau_2), \\
 \eta_4^{(2)} &= \frac{\eta_4^{(1)} - \tau_2}{1 - \tau_2} + \xi_4^{(1)} N_4^{(1)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)}, \tau_2);
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

здесь  $\tau_2(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)})$  — наименьший положительный корень уравнения

$$\xi_2^{(1)} + (1/2)\tau_2 \xi_3^{(1)} + (1/6)\tau_2^2 - (1/24)\tau_2^3 + \xi_4^{(1)} \Theta_1^{(1)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)}, \tau_2) = 0,$$

если  $\xi_4^{(1)} > 0$ , и  $\tau_2(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, \eta^{(1)})$  — наибольший отрицательный корень этого уравнения, если  $\xi_4^{(1)} < 0$ .

**Шаг 2.** Теперь ищем неподвижную точку отображения  $\Phi^2$  на поверхности  $\Sigma$  при условии  $\xi_4 = 0$ . В этом случае, как видно из лемм 1 и 2, отображение  $\Phi^2$  отвечает невозмущенной системе (2.4) и имеет две неподвижные точки. Одна неподвижная точка  $(\xi^*, \eta^*)$  отвечает кривой переключения для четтеринг-экстремалей, входящих в ноль, другая неподвижная точка  $(\xi^{**}, \eta^{**})$  — кривой переключения для четтеринг-экстремалей, выходящих из нуля. Достаточно рассмотреть только одну из двух неподвижных точек (как будет показано ниже, в симметричном случае  $|u| \leq 1$  поведение в окрестности другой неподвижной точки получается обращением времени). Мы рассмотрим неподвижную точку  $(\xi^*, \eta^*)$ , которая отвечает четтеринг-экстремалиям, входящим в ноль.

Пусть  $(\xi^*, \eta^*) = (0, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, 0, \xi_2^*, \xi_3^*, 1)$  — искомая неподвижная точка. Используя (2.6), находим, что первая точка переключения  $\Phi(\xi^*, \eta^*) = (\xi^{(1)*}, \eta^{(1)*})$  соответствующей траектории системы (2.4) имеет вид  $(\xi^{(1)*}, \eta^{(1)*}) = (0, \xi_2^{(1)*}, \xi_3^{(1)*}, 0, 0, \xi_2^{(1)*}, \xi_3^{(1)*}, 1)$  и определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
 \xi_2^{(1)*} &= \frac{\xi_2^* + \tau_1^* \xi_3^* + (1/2)(\tau_1^*)^2 + (1/6)(\tau_1^*)^3}{(1 + \tau_1^*)^3}, & \xi_3^{(1)*} &= \frac{\xi_3^* + \tau_1^* + (1/2)(\tau_1^*)^2}{(1 + \tau_1^*)^2}, \\
 \xi_2^* + (1/2)\tau_1^* \xi_3^* + (1/6)(\tau_1^*)^2 + (1/24)(\tau_1^*)^3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

В результате второго отображения Пуанкаре  $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  при  $u = 1$  мы возвращаемся в

точку  $(\xi^*, \eta^*) = (0, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, 0, \xi_2^*, \xi_3^*, 1)$ . Согласно (2.8) имеем

$$\xi_2^* = \frac{\xi_2^{(1)*} + \tau_2^* \xi_3^{(1)*} + (1/2)(\tau_2^*)^2 - (1/6)(\tau_2^*)^3}{(1 - \tau_2^*)^3}, \quad \xi_3^* = \frac{\xi_3^{(1)*} + \tau_2^* - (1/2)(\tau_2^*)^2}{(1 - \tau_2^*)^2}, \quad (2.10)$$

$$\xi_2^{(1)*} + (1/2)\tau_2^* \xi_3^{(1)*} + (1/6)(\tau_2^*)^2 - (1/24)(\tau_2^*)^3 = 0.$$

Мы получили систему из шести уравнений (2.9) и (2.10) относительно шести неизвестных  $(\xi_2^{(1)*}, \xi_3^{(1)*}, \tau_1, \xi_2^*, \xi_3^*, \tau_2)$ .

Для симметричной задачи Фуллера,  $|u| \leq 1$ , справедливы соотношения

$$\xi_2^* = \xi_2^{(1)*}, \quad \xi_3^* = -\xi_3^{(1)*}, \quad \tau_1^* = -\tau_2^*. \quad (2.11)$$

При такой замене тройка уравнений (2.9) переходит в (2.10) и наоборот. Поэтому достаточно решить три уравнения

$$\xi_2^* = \frac{\xi_2^* + \xi_3^* \tau_1^* + (1/2)\tau_1^{*2} + (1/6)\tau_1^{*3}}{(1 + \tau_1^*)^3}, \quad -\xi_3^* = \frac{\xi_3^* + \tau_1^* + (1/2)\tau_1^{*2}}{(1 + \tau_1^*)^2}, \quad (2.12)$$

$$\xi_2^* + (1/2)\xi_3^* \tau_1^* + (1/6)\tau_1^{*2} + (1/24)\tau_1^{*3} = 0$$

относительно неизвестных  $\xi_2^*$ ,  $\xi_3^*$  и  $\tau_1^*$ .

Для дальнейшего упрощения (2.12) используем то, что невозмущенная система (2.4) по переменным  $z$  является гамильтоновой системой задачи Фуллера

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty x^2 dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u \in [-1, 1]. \quad (2.13)$$

Действительно, принцип максимума Понтрягина приводит к гамильтоновой системе

$$\dot{\varphi} = x, \quad \dot{\psi} = -\varphi, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad H(\varphi, \psi, x, y, u) = \varphi y + \psi u - \frac{1}{2}x^2. \quad (2.14)$$

Гамильтониан является первым интегралом этой автономной системы. Поскольку все экстремали приходят в начало координат, они принадлежат нулевому множеству уровня гамильтониана:  $H = 0$ . Замена переменных  $z_1 = \psi$ ,  $z_2 = -\varphi$ ,  $z_3 = -x$ , и  $z_4 = -y$  переводит гамильтонову систему задачи Фуллера (2.14) в первые четыре уравнения невозмущенной системы (2.4).

Соотношение  $H = 0$  в новых переменных принимает вид  $z_2 z_4 + u z_1 - \frac{1}{2} z_3^2 = 0$ . Переходя от переменных  $z$  к переменным  $\xi$  по формулам (2.5), в точке переключения  $\xi_1 = 0$  получаем  $\xi_2^* = \frac{1}{2}(\xi_3^*)^2$ . Исключая  $\xi_2^*$  из (2.12) и выражая  $\xi_3^*$  через  $\tau_1^*$ :  $\xi_3^* = \frac{1 - (1 + \tau_1^*)^2}{2(1 + (1 + \tau_1^*)^2)}$ , сводим задачу к решению уравнения четвертой степени  $\tau_1^{*4} + 7\tau_1^{*3} + 11\tau_1^{*2} + 8\tau_1^* + 4 = 0$ . Это уравнение заменой  $\mu = 1 + \tau_1^*$  сводится к возвратному уравнению

$$\mu^4 + 3\mu^3 - 4\mu^2 + 3\mu + 1 = 0,$$

которое решается в радикалах. Отсюда находим вещественное решение (2.12):

$$\xi_2^* = \frac{\sqrt{33} - 1}{48}, \quad \xi_3^* = \sqrt{\frac{\sqrt{33} - 1}{24}}, \quad \tau_1^* = \frac{1}{4} \left( -7 - \sqrt{33} + \sqrt{26 + 6\sqrt{33}} \right), \quad (2.15)$$

отвечающее кривой переключения семейства четтеринг-траекторий, идущих в ноль. Полученное значение для  $\xi_3^* \approx 0.444624$  совпадает с коэффициентом кривой переключения классической задачи Фуллера [5; 6]. Другая неподвижная точка  $(\xi^{**}, \eta^{**})$ , которая отвечает кривой

переключения для четтеринг-экстремалей, выходящих из нуля, получается обращением времени:  $\xi_2^* = \xi_2^{**}$ ,  $\xi_3^* = -\xi_3^{**}$  и  $\tau_1^* = -\tau_1^{**}$ .

В работе [7] подробности вычислений неподвижной точки отображения Пуанкаре для задачи Фуллера опущены, а приведенные там численные значения  $\xi_2^*$  и  $\tau_1^*$  на порядок отличаются от полученных нами:  $\xi_2^* \approx 0.0988451$  и  $\tau_1^* \approx -1.24212$ .

Шаг 3. Вычисляем дифференциал двойного отображения Пуанкаре  $\Phi^2(\xi^*, \eta^*)$  в полученной неподвижной точке  $(\xi^*, \eta^*) = (0, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, 0, \xi_2^*, \xi_3^*, 1)$ :

$$D\Phi^2(\xi^*, \eta^*) = \Omega_2 \Omega_1, \quad \Omega_1 = \frac{D(\xi^{(1)}, \eta^{(1)})}{D(\xi, \eta)}, \quad \Omega_2 = \frac{D(\xi^{(2)}, \eta^{(2)})}{D(\xi^{(1)}, \eta^{(1)})},$$

где матрица  $\Omega_1$  вычисляется в точке  $(0, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, 0, \xi_2^*, \xi_3^*, 1)$ , а матрица  $\Omega_2$  — в точке  $(0, \xi_2^{(1)*}, \xi_3^{(1)*}, 0, 0, \xi_2^{(1)*}, \xi_3^{(1)*}, 1)$ . Используя формулы (2.6), находим

$$\Omega_1 = \begin{matrix} & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \begin{matrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_3^{(1)} \\ \xi_4^{(1)} \\ \eta_1^{(1)} \\ \eta_2^{(1)} \\ \eta_3^{(1)} \\ \eta_4^{(1)} \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccc} \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_3} & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_3} & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \tau_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1 + \tau_1^*)^4} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1 + \tau_1^*)^3} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1 + \tau_1^*)^2} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1 + \tau_1^*} & * \end{array} \right] , \end{matrix}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{(1 + \tau_1^*)^3} + \frac{\xi_3^{(1)*} - 3\xi_2^{(1)*} \partial \tau_1^*}{1 + \tau_1^* \partial \xi_2}, & \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_3} &= \frac{\tau_1^*}{(1 + \tau_1^*)^3} + \frac{\xi_3^{(1)*} - 3\xi_2^{(1)*} \partial \tau_1^*}{1 + \tau_1^* \partial \xi_3}, \\ \frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_2} &= \frac{1 - 2\xi_3^{(1)*} \partial \tau_1^*}{1 + \tau_1^* \partial \xi_2}, & \frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_3} &= \frac{1}{(1 + \tau_1^*)^2} + \frac{1 - 2\xi_3^{(1)*} \partial \tau_1^*}{1 + \tau_1^* \partial \xi_3}, \\ \frac{\partial \tau_1^*}{\partial \xi_2} &= -\frac{1}{(1/2)\xi_3^* + (1/3)\tau_1^* + (1/8)(\tau_1^*)^2}, & \frac{\partial \tau_1^*}{\partial \xi_3} &= -\frac{(1/2)\tau_1^*}{(1/2)\xi_3^* + (1/3)\tau_1^* + (1/8)(\tau_1^*)^2}. \end{aligned}$$

Аналогично, используя формулы (2.8), находим

$$\Omega_2 = \begin{matrix} & \xi_2^{(1)} & \xi_3^{(1)} & \xi_4^{(1)} & \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \eta_3^{(1)} & \eta_4^{(1)} \\ \begin{matrix} \xi_2^{(2)} \\ \xi_3^{(2)} \\ \xi_4^{(2)} \\ \eta_1^{(2)} \\ \eta_2^{(2)} \\ \eta_3^{(2)} \\ \eta_4^{(2)} \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccc} \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \xi_2^{(1)}} & \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \xi_3^{(1)}} & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \xi_3^{(2)}}{\partial \xi_2^{(1)}} & \frac{\partial \xi_3^{(2)}}{\partial \xi_3^{(1)}} & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \tau_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1 - \tau_2^*)^4} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1 - \tau_2^*)^3} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1 - \tau_2^*)^2} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1 - \tau_2^*} & * \end{array} \right] , \end{matrix}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \xi_2^{(1)}} &= \frac{1}{(1-\tau_2^*)^3} + \frac{\xi_3^* + 3\xi_2^*}{1-\tau_2^*} \frac{\partial \tau_2^*}{\partial \xi_2^{(1)}}, & \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \xi_3^{(1)}} &= \frac{\tau_2^*}{(1-\tau_2^*)^3} + \frac{\xi_3^* + 3\xi_2^*}{1-\tau_2^*} \frac{\partial \tau_2^*}{\partial \xi_3^{(1)}}, \\ \frac{\partial \xi_3^{(2)}}{\partial \xi_2^{(1)}} &= \frac{1+2\xi_3^*}{(1-\tau_2^*)} \frac{\partial \tau_2^*}{\partial \xi_2^{(1)}}, & \frac{\partial \xi_3^{(2)}}{\partial \xi_3^{(1)}} &= \frac{1}{(1-\tau_2^*)^2} + \frac{1+2\xi_3^*}{(1-\tau_2^*)} \frac{\partial \tau_2^*}{\partial \xi_3^{(1)}}, \\ \frac{\partial \tau_2^*}{\partial \xi_2^{(1)}} &= -\frac{1}{(1/2)\xi_3^{(1)*} + (1/3)\tau_2^* - (1/8)(\tau_2^*)^2}, & \frac{\partial \tau_2^*}{\partial \xi_3^{(1)}} &= -\frac{(1/2)\tau_2^*}{(1/2)\xi_3^{(1)*} + (1/3)\tau_2^* - (1/8)(\tau_2^*)^2}. \end{aligned}$$

В случае  $|u| \leq 1$  у невозмущенной системы (2.4) есть дополнительная симметрия (2.11). Отсюда следует  $\Omega_1 = \Omega_2$  и

$$D\Phi^2(\xi^*, \eta^*) = \begin{matrix} & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \begin{matrix} \xi_2^{(2)} \\ \xi_3^{(2)} \\ \xi_4^{(2)} \\ \eta_1^{(2)} \\ \eta_2^{(2)} \\ \eta_3^{(2)} \\ \eta_4^{(2)} \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccc} \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \xi_2^{(1)}} & \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \xi_3^{(1)}} & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \xi_3^{(2)}}{\partial \xi_2^{(1)}} & \frac{\partial \xi_3^{(2)}}{\partial \xi_3^{(1)}} & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\tau_1^*)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1+\tau_1^*)^8} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1+\tau_1^*)^6} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1+\tau_1^*)^4} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1+\tau_1^*)^2} \end{array} \right] , \end{matrix}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \xi_2^{(1)}} &= \left( \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_2} \right)^2 - \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial \xi_3^{(1)}} &= \left( \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_3} \right) \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_3}, \\ \frac{\partial \xi_3^{(2)}}{\partial \xi_2^{(1)}} &= \left( -\frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_3} \right) \frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial \xi_3^{(2)}}{\partial \xi_3^{(1)}} &= -\frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial \xi_3} + \left( \frac{\partial \xi_3^{(1)}}{\partial \xi_3} \right)^2. \end{aligned}$$

Элементы матриц  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $D\Phi^2(\xi^*, \eta^*)$ , обозначенные звездочками, зависят от  $f_i$  и их производных (см. леммы 1 и 2). Но собственные значения и собственные векторы матрицы  $D\Phi^2(\xi^*, \eta^*)$  не зависят от этих матричных элементов и, значит, не зависят от  $f_i$ . Подставляя численные значения координат неподвижной точки (2.15), получаем, что из семи собственных значений матрицы  $D\Phi^2(\xi^*, \eta^*)$ :

$$\lambda_1 = 1444340, \lambda_2 = 84669, \lambda_3 = 0.05862, \lambda_4 = 84671.1, \lambda_5 = 4963.65, \lambda_6 = 290.983, \lambda_7 = 17.0582,$$

есть ровно одно значение, по модулю меньше 1 и шесть значений, по модулю больших 1. Следовательно, найденная на предыдущем шаге неподвижная точка  $(\xi^*, \eta^*)$  отображения  $\Phi^2$  является гиперболической, т. е. дифференциал отображения  $\Phi^2(\xi^*, \eta^*)$  не имеет собственных чисел, равных по абсолютной величине единице.

Шаг 4. Для гиперболической неподвижной точки справедлива

**Теорема 3** (Об инвариантном многообразии [11]). Пусть задано  $C^\infty$ -гладкое отображение  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  и  $F(0) = 0$ . Пусть дифференциал этого отображения  $DF(0)$  имеет  $a_- > 0$  собственных чисел, по модулю меньших единицы. Тогда в малой окрестности начала координат существует  $F$ -инвариантное  $C^\infty$ -гладкое подмногообразие  $\Gamma_-$  размерности  $a_-$  и ограничение  $F$  на  $\Gamma_-$  является сжимающим отображением.

Применяя эту теорему к неподвижной точке  $(\xi^*, \eta^*)$  отображения  $\Phi^2$ , получаем, что устойчивое подмногообразие  $\Gamma_-$  является одномерным (гладкость отображения  $\Phi^2$  следует из лемм 1 и 2). Собственному значению  $(1 + \tau_1^*)^2 \in (0, 1)$  дифференциала  $D\Phi^2(\xi^*, \eta^*)$  отвечает собственный вектор

$$\left. \frac{\partial(\xi^{(2)}, \eta^{(2)})}{\partial \xi_4} \right|_{\xi_4=0} = (0, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

который трансверсален плоскости  $\xi_4 = 0$ . Значит, инвариантная кривая  $\Gamma_-$  отображения  $\Phi^2$ , проходящая через точку  $(\xi^*, \eta^*) = (0, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, 0, \xi_2^*, \xi_3^*, 1)$ , тоже трансверсальна к поверхности  $\xi_4 = 0$  и может быть параметризована переменной  $\xi_4$ .

Остается получить четтеринг-траектории исходной системы (2.1). Возвращаясь к координатам  $(z, w)$ , кривую  $\Gamma_-$  можем записать как

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \xi_2^* z_4^3 + o(z_4^3), \quad z_3 = \xi_3^* z_4^2 + o(z_4^2), \quad w = z.$$

Ограничение  $\Phi^2$  на инвариантную кривую  $\Gamma_-$  является сжимающим отображением. Следовательно,  $\Gamma_-$  определяет двумерное интегральное подмногообразие системы (2.1), которое заполнено четтеринг-траекториями, идущими в начало координат.

Описанная процедура позволяет определить расположение кривой переключения в окрестности нуля и необходимые начальные условия четтеринг-траекторий с любой точностью.

Теорема 2 доказана.

Для задачи стабилизации в нуле  $K + 1$  степеней свободы в системе с  $N$  степенями свободы теорему 2 можно обобщить следующим образом.

**Теорема 4.** Пусть  $(z, w, v) \in \mathbb{R}^{4N}$  и  $w = (w_1, \dots, w_K) \in \mathbb{R}^{4K}$  — система координат, такая что  $(z, w, v_0) = (0, 0, v_0)$  — точка на особой экстремали второго порядка и гамильтонова система принципа максимума Понтрягина записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + f_1(z, w, v, u), & \dot{w}_{i1} &= w_{i2} + h_{i1}(z, w, v, u), & u &= \operatorname{sgn} z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 + f_2(z, w, v, u), & \dot{w}_{i2} &= w_{i3} + h_{i2}(z, w, v, u), & \dot{v} &= F(z, w, v, u), \\ \dot{z}_3 &= z_4 + f_3(z, w, v, u), & \dot{w}_{i3} &= w_{i4} + h_{i3}(z, w, v, u), \\ \dot{z}_4 &= \alpha(z, w, v) + \beta(z, w, v)u + f_4(z, w, v, u), & \dot{w}_{i4} &= \gamma_i(z, w, v) + \nu_i(z, w, v)u + h_{i4}(z, w, v, u), \end{aligned}$$

где  $\alpha(0, 0, v_0) = 0$ ,  $\beta(0, 0, v_0) = -1$ ,  $\gamma_i(0, 0, v_0) = 0$ ,  $\nu_i(0, 0, v_0) = -1$  ( $i = 1, \dots, K$ ). Пусть функции  $f_j$  и  $h_{ij}$  удовлетворяют соотношениям малости

$$f_j(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v, u), \quad h_{ij}(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v, u) = O(\lambda^{5-j}),$$

а функции  $\alpha$ ,  $1 + \beta$ ,  $\gamma_i$ ,  $1 + \nu_i$  удовлетворяют соотношениям малости

$$\begin{aligned} \alpha(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v) &= O(\lambda), & 1 + \beta(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v) &= O(\lambda), \\ \gamma_i(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v) &= O(\lambda), & 1 + \nu_i(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v) &= O(\lambda) \end{aligned}$$

при  $\lambda \rightarrow 0$ , где  $g_\lambda(z)$  — действие группы Фуллера. Тогда существует двумерная интегральная поверхность, состоящая из четтеринг-экстремалей, которые достигают  $(z, w, v_0) = (0, 0, v_0)$  за конечное время.

### 3. Стабилизация системы шар и балка

В качестве приложения рассмотрим систему, состоящую из шара массы  $m$  и радиуса  $R$ , который может катиться вдоль балки без проскальзывания (рис. 2). Считаем, что балка приводится во вращение в вертикальной плоскости за счет приложенного крутящего момента  $u$  в

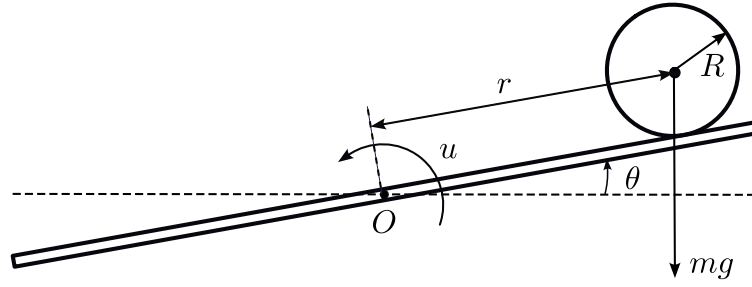


Рис. 2. Система шар и балка.

точке вращения. Тогда уравнения движения имеют вид [12; 14]

$$\begin{aligned} \left(\frac{I_b}{R} + mR\right)\ddot{r} - (I_b + mR^2)\ddot{\theta} - mR\dot{\theta}^2 r + mgR \sin \theta &= 0, \\ (I + mr^2)\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{r} - mR\dot{\theta}^2 r + mgr \cos \theta &= u. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $I$  и  $I_b$  — моменты инерции балки и шара соответственно,  $\theta$  — угол отклонения балки от положения равновесия,  $r$  — расстояние от точки контакта шара с балкой до неподвижной оси вращения балки. Вблизи точки равновесия получаем линеаризованные уравнения движения

$$\ddot{r} - R\ddot{\theta} + \frac{mg}{(I_b/R^2 + m)}\theta = 0, \quad I\ddot{\theta} + mgr = u. \quad (3.2)$$

### 3.1. Стабилизация линеаризованной системы

Сначала рассмотрим стабилизацию линеаризованной системы шар-балка (3.2):

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\xi, \xi) dt \rightarrow \min_u, \quad \ddot{\xi} = \begin{bmatrix} -Rmg/I & -\frac{mg}{(I_b/R^2 + m)} \\ -mg/I & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} R/I \\ 1/I \end{bmatrix} u, \quad |u| \leq u_{\max},$$

где  $u_{\max} > 0$  и  $\xi = (r, \theta)$ . Матрица системы имеет два собственных значения разных знаков:  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . С помощью линейной замены переменных задача сводится к виду

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (Kx, x) dt \rightarrow \min_u, \quad \ddot{x} = Ax + \mathbf{1}u, \quad |u| \leq 1, \quad (3.3)$$

где  $K$  — симметричная положительно определенная  $2 \times 2$  матрица с элементами  $k_{ij}$ ,  $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\mathbf{1}$  — двумерный вектор-столбец из единиц.

Оптимальный синтез в задаче (3.3) с различными  $\lambda_i > 0$  в двумерном случае построен в работе [9], а в  $n$ -мерном случае — в [8]. Мы исследуем оптимальный синтез в задаче (3.3) с  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Для этого вводим фазовые переменные  $(x, y = \dot{x})$  и записываем гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина

$$\dot{\varphi} = Kx - \Lambda\psi, \quad \dot{\psi} = -\varphi, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = \Lambda x + u\mathbf{1}, \quad u = \text{sgn } H_1, \quad (3.4)$$

где  $H(\varphi, \psi, x, y, u) = (\varphi, y) + (\psi, \Lambda x) - \frac{1}{2}(Kx, x) + u(\psi, \mathbf{1}) \equiv H_0 + uH_1$ , а  $(\varphi, \psi)$  — сопряженные переменные.

**Теорема 5.** *Особые экстремали имеют существенный второй порядок, условие Келли (1.2) выполнено в строгой форме, а особое управление имеет вид*

$$u(x) = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{(k_{11}x_1 - k_{22}x_2)}{k_{11} + 2k_{12} + k_{22}}. \quad (3.5)$$

Особые экстремали образуют поверхность размерности четыре в расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}^8(\varphi, \psi, x, y)$ . Оптимальные особые экстремали образуют двумерную особую поверхность. Оптимальный синтез состоит из четтеринг-слоев, выходящих на двумерную особую поверхность. Двигаясь вдоль особой поверхности, оптимальные траектории приходят в начало координат.

**Доказательство.** Особое управление (3.5) и соотношения для особых экстремалей

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{(k_{11} + k_{12})y_1 + (k_{12} + k_{22})y_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \varphi_2 &= -\frac{(k_{11} + k_{12})y_1 + (k_{12} + k_{22})y_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ \psi_1 &= -\frac{(k_{11} + k_{12})x_1 + (k_{12} + k_{22})x_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \psi_2 &= \frac{(k_{11} + k_{12})x_1 + (k_{12} + k_{22})x_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

находим, последовательно дифференцируя равенство  $H_1 = 0$  в силу системы. Управление в соотношениях (1.1) появляется на четвертом шаге и имеет вид (3.5), поэтому особые экстремали имеют *существенный* второй порядок. Из положительной определенности матрицы  $K$  следует, что коэффициент при управлении отрицателен:  $-(K\mathbf{1}, \mathbf{1}) = -(k_{11} + 2k_{12} + k_{22}) < 0$  — т.е. выполнено строгое условие Келли (1.2). Подставляя выражения (3.5) и (3.6) для  $\varphi, \psi$  и  $u$  в дифференциальные уравнения (3.4) для  $x$  и  $y$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{y}_1 &= \frac{(\lambda_1 k_{22} + 2\lambda_1 k_{12} + \lambda_2 k_{11})x_1 - (\lambda_2 - \lambda_1)k_{22}x_2}{k_{11} + 2k_{12} + k_{22}}, \\ \dot{x}_2 &= y_2, & \dot{y}_2 &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)k_{11}x_1 + (\lambda_1 k_{22} + 2\lambda_2 k_{12} + \lambda_2 k_{11})x_2}{k_{11} + 2k_{12} + k_{22}}. \end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения этой системы имеют вид  $\mu_{1,2,3,4} = \pm w \pm iv$ , где  $w > 0$  и  $v > 0$ . Два  $\mu_i$  имеют отрицательную вещественную часть и два — положительную. Решения, отвечающие  $\mu_i$  с отрицательными вещественными частями, приходят в начало координат. Таким образом, оптимальные особые экстремали образуют двумерную особую поверхность, которая параметризуется явными выражениями.

Наконец, вводим полуканоническую систему координат

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi_1 + \psi_2, & z_3 &= -(k_{11} + k_{12})x_1 - (k_{22} + k_{12})x_2 + \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2, \\ z_2 &= -\varphi_1 - \varphi_2, & z_4 &= -(k_{11} + k_{12})y_1 - (k_{22} + k_{12})y_2 - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2, \\ w_1 &= x_1, & w_2 &= y_1, & w_3 &= \lambda_1^2\psi_1, & w_4 &= -\lambda_1^2\varphi_1. \end{aligned}$$

Тогда все  $f_i$  равны нулю, и применима теорема Зеликина — Борисова о четтеринг-расслоении (теорема 1), которая описывает поведение неособых экстремалей.

### 3.2. Стабилизация нелинейной системы

Рассмотрим теперь задачу стабилизации для шара и балки

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty (r^2 + \theta^2) dt \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq 1,$$

на траекториях исходной *нелинейной* системы (3.1), записанной в виде

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v, & \dot{v} &= \frac{Rmr}{I + mr^2} [R\omega^2 - 2\omega v - g \cos \theta] + \frac{mR^2\omega^2 r}{I_b + mR^2} - \frac{mR^2 g}{I_b + mR^2} \sin \theta + \frac{R}{I + mr^2} u, \\ \dot{\theta} &= \omega, & \dot{\omega} &= \frac{mr}{I + mr^2} [R\omega^2 - 2\omega v - g \cos \theta] + \frac{1}{I + mr^2} u. \end{aligned}$$

Исследуем систему принципа максимума Понтрягина с гамильтонианом

$$H(\psi, x, u) \equiv H_0 + uH_1, \quad H_1(\psi, x) = \frac{R\psi_v + \psi_\omega}{I + mr^2}. \quad (3.7)$$

**Теорема 6.** *Единственная особая экстремаль второго порядка — это начало координат  $(\psi, x) = (0, 0)$ , и эта особая экстремаль имеет локальный второй порядок. На особой экстремали выполнено условие Келли (1.2) в строгой форме:*

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4}{dt^4} H_1(0, 0) = -\frac{1 + R^2}{I^2} < 0. \quad (3.8)$$

*Существует двумерная интегральная поверхность, состоящая из четтеринг-экстремалей, которые достигают нуля за конечное время.*

**Доказательство.** Прежде всего зададим особую экстремаль с помощью скобок Пуассона. Производная гладкой функции  $F(\psi, x)$  в силу гамильтоновой системы равна скобке Пуассона, которую мы обозначим как

$$\text{ad}_H F = \{H, F\} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial \psi_i} - \frac{\partial F}{\partial \psi_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right).$$

Для гамильтониана, аффинного по управлению  $H(\psi, x, u) = H_0(\psi, x) + uH_1(\psi, x)$ , верно  $\text{ad}_H F = \text{ad}_{H_0} F + u \text{ad}_{H_1} F$ . На особой экстремали по определению выполнено  $H_1 = 0$ . Последовательное дифференцирование этого равенства в силу системы дает

$$\frac{dH_1}{dt} = \text{ad}_{H_0} H_1, \quad \frac{d^2 H_1}{dt^2} = \text{ad}_{H_0}^2 H_1 + u \text{ad}_{H_1} \text{ad}_{H_0} H_1 = 0, \quad \dots$$

Таким образом, особая экстремаль второго порядка  $(\psi(t), x(t))$  задается условиями

$$H_1 = 0, \quad \text{ad}_{H_i} H_1 = 0, \quad \text{ad}_{H_i} \text{ad}_{H_j} H_1 = 0, \quad \text{ad}_{H_i} \text{ad}_{H_j} \text{ad}_{H_k} H_1 = 0,$$

где  $i, j, k = 0, 1$ . Кроме того,  $\text{ad}_{H_1} \text{ad}_{H_0}^3 H_1 \neq 0$ . Если эти условия выполнены в окрестности особой экстремали — экстремаль имеет существенный второй порядок, если только на самой экстремали — локальный второй порядок.

Покажем, что в системе шар-балка начало координат — единственная особая экстремаль второго порядка и ее порядок локальный. Используя выражение (3.7), из  $H_1(\psi, x) = 0$  находим  $\psi_\omega = -R\psi_v$ . Отсюда следует

$$\text{ad}_{H_1} \text{ad}_{H_0} H_1 = -\frac{2mR^2 r \psi_v}{(I + mr^2)^2 (I_b + mR^2)}.$$

Равенство  $\text{ad}_{H_1} \text{ad}_{H_0} H_1 = 0$  дает  $r\psi_v = 0$ . Тогда  $\text{ad}_{H_0} H_1$  принимает вид

$$\text{ad}_{H_0} H_1 = -\frac{R\psi_r + \psi_\theta}{I + mr^2}.$$

Из равенства  $\text{ad}_{H_0} H_1 = 0$  находим  $\psi_\theta = -R\psi_r$ . Используя полученные соотношения, записываем гамильтонову систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v, & \dot{v} &= \frac{Rmr}{I + mr^2} [R\omega^2 - 2\omega v - g \cos \theta] + \frac{mR^2 \omega^2 r}{I_b + mR^2} - \frac{mR^2 g \sin \theta}{I_b + mR^2} + \frac{R}{I + mr^2} u, \\ \dot{\theta} &= \omega, & \dot{\omega} &= \frac{mr}{I + mr^2} [R\omega^2 - 2\omega v - g \cos \theta] + \frac{1}{I + mr^2} u, \\ \dot{\psi}_r &= r - \frac{mR^2}{I_b + mR^2} \omega^2 \psi_v, & \dot{\psi}_\theta &= \theta + \frac{mR^2 g}{I_b + mR^2} \psi_\omega \cos \theta, & \dot{\psi}_v &= -\psi_r, & \dot{\psi}_\omega &= -\psi_\theta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Равенство  $r\psi_v = 0$  означает, что на особой экстремали либо  $r = 0$ , либо  $\psi_v = 0$ . Рассмотрим случай  $\psi_v = 0$ . Из равенства  $\psi_\omega = -R\psi_v$  следует  $\psi_\omega = 0$ . Тогда из (3.9) получаем  $\psi_r = -\dot{\psi}_v = 0$  и  $\psi_\theta = -\dot{\psi}_\omega = 0$ . Подставляя  $\psi = 0$  в (3.9), имеем  $r = \dot{\psi}_r = 0$ ,  $\theta = \dot{\psi}_\theta = 0$ ,  $v = \dot{r} = 0$  и  $\omega = \dot{\theta} = 0$ . Таким образом,  $x = 0$ . Наконец,  $u = I\dot{\omega} = 0$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $r = 0$  на особой экстремали. Из (3.9) находим

$$v = \dot{r} = 0, \quad \dot{v} = -\frac{mR^2g}{I_b + mR^2} \sin \theta + \frac{R}{I}u = 0.$$

Следовательно,  $u = c \sin \theta$ , где  $c = mRgI/(I_b + mR^2)$ . Из уравнений гамильтоновой системы (3.9) имеем  $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = u/I$ . В результате получаем уравнение  $\ddot{\theta} = C \sin \theta$ , где  $C = mRg/(I_b + mR^2)$ . Ненулевое решение этого уравнения не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $\theta \neq 0$  на особой экстремали, интегральный функционал расходится. Поэтому  $x = 0$  и  $u = 0$  на особой экстремали. С учетом  $\psi_\omega = -R\psi_v$  и  $\psi_\theta = -R\psi_r$  имеем

$$\text{ad}_{H_0}^3 H_1 = \frac{gmR^2}{I(I_b + mR^2)} \psi_r = 0.$$

Тогда  $\psi_r = 0$  и  $\psi_\theta = -R\psi_r = 0$ . Отсюда следует

$$\psi_\omega = \frac{I_b + mR^2}{mR^2g} \dot{\psi}_\theta = 0, \quad \psi_v = -\frac{\psi_\omega}{R} = 0.$$

Таким образом, и в случае  $r = 0$  особая экстремаль совпадает с началом координат.

Порядок особой экстремали локальный, поскольку в окрестности нуля управление появляется на втором шаге дифференцирования  $H_1$ . Условие Келли в строгой форме (3.8) получаем, подставляя  $x = \psi = 0$  и  $u = 0$  в выражение для  $\text{ad}_{H_1} \text{ad}_{H_0}^3 H_1$ .

Наконец, вводим полуканоническую систему координат

$$\begin{aligned} z_1 &= R\psi_v + \psi_\omega, & z_2 &= -R\psi_r - \psi_\theta, & z_3 &= -Rr - \theta, & z_4 &= -Rv - \omega, \\ w_1 &= \psi_v, & w_2 &= -\psi_r, & w_3 &= -r, & w_4 &= -v. \end{aligned}$$

Переменные  $z_i$  похожи на скобки Пуассона  $\text{ad}_{H_0}^{i-1} H_1$  для линеаризованной системы: у скобок Пуассона берутся слагаемые наименьшего порядка. Тогда в окрестности особой экстремали гамильтонова система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + p_1(z, w), & \dot{z}_2 &= z_3 + p_2(z, w) + r_1(z, w)u, & \dot{z}_3 &= z_4, & \dot{z}_4 &= \alpha(z, w) + \beta(z, w)u, \\ \dot{w}_1 &= w_2 + q_1(z, w), & \dot{w}_2 &= w_3 + q_2(z, w) + r_2(z, w)u, & \dot{w}_3 &= w_4, & \dot{w}_4 &= \gamma(z, w) + \nu(z, w)u \end{aligned}$$

и выполнены условия нашей теоремы 2. Отсюда следует существование четтеринг-экстремалей.

## Заключение

Исследованы экстремали в задаче стабилизации нелинейной системы управления. Для аффинной по управлению гамильтоновой системы с особой экстремалью второго порядка доказана теорема о существовании четтеринг-экстремалей. Эта теорема применима в тех случаях, которые не покрываются теоремой Келли — Коппа — Мойера и теоремами о четтеринг-расслоении [6; 7]. В качестве примера рассмотрена система шар-балка. В задаче управления *линеаризованной* системой шар-балка построен оптимальный синтез. Доказано, что оптимальные особые траектории имеют второй порядок и образуют двумерную поверхность. В задаче управления для *нелинейной* системы шар-балка показано, что особой траекторией второго порядка является только начало координат и существует двумерное семейство четтеринг-экстремалей.

## Благодарности

Мы благодарны рецензенту за полезные комментарии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фантони И., Лозано Р.** Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий. Москва: К-Динамика, 2012. 312 с.
2. **Liu Y., Yu H.** A survey of underactuated mechanical systems // IET Control Theory Appl. 2013. Vol. 7, no. 7. P. 921–935. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2012.0505>
3. **Formalskii A.M.** Stabilisation and motion control of unstable objects. Berlin: De Gruyter, 2015. 255 p. (Ser. De Gruyter Stud. Math. Phys., vol. 33). <https://doi.org/10.1515/9783110375893>
4. **Krasovskii N.N.**, Problems of control and stabilization in dynamical systems // J. Math. Sci. 2000. Vol. 100, no. 5. P. 2458–2469. <https://doi.org/10.1007/BF02673836>
5. **Fuller A.T.** Relay control systems optimized for various performance criteria // Proc. First World Congress IFAC (Moscow, 1960). London: Butterworths, 1961. P. 510–519.
6. **Zelikin M.I., Borisov V.F.** Theory of Chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering. Boston, MA: Birkhauser, 1994. 244 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2702-1>
7. **Zelikin M.I., Borisov V.F.** Optimal chattering feedback control // J. Math. Sci. 2003. Vol. 114, no. 3. P. 1227–1344. <https://doi.org/10.1023/A:1022082011808>
8. **Manita L.A., Ronzhina M.I.** Optimal synthesis in the control problem of an  $n$ -link inverted pendulum with a moving base // J. Math. Sci. 2017. Vol. 221. P. 137–153. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3222-x>
9. **Ronzhina M.I.** Optimal conditions with chattering in the inverted two-link pendulum control problem // J. Appl. Math. Mech. 2016. Vol. 80, no. 1. P. 16–23. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.05.004>
10. **Мельников Н.Б., Ронжина М.И.** Экстремали с бесконечным числом переключений в задачах стабилизации аффинных по управлению // Успехи мат. наук. 2024. Т. 79, № 5. С. 187–188. <https://doi.org/10.4213/rm10198>
11. **Hirsch M.W., Pugh C.C., Shub M.** Invariant manifolds. Berlin: Springer, 1977. 150 p. (Ser. Lecture Notes in Math.; vol. 583). <https://doi.org/10.1007/BFb0092042>
12. **Ронжина М.И., Мельников Н.Б.** Машинное обучение и оптимальное управление: линейно-квадратичные задачи, М.: Изд. центр РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М.Губкина. 2024. 126 с.
13. **Hauser J., Sastry, S., Kokotovic P.** Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example // Proc. 28th IEEE Conf. on Decision and Control. Tampa, FL, 1989. P. 1987–1993. <https://doi.org/10.1109/CDC.1989.70513>
14. **Lare C., White W. N., Hossain S.** Motion equations for the ball and beam and the ball and arc systems // J. Dyn. Sys., Meas., Control. 2019. Vol. 141, no. 12, art. no. 121006. 11 p. <https://doi.org/10.1115/1.4044619>

Поступила 12.10.2024

После доработки 27.11.2024

Принята к публикации 2.12.2024

Мельников Николай Борисович  
д-р физ.-мат. наук, профессор,  
МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва,  
e-mail: melnikov@cs.msu.ru

Ронжина Мария Игоревна  
канд. физ.-мат. наук, доцент,  
РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, г. Москва,  
e-mail: ronzhina.m@gubkin.ru

## REFERENCES

1. Fantoni I., Lozano R. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. London, Springer, 2002, 295 p. doi: 10.1007/978-1-4471-0177-2. Translated to Russian under the title *Nelineynoye upravleniye mekhanicheskimi sistemami s defitsitom upravlyayushchikh vozdeystviy*. Moscow — Izhevsk, ООО “Комп’ютрная динамика”, 2012, 312 p. ISBN: 978-5-906268-01-3.

2. Liu Y., Yu H. A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory Appl.*, 2013, vol. 7, no. 7, pp. 921–935. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2012.0505>
3. Formalskii A.M. *Stabilisation and motion control of unstable objects*. De Gruyter Stud. Math. Phys., vol. 33, Berlin, De Gruyter Publ., 2015, 255 p. <https://doi.org/10.1515/9783110375893>
4. Krasovskii N.N. Problems of control and stabilization in dynamical systems. *J. Math. Sci.*, 2000, vol. 100, no. 5, pp. 2458–2469. <https://doi.org/10.1007/BF02673836>
5. Fuller A.T. Relay control systems optimized for various performance criteria. In: *Proc. First World Congress IFAC (Moscow, 1960)*, London, Butterworths, 1961, pp. 510–519.
6. Zelikin M.I., Borisov V.F. *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering*. Boston, Birkhäuser, 1994, 244 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2702-1>
7. Zelikin M.I., Borisov V.F. Optimal chattering feedback control. *J. Math. Sci.*, 2003, vol. 114, no. 3, pp. 1227–1344. <https://doi.org/10.1023/A:1022082011808>
8. Manita L.A., Ronzhina M.I. Optimal synthesis in the control problem of an  $n$ -link inverted pendulum with a moving base. *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 221, pp. 137–153. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3222-x>
9. Ronzhina M.I. Optimal conditions with chattering in the inverted two-link pendulum control problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 2016, vol. 80, no. 1, pp. 16–23. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.05.004>
10. Melnikov N.B., Ronzhina M.I. Chattering extremals in control-affine stabilization problems. *Russian Math. Surveys*, 2024, vol. 79, no. 5, pp. 931–933. <https://doi.org/10.4213/rm10198e>
11. Hirsch M.W., Pugh C.C., Shub M. *Invariant Manifolds*. Ser. LNM, vol. 583, Berlin, Heidelberg, Springer, 1977, 150 p. <https://doi.org/10.1007/BFb0092042>
12. Ronzhina M.I., Melnikov N.B. Machine learning and optimal control. Moscow, Publ. National Univ. Oil and Gas “Gubkin University”, 2024, 126 p. (in Russian). ISBN 978-5-91961-517-0.
13. Hauser J., Sastry S., Kokotovic P. Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example. In: *28th IEEE Conf. on Decision and Control*, Tampa, FL, 1989, pp. 1987–1993. <https://doi.org/10.1109/CDC.1989.70513>
14. Lare C., White W.N., Hossain S. Motion equations for the ball and beam and the ball and arc systems. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 2019, vol. 141, no. 12, art. no. 121006, 11 p. <https://doi.org/10.1115/1.4044619>

Received October 12, 2024

Revised November 27, 2024

Accepted December 2, 2024

*Nikolai B. Melnikov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119899 Russia, e-mail: melnikov@cs.msu.ru .

*Mariya I. Ronzhina*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), National University of Oil and Gas “Gubkin University”, Moscow, 119991 Russia, e-mail: ronzhina.m@gubkin.ru .

Cite this article as: N. B. Melnikov, M. I. Ronzhina. Chattering trajectories in stabilization problems for nonlinear control-affine systems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 138–153 .