ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 1 2025

УДК 517.929.5

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПЕРИОД КОТОРЫХ ВЗАИМНО ПРОСТ С ПЕРИОДОМ СИСТЕМЫ

А. В. Ласунский

В работе доказано, что если линейная неоднородная периодическая система $x(n+1)=P(n)x(n)+f(n)$, в которой матрицы $P(n)$ и $f(n)$ ω-периодичны ($\omega\neq 1$), $\det P(n)\neq 0$, имеет Ω-периодическое решение ($\Omega\neq 1$), период которого взаимно прост с периодом системы, то существует $n_0\in\mathbb{Z}_+$ такое, что для всех $n\in\mathbb{Z}_+$ $\det(P(n)-P(n_0))=0$. Приведен пример линейной неоднородной системы второго порядка, в которой матрицы $P(n)$ и $f(n)$ имеют общий период 3, а система имеет 2-периодическое решение. Построены ω-периодические ($\omega\neq 1$) нелинейные системы разностных уравнений в двумерном и трехмерном случаях, имеющие решение, период которого $\Omega\neq 1$ взаимно прост с ω, но при этом система не имеет ω-периодических решений. Доказано, что дискретное неавтономное логистическое уравнение

$$x_{n+1}=x_n\exp\Big(r_n\Big(1-\frac{x_n}{K_n}\Big)\Big),$$

где $\{r_n\}$ и $\{K_n\}$ — положительные периодические последовательности с общим периодом ω ($\omega\neq 1$), не может иметь Ω-периодическое решение ($\Omega\neq 1$), период которого взаимно прост с ω.

Ключевые слова: периодические решения периодической системы разностных уравнений, взаимная простота периодов.

A. V. Lasunsky. On periodic solutions of a system of difference equations whose period is coprime with the period of the system.

It is proved that if a linear inhomogeneous periodic system $x(n+1)=P(n)x(n)+f(n)$, in which the matrices $P(n)$ and $f(n)$ are ω-periodic ($\omega\neq 1$) and $\det P(n)\neq 0$, has an Ω-periodic solution ($\Omega\neq 1$) whose period is coprime with the period of the system, then there is $n_0\in\mathbb{Z}_+$ such that $\det(P(n)-P(n_0))=0$ for all $n\in\mathbb{Z}_+$. An example of a linear inhomogeneous second-order system is given in which the matrices $P(n)$ and $f(n)$ have a common period 3, and the system has a 2-periodic solution. In the two-dimensional and three-dimensional cases, we construct nonlinear ω-periodic ($\omega\neq 1$) systems of difference equations that have a solution whose period $\Omega\neq 1$ is coprime with ω, but the system does not have ω-periodic solutions. It is proved that the discrete nonautonomous logistic equation

$$x_{n+1}=x_n\exp\Big(r_n\Big(1-\frac{x_n}{K_n}\Big)\Big),$$

where $\{r_n\}$ and $\{K_n\}$ are positive periodic sequences with a common period ω ($\omega\neq 1$), cannot have an Ω-periodic solution ($\Omega\neq 1$) whose period is coprime with ω.

Keywords: periodic solutions of a periodic system of difference equations, coprimality of periods.

MSC: 39A33

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-110-118

1. Введение

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x_{n+1}=X(n,x_n),\quad n\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\},\quad x_n\in\mathbb{R}^m,\tag{1.1}$$

правая часть которой ω-периодична по n, т. е. существует такое наименьшее $\omega\in\mathbb{N}$, что для любого фиксированного $p\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$X(n+\omega,p)=X(n,p)$$

при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Далее под периодом системы (1.1) будем понимать период ее правой части. Если $\omega = 1$, то система (1.1) автономна. Этот случай будем оговаривать отдельно.

Будем предполагать, что вектор-функция

$$X : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

определена при всех значениях своих аргументов.

Будем считать, что последовательность $x_n = x(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, является Ω-периодической ($\Omega \in \mathbb{N}$), если для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство $x_{n+\Omega} = x_n$. Ясно, что период последовательности определяется не однозначно. В дальнейшем под периодом последовательности будем понимать наименьший из периодов (основной период). Если основной период равен 1, то последовательность, очевидно, постоянна. Постоянное решение системы (1.1), как и в случае дифференциальных уравнений, будем называть положением равновесия или точкой покоя. Вопросами существования и построения периодических решений дискретных уравнений и систем занимались многие авторы (см. [1–4] и др.). В основном они изучали решения, период которых совпадал с периодом уравнения (системы). Пусть $\varphi(n)$ является Ω-периодическим решением ($\Omega \neq 1$) системы (1.1). Всегда ли период Ω кратен ω ($\omega \neq 1$) или, наоборот, ω кратно Ω? Чтобы ответить на этот вопрос и построить соответствующие примеры, обратимся к дифференциальным уравнениям.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

где функция $X(t, x)$ непрерывна по своим аргументам и удовлетворяет какому-либо условию, обеспечивающему единственность решения задачи Коши. Пусть существует $\omega > 0$ такое, что $X(t + \omega, x) = X(t, x)$ для всех x и t.

Еще в 30-х годах прошлого века группой физиков под руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси [5] экспериментально были обнаружены асинхронные колебания, описываемые сильно нерегулярными периодическими решениями системы (1.2).

Х. Л. Массер заметил [6], что периодическое решение системы (1.2) может иметь период Ω, несоизмеримый с ω, т. е. их отношение есть иррациональное число. Этот результат Х. Л. Массера положил начало новому направлению в качественной теории дифференциальных уравнений. Немного позднее участники семинара по нелинейным колебаниям Я. Куцвейль и О. Вейвода, на тот момент только что окончившие аспирантуру, а впоследствии — широко известные чешские математики высокого уровня, установили [7], что для всякой системы (1.2), имеющей периодическое решение, период которого несоизмерим с периодом правых частей, правые части вдоль такого решения не зависят от времени t. Пример такой системы Н. П. Еругина можно найти, например, в [8] или [9, с. 483]. Развитие новое направление получило в работах И. В. Гайшуна [10], Э. И. Грудо [11–13], Ю. А. Ильина [14], В. Т. Борухова [15] и других математиков.

К началу 70-х годов прошлого века в физике уже был известен ряд систем, в которых колебательные процессы осуществляются на собственной частоте, в общем случае несоизмеримой с частотой внешней силы [16; 17].

Оказывается, многие аналогичные факты имеют место и для разностных уравнений, только теперь уже будет идти речь о взаимной простоте периодов ω и Ω. Дискретный аналог теоремы Массер — Курцвейля — Вейводы доказан в [18, теорема 1]. По аналогии с теорией дифференциальных уравнений [19] Ω-периодическое решение ω-периодической системы (1.1) такое, что ω и Ω взаимно просты, следуя работам [20; 21], будем также называть сильно нерегулярным.

2. Линейные системы разностных уравнений и сильно нерегулярные решения

Докажем сначала следующее утверждение, которое будем использовать в дальнейшем. Оно касается не обязательно линейных систем разностных уравнений.

Предложение 1. *Пусть $\varphi(n)$ является Ω-периодическим решением ω-периодической системы (1.1) ($\Omega \neq 1, \omega \neq 1$) и НОД$(\omega, \Omega) = 1$, тогда $\varphi(n)$ есть решение любой автономной системы $x_{n+1} = X(n_0, x_n)$, где $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ произвольно.*

Доказательство. Действительно, возьмем произвольное $n_0 \in \mathbb{Z}_+$. Имеем $\varphi(n_0+1) = X(n_0, \varphi(n_0))$, так как $\varphi(n)$ — решение системы (1.1). В силу дискретного аналога теоремы Массера — Курцвейля — Вейводы (см. [18, теорема 1]) $X(n, \varphi(n_0)) = X(n_0, \varphi(n_0))$, поэтому $\varphi(n_0+1) = X(n, \varphi(n_0))$. Заменяя n_0 на n, а n на n_0, получаем $\varphi(n+1) = X(n_0, \varphi(n))$.

В работе [20] получено необходимое условие существования сильно нерегулярных периодических решений дискретной линейной однородной периодической системы второго порядка. А. К. Деменчук показал [21], что линейное неоднородное нестационарное периодическое дискретное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, отличных от постоянных. В следующей теореме мы получим необходимое условие существования сильно нерегулярных периодических решений дискретной линейной неоднородной периодической системы произвольного порядка. Как следствие, из этой теоремы будет вытекать результат [21] для скалярного случая. Далее мы приведем пример дискретной линейной неоднородной периодической системы второго порядка, имеющей сильно нерегулярное решение.

Теорема 1. *Если линейная неоднородная периодическая система*

$$x(n+1) = P(n)x(n) + f(n), \tag{2.1}$$

в которой матрицы $P(n)$ и $f(n)$ ω-периодичны ($\omega \neq 1$), $\det P(n) \neq 0$, имеет сильно нерегулярное Ω-периодическое решение ($\Omega \neq 1$), то существует $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что для всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\det(P(n) - P(n_0)) = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(n)$ — сильно нерегулярное Ω-периодическое решение ($\Omega \neq 1$) системы (2.1), тогда для любого $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ по предложению 1 $\varphi(n)$ является решением системы

$$x(n+1) = P(n_0)x(n) + f(n_0).$$

Для $n_0 = 0$

$$\begin{aligned} &\varphi(1) = P(0)\varphi(0) + f(0), \\ &\varphi(2) = P(0)\varphi(1) + f(0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi(0) = \varphi(\Omega) = P(0)\varphi(\Omega-1) + f(0), \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{\Omega-1} \varphi(k) = P(0) \sum_{k=0}^{\Omega-1} \varphi(k) + \Omega f(0).$$

Аналогично для $i = 1, \dots, \omega - 1$

$$\sum_{k=0}^{\Omega-1} \varphi(k) = P(i) \sum_{k=0}^{\Omega-1} \varphi(k) + \Omega f(i).$$

Имеем

$$f(n) = \frac{1}{\Omega}\Big(\sum_{k=0}^{\Omega-1} \varphi(k) - P(n) \sum_{k=0}^{\Omega-1} \varphi(k) \Big), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.3}$$

Исходная система (2.1) принимает вид

$$y(n+1) = P(n)y(n); \tag{2.4}$$

здесь

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{\Omega}\sum_{k=0}^{\Omega-1}\varphi(k).$$

Итак, если линейная неоднородная система (2.1) имеет сильно нерегулярное решение $\varphi(n)$, то линейная однородная система (2.4) имеет сильно нерегулярное решение

$$\psi(n) = \varphi(n) - \frac{1}{\Omega}\sum_{k=0}^{\Omega-1}\varphi(k).$$

Так как $\Omega \neq 1$, то существует $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $\psi(n_0) \neq \mathbb{O}$. По дискретному аналогу теоремы Массера — Курцвейля — Вейводы [18]

$$P(n)\psi(n_0) = P(n_0)\psi(n_0) = \mathrm{const}.$$

Для однородной системы $(P(n) - P(n_0)\psi = \mathbb{O}$ находим ненулевое решение $\psi(n_0)$, значит, $\det(P(n) - P(n_0)) = 0$.

Следствие 1 (см. [21]). *Линейное неоднородное нестационарное периодическое дискретное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, отличных от постоянных.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если такое решение существует, то в скалярном случае соотношение (2.2) означает, что последовательность $p(n)$ постоянна, а тогда и последовательность $f(n)$ (см.(2.3)) постоянна. □

Приведем пример системы (2.1) второго порядка, в которой матрицы $P(n)$ и $f(n)$ 3-периодичны, а система имеет 2-периодическое решение.

П р и м е р 1. Система

$$x(n+1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \cos\dfrac{2\pi n}{3} \end{pmatrix} x(n) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \cos\dfrac{2\pi n}{3} \end{pmatrix}$$

имеет период 3, а также 2-периодическое решение

$$x(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в этом примере $\forall n, n_0 \in \mathbb{Z}_+ \quad \det(P(n) - P(n_0)) = 0$.

В статье [14] отмечается, что если для системы (1.2) в двумерном случае существует решение с несоизмеримым периодом, то она имеет хотя бы одно ω-периодическое решение (не исключается случай $\omega = 0$). Дискретный аналог этого утверждения невозможен. В этом можно убедиться на следующем примере.

П р и м е р 2. Правая часть системы

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -x_n, \\ y_{n+1} &= y_n + \Big(1 + 2\sin\dfrac{\pi}{k}\cos\Big(\dfrac{\pi}{k} + \dfrac{2\pi n}{k}\Big)\Big)(x_n^2 - 1), \end{cases}$$

($k > 1$ нечетное) периодична с периодом $\omega = k$. Система характеризуется общим решением

$$x_n = C_1(-1)^n, \quad y_n = C_2 + (C_1^2 - 1)\Big(n + \sin\frac{2\pi n}{k}\Big).$$

1) Если $C_1 = \pm 1$, то система имеет решения $x_n = C_1(-1)^n$, $y_n = C_2$ с периодом $\Omega = 2$, причем НОД(Ω, k)=1.

2) Если $C_1 \neq \pm 1$, то решения не являются периодическими, так как y_n — неограниченная последовательность.

Неудивительно, что и в трехмерном случае можно построить соответствующие примеры.

Пример 3. Правая часть системы

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -y_n, \\ y_{n+1} &= x_n, \\ z_{n+1} &= z_n + \Big(1 + 2\sin\dfrac{\pi}{k}\cos\Big(\dfrac{\pi}{k} + \dfrac{2\pi n}{k}\Big)\Big)(x_n^2 + y_n^2 - 1), \end{cases}$$

$k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, НОД$(k; 4) = 1$, имеет период $\omega = k$. Система обладает общим решением

$$x_n = C_1\cos\frac{\pi n}{2} + C_2\sin\frac{\pi n}{2}, \quad y_n = C_1\sin\frac{\pi n}{2} + C_2\cos\frac{\pi n}{2}, \quad z_n = C_3 + (C_1^2 + C_2^2 - 1)\Big(n + \sin\frac{2\pi n}{k}\Big).$$

1) Если $C_1^2 + C_2^2 = 1$, то у системы есть решение с периодом $\Omega = 4$. Система имеет решения, период которых взаимно прост с периодом правой части системы.

2) Если $C_1^2 + C_2^2 \neq 1$, то $z_n \to \infty$ при $n \to +\infty$ и больше периодических решений нет.

Х. Л. Массер доказал [6], что у системы $\dfrac{dx}{dt} = X(x) + f(t)$, где $f(t)$ ω-периодическая вектор-функция, нет решений с несоизмеримым периодом (см. также работу [14]). Аналогичное утверждение справедливо и для дискретного случая, справедливость которого сразу вытекает из дискретного аналога теоремы Массера — Курцвейля — Вейводы (см. [18, теорема 1]).

Предложение 2. *Система*

$$x_{n+1} = X(x_n) + f_n,$$

где f_n — k-периодическая последовательность ($k \neq 1$), не имеет периодических решений, период которых взаимно прост с k.

3. Дискретное периодическое логистическое уравнение

Дискретное периодическое логистическое уравнение

$$x_{n+1} = x_n \exp\Big(r_n\Big(1 - \frac{x_n}{K_n}\Big)\Big), \tag{3.1}$$

где r_n и K_n — положительные периодические последовательности, является одной из основных моделей роста численности популяций изолированных видов. Для постоянных коэффициентов r_n, K_n динамика уравнения (3.1) достаточно хорошо изучена [22, с. 46–54]. На примере уравнения $x_{n+1} = x_n\exp(r(1 - x_nK^{-1}))$ при увеличении параметра r можно проследить переход к хаотическому режиму через бифуркации удвоения периода решений.

Если r_n и K_n — положительные периодические последовательности с общим периодом ω, то у уравнения (3.1) существует ω-периодическое решение [23] (не исключается случай $\omega = 1$). В этой же работе получено достаточное условие глобальной асимптотической устойчивости данного решения.

В статье [24] для уравнения

$$x_{n+1} = x_n \exp(r_n(1 - x_n)),$$

в котором r_n — положительная ω-периодическая последовательность ($\omega \neq 1$), найдено достаточное условие существования не менее двух положительных ω-периодических решений, отличных от положения равновесия. В работе [18] построены примеры ω-периодического логистического уравнения $x_{n+1} = x_n \exp(r_n(1 - x_n))$, имеющего периодические решения периода $\omega, 2\omega, 3\omega$. В [24] можно найти пример уравнения (3.1), в котором r_n и K_n — положительные 3-периодические последовательности и уравнение имеет 3-периодическое и 6-периодическое решения.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании сильно нерегулярных решений у уравнения (3.1), отличных от положения равновесия. Сначала отметим два простейших следствия теоремы Массера — Курцвейля — Вейводы (см. [18, теорема 1]).

Предложение 3. *Уравнение* (3.1)*, в котором* $r_n = r > 0, K_n$ *— положительная* ω*-периодическая последовательность* ($\omega \neq 1$)*, не может иметь сильно нерегулярное решение* ($\Omega \neq 1$)*.*

Предложение 4. *Уравнение* (3.1)*, в котором* $K_n = K > 0, r_n$ *— положительная* ω*-периодическая последовательность* ($\omega \neq 1$)*, не может иметь сильно нерегулярное решение* ($\Omega \neq 1$)*.*

В общем случае утверждение не столь очевидно.

Теорема 2. *Уравнение* (3.1)*, в котором* r_n *и* K_n *— положительные периодические последовательности с общим периодом* $\omega \neq 1$*, не может иметь сильно нерегулярное решение* ($\Omega \neq 1$)*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(n)$ — такое решение, тогда по предложению 1 при $n = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \varphi_0 \exp(r_0(1 - \varphi_0 K_0^{-1}),\\
&\varphi_2 = \varphi_1 \exp(r_0(1 - \varphi_1 K_0^{-1}),\\
&\varphi_3 = \varphi_2 \exp(r_0(1 - \varphi_2 K_0^{-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_0 = \varphi_\Omega = \varphi_{\Omega-1} \exp(r_0(1 - \varphi_{\Omega-1} K_0^{-1}).
\end{aligned}$$

Перемножив эти равенства, получаем после очевидных преобразований

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{\Omega-1} = K_0\,\Omega.$$

Мы учли, что $\varphi_i \neq 0$. Аналогично, для $n = 1, \ldots, \omega - 1$ имеем

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{\Omega-1} = K_i\,\Omega, \quad i = 1, \ldots, \omega - 1.$$

Отсюда следует, что K_n постоянная последовательность. Противоречие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Janglajew K., Schmeidel E.** Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations // Advances in Difference Equations. 2012. Art. no. 195. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-195
2. **Elaydi S.** An introduction to difference equations. NY: Springer, 2005. 540 p. https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5
3. **Agarwal R.P., Popenda J.** Periodic solutions of first order linear difference equations. Mathematical and Computer Modelling. 1995. Vol. 22, no. 1. P. 11–19. https://doi.org/10635/103929
4. **Игнатьев А.О.** О некоторых свойствах решений систем линейных разностных уравнений с периодическими правыми частями //Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 4. С. 494–500. https://doi.org/10.31857/S0374064123040064

5. **Папалекси Н.Д.** Об одном случае параметрически связанных систем // J. Phys. Acad. Sc. USSR. 1939. Т. 1. С. 373–379.
6. **Massera J.L.** Observaciones sobre les soluciones de equaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. Montevideo. 1950. Vol. 4, no. 1. P. 37–45.
7. **Курцвейль Я., Вейвода О.** О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
8. **Еругин Н.П.** О периодических решениях дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 1. С. 148–152.
9. **Еругин Н.П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1970. 572 с.
10. **Гайшун И.В.** Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 684–686.
11. **Грудо Э.И.** О периодических решениях с несоизмеримыми периодами периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.
12. **Грудо Э.И.** Периодические системы, имеющие решения с несоизмеримыми периодами по отношению к периоду системы // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 4. С. 200.
13. **Грудо Э.И., Деменчук А.К.** О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 409–416.
14. **Ильин Ю.А.** О периодических решениях линейных систем, период которых несоизмерим с периодом системы [e-resource] // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2010, № 4. URL: `https://diffjournal.spbu.ru/pdf/iljin.pdf`.
15. **Борухов В.Т.** Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 5. С. 585–591.
16. **Пеннер Д.И., Дубошинский Я.Б., Дубошинский Д.Б.** Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1065–1066.
17. **Пеннер Д.И. и др.** Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109, №1. С. 402–406. https://doi.org/10.3367/UFNr.0109.197302j.0402
18. **Ласунский А.В.** О периоде решений дискретного периодического логистического уравнения // Тр. Карел. науч. центра РАН. 2012, № 5. С. 44–48.
19. **Деменчук А.К.** Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Saarbrucken: Lambert Academic Publ., 2012. 186 с.
20. **Белокурский М.С., Деменчук А.К.** Признак отсутствия сильно нерегулярных периодических решений системы двух линейных дискретных периодических уравнений // Проблемы физики, математики и техники. 2018, № 3(36). С. 67–69.
21. **Деменчук А.К.** О сильно нерегулярных периодических решениях линейного дискретного уравнения первого порядка // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2020. Т. 56, № 1. С. 30–35. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-30-35
22. **Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.** Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
23. **Zhan Zhou, Xingfu Zou.** Stable periodic solutions in a discrete periodic logistic equation // Appl. Math. Lett. 2003. Vol. 16. P. 165–171.
24. **Ласунский А.В.** О циклах дискретного периодического логистического уравнения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 154–157.

Поступила 8.10.2024
После доработки 16.11.2024
Принята к публикации 25.11.2024

Ласунский Александр Васильевич
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры прикладной математики и информатики
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
г. Великий Новгород
e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru

REFERENCES

1. Janglajew K., Schmeidel E. Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations. *Adv. Diff. Equat.*, 2012, art. no. 195. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-195
2. Elaydi S. *An introduction to difference equations*. New York, Springer, 2005, 540 p. https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5
3. Agarwal R.P., Popenda J. Periodic solutions of first order linear difference equations. *Math. Comp. Model.*, 1995, vol. 22, no. 1, pp. 11–19. https://doi.org/10635/103929
4. Ignat'ev A.O. On some properties of solutions of systems of linear difference equations with periodic right-hand sides. *Differ. Uravn.*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 494–500 (in Russian). https://doi.org/10.31857/S0374064123040064
5. Papalexi N.D. On one case of parametrically coupled systems. *J. Phys. Acad. Sc. USSR*, 1939, vol. 1. pp. 373–379 (in Russian).
6. Massera J.L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Bol. de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.
7. Kurzweil Ya., Veyvoda O. On periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations. *Czechosl. Math. J.*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370. https://doi.org/10.21136/CMJ.1955.100152
8. Erugin N.P. On periodic solutions of differential equations. *Prikl. matem. i mekh.*, 1956, vol. 20, no. 1, pp. 148–152 (in Russian).
9. Erugin N.P. *Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravneniy* [A book for reading on the general course of differential equations]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1970, 572 p.
10. Gaishun I.V. Equations in total derivatives with periodic coefficients. *Dokl. AN BSSR*, 1979, vol. 23, no. 8, pp. 684–686 (in Russian).
11. Grudo È.I. Periodic solutions with incommensurable periods of periodic differential systems. *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 9, pp. 1499–1504 (in Russian).
12. Grudo È.I. Periodic systems having solutions with incommensurable periods with respect to the period of the system. *Uspekhi mat. nauk.*, 1986, vol. 41, no. 4, pp. 200 (in Russian).
13. Grudo È.I., Demenchuk A.K. On periodic solutions with incommensurable periods of linear inhomogeneous periodic differential systems. *Diff. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).
14. Il'in Yu.A. On periodic solutions of linear systems whose period is incommensurate with the period of the system. *Differentsial'nyye uravneniya i protsessy upravleniya. Elektr. Zhurn.*, 2010, no. 4, pp. 134–144 (in Russian). Available at: `https://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/iljin.pdf`.
15. Borukhov V.T. Strongly invariant subspaces of non-autonomous linear periodic systems and solutions whose period is incommensurable with the period of the system itself. *Diff. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 578–585. https://doi.org/10.1134/S0012266118050026
16. Penner D.I., Duboshinsky Ya.B., Duboshinsky D.B. Oscillations with self-regulating interaction time. *Dokl. AN SSSR*, 1972, vol. 204, no. 5, pp. 1065–1066 (in Russian).
17. Penner D.I., Duboshinsky D.B., Kozakov M.I., Vermel A.S., Galkin Yu.V. Asynchronous excitation of undamped oscillations. *Uspekhi Fizich. Nauk.*, 1973, vol. 109, no. 1, pp. 402–406 (in Russian). https://doi.org/10.3367/UFNr.0109.197302j.0402
18. Lasunskii A.V. On the period of solutions of the discrete periodic logistic equation. *Proc. Karelian Sci. Center RAS*, 2012, no. 5, pp. 44–48 (in Russian).
19. Demenchuk A.K. *Asinkhronnyye kolebaniya v differentsial'nykh sistemakh. Usloviya sushchestvovaniya i upravleniya* [Asynchronous oscillations in differential systems. Conditions of existence and control]. Saarbrucken, Lambert Academic Publ., 2012, 192 p. ISBN: 9783848413577 .
20. Belokursky M.S., Demenchuk A.K. A sign of absence of strongly irregular periodic solutions of a system of two linear discrete periodic equations. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2018, no. 3(36), pp. 67–69 (in Russian).
21. Demenchuk A.K. On strongly irregular periodic solutions of the linear nonhomogeneous discrete equation of the first order. *Proc. of the National Academy of Sci. of Belarus. Phys. Math. Series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 30–35 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-30-35

22. Svirezhev Yu M., Logofet D.O. *Stability of biological communities*. MIR Publ., 1983, 319 p. ISBN-10: 0828523711 . Original Russian text was published in Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. *Ustoychivost' biologicheskikh soobshchestv*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 352 p.
23. Zhan Zhou, Xingfu Zou. Stable periodic solutions in a discrete periodic logistic equation. *Appl. Math. Lett.*, 2003, vol. 16, pp. 165–171.
24. Lasunskii A.V. On cycles of a discrete periodic logistic equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 154–157.

Received October 8, 2024
Revised November 16, 2024
Accepted November 25, 2024

Alexander Vasilievich Lasunsky, Dr. Phys.-Math. Sci., Yaroslav the Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, 173003 Russia, e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru .

A. V. Lasunsky. On periodic solutions of a system of difference equations whose period is coprime with the period of the system. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 110–118 .