

УДК 515.12

СРАВНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИОНАЛОВ С КОНЕЧНЫМ НОСИТЕЛЕМ

В. Р. Лазарев

В данной статье под функционалом понимается всякая непрерывная вещественнозначная функция f на $C_p(X)$ такая, что $f(0) = 0$. Изучается пространство $FS(X)$ функционалов с конечным носителем и его подпространство $\hat{L}_p(X)$. Эти пространства сравниваются с пространством линейных непрерывных функционалов $L_p(X)$. Доказана теорема об общем виде функционала с конечным носителем. С ее помощью показано, что три упомянутых пространства функционалов попарно различны. Доказано, что $FS(X)$ всюду плотно в пространстве всех функционалов. Доказано, что $\hat{L}_p(X)$ нигде не плотно в пространстве всех функционалов, но сумма $L_p(X) + \hat{L}_p(X)$ всюду плотна в нем. Последний факт указывает, что пространство $\hat{L}_p(X)$ существенно шире, чем $L_p(X)$. Пространство функционалов $\hat{L}_p(X)$ определяет некоторый класс $\hat{L}H$ гомеоморфизмов пространств непрерывных функций, подобно тому как пространство $L_p(X)$ определяет класс линейных гомеоморфизмов. Уже известно, что гомеоморфизмы из класса $\hat{L}H$ сохраняют число Линделёфа области определения. В данной статье доказано, что не всегда гомеоморфизм класса $\hat{L}H$ можно заменить на линейный. Следовательно, мы имеем обобщение известной теоремы Бузиада об l -инвариантности числа Линделёфа.

Ключевые слова: топология поточечной сходимости, функционал с конечным носителем, число Линделёфа, l -эквивалентность.

V. R. Lazarev. Comparison of spaces of functionals with finite support.

In this paper, a functional is understood as any continuous real-valued function f on $C_p(X)$ such that $f(0) = 0$. The space $FS(X)$ of functionals with finite support and its subspace $\hat{L}_p(X)$ are studied. These spaces are compared with the space of linear continuous functionals $L_p(X)$. A theorem on the general form of a functional with finite support is proved. The theorem is used to show that the three mentioned spaces are pairwise distinct. It is also proved that $FS(X)$ is everywhere dense in the space of all functionals and that $\hat{L}_p(X)$ is nowhere dense in the space of all functionals, but the sum $L_p(X) + \hat{L}_p(X)$ is dense in that space. The latter fact implies that the space $\hat{L}_p(X)$ is essentially wider than $L_p(X)$. The functional space $\hat{L}_p(X)$ defines some class $\hat{L}H$ of homeomorphisms of spaces of continuous functions, similarly to how the space $L_p(X)$ defines the class of linear homeomorphisms. It is already known that homeomorphisms of the class $\hat{L}H$ preserve the Lindelöf number of domains. We prove that a homeomorphism of the class $\hat{L}H$ cannot always be replaced by a linear one. Hence we have a generalization of Bouziad's known theorem on the l -invariance of the Lindelöf number.

Keywords: pointwise convergence topology, functional with finite support, Lindelöf number, l -equivalence.

MSC: 54C35

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-101-109

Предварительные сведения и необходимые обозначения

Данная работа лежит в русле исследований вопроса о t -инвариантности числа Линделёфа. Исходным пунктом здесь можно считать статьи Н. В. Величко [1] и А. Бузиада [2], касающиеся линейных гомеоморфизмов пространств функций. Здесь мы рассматриваем некоторые, специальным образом определенные, классы гомеоморфизмов пространств функций, промежуточные между классами линейных и произвольных гомеоморфизмов.

Для тихоновского пространства X обозначим через $C_p(X)$ множество всех непрерывных функций $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ с топологией поточечной сходимости. Всякую непрерывную функцию $f : C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ со свойством $f(0^X) = 0$, где $0^X(x) = 0$ для всех $x \in X$, будем называть функционалом. Подпространство в $C_p(C_p(X))$, образованное всеми функционалами обозначим символом $C_p^0 C_p(X)$. Хорошо известно, что отображение вычисления $\theta : X \rightarrow C_p^0 C_p(X)$,

$\theta(x)(\varphi) = \varphi(x)$ гомеоморфно вкладывает пространство X в $C_p^0 C_p(X)$. Ниже мы везде отождествляем пространства X с их образами $\theta(X)$.

Если каждому тихоновскому пространству X поставлено в соответствие некоторое подпространство $E(X) \subset C_p^0 C_p(X)$, то этим определен некоторый класс H гомеоморфизмов пространств непрерывных функций. А именно, гомеоморфизм $h : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ принадлежит H тогда и только тогда, когда сопряженное отображение $h^* : C_p^0 C_p(Y) \rightarrow C_p^0 C_p(X)$, $h^*(f)(\varphi) = f(h(\varphi))$, обладает свойством

$$h^*(Y) \subset E(X) \text{ и } (h^{-1})^*(X) \subset E(Y).$$

Очевидно, что если $E_1(X) \subset E_2(X)$ для каждого тихоновского пространства X , то соответствующие классы гомеоморфизмов пространств функций H_1 и H_2 также связаны включением $H_1 \subset H_2$.

При $E(X) = L_p(X)$ получаем определение класса линейных гомеоморфизмов пространств непрерывных функций. Ниже рассматриваются более широкие, чем $L_p(X)$, пространства функционалов $\hat{L}_p(X)$ и $FS(X)$ (см. определения 2 и 3), порождающие, следовательно, более широкие классы $\hat{L}H$ и FSH гомеоморфизмов пространств функций, чем класс LH линейных гомеоморфизмов.

Основное внимание в данной статье уделяется вопросу о том, насколько пространства функционалов $\hat{L}_p(X)$ шире, чем пространства $L_p(X)$, а также проблеме несводимости класса гомеоморфизмов $\hat{L}H$ к классу LH в следующем смысле:

О п р е д е л е н и е 1. Скажем, что класс гомеоморфизмов H_2 сводится к классу H_1 , где $H_1 \subset H_2$, если для любого гомеоморфизма $h_2 : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ из H_2 существует гомеоморфизм $h_1 : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ из класса H_1 .

Указанный вопрос представляет интерес, так как в [3] установлено, что гомеоморфизмы класса $\hat{L}H$ сохраняют число Линделёфа: $l(X) = l(Y)$, если $h : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ — гомеоморфизм класса $\hat{L}H$.

В пространствах $C_p(X)$ символом $[x, I]$ обозначаем элемент стандартной предбазы: $[x, I] = \{\varphi \in C_p(X) : \varphi(x) \in I\}$, где $x \in X$, $I \subset \mathbb{R}$ — интервал. Для ограниченной функции $\varphi \in C_p(X)$ под ее нормой $\|\varphi\|$ понимаем $\sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}$. Через a^X обозначается постоянная функция на X с (единственным) значением $a \in \mathbb{R}$. Символом $|\cdot|$ обозначаем как модуль векторов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , так и мощность множества. Во всех случаях контекст позволяет однозначно трактовать значение символа $|\cdot|$. Запись $A \sqcup B$ означает объединение непересекающихся множеств A и B .

1. Функционалы с конечным носителем

О п р е д е л е н и е 2. Элемент $f \in C_p^0 C_p(X)$ называется функционалом с конечным носителем, если существует конечное подмножество $K \subset X$ (называемое носителем f), такое что:

(FS-1) Для любого $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in C_p(X)$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\psi \in C_p(X)$ и $|\varphi(x) - \psi(x)| < \delta$ для всех $x \in K$, то $|f(\varphi) - f(\psi)| < \varepsilon$.

(FS-2) Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $x \in K$, любой окрестности U_x точки x найдутся функции $\varphi^x, \psi^x \in C_p(X)$, совпадающие вне U_x , и $|f(\varphi^x) - f(\psi^x)| > \varepsilon_0$.

Множество всех функционалов на $C_p(X)$, имеющих конечный носитель, обозначаем как $FS(X)$.

О п р е д е л е н и е 3. Обозначим символом $\hat{L}_p(X)$ множество всех функционалов f с конечным носителем, удовлетворяющих условиям:

- (а) если $f(\varphi) \neq 0$, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|f(n \cdot \varphi)| \geq 1$ при $n \geq n_0$;
- (б) если $|f(n \cdot \varphi)| \geq 1$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, то $f(\varphi) \neq 0$.

З а м е ч а н и е 1. Обозначение $\hat{L}_p(X)$ мотивировано тем, что каждый линейный непрерывный функционал $f \in L_p(X)$ принадлежит $FS(X)$ и удовлетворяет условиям (а), (б).

З а м е ч а н и е 2. Из определения 2 следует, что каждый функционал с конечным носителем имеет единственный носитель (см. [3, Proposition 1.4]).

Ниже предполагается, что каждое конечное подмножество в X наделено некоторым вполне упорядочением.

Теорема 1 (Общий вид функционала с конечным носителем). Пусть $f \in C_p^0 C_p(X)$. Функционал f имеет конечный носитель тогда и только тогда, когда существует конечное подмножество $K_f \subset X$ такое, что

$$f(\varphi) = u_f(\pi_f(\varphi)), \quad (1.1)$$

где $\pi_f : C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}^{|K_f|}$ — оператор сужения на K_f , а непрерывная функция $u_f : \mathbb{R}^{|K_f|} \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами

- 1) $u_f(0) = 0$;
- 2) для любого $i \in \{1, 2, \dots, |K_f|\}$ существует точка $t^i \in \mathbb{R}^{|K_f|-1}$ такая, что функция

$$u_f^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_f^i(r) = u_f(t_1^i, \dots, t_{i-1}^i, r, t_i^i, \dots, t_{|K_f|-1}^i)$$

не постоянна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функционал f допускает представление (1.1). Выберем в этом случае множество K_f в качестве носителя f и проверим выполнение условий (FS-1), (FS-2). Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in C_p(X)$. Так как функция u_f непрерывна в точке $r_\varphi = \pi_f(\varphi)$, то существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $|r - r_\varphi| < \delta_0$, то $|u_f(r) - u_f(r_\varphi)| < \varepsilon$. Положим $\delta = \delta_0 \cdot m^{-1/2}$, где $m = |K_f|$. Тогда если $\psi \in C_p(X)$ и $|\varphi(x) - \psi(x)| < \delta$ для всех $x \in K_f$, то $|\pi_f(\psi) - \pi_f(\varphi)| < \delta_0$ и потому $|u_f(\pi_f(\psi)) - u_f(\pi_f(\varphi))| = |f(\psi) - f(\varphi)| < \varepsilon$. Заключаем, что условие (FS-1) выполняется.

Пусть $K_f = \{x_1, \dots, x_m\}$. Пользуясь свойством 2) функции u_f , для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ зафиксируем соответствующую точку $t^i \in \mathbb{R}^{m-1}$ и два числа $p_i, q_i \in \mathbb{R}$ так, чтобы $|u_f^i(p_i) - u_f^i(q_i)| = \varepsilon_i > 0$. Положим $2 \cdot \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$. Пусть $U_k, k \in \{1, \dots, m\}$ — попарно дизъюнктные окрестности точек из K_f . Зафиксируем непрерывные функции $\eta_k^i : X \rightarrow \mathbb{R}$ так, что $\eta_k^i(x_k) = t_k^i$ при $k < i$, $\eta_k^i(x_k) = t_{k-1}^i$ при $k > i$ и η_k^i равна нулю, вне U_k . Для $k = i$ зафиксируем также две непрерывные на X функции θ_i^1, θ_i^2 , обе равные нулю вне U_i так, что $\theta_i^1(x_i) = p_i$, $\theta_i^2(x_i) = q_i$. Для произвольного $i \in \{1, \dots, m\}$ теперь положим $\varphi^i = \theta_i^1 + \sum_{k \neq i} \eta_k^i$ и аналогично $\psi^i = \theta_i^2 + \sum_{k \neq i} \eta_k^i$. Ясно, что непрерывные функции φ^i, ψ^i совпадают вне U_i , но

$$f(\varphi^i) = u_f(\pi_f(\varphi^i)) = u_f(t_1^i, \dots, t_{i-1}^i, p_i, t_i^i, \dots, t_{m-1}^i) = u_f^i(p_i)$$

и аналогично

$$f(\psi^i) = u_f(\pi_f(\psi^i)) = u_f(t_1^i, \dots, t_{i-1}^i, q_i, t_i^i, \dots, t_{m-1}^i) = u_f^i(q_i).$$

Поэтому $|f(\varphi^i) - f(\psi^i)| = |u_f^i(p_i) - u_f^i(q_i)| > \varepsilon_0$. Таким образом, (FS-2) тоже выполняется.

Пусть теперь, наоборот, $f \in FS(X)$. Пусть тогда $K_f = K$, π_f — оператор сужения на K и $m = |K|$. Для каждого $r \in \mathbb{R}^m$ положим

$$u_f(r) = f(\pi_f^{-1}(r)). \quad (1.2)$$

Формула (1.2) корректно задает функцию $u_f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, поскольку из (FS-1) легко следует, что $f(\varphi) = f(\psi)$, если функции φ, ψ совпадают на K . Ясно также, что из $f(0^X) = 0$ вытекает $u_f(0) = 0$.

Покажем, что имеет место тождество (1.1) и что функция u_f непрерывна. Пусть $\varphi \in C_p(X)$. Ясно, что $\varphi \in \pi_f^{-1}(\pi_f(\varphi))$. Поэтому $u_f(\pi_f(\varphi)) = f(\pi_f^{-1}(\pi_f(\varphi))) = f(\varphi)$. Непрерывность функции u_f следует из непрерывности f , открытости π_f и из тождества (1.1). Действительно, для интервала $(a; b) = I \subset \mathbb{R}$ имеем $u_f^{-1}(I) = \pi_f(f^{-1}(I))$ — открытое множество в \mathbb{R}^m .

Покажем теперь, что функция u_f удовлетворяет условию 2). Пусть $i \in \{1, \dots, m\}$. Рассмотрим точку $x_i \in K$ и любую ее окрестность U , не содержащую других точек из K . В силу (FS-2) существуют $\varepsilon_0 > 0$ и функции φ^i, ψ^i , совпадающие вне U и такие, что $|f(\varphi^i) - f(\psi^i)| > \varepsilon_0$. Положим $t^i = (\psi^i)|_{K \setminus \{x_i\}}$ и рассмотрим функцию u_f^i из условия 2). По выбору функций φ^i, ψ^i получаем $u_f^i(\varphi^i(x_i)) = f(\varphi^i) \neq f(\psi^i) = u_f^i(\psi^i(x_i))$, т. е. функция u_f^i не постоянна. \square

Следствие 1. *Функционал f линеен и непрерывен тогда и только тогда, когда функция u_f линейна.*

2. Сравнение пространств функционалов

Из определений 2, 3 следует цепочка включений

$$L_p(X) \subset \hat{L}_p(X) \subset FS(X) \subset C_p^0 C_p(X). \quad (2.1)$$

Теорема 1 позволяет привести примеры, показывающие, что первые два включения в (2.1) являются строгими.

Пример 1. Фиксируем произвольную точку $x \in X$. Тогда $f = u_f \circ \pi_f \in \hat{L}_p(X) \setminus L_p(X)$, если положить $K_f = \{x\}$, $u_f(r) = |r|$. Это вытекает из теоремы 1 и следствия 1.

Пример 2. Определим функционал f аналогично примеру 1 с тем отличием, что $u_f(r) = \sin r \cdot \chi_{[0; \pi]}$. Тогда $f = u_f \circ \pi_f \in FS(X) \setminus \hat{L}_p(X)$. Это следует из того, что нарушается условие (а) определения 3.

Более глубокие различия между рассмотренными пространствами функционалов с конечным носителем описывает

Теорема 2. 1) *Пространство $FS(X)$ всюду плотно в $C_p^0 C_p(X)$.*

2) *Пространства $L_p(X)$, $\hat{L}_p(X)$ нигде не плотны в $C_p^0 C_p(X)$.*

3) *Пространство $L_p(X) + \hat{L}_p(X)$ всюду плотно в $C_p^0 C_p(X)$.*

Доказательство. 1) Пусть $W = \bigcap_{i=1}^n [\varphi_i, I_i]$ — произвольное базисное открытое множество в $C_p^0 C_p(X)$. Не уменьшая общности, можем считать, что $\varphi_1 = 0^X$, $I_i = (a_i - \varepsilon; a_i + \varepsilon)$, где $a_1 = 0$, $|a_i| > \varepsilon$ при $i > 1$.

Выберем подмножество $K = \{x_1, \dots, x_m\} \subset X$, различающее функции семейства $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ и положим $r^i = \pi_K(\varphi_i) \in \mathbb{R}^m$, $R = \{r^1, \dots, r^n\}$. Выберем непрерывную функцию $u_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ и шар U с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^m$ так, чтобы $R \subset U$, $u_0(r^i) = a_i - |r^i|$ и $u_0(\mathbb{R}^m \setminus U) = \{0\}$. Для каждого $r \in \mathbb{R}^m$ положим $u(r) = u_0(r) + |r|$ и, далее, $f = u \circ \pi_K$.

Ясно, что $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и что $u(0) = 0$ (напомним, что $u_0(0) = u_0(r^1) = a_1 = 0$). Кроме того, $u(r) = |r|$, если $|r|$ больше радиуса шара U , поэтому функция u не постоянна на координатных осях в \mathbb{R}^m . По теореме 1 $f = u \circ \pi_K \in FS(X)$.

Наконец, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $f(\varphi_i) = u(r^i) = a_i$, что означает $f \in W$.

2) Пусть W — как в п. 1). Рассмотрим

$$W^0 = W \cap [1^X, (1; 2)] \cap [2^X, (0; 1)].$$

Тогда $L_p(X) \cap W^0 = \emptyset$. Действительно, если $f \in L_p(X)$, то $f(2^X) = 2 \cdot f(1^X) \notin (0; 1)$ при $f(1^X) \in (1; 2)$.

Покажем теперь, что $\hat{L}_p(X)$ нигде не плотно в $C_p^0 C_p(X)$. Пусть

$$W^1 = W \cap [1^X, (1; 2)] \cap [2^X, (-2; -1)]$$

и $f = u \circ \pi_K \in W^1 \cap \hat{L}_p(X)$. Обозначим $r^1 = \pi_K(1^X) = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$, $r^2 = \pi_K(2^X) = (2, \dots, 2) \in \mathbb{R}^m$. Так как функция u непрерывна, $u(r^1) > 0$, $u(r^2) < 0$, то найдется $t \in \mathbb{R}$ такое, что $f(t^X) = u(r^t) = u(t, \dots, t) = 0$. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $f(k^{-1} \cdot t^X) \neq 0$. Тогда по п. (а) определения 3 найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|f(nk^{-1} \cdot t^X)| \geq 1$ при всех $n \geq n_0$. В частности, при $n = kn_0$ получаем $|f(n_0 \cdot t^X)| \geq 1$, откуда в силу п. (б) определения 3 следует, что $f(t^X) \neq 0$. Полученное противоречие означает, что для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $f(k^{-1} \cdot t^X) = 0$. Снова применяя п. (б) определения 3, заключаем, что $|f(nk^{-1} \cdot t^X)| < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, $|f(q \cdot t^X)| = |u(q \cdot r^t)| < 1$ для любого рационального $q > 0$, что невозможно, так как $|u(r^2)| > 1$. Итак, каждый элемент W базы в $C_p^0 C_p(X)$ содержит открытое подмножество W^1 , не пересекающееся с $\hat{L}_p(X)$, что и требовалось.

3) Покажем, что сумма $\hat{L}_p(X) + L_p(X)$ всюду плотна в $C_p^0 C_p(X)$. Пусть снова $W = \bigcap_{i=1}^n [\varphi_i, I_i]$ — как в п. 1).

Выберем подмножество $K = \{x_1, \dots, x_m\} \subset X$, различающее функции семейства $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, и положим $r^i = \pi_K(\varphi_i) \in \mathbb{R}^m$, $R = \{r^1, \dots, r^m\}$. Пусть $E = \{e^1, \dots, e^m\}$ — стандартный базис в \mathbb{R}^m . Существует $(m-1)$ -мерное подпространство $H \subset \mathbb{R}^m$ такое, что $H \cap ((R \setminus \{r^1\}) \cup E) = \emptyset$. Подпространство H разбивает \mathbb{R}^m на открытые полупространства P^- и P^+ , т.е. $\mathbb{R}^m = P^- \sqcup H \sqcup P^+$. Пусть $R^- = R \cap P^-$, $R^+ = R \cap P^+$. Рассмотрим линейную функцию $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $u^{-1}(0) = H$, $u(P^-) = (0; +\infty)$, $u(P^+) = (-\infty; 0)$, причем $u(r^i) > a_i + \varepsilon$, если $r^i \in R^-$, и $u(r^i) < a_i - \varepsilon$, если $r^i \in R^+$. Положим $f = u \circ \pi_K$. Ясно, что $f \in L_p(X)$.

Построим теперь $g \in \hat{L}_p(X)$. Так как $\mathbb{R}^m = H \oplus H^\perp$, то каждый вектор $r \in \mathbb{R}^m$ однозначно представим в виде $r = r_H + r^\perp$, где $r_H \in H$, $r^\perp \in H^\perp = \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $h : H \rightarrow H^\perp$, $h(r) = 2M^2/(M + |r|)$, где $M = \max\{|r^i| : i = 1, \dots, n\}$, и пусть $\Gamma = \Gamma(h) \cup (-\Gamma(h))$, где $\Gamma(h) \subset \mathbb{R}^m$ — график функции h . Для каждой точки s единичной сферы $S \subset \mathbb{R}^m$ пусть L_s — луч с началом в точке $0 \in \mathbb{R}^m$, проходящий через s . Ясно, что либо $L_s \subset H$, либо $L_s \cap \Gamma = \{r^s\}$. Определим функцию $w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ так, чтобы на каждом луче L_s она зависела от r линейно и $w(r^s) = a$ при $s \in P^-$ и $w(r^s) = -a$ при $s \in P^+$, где $2a = \min\{\rho(u(r^i), I_i) : i = 2, \dots, n\}$. Положим также $w(H) = \{0\}$. Нетрудно видеть, что функция w непрерывна и что $w^{-1}(0) = H$.

Зафиксируем для $i = 2, \dots, n$ шары $U(r^i; \delta)$ так, чтобы были пусты их попарные пересечения, а также пересечения их замыканий с множеством $H \cup \Gamma$. Пусть U — объединение этих шаров. Существует непрерывная, знакопостоянная на каждом шаре $U(r^i; \delta)$ функция $u_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, равная нулю вне U и такая, что $u_0(r^i) = a_i - u(r^i) + w(r^i)$. Заметим, что функция w определена так, что $|w(r^i)| < a$, в то время как $a_i - u(r^i) < -2a$ (соответственно $> 2a$) при $r^i \in R^-$ (при $r^i \in R^+$). Поэтому знак $u_0(r^i)$ всегда совпадает со знаком разности $a_i - u(r^i)$ и, следовательно, со знаком $u_0(r)$ при всех $r \in U(r^i; \delta)$. Положим $v = u_0 - w$ и $g = v \circ \pi_K$.

Покажем, что $g \in \hat{L}_p(X)$. Нужно проверить, что функция v удовлетворяет условиям теоремы 1, а также что выполнены условия (а), (б) определения 3. По построению функция v непрерывна и $v(0) = 0$. Далее, пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим через R^i положительную i -ю координатную полуось в \mathbb{R}^m : $R^i = \{r \in \mathbb{R}^m : r_i \geq 0, r_j = 0 \text{ при } j \neq i\}$. Так как $H \cap E = \emptyset$, то $R^i = L_{s(i)}$ для некоторой точки $s(i) \in S \setminus H$. По выбору u_0 имеем $u_0(r^{s(i)}) = 0$, поэтому $|v(r^{s(i)})| = |w(r^{s(i)})| = a \neq 0$. Поскольку $v(0) = 0$, заключаем, что функция v не постоянна на i -й координатной оси. Итак, v удовлетворяет условиям теоремы 1.

Пусть $\varphi \in C_p(X)$, $g(\varphi) \neq 0$. Стало быть, $v(r) \neq 0$, где $r = \pi_K(\varphi)$. Поскольку $u_0(H) = \{0\}$ и $w(H) = \{0\}$, то $r \notin H$. Тогда при всех достаточно больших положительных t имеем

$$|g(t \cdot \varphi)| = |v(t \cdot r)| = |w(t \cdot r)| = t \cdot |w(r)| > 1.$$

Это означает, что п. (а) определения 3 выполнен.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $|g(n \cdot \varphi)| \geq 1$. Следовательно, $|v(n \cdot r)| = |u_0(n \cdot r) - w(n \cdot r)| \geq 1$. Поскольку $u_0(H) = \{0\}$ и $w(H) = \{0\}$, то последнее неравенство означает, что $n \cdot r \notin H$ и потому $r \notin H$ и $w(r) \neq 0$. Если, кроме того, $r \notin U$, то $u_0(r) = 0$, а значит, $g(\varphi) = v(r) = u_0(r) - w(r) \neq 0$.

Предположим, что $r \in U$, т.е. $r \in U(r^i; \delta)$ при некотором (единственном) $i \in \{2, \dots, n\}$. Если $r \in P^-$, то $w(r) > 0$, $u_0(r) < 0$; отсюда $g(\varphi) = u_0(r) - w(r) < 0$. Аналогично рассматривается случай $r \in P^+$. Итак, п. (б) определения 3 также выполнен.

Таким образом, $f + g \in L_p(X) + \hat{L}_p(X)$. Проверим, что $f + g \in W$. Очевидно, что

$$(f + g)(\varphi_1) = (f + g)(0^X) = 0 + 0 = 0 \in I_1.$$

При $i \in \{2, \dots, n\}$ имеем $(f + g)(\varphi_i) = u(r^i) + v(r^i) = u(r^i) + u_0(r^i) - w(r^i) = a_i \in I_i$, что и доказывает нужное включение. \square

3. Классы гомеоморфизмов LH и \hat{LH}

В статье [4] была начата, в [5] далеко продвинута, а в работе [6] завершена классификация пространств ординалов $[1, \alpha]$ относительно равномерных гомеоморфизмов их пространств непрерывных функций $C_p[1, \alpha]$. В этом разделе на примере пространств $C_p[1, \omega]$ и $C_p[1, \omega^\omega]$, используя технику и логику [4], мы покажем, что класс \hat{LH} не сводится к классу LH в смысле определения 1, поскольку из результатов статьи [7] следует, что пространства $C_p[1, \omega]$ и $C_p[1, \omega^\omega]$ не линейно гомеоморфны.

Будем обозначать через $(\prod_{n=1}^{\infty} E_n)_0$ подпространство в произведении $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ нормированных пространств $(E_n, \|\cdot\|_n)$, состоящее из таких элементов $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, что $\|e_n\|_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (c_0 -произведение). Если все сомножители одинаковы и равны, скажем, E_1 , то пишем $(E_1^\omega)_0$.

Пример 3. Существует гомеоморфизм $h : C_p[1, \omega] \rightarrow C_p[1, \omega^\omega]$, представимый как композиция конечного числа (а именно двух) гомеоморфизмов класса \hat{LH} .

Доказательство. В статье [4] С. П. Гулько для произвольного компакта X и произвольной точки $x_0 \in X$ построил равномерный гомеоморфизм $g : C_p(X) \rightarrow C_p(X, x_0) \times \mathbb{R}$ с условием малого искажения нормы

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \|\varphi\| \leq \|g(\varphi)\| \leq \|\varphi\|. \quad (3.1)$$

Отображение g задается правилом (см. [4], Lemma 2) $g(\varphi)(x) = (\varphi(x_0), u(\varphi(x_0), \varphi(x)))$, где

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2, & x_2 \notin (-x_1, x_1 \cdot (1 + \varepsilon)) \\ (1/2) \cdot (x_2 - x_1), & |x_2| \leq x_1 \\ (1 + 1/\varepsilon) \cdot (x_2 - x_1), & x_2 \in [x_1, (1 + \varepsilon) \cdot x_1]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Утверждение 1. Гомеоморфизм g принадлежит классу \hat{LH} .

Доказательство. Положим $Y = (X \setminus \{x_0\}) \oplus \{x_0\}$. Тогда, очевидно, $C_p(X, x_0) \times \mathbb{R}$ линейно гомеоморфно подпространству в $C_p(Y)$. Нужно показать, что для каждого $y \in Y$ функционал $g^*(y)$ удовлетворяет условиям (FS-1), (FS-2) определения 2 и условиям (а), (б) определения 3. Симметричное утверждение для функционалов $(g^{-1})^*(x)$ доказывается аналогично.

Пусть $y \in Y$. Положим $K = \{x_0, y\}$, если $y \neq x_0$ и $K = \{x_0\}$, если $y = x_0$. Рассмотрим случай $y \neq x_0$ (случай $y = x_0$ рассматривается аналогично). Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in C_p(X)$. Имеем $g^*(y)(\varphi) = g(\varphi)(y) = u(\varphi(x_0), \varphi(y))$. Поскольку функция u непрерывна, то найдется $\delta > 0$ такое, что если $\psi \in C_p(X)$ и $|\psi(y) - \varphi(y)| < \delta$, $|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| < \delta$, то

$$|u(\varphi(x_0), \varphi(y)) - u(\psi(x_0), \psi(y))| = |g^*(y)(\varphi) - g^*(y)(\psi)| < \varepsilon.$$

Значит, условие (FS-1) выполнено.

Удалим теперь какую-либо точку из множества K , например точку $x = x_0$ (случай $x = y$ рассматривается аналогично). Пусть $\varepsilon_0 = 1/2$. Возьмем произвольную непрерывную на X

функцию φ^0 , равную 2 и 0 в точках x_0 и y соответственно. Пусть также $\psi^0 = 0^X$. Тогда из формулы (3.2) следует, что

$$|g^*(y)(\varphi^0) - g^*(y)(\psi^0)| = |u(\varphi^0(x_0), \psi^0(y))| = |u(2, 0)| = 1 > \varepsilon_0.$$

Получаем, что условие (FS-2) также выполнено.

Проверим (а). Пусть $\varphi \in C_p(X)$, $g^*(y)(\varphi) = u(\varphi(x_0), \varphi(y)) \neq 0$. Из формулы (3.2) следует, что $\varphi(x_0) \neq \varphi(y)$. Тогда $g^*(y)(n \cdot \varphi) = g(n \cdot \varphi)(y) = u(n \cdot \varphi(x_0), n \cdot \varphi(y))$. В силу формулы (3.2) если $\varphi(y) \in [-\varphi(x_0), \varphi(x_0) \cdot (1 + \varepsilon)]$, то при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ будет $|n \cdot \varphi(x_0) - n \cdot \varphi(y)| > 2$, что достаточно. В противном случае (см. (3.2)) $u(\varphi(x_0), \varphi(y)) = \varphi(y)$. Так как случай $\varphi(y) = 0$ невозможен, то снова можно добиться неравенства $|n \cdot \varphi(y)| > 2$. Условие (а) выполнено.

Проверим (б). Пусть при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $|g^*(y)(n_0 \cdot \varphi)| = |u(n_0 \cdot \varphi(x_0), n_0 \cdot \varphi(y))| > 1$. Снова заключаем, что $\varphi(x_0) \neq \varphi(y)$, это равносильно неравенству $u(\varphi(x_0), \varphi(y)) = g^*(y)(\varphi) \neq 0$. Итак, условие (б) также выполнено. Следовательно, гомеоморфизм g принадлежит классу $\hat{L}H$, что и требовалось. \square

Далее, пусть $X = \bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n$, $Y = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Y_n$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ задан гомеоморфизм $g_n : C_p(X_n) \rightarrow C_p(Y_n)$, с условием малого искажения нормы (3.1) при $\varepsilon = \delta_n$, где $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда легко убедиться, что правило $(g(\varphi))_n = g_n(\varphi_n) = g_n(\varphi|_{X_n})$ задает гомеоморфизм c_0 -произведений

$$g : (\prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n))_0 \rightarrow (\prod_{n=1}^{\infty} C_p(Y_n))_0.$$

Утверждение 2. Если каждый гомеоморфизм g_n принадлежит классу $\hat{L}H$, то и g принадлежит классу $\hat{L}H$.

Доказательство. Как и в утверждении 1, нужно убедиться, что для каждого $y \in Y$ функционал $g^*(y)$ удовлетворяет тем же условиям (FS-1), (FS-2) и (а), (б). Если $y \in Y$, то $y \in Y_m$ для некоторого (единственного) $m \in \mathbb{N}$. Так как $g_m \in \hat{L}H$, то $g_m^*(y) \in \hat{L}_p(X_m)$. В частности, существует конечное подмножество $K \subset X_m$, такое, что выполнены условия (FS-1), (FS-2) относительно пространства $C_p(X_m)$. Поскольку $g^*(y)(\varphi) = g(\varphi)(y) = g_m(\varphi|_{X_m})(y)$ для каждого $\varphi \in C_p(X)$, то легко проверить, что условия (FS-1), (FS-2) выполняются и относительно пространства $C_p(X)$.

Если $\varphi \in C_p(X)$ такова, что $g^*(y)(\varphi) \neq 0$, то $g_m^*(y)(\varphi_m) \neq 0$, и, значит, при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|g_m^*(y)(k \cdot \varphi_m)| > 1$. Ясно, что $k \cdot \varphi_m = (k \cdot \varphi)_m$. Поэтому получаем

$$1 < |g_m^*(y)((k \cdot \varphi)_m)| = |g(k \cdot \varphi)(y)| = |g^*(y)(k \cdot \varphi)|,$$

т.е. условие (а) выполнено.

Пусть теперь $k_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $|g^*(y)(k_0 \cdot \varphi)| > 1$. Тогда имеем

$$1 < |g(k_0 \cdot \varphi)(y)| = |(g(k_0 \cdot \varphi))_m(y)| = |g_m((k_0 \cdot \varphi)_m)(y)| = |g_m^*(y)(k_0 \cdot \varphi)_m|,$$

откуда следует, что $g_m^*(y)(\varphi_m) = g^*(y)(\varphi) \neq 0$. Таким образом, условие (б) тоже выполнено. \square

Утверждения 1 и 2 позволяют воспроизвести схему рассуждений С. П. Гулько из статьи [4] и в результате для произвольного счетного ординала α (в частности, для $\alpha = \omega^\omega$) получить гомеоморфизм $h : C_p[1, \alpha] \rightarrow C_p[1, \omega]$ как композицию гомеоморфизма $h_1 : C_p[1, \alpha] \rightarrow \mathbb{R} \times (c_0^\omega)_0$ из класса $\hat{L}H$ и линейного гомеоморфизма $h_2 : \mathbb{R} \times (c_0^\omega)_0 \rightarrow C_p[1, \omega]$. Это завершает доказательство утверждения примера 3.

Следствие 2. Класс $\hat{L}H$ не сводится к классу LH .

Доказательство следует из того, что гомеоморфизм h_2 нельзя заменить линейным, так как иначе пространства $C_p[1, \omega^\omega]$ и $C_p[1, \omega]$ оказались бы линейно гомеоморфными, что невозможно. \square

4. Заключительные замечания и вопросы

В дополнение к уже рассматривавшимся классам гомеоморфизмов LH , $\hat{L}H$, FSH можно рассмотреть класс произвольных гомеоморфизмов H^0 , соответствующий пространству всех функционалов $C_p^0 C_p(X)$. Тогда можем записать

$$LH \subset \hat{L}H \subset FSH \subset H^0. \quad (4.1)$$

Каждый из классов в цепочке (4.1) может быть формально расширен присоединением к нему всевозможных композиций конечного числа его элементов. Ясно, что классы LH и H^0 не расширятся, однако нам не известен ответ на следующий вопрос.

В о п р о с 1. Замкнуты ли классы $\hat{L}H$, FSH относительно операции композиции?

Обозначим символом $W\hat{L}H$ указанное расширение класса $\hat{L}H$. Стало быть, гомеоморфизмы, рассмотренные в примере 3 принадлежат классу $W\hat{L}H$.

Заметим, что если некоторое топологическое свойство тихоновского пространства X инвариантно относительно гомеоморфизмов пространств $C_p(X)$ из класса H , то оно инвариантно и относительно таковых из класса WH . Следовательно, если гомеоморфизм h , $h : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ принадлежит классу $W\hat{L}H$, то числа Линделёфа пространств X , Y равны: $l(X) = l(Y)$. Формально это еще раз обобщает теорему А. Бузиада [2] для линейных гомеоморфизмов.

В связи с данным замечанием возникает (естественный)

В о п р о с 2. Сохраняется ли число (или свойство) Линделёфа гомеоморфизмами класса FSH ?

Заметим, что кардинальный инвариант $l^*(X) = \sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$ сохраняется согласно теореме А. В. Архангельского — Е. Г. Пыткеева, произвольными гомеоморфизмами пространств функций (см. например [8], теорема II.I.1).

В связи с теоремой 2 также возникает

В о п р о с 3. Замкнуто ли подпространство $\hat{L}_p(X)$ в $C_p^0 C_p(X)$? Более общо: каков борелевский тип подпространства $\hat{L}_p(X)$ в $C_p^0 C_p(X)$? Этот же вопрос можно отнести и к пространству $FS(X)$.

В о п р о с 4. Можно ли что-то сказать о месте пространства $U_p(X)$ равномерно непрерывных функционалов в цепочке (2.1), кроме тривиальных включений $L_p(X) \subset U_p(X) \subset C_p^0 C_p(X)$?

Автор благодарен анонимному рецензенту за уделенное внимание и за ценные замечания, позволившие улучшить изложение в ряде случаев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Velichko N.V.** The Lindelöf property is 1-invariant // Topol. Appl. 1998. Vol. 89. P. 277–283. [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(97\)00219-8](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(97)00219-8)
2. **Bouziad A.** Le degré de Lindelöf est 1-invariant // Proc. American Math. Soc. 2001. Vol. 129, no. 3. P. 913–919. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-00-05553-2>
3. **Lazarev V.R.** On a class of homeomorphisms of function spaces preserving the Lindelöf number of domains // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2023. Т. 86. С. 159–166. <https://doi.org/10.17223/19988621/86/12>
4. **Gul'ko S.P.** The space $C_p(X)$ for countable infinite compact X is uniformly homeomorphic to c_0 // Bull. Acad. Pol. Sci. 1988. Vol. 36, no. 5–6 P. 391–396.
5. **Górak R.** Function spaces on ordinals // Comment. Math. Univ. Carol. 2005. Vol. 46, no. 1 P. 93–103.
6. **Genze L.V., Gul'ko S.P., Khmyleva T.E.** Classification of spaces of continuous functions on ordinals // Comment. Math. Univ. Carol. 2018. Vol. 59, no. 3. P. 365–370. <https://doi.org/10.14712/1213-7243.2015.250>

7. Bessaga C., Pelczyński A. Spaces of continuous functions IV. On isomorphical classification of spaces of continuous functions // *Stud. Math.* 1960. Vol. 19. P. 53–62. <https://doi.org/10.4064/sm-19-1-53-62>
8. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. Москва: Издв-во МГУ, 1989. 222 с.

Поступила 12.12.2024

После доработки 15.01.2025

Принята к публикации 20.01.2025

Лазарев Вадим Ремирович
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры
Томский государственный университет
г. Томск
e-mail: lazarev@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Velichko N.V. The Lindelöf property is 1-invariant. *Topol. Appl.*, 1998, vol. 89, pp. 277–283. [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(97\)00219-8](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(97)00219-8)
2. Bouziad A. Le degré de Lindelöf est 1-invariant. *Proc. American Math. Soc.*, 2001, vol. 129, no. 3, pp. 913–919. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-00-05553-2>
3. Lazarev V.R. On a class of homeomorphisms of function spaces preserving the Lindelöf number of domains. *Vestn. Tomskogo Gos. Un-ta. Matematika i mekhanika*, 2023, vol. 86, pp. 159–166. <https://doi.org/10.17223/19988621/86/12>
4. Gul'ko S.P. The space $C_p(X)$ for countable infinite compact X is uniformly homeomorphic to c_0 . *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 1988, vol. 36, no. 5–6, pp. 391–396.
5. Górak R. Function spaces on ordinals. *Comment. Math. Univ. Carol.*, 2005, vol. 46, no. 1, pp. 93–103.
6. Genze L.V., Gul'ko S.P., Khmyleva T.E. Classification of spaces of continuous functions on ordinals. *Comment. Math. Univ. Carol.*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 365–370. <https://doi.org/10.14712/1213-7243.2015.250>
7. Bessaga C., Pelczyński A. Spaces of continuous functions IV. On isomorphical classification of spaces of continuous functions. *Stud. Math.*, 1960, vol. 19, pp. 53–62. <https://doi.org/10.4064/sm-19-1-53-62>
8. Arhangel'skii A.V. Topological function spaces. Dordrecht: Kluwer Acad., 1992. ISBN 978-0-7923-1531-5. Original Russian text published in Arhangel'skii A.V. *Topologicheskie prostranstva funktsii*, Moscow: Izdv-vo MGU, 1989, 222 p.

Received December 12, 2024

Revised January 15, 2025

Accepted January 20, 2025

Vadim Remirovich Lazarev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, 634050 Russia, e-mail: lazarev@math.tsu.ru.

Cite this article as: V. R. Lazarev. Comparison of spaces of functionals with finite support. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 101–109.