ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Online First 2024

УДК 517.542

О ПОЧТИ ПРОСТЫХ ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ ГРАФОВ РАНГА 3[1]

Ч. Ван, А. В. Васильев, Д. О. Ревин

Группа G подстановок конечного множества Ω покомпонентно действует на декартовом квадрате Ω^2. Наибольшая подгруппа в $\mathrm{Sym}(\Omega)$, имеющая на Ω^2 те же орбиты, что и сама G, называется 2-замыканием группы G. Рангом группы G называется число ее орбит на Ω^2. Если ранг группы G равен 3, а порядок четен, то с точностью до взятия дополнения определен неориентированный граф с множеством вершин Ω, у которого в качестве множества ребер берется одна из двух недиагональных орбит группы G на Ω^2. Такой граф называется графом ранга 3. Полная группа автоморфизмов этого графа совпадает с 2-замыканием группы G и содержит G в качестве подгруппы. На данный момент за исключением случая, когда G — почти простая группа, имеется явное описание 2-замыканий групп G ранга 3 . В данной работе мы восполняем имеющийся пробел, тем самым завершая и описание полных групп автоморфизмов графов ранга 3.

Ключевые слова: почти простая группа, 2-замыкание группы подстановок, группа подстановок ранга 3, граф ранга 3, группа автоморфизмов графа.

Z. Wang, A. V. Vasil'ev, D. O. Revin. On the almost simple automorphism groups of rank 3 graphs.

A permutation group G of a finite set Ω acts componentwisely on the Cartesian square Ω^2. The largest subgroup of $\mathrm{Sym}(\Omega)$ having the same orbits on Ω^2 as G is called the 2-closure of G. The rank of G is the number of its orbits on Ω^2. If the rank of G is 3 and the order is even, then an undirected graph with vertex set Ω is defined up to taking complement, for which one of the two off-diagonal orbits of G on Ω^2 is taken as the edge set. Such a graph is called a graph of rank 3. The full automorphism group of this graph coincides with the 2-closure of G and contains G as a subgroup. At present, except for the case when G is an almost simple group, there is an explicit description of the 2-closures of groups G of rank 3. In this paper, we fill the existing gap, thereby completing the description of the complete automorphism groups of graphs of rank 3.
Keywords: almost simple group, 2-closure of permutation group, rank 3 permutation group, rank 3 graph, the automorphism group of a graph.

MSC: 20B25, 20D05, 05E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-04

К 95-летию Михаила Ивановича Каргаполова

Введение

Пусть $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ — группа подстановок конечного множества Ω. Орбиты покомпонентного действия группы G на декартовом квадрате $\Omega \times \Omega$ называются ее *орбиталями* или 2-*орбитами*, а их количество — *рангом* группы G. Наибольшая подгруппа симметрической группы $\mathrm{Sym}(\Omega)$ с такими же как у G орбиталями называется 2-*замыканием* группы G и обозначается $G^{(2)}$. Граф Γ, множество вершин которого — Ω, а множество ребер (возможно, ориентированных) — одна из орбиталей группы G, называется *орбитальным графом* группы G.

Если G — группа ранга 3, то она, очевидно, транзитивна, а значит, одна из ее орбиталей — диагональ квадрата $\Omega \times \Omega$. Если G имеет нечетный порядок, то две оставшиеся иррефлексивные орбитали переводятся одна в другую транспонированием, поэтому соответствующие орбитальные графы являются *турнирами* (т. е. полными ориентированными графами), противоположными друг другу. Если группа G — четного порядка, то эти орбитали симметричны, а соответствующие орбитальные графы — неориентированные графы, дополнительные друг другу. Их называют *графами ранга* 3 (соответствующими группе G). Несложно видеть, что

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

полная группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}\Gamma$ такого графа (у пары дополнительных друг другу графов, очевидно, одна и та же группа автоморфизмов) — это 2-замыкание группы G, а сама группа G — подгруппа в $\operatorname{Aut}\Gamma = G^{(2)}$.

Графы ранга 3 — важнейший и наиболее изученный подкласс класса *сильно регулярных графов*, т. е. графов, в которых число общих соседей двух вершин зависит только от того, будут ли они равны, смежны или не смежны (при этом полные графы и их дополнения сильно регулярными графами не считаются). В недавно вышедшей монографии "Сильно регулярные графы" Брауэра и Ван Малдегема [2] дано описание графов ранга 3, т. е. указаны все пары вида (Γ, G), где Γ — сильно регулярный граф, а G — некоторая (не обязательно полная) группа автоморфизмов этого графа, ранг которой равен 3 (группа G выступает в качестве сертификата того, что Γ — граф ранга 3). Важно отметить, что описания полных групп автоморфизмов графов ранга 3 или, что было бы эквивалентно, описания 2-замыканий групп ранга 3, в этой книге (и всей имеющейся в распоряжении авторов литературе) нет. Несмотря на то, что имеется большой объем информации о полных группах автоморфизмов графов ранга 3 (например, в [2, табл. 11.8] для всех графов ранга 3 с числом вершин не больше 1024 указаны в том числе и полные группы их автоморфизмов), завершение их описания представляется задачей, имеющей существенное значение как для теории групп, так и для теории графов.

В недавних работах [17] и [10] решение данной проблемы было сведено к проблеме описания 2-замыканий для почти простых групп G ранга 3. Цель данной работы — дать такое описание, тем самым завершая как описание 2-замыкания групп ранга 3, так и описание полных групп автоморфизмов графов ранга 3 (граф ранга 3 считается заданным, если указана некоторая группа его автоморфизмов, действующая на вершинах граф графа как группа подстановок ранга 3).

Теорема 1. *Если G — конечная группа ранга 3, то ее 2-замыкание $G^{(2)}$ известно.*

Следствие 1. *Если Γ — конечный граф ранга 3, то его группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}\Gamma$ известна.*

Напомним, что *цоколь* $\operatorname{Soc} G$ группы G — это подгруппа, порожденная всеми ее минимальными нормальными подгруппами. Группа G *почти проста*, если ее цоколь $L = \operatorname{Soc} G$ — неабелева простая группа. Эквивалентно G почти проста, если найдется неабелева группа L, для которой $L \simeq \operatorname{Inn} L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$, т. е. G "зажата" между L и ее группой автоморфизмов $\operatorname{Aut} L$.

Пусть теперь $G \leq \operatorname{Sym}(\Omega)$ — группа подстановок ранга 3. Уже отмечалось, что G транзитивна на Ω. Если G импримитивна, то у нее имеется ровно одна нетривиальная система импримтивности Σ; соответствующий орбитальный граф Γ_G (или его дополнение) — это объединение попарно непересекающихся клик одного размера, множества вершин которых — блоки системы Σ, см. [2, §1.1.3]. Если Δ — один из блоков системы Σ, то полная группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}\Gamma$ подстановочно изоморфна сплетению $\operatorname{Sym}(\Delta) \wr \operatorname{Sym}(\Sigma)$ двух симметрических групп на множествах Δ и Σ (см., например, [17, предложение 2.2]). Таким образом, мы можем считать, что группа G примитивна.

Из [13, теорема 1] следует, что если $G \leq \operatorname{Sym}(\Omega)$ — примитивная почти простая группа с цоколем L, то за исключением некоторых явно описанных там случаев 2-замыкание $G^{(2)}$ содержится в нормализаторе $N_{\operatorname{Sym}(\Omega)}(L)$ цоколя L в симметрической группе $\operatorname{Sym}(\Omega)$. Более того, если G — группа ранга 3, то из [13, предложения 1,2] несложно вывести, что число таких исключений конечно, причем группа $G^{(2)}$ остается почти простой, хотя и с другим цоколем; см. предложение 4 в разд. 2 настоящей работы, где мы указываем 2-замыкания во всех исключительных случаях. Во всех остальных случаях $G^{(2)} \leq N_{\operatorname{Sym}(\Omega)}(L)$ и в силу [7, теорема 4.3B] выполняется

$$L \leq G \leq G^{(2)} \leq \operatorname{Aut} L,$$

т. е. 2-замыкание — тоже почти простая группа с тем же цоколем, что исходная группа G (см. также [15, теорема 2]). Таким образом, проблема сводится к тому, чтобы для каждого точного примитивного подстановочного представления ранга 3 почти простой группы G с цоколем L найти наибольшую подгруппу в $\mathrm{Aut}\,L$, до которой оно поднимается, оставаясь точным и сохраняя ранг 3 (см. лемму 2 в разд. 3). Последняя задача решается в предложениях 1–3 (см. разд. 2) для почти простых групп, цоколи которых — знакопеременные группы, спорадические группы и группы лиева типа соответственно.

Группы ранга 3, цоколи которых знакопеременные группы, были описаны Банаи [1] (см. также [2, теорема 11.3.1]). В случае спорадических групп эта работа была проделана Брауэром, Сойчером и Р. Уилсоном с использованием "Атласа конечных групп" [5] (см. [2, теорема 11.3.5]). Наши результаты о 2-замыканиях данных групп — предложения 1 и 2 — получаются из перечисленных путем несложной проверки и носят скорее справочный характер.

Случай групп лиева типа требует больших усилий. Группы ранга 3 с классическим цоколем были описаны Кантором и Либлером в [11] (см. [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3]), а с исключительным — Либеком и Сакслом [14] (см. также [2, теорема 11.3.4]). Чтобы получить их 2-замыкания, мы используем информацию о том, как ведут себя максимальные подгруппы таких групп относительно их автоморфизмов, из [4; 6; 12].

Напомним, что в соответствии с классической теоремой Стейнберга [18] каждый элемент полной группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,L$ простой группы L лиева типа есть произведение внутреннего, диагонального, полевого и графового автоморфизмов. Обозначим через $\widetilde{L}$ подгруппу в $\mathrm{Aut}\,L$, порожденную всеми внутренними, диагональными и полевыми автоморфизмами (точные определения см. в разд. 1). Оказывается, в большинстве случаев 2-замыкание почти простой группы подстановок G ранга 3 с цоколем L изоморфно $\mathrm{Aut}\,L$ или $\widetilde{L}$ (если речь идет о группе, цоколь которой — группа лиева типа). Более точно, как следует из предложений 1–4 в разд. 2, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок ранга 3 на конечном множестве Ω, L — ее цоколь. Тогда либо $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\,L$, либо выполняется одно из следующих утверждений.*

1) *$L = \mathrm{PSL}_n(q)$, $n > 4$, действие G на Ω определено в п. 1 предложения 3 и $G^{(2)} = \widetilde{L}$ — подгруппа индекса 2 в $\mathrm{Aut}\,L$.*
2) *$L = \mathrm{PSp}_4(q)$, q четно, действие G на Ω определено в пп. 6–8 предложения 3 и $G^{(2)} = \widetilde{L}$ — подгруппа индекса 2 в $\mathrm{Aut}\,L$.*
3) *$L = \mathrm{P}\Omega^+_{10}(q)$, действие G на Ω определено в п. 12 предложения 3 и $G^{(2)} = \widetilde{L}$ — подгруппа индекса 2 в $\mathrm{Aut}\,L$.*
4) *$L = \mathrm{P}\Omega^+_8(q)$, действие G на Ω, а также $G^{(2)}$ определены в пп. 11, 15, 16 предложения 3.*
5) *$L = \mathrm{P}\Omega^{\varepsilon}_{2n}(3)$, $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, $(n,\varepsilon) \neq (4,+)$, действие G на Ω определено в п. 16 предложения 3 и $G^{(2)}$ — подгруппа индекса 2 в $\mathrm{Aut}\,L$.*
6) *$L = E_6(q)$, действие G на Ω определено в п. 17 предложения 3, и $G^{(2)} = \widetilde{L}$ — подгруппа индекса 2 в $\mathrm{Aut}\,L$.*
7) *L — группа из пп. 4, 12 табл. 1, пп. 2, 6–9, 11 табл. 2 или группа из табл. 3.*

Статья структурирована следующим образом. В разд. 1 приведены необходимые сведения о простых группах и их автоморфизмах. В разд. 2 собраны наши результаты — детальные описания 2-замыканий групп ранга 3, эквивалентно — полных групп автоморфизмов графов ранга 3, а в разд. 3 — доказательства этих результатов.

1. Предварительные сведения о простых группах и их автоморфизмах

В обозначениях и наименованиях графов мы следуем [2]. За основу обозначений, связанных с группами, взяты [4; 5; 12]. Ниже приведены необходимые сведения о группах автоморфизмов неабелевых простых групп.

Известно, что 14 из 26 спорадических групп, а именно

$$M_{11}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_4, Ru, Ly, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}, Th, B, M$$

совпадают со своей группой автоморфизмов, а 12 оставшихся,

$$M_{12}, M_{22}, J_2, J_3, HS, McL, O'N, He, HN, Suz, Fi_{22}, Fi_{24}{}',$$

имеют группу внешних автоморфизмов порядка 2.

Отметим также, что из четырех групп Янко J_1–J_4 только группа J_2 в том или ином качестве участвует в описании групп подстановок ранга 3. В соответствии с обозначениями и терминологией [2], которая наряду с основной используется также и в [5], будем называть эту группу группой Холла — Янко и обозначать символом HJ.

Группа автоморфизмов знакопеременной группы $\mathrm{Alt}(n)$ совпадает с $\mathrm{Sym}(n)$, за исключением случая, когда $n = 6$. Группа внешних автоморфизмов группы $\mathrm{Alt}(6) \simeq \mathrm{PSL}_2(9) \simeq \mathrm{PSp}_4(2)'$ является элементарной абелевой группой порядка 4.

Для конечной классической простой группы L и для $L = E_6(q)$ определим подгруппу $\widetilde{L} \leq \mathrm{Aut}\, L$, содержащую L. Достаточно задать образ группы $\widetilde{L}$ относительно канонического эпиморфизма

$$\mathrm{Aut}\, L \to \mathrm{Out}\, L = \mathrm{Aut}\, L/L.$$

Для этого, следуя обозначениям из [4], определим автоморфизмы γ, δ, δ', ϕ, φ и τ. Мы будем одними и теми же символами обозначать как сами эти автоморфизмы, так и их образы в группе $\mathrm{Out}\, L$.

Далее L — одна из следующих групп $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSU}_n(q)$, $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$, $\mathrm{P\Omega}_{2n+1}(q)$, $\mathrm{P\Omega}^{\pm}_{2n}(q)$, $E_6(q)$. Считаем, что $q = p^e$ для некоторого простого числа p, а F — поле порядка q^2 в случае $L = \mathrm{PSU}_n(q)$ и порядка q в остальных случаях. Через ω обозначается примитивный элемент мультипликативной группы $F^{\times}$ поля F.

Каждую классическую группу рассматриваем одновременно как образ в факторгруппе по модулю скалярных матриц некоторой матричной группы и как факторгруппу по модулю умножений на ненулевые скаляры группы линейных преобразований векторного пространства V, на котором задана билинейная, эрмитова или квадратичная форма (см. определения в [4, § 1.5, 1.6]).

С л у ч а й $L = \mathrm{PSL}_n(q)$. Автоморфизм δ — сопряжение проективным образом матрицы $\mathrm{diag}(\omega, 1, \dots, 1)$. Автоморфизм ϕ группы L индуцирован действием автоморфизма Фробениуса

$$(\alpha_{ij}) \mapsto (\alpha_{ij}^p) \tag{1.1}$$

на матрицах (α_{ij}) из $\mathrm{GL}_n(q)$. Автоморфизм γ определен при $n \geq 3$ и индуцирован автоморфизмом

$$g \mapsto (g^{-1})^{\intercal} \tag{1.2}$$

группы $\mathrm{GL}_n(q)$, где $g^{\intercal}$ обозначает транспонированную матрицу g. В группе $\mathrm{Out}\, L$ выполнены соотношения

$$\delta^{(n,q-1)} = \gamma^2 = \phi^e = [\gamma, \phi] = 1, \quad \delta^{\gamma} = \delta^{-1}, \quad \delta^{\phi} = \delta^p,$$

а $\mathrm{Out}\, L = \langle \delta, \phi \rangle$ при $n = 2$ и $\mathrm{Out}\, L = \langle \delta, \phi, \gamma \rangle$ при $n \geq 3$. Образ группы $\widetilde{L}$ в $\mathrm{Out}\, L$ равен $\langle \delta, \phi \rangle$. В обозначениях [4, табл. 1.2] $\widetilde{L} = \mathrm{P\Gamma L}_n(q)$.

С л у ч а й $L = \mathrm{PSU}_n(q)$, $n \geq 3$. Отождествим $\mathrm{GU}_n(q)$ как матричную группу с подгруппой в $\mathrm{GL}_n(q^2)$ таких матриц (α_{ij}), что

$$(\alpha_{ij}^q)^{\intercal} = (\alpha_{ij})^{-1}.$$

Автоморфизм δ — сопряжение проективным образом матрицы $\mathrm{diag}(\omega^{q-1}, 1, \dots, 1)$ из $\mathrm{GU}_n(q)$. Как и выше, автоморфизм ϕ группы L индуцирован действием автоморфизма Фробениуса (1.1) на матрицах (α_{ij}) из $\mathrm{GU}_n(q)$. Определенный в (1.2) автоморфизм группы $\mathrm{GL}_n(q^2)$ оставляет инвариантной группу $\mathrm{GU}_n(q)$ и индуцирует на $\mathrm{PSU}_n(q)$ автоморфизм γ. В группе $\mathrm{Out}\,L$ выполнены соотношения

$$\delta^{(n,q+1)} = \gamma^2 = [\gamma, \phi] = 1, \quad \phi^e = \gamma, \quad \delta^\gamma = \delta^{-1}, \quad \delta^\phi = \delta^p$$

и $\mathrm{Out}\,L = \langle \delta, \phi, \gamma \rangle = \langle \delta, \phi \rangle$. В обозначениях [4, табл. 1.2] $\mathrm{Aut}\,L = \widetilde{L} = \mathrm{P\Gamma U}_n(q)$.

С л у ч а й $L = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, $n \geq 2$. Отождествим $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ как матричную группу с подгруппой в $\mathrm{GL}_{2n}(q)$ таких матриц g, что $gg^\intercal$ — блочно-диагональная матрица с n блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Автоморфизм δ — сопряжение проективным образом матрицы $\mathrm{diag}(\omega, \ldots, \omega, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}_{2n}(q)$, где количество символов ω равно n. Автоморфизм ϕ группы L индуцирован действием автоморфизма Фробениуса (1.1) на матрицах (α_{ij}) из $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$. В группе $\mathrm{Out}\,L$ выполнены соотношения

$$\delta^{(2,q-1)} = \phi^e = [\delta, \phi] = 1,$$

причем $\mathrm{Out}\,L = \langle \delta, \phi \rangle$ при $(n,p) \neq (4,2)$ и $|\,\mathrm{Out}\,L : \langle \delta, \phi \rangle| = 2$ при $(n,p) = (4,2)$. Образ группы $\widetilde{L}$ в $\mathrm{Out}\,L$ равен $\langle \delta, \phi \rangle$. В обозначениях [4, табл. 1.2] $\widetilde{L} = \mathrm{PC\Gamma Sp}_{2n}(q)$.

Далее мы будем рассматривать ортогональные группы. Геометрически группы $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$, где ε — пустой символ при нечетных d и $\varepsilon = \pm$ при четных d, можно рассматривать как группы невырожденных преобразований конечномерного векторного пространства V размерности над полем F порядка q, сохраняющих заданную на V невырожденную квадратичную форму $Q : V \to F$. Во всех случаях с точностью до эквивалентности существуют две квадратичные формы, но сохраняющие их группы изоморфны, если d нечетно, и не изоморфны и индексируются знаком “+” или “−”, если d четно. Группа $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$ вложена в качестве нормальной подгруппы в группу $\mathrm{CGO}_d^\varepsilon(q)$ подобий формы Q, т. е. таких преобразований, под действием которых значение формы на любом векторе умножается на фиксированный ненулевой элемент поля, зависящий только от преобразования. С формой Q ассоциирована невырожденная симметрическая билинейная форма, определенная равенством

$$(u, v) = \frac{1}{(2, q-1)}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)). \tag{1.3}$$

Определитель любого преобразования из $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$ равен ± 1, и $\mathrm{SO}_d^\varepsilon(q)$ — подгруппа в $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$, состоящая из преобразований с определителем 1. В ней, в свою очередь, есть (нормальная) подгруппа индекса 2, обозначаемая как $\Omega_d^\varepsilon(q)$ Вектор v называется несингулярным, если $Q(v) \neq 0$. Пусть q нечетно. Значение квадратичной формы на несингулярном векторе может быть или не быть квадратом в поле F. Для несингулярного вектора $v \in V$ определено отражение

$$r_v : u \mapsto u - 2\frac{(u, v)}{(v, v)}v.$$

Отражения порождают группу $\mathrm{GO}_d^\varepsilon(q)$, и группа $\Omega_d^\varepsilon(q)$ состоит из тех преобразований в $\mathrm{SO}_d^\varepsilon(q)$, у которых в любом разложении в произведение отражений присутствует лишь четное число отражений, соответствующих несингулярным векторам с неквадратным значением формы.

С л у ч а й $L = \mathrm{P}\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 3$, q нечетно. С точностью до эквивалентности на V определены две невырожденные квадратичные формы, которым тем не менее соответствуют изоморфные ортогональные группы. Выбрав в V базис в соответствии с [12, предложение 2.5.3(iii)], мы можем отождествить $\mathrm{GO}_{2n+1}(q)$ как матричную группу с подгруппой в $\mathrm{GL}_{2n+1}(q)$ всех таких матриц g, что $gg^\intercal$ — блочно-диагональная матрица с n блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

и одним блоком (1). Автоморфизм ϕ группы L индуцирован действием автоморфизма Фробениуса (1.1) на матрицах (α_{ij}) из $\mathrm{GO}_{2n+1}(q)$. Автоморфизм δ группы L — сопряжение проективным образом матрицы из $\mathrm{SO}_{2n+1}(q)\setminus\Omega_{2n+1}(q)$ (например, образом произведения r_vr_w, где $Q(v)$ — квадрат, а $Q(w)$ — не квадрат в $F^\times$ и $(v,w)=0$). Отметим, что $\mathrm{PSO}_{2n+1}(q)=\mathrm{PGO}_{2n+1}(q)$. В группе $\mathrm{Out}\,L$ выполнены соотношения

$$\delta^2=\phi^e=[\delta,\phi]=1,$$

причем $\mathrm{Out}\,L=\langle\delta,\phi\rangle$. В обозначениях [4, табл. 1.2] $\mathrm{Aut}\,L=\widetilde{L}=\mathrm{P\Gamma O}_{2n+1}(q)$.

Случай $L=\mathrm{P}\Omega^\varepsilon_{2n}(q)$, $n\geq 3$, $\varepsilon\in\{+,-\}$. Выбрав в пространстве V подходящий базис, мы можем отождествить $\mathrm{GO}^\varepsilon_{2n}(q)$ как матричную группу с подгруппой в $\mathrm{GL}_{2n}(q)$ всех таких матриц g, что $gg^\intercal$ — матрица B, определенная следующим образом:

- B будет блочно-диагональной матрицей, состоящей из n блоков вида (1.4), если $\varepsilon=+$;
- B — единичная матрица, если $\varepsilon=-$ и числа q и $n(q-1)/2$ нечетны;
- в остальных случаях B будет блочно-диагональной матрицей, состоящей из $n-1$ блока вида (1.4) и одного блока
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&\mu\end{pmatrix},$$
где $\mu\in F$ выбирается таким образом, что многочлен $t^2+t+\mu\in F[t]$ неприводим над F.

Как следует из [12, предложение 2.5.13], при нечетных q дискриминант формы Q, т. е. определитель матрицы B, будет квадратом в поле F, если и только если $(-1)^{n(q-1)/2}=\varepsilon$.

Автоморфизм γ индуцирован элементом порядка 2 из $\mathrm{GO}^\varepsilon_{2n}(q)\setminus\mathrm{SO}^\varepsilon_{2n}(q)$ при нечетных q и из $\mathrm{SO}^\varepsilon_{2n}(q)\setminus\Omega^\varepsilon_{2n}(q)$ при четных q.

Отображение (1.1) оставляет инвариантной группу матриц $\mathrm{GO}^\varepsilon_{2n}(q)$, если $\varepsilon=+$ или если $\varepsilon=-$ и числа q и $n(q-1)$ оба нечетны. В этих случаях ϕ — автоморфизм, индуцированный на $L=\mathrm{P}\Omega^\varepsilon_{2n}(q)$ отображением (1.1). Порядок образа ϕ в $\mathrm{Out}\,L$ в этом случае равен e. В остальных случаях рассмотрим автоморфизм φ, который индуцируется на $\mathrm{P}\Omega^-_{2n}(q)$ композицией отображения Фробениуса и сопряжения некоторой матрицей c. Эта матрица подбирается таким образом, что данная композиция оставляет инвариантной матрицу B и, следовательно, группу $\mathrm{GO}^-_{2n}(q)$, как она определена выше. Точный вид матрицы B указан в [12, §2.8] и [4, §1.7.1]. При этом порядок образа φ в $\mathrm{Out}\,L$ равен $2e$ и $\varphi^e=\gamma$.

В случае, когда q нечетно, определены диагональные автоморфизмы δ и δ' группы $L=\mathrm{P}\Omega^\varepsilon_{2n}(q)$. Определим сначала δ'. В случае, когда $(-1)^{n(q-1)/2}=\varepsilon$, автоморфизм δ' имеет порядок 2 и индуцирован сопряжением некоторым элементом из $\mathrm{SO}^\varepsilon_{2n}(q)\setminus\Omega^\varepsilon_{2n}(q)$ (например, r_vr_w, где v,w — несингулярные ортогональные векторы такие, что $Q(v)$ — квадрат, а $Q(w)$ — не квадрат в поле F). В остальных случаях считаем δ' равным 1.

Автоморфизм δ индуцирован сопряжением некоторой матрицей из $\mathrm{CGO}^\varepsilon_{2n}(q)\setminus\mathrm{GO}^\varepsilon_{2n}(q)$. Точный вид матрицы см. в [4, §1.7.1]. Порядок δ в группе $\mathrm{Out}\,L$ находится следующим образом:

$$|\delta|=\begin{cases}2, & \text{если } (-1)^{n(q-1)/2}=(\varepsilon 1)^n,\\ 4, & \text{если } (-1)^{n(q-1)/2}\neq(\varepsilon 1)^n.\end{cases}$$

При этом если $|\delta|=4$, то $\delta^2=\delta'$ в $\mathrm{Out}\,L$.

В случае, когда q нечетно, образы групп $\mathrm{PSO}^\varepsilon_{2n}(q)$, $\mathrm{PGO}^\varepsilon_{2n}(q)$ и $\mathrm{PCGO}^\varepsilon_{2n}(q)$ в $\mathrm{Out}\,L$ совпадают с $\langle\delta'\rangle$, $\langle\delta',\gamma\rangle$ и $\langle\delta,\delta',\gamma\rangle$ соответственно.

Для удобства считаем, что $\delta=\delta'=1$, если q четно. Образ группы $\mathrm{Inndiag}\,L$ внутренне-диагональных автоморфизмов равен $\langle\delta,\delta'\rangle$ (см. [8, определение 2.5.10]). При нечетных q будем обозначать группу $\mathrm{Inndiag}\,L$, следуя [9], через $\mathrm{PCSO}^\varepsilon_{2n}(q)$. Группы $\mathrm{PSO}^\varepsilon_{2n}(q)$, $\mathrm{PCSO}^\varepsilon_{2n}(q)$,

$\mathrm{PGO}^{\varepsilon}_{2n}(q)$ и $\mathrm{PCGO}^{\varepsilon}_{2n}(q)$ представлены на следующей диаграмме.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{PCGO}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \langle \mathrm{P\Omega}^{\varepsilon}_{2n}(q), \delta', \delta, \gamma \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{PCSO}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \langle \mathrm{P\Omega}^{\varepsilon}_{2n}(q), \delta', \delta \rangle \arrow[dr, dash] & & \mathrm{PGO}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \langle \mathrm{P\Omega}^{\varepsilon}_{2n}(q), \delta', \gamma \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \mathrm{PSO}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \langle \mathrm{P\Omega}^{\varepsilon}_{2n}(q), \delta' \rangle &
\end{tikzcd}$$

Прообразы подгрупп $\langle \delta', \phi \rangle$, $\langle \delta', \phi, \gamma \rangle$, $\langle \delta, \delta', \phi \rangle$ и $\langle \delta, \delta', \gamma, \phi \rangle$ в $\mathrm{Aut}\, L$ будем обозначать[2] символами $\mathrm{P\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$, $\mathrm{P\Gamma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$, $\mathrm{PC\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$, и $\mathrm{PC\Gamma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$ соответственно. При необходимости ϕ нужно заменить на φ. Группы $\mathrm{P\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$, $\mathrm{PC\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$, $\mathrm{P\Gamma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$ и $\mathrm{PC\Gamma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$ представлены на следующей диаграмме.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{PC\Gamma O}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \langle \mathrm{PCGO}^{\varepsilon}_{2n}(q), \phi \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathrm{PC\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \langle \mathrm{PCSO}^{\varepsilon}_{2n}(q), \phi \rangle \arrow[dr, dash] & & \mathrm{P\Gamma O}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \langle \mathrm{PGO}^{\varepsilon}_{2n}(q), \phi \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \mathrm{P\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \langle \mathrm{PSO}^{\varepsilon}_{2n}(q), \phi \rangle &
\end{tikzcd}$$

В случае, когда q четно, группа $\mathrm{PSO}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \mathrm{PGO}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \mathrm{PCSO}^{\varepsilon}_{2n}(q) = \mathrm{PCGO}^{\varepsilon}_{2n}(q)$ имеет образ в $\mathrm{Out}\, L$, равный $\langle \gamma \rangle$. Группа $\mathrm{Inndiag}\, L$ при этом совпадает с L.

Ниже приведены соотношения в группе $\mathrm{Out}\, L$ и своим образом в $\mathrm{Out}\, L$ определена группа $\widetilde{L}$.

Если q четно и $\varepsilon = +$, то
$$\gamma^2 = \phi^e = 1, \quad [\phi, \gamma] = 1,$$
причем $\mathrm{Out}\, L = \langle \gamma, \phi \rangle$, кроме случая, когда $n = 4$. Образ $\widetilde{L}$ совпадает с $\langle \phi \rangle$.

Если q четно и $\varepsilon = -$, то
$$\gamma^2 = 1, \quad \varphi^e = \gamma$$
и $\mathrm{Out}\, L = \langle \varphi \rangle$. Образ $\widetilde{L}$ совпадает с $\langle \varphi \rangle$.

Если q нечетно, $\varepsilon = +$ и $n \geq 4$ четно, то
$$\delta'^2 = \delta^2 = \gamma^2 = \phi^e = [\phi, \gamma] = [\delta, \phi] = 1, \quad (\delta\gamma)^2 = \delta',$$
причем $\mathrm{Out}\, L = \langle \delta, \delta', \gamma, \phi \rangle = \langle \delta, \gamma, \phi \rangle$, кроме случая, когда $n = 4$. Образ $\widetilde{L}$ в $\mathrm{Out}\, L$ совпадает с $\langle \delta, \delta', \phi \rangle$, т. е. $\widetilde{L}$ совпадает с $\mathrm{PC\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$.

Если $q \equiv 1 \pmod 4$, $\varepsilon = +$ и $n \geq 3$ нечетно, то
$$\delta'^2 = \gamma^2 = \phi^e = [\phi, \gamma] = 1, \quad \delta^2 = \delta', \quad \delta^{\gamma} = \delta^{-1}, \quad \delta^{\phi} = \delta^p$$
и $\mathrm{Out}\, L = \langle \delta, \delta', \gamma, \phi \rangle = \langle \delta, \gamma, \phi \rangle$. Образ $\widetilde{L}$ в $\mathrm{Out}\, L$ совпадает с $\langle \delta, \delta', \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle$, т. е. $\widetilde{L}$ совпадает с $\mathrm{PC\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$.

Если $q \equiv 3 \pmod 4$, $\varepsilon = +$ и $n \geq 3$ нечетно, то
$$\delta^2 = \gamma^2 = \phi^e = [\phi, \gamma] = [\phi, \delta] = [\gamma, \delta] = 1$$

[2]Отметим, что в литературе, в том числе в [2; 3], символом $\mathrm{P\Gamma O}^{\varepsilon}_{d}(q)$ иногда обозначают группу, которую мы, следуя [4], обозначаем символом $\mathrm{PC\Gamma O}^{\varepsilon}_{d}(q)$. С нашей точки зрения, символ $\mathrm{P\Gamma O}^{\varepsilon}_{d}(q)$ для расширения группы $\mathrm{PGO}^{\varepsilon}_{d}(q)$ группой полевых автоморфизмов хорошо согласуется с обозначениями из [4], и именно в этом значении он используется в настоящей работе.

и $\mathrm{Out}\, L = \langle \delta, \gamma, \phi \rangle$. Образ $\widetilde{L}$ в $\mathrm{Out}\, L$ совпадает с $\langle \delta, \phi \rangle$, т. е. $\widetilde{L}$ совпадает с $\mathrm{P\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$.

Если q нечетно, $\varepsilon = -$, $n \geq 3$ и либо n четно, либо $q \equiv 1 \pmod 4$, то

$$\delta^2 = \gamma^2 = [\varphi, \delta] = [\gamma, \delta] = 1, \quad \varphi^e = \gamma,$$

причем $\mathrm{Out}\, L = \langle \delta, \gamma, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$. Образ $\widetilde{L}$ в $\mathrm{Out}\, L$ совпадает с $\langle \delta, \varphi \rangle$, т. е. $\widetilde{L}$ совпадает с $\mathrm{P\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$.

Если $q \equiv 3 \pmod 4$, $\varepsilon = -$ и $n \geq 3$ нечетно, то

$$\delta'^2 = \gamma^2 = \phi^e = [\phi, \gamma] = [\phi, \delta] = 1, \quad \delta^2 = \delta', \quad \delta^\gamma = \delta^{-1}$$

и $\mathrm{Out}\, L = \langle \delta, \delta', \gamma, \phi \rangle = \langle \delta, \gamma, \phi \rangle$. Образ $\widetilde{L}$ в $\mathrm{Out}\, L$ совпадает с $\langle \delta, \delta', \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle$, т. е. $\widetilde{L}$ совпадает с $\mathrm{P\Sigma O}^{\varepsilon}_{2n}(q)$ и совпадает с $\mathrm{Aut}\, L$.

Для случая, когда $(\varepsilon, n) = (+, 4)$, группа $L = \mathrm{P\Omega}^+_8(q)$ допускает также автоморфизм τ порядка 3 такой, что $\langle \gamma, \tau \rangle \simeq \mathrm{Sym}(3)$. В группе $\mathrm{Out}\, L$ выполняются следующие соотношения.

Если q четно и $(\varepsilon, n) = (+, 4)$, то

$$\gamma^2 = \tau^3 = (\gamma\tau)^2 = \phi^e = 1, \quad [\phi, \gamma] = [\phi, \tau] = 1$$

и $\mathrm{Out}\, L = \langle \gamma, \phi, \tau \rangle$.

Если q нечетно и $(\varepsilon, n) = (+, 4)$, то

$$\delta'^2 = \delta^2 = \gamma^2 = \tau^3 = (\gamma\tau)^2 = \phi^e = [\phi, \gamma] = [\delta, \phi] = [\tau, \phi] = 1, \quad (\delta\gamma)^2 = \delta', \quad \delta^\tau = \delta', \quad \delta'^\tau = \delta\delta'$$

и $\mathrm{Out}\, L = \langle \delta, \delta', \gamma, \phi, \tau \rangle = \langle \delta, \gamma, \phi, \tau \rangle$.

С л у ч а й $L = E_6(q)$. Известно [8, теорема 2.5.12], что группа $\mathrm{Out}\, L$ порождается автоморфизмами δ, ϕ и γ, где δ — диагональный автоморфизм, ϕ — полевой автоморфизм и γ — графовый автоморфизм. При этом выполнены соотношения

$$\delta^{(3,q-1)} = \phi^e = \gamma^2 = [\phi, \gamma] = 1, \quad \delta^\gamma = \delta^{-1}, \quad \delta^\phi = \delta^p.$$

Полагаем, в этом случае группу $\widetilde{L}$ такой, что ее образ в $\mathrm{Out}\, L$ равен $\langle \delta, \phi \rangle$.

Обратим внимание на одно важное различие между терминологией и обозначениями в [2] и [4; 12]. Векторное пространство V размерности $2n + 1$ с определенной на нем квадратичной формой Q над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики 2 всегда обладает нетривиальным радикалом $V^\perp$ относительно билинейной формы (1.3), ассоциированной с квадратичной формой Q. В [4; 12] форма Q считается вырожденной. Вместе с тем в [2, § 3.1.1] считается, что форма Q невырожденна на V, если $V^\perp$ имеет размерность 1 и порождается некоторым несингулярным вектором. На фактор-пространстве $V/V^\perp$ форма (1.3) индуцирует невырожденную симплектическую форму, группа изометрий которой изоморфна группе $\mathrm{Sp}_{2n}(q) = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, а также и группе изометрий квадратичной формы Q пространства V. Поэтому в случае, когда q четно, там, где в [2] речь идет о группах $\Omega_{2n+1}(q) = \mathrm{P\Omega}_{2n+1}(q)$, мы пишем $\mathrm{Sp}_{2n}(q) = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, вместо $\mathrm{P\Gamma O}_{2n+1}(q)$ пишем $\mathrm{P\Gamma Sp}_{2n}(q)$ и так далее. При этом V будем называть *параболическим* пространством ранга n. Кроме того, параболическим удобно называть и пространство нечетной размерности с невырожденной квадратичной формой в случае, когда характеристика нечетна.

Также при четных q граф $\Gamma(Q_{2n}(q))$, ассоциированный с пространством V, изоморфен графу $\Gamma(W_{2n-1}(q))$ (см. [2, 2.6.4]), и мы его будем рассматривать в этом случае только как $\Gamma(W_{2n-1}(q))$.

2. Группы и графы ранга 3

Напомним, что группа G ранга 3 подстановок множества Ω задает на Ω два графа ранга 3, каждый из которых является дополнением другого. Граф Γ_G, фигурирующий в предложениях 1–4 ниже, определен с точностью до взятия дополнения.

Предложение 1. *Пусть* $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ — *примитивная почти простая группа подстановок ранга* 3 *на конечном множестве* Ω, *ее цоколь* L — *знакопеременная группа степени* $n \geq 5$, M — *стабилизатор точки в этом действии и* Γ_G — *соответствующий граф ранга* 3. *Если* $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} = L$, *то с точностью до подстановочного изоморфизма выполняется одно из следующих утверждений.*

1) Ω — *множество двухэлементных подмножеств* n*-элементного множества,* $\Gamma_G = T(n)$ — *граф треугольников. Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Sym}(n)$, *в частности* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L$ *при* $n \neq 6$.
2) $n \in \{8, 10\}$, Ω — *множество разбиений* n*-элементного множества в объединение непересекающихся подмножеств мощности* $n/2$, Γ_G — S_n*-граф. Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Sym}(n) = \mathrm{Aut}\, L$.

Предложение 2. *Пусть* $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ — *примитивная почти простая группа подстановок ранга* 3 *на конечном множестве* Ω *мощности* v, *ее цоколь* L — *спорадическая группа,* M — *стабилизатор точки в этом действии и* Γ_G — *соответствующий граф ранга* 3. *Если* $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} = L$, *то с точностью до подстановочного изоморфизма* $v = |\Omega|$, L, $M \cap L$, Γ_G *и* 2*-замыкание* $G^{(2)}$ *группы* G *содержатся в табл.* 1.

Таблица 1

Почти простые группы подстановок ранга 3 со спорадическим цоколем

пп.	$v = \|\Omega\|$	$L = \mathrm{Soc}\, G$	$M \cap L$	Γ_G	$G^{(2)}$	ссылка
1	77	M_{22}	$2^4.\mathrm{Alt}(6)$	$S(3,6,22)$	$\mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.27]
2	100	HS	M_{22}	Хигмэна-Симса	$\mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.31]
3	100	HJ	$\mathrm{PSU}_3(3)$	Холла-Янко	$\mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.32]
4	176	M_{22}	$\mathrm{Alt}(7)$	$S(4,7,23) \setminus S(3,6,22)$	L	[2, §10.51]
5	253	M_{23}	$2^4.\mathrm{Alt}(7)$	$S(4,7,23)$	$L = \mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.56]
6	275	McL	$\mathrm{PSU}_4(3)$	МакЛафлина	$\mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.61]
7	1288	M_{24}	$M_{12}.2$	граф додекад	$L = \mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.80]
8	1782	Suz	$G_2(4)$	Сузуки	$\mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.83]
9	2300	Co_2	$\mathrm{PSU}_6(2).2$	Конвея	$L = \mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.88]
10	3510	Fi_{22}	$2.\mathrm{PSU}_6(2)$	Fi_{22}-граф	$\mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.90]
11	4060	Ru	${}^2F_4(2)$	Рудвалиса	$L = \mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.91]
12	14080	Fi_{22}	$\Omega_7(3)$	Fi_{22}-граф	L	[2, §10.94]
13	31671	Fi_{23}	$2.Fi_{22}$	Fi_{23}-граф	$L = \mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.96]
14	137632	Fi_{23}	$\mathrm{P}\Omega_8^+(3).\mathrm{Sym}(3)$	Fi_{23}-граф	$L = \mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.97]
15	306936	Fi_{24}'	Fi_{23}	Fi_{24}-граф	$\mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.99]

Предложение 3. *Пусть* $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ — *примитивная почти простая группа подстановок ранга* 3 *на конечном множестве* Ω, *ее цоколь* L — *простая группа лиева типа над конечным полем порядка* q *и характеристики* p, M — *стабилизатор точки в этом действии и* Γ_G — *соответствующий граф ранга* 3. *Если* $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} = L$, *то с точностью до подстановочного изоморфизма либо* $v = |\Omega|$, L, $M \cap L$, Γ_G *и* 2*-замыкание* $G^{(2)}$ *группы* G *содержится в табл.* 2, *либо выполняется одно из следующих утверждений.*

1) $L = \mathrm{PSL}_n(q)$, $n \geq 4$, Ω — *множество прямых для* L *в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = J_q(n, 2)$ — *граф Грассмана. Тогда* $G^{(2)} = \widetilde{L} = \mathrm{P\Gamma L}_n(q)$ *при* $n > 4$ *и* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L = \langle \mathrm{P\Gamma L}_n(q), \gamma \rangle$ *при* $n = 4$.
2) $L = \mathrm{PSU}_n(q)$, $n \geq 3$, Ω — *множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \Gamma(H_{n-1}(q^2))$ — *эрмитов полярный граф. Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L = \widetilde{L} = \mathrm{P\Gamma U}_n(q)$.
3) $L = \mathrm{PSU}_4(q)$, Ω — *множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \mathrm{GQ}(q, q^2)$ — *обобщенный четырехугольник. Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L = \widetilde{L} = \mathrm{P\Gamma U}_4(q)$.
4) $L = \mathrm{PSU}_5(q)$, Ω — *множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \mathrm{GQ}(q^3, q^2)$ — *обобщенный четырехугольник. Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L = \widetilde{L} = \mathrm{P\Gamma U}_5(q)$.

5) $L = \mathrm{PSU}_n(2)$, $n \geq 4$, Ω — *множество анизотропных точек в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \overline{NU}_m(2)$ — *граф, в котором отношение смежности — ортогональность. Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L = \widetilde{L} = \mathrm{P\Gamma U}_n(2)$.

6) $L = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, $n \geq 2$, Ω — *множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \Gamma(W_{2n-1}(q))$ — *симплектический полярный граф ранга* n. *Тогда* $G^{(2)} = \widetilde{L} = \mathrm{PC\Gamma Sp}_{2n}(q)$, *причем* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L$, *если* $(n,p) \neq (2,2)$.

7) $L = \mathrm{PSp}_4(q)$, Ω — *множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \mathrm{GQ}(q,q)$ — *обобщенный четырехугольник. Тогда* $G^{(2)} = \widetilde{L} = \mathrm{PC\Gamma Sp}_4(q)$, *причем* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L$, *если* q *нечетно.*

8) $L = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, $n \geq 2$, $q \in \{4,8\}$, Ω — *множество анизотропных гиперплоскостей одного типа (гиперболических или эллиптических) в параболическом пространстве ранга* n *над полем из* q *элементов,* $\Gamma_G = NO^{\pm}_{2n+1}(q)$. *Тогда* $G^{(2)} = \widetilde{L} = \mathrm{PC\Gamma Sp}_{2n}(q)$. *При этом* $G = G^{(2)} = \mathrm{PC\Gamma Sp}_{2n}(q)$, *если* $q = 8$. *Кроме того, при* $n > 2$ *группа* $G^{(2)}$ *совпадает с* $\mathrm{Aut}\, L$.

9) $L = \mathrm{P\Omega}_{2n+1}(3)$, $n \geq 2$, Ω — *множество анизотропных гиперплоскостей одного типа (гиперболических или эллиптических) в параболическом пространстве ранга* n *над полем из* 3 *элементов,* $\Gamma_G = NO^{\pm}_{2n+1}(3)$. *Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L = \widetilde{L} = \mathrm{PSO}_{2n+1}(3)$.

10) $L = \mathrm{P\Omega}_{2n+1}(q)$, $n \geq 2$, q *нечетно,* Ω — *множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \Gamma(Q_{2n}(q))$ — *параболический ортогональный полярный граф ранга* n. *Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L = \widetilde{L} = \mathrm{PC\Gamma O}_{2n+1}(q)$.

11) $L = \mathrm{P\Omega}^{+}_{2n}(q)$, $n \geq 3$, Ω — *множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \Gamma(Q_{2n-1}(q))$ — *гиперболический ортогональный полярный граф ранга* n. *Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{PC\Gamma O}^{+}_{2n}(q)$, *причем* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L$, *если* $n \neq 4$, *и* $G^{(2)}$ *имеет индекс* 3 *в* $\mathrm{Aut}\, L$, *если* $n = 4$.

12) $L = \mathrm{P\Omega}^{+}_{10}(q)$, Ω — *множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \Delta_{1/2}$ — *половинный граф двудольного дистанционно-регулярного графа* $\Delta(X,\Omega)$ *ортогонального полярного пространства ранга* 5. *Тогда* $G^{(2)} = \widetilde{L} = \mathrm{PC\Sigma O}^{+}_{10}(q)$.

13) $L = \mathrm{P\Omega}^{-}_{2n+2}(q)$, $n \geq 2$, Ω — *множество изотропных точек в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \Gamma(Q_{2n+1}(q))$ — *эллиптический ортогональный полярный граф ранга* n. *Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L = \mathrm{PC\Gamma O}^{-}_{2n+2}(q)$.

14) $L = \mathrm{P\Omega}^{-}_{6}(q)$, Ω — *множество максимальных изотропных подпространств в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = \mathrm{GQ}(q^2,q)$ — *обобщенный четырехугольник. Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L = \mathrm{PC\Gamma O}^{-}_{6}(q)$.

15) $L = \mathrm{P\Omega}^{\varepsilon}_{2n}(2)$, $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, Ω — *множество анизотропных точек в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = NO^{\varepsilon}_{2n}(2)$ — *граф, в котором отношение смежности — ортогональность. Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{PSO}^{\varepsilon}_{2n}(2)$, *причем* $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, L$, *если* $(n,\varepsilon) \neq (4,+)$, *и* $G^{(2)}$ *имеет индекс* 3 *в* $\mathrm{Aut}\, L$, *если* $(n,\varepsilon) = (4,+)$.

16) $L = \mathrm{P\Omega}^{\varepsilon}_{2n}(3)$, $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, Ω — *множество анизотропных точек с фиксированным значением квадратичной формы в соответствующем проективном пространстве,* $\Gamma_G = NO^{\varepsilon}_{2n}(3)$ — *граф, в котором отношение смежности — ортогональность. Тогда* $G^{(2)} = \mathrm{PGO}^{\varepsilon}_{2n}(3)$ — *подгруппа, образ которой в* $\mathrm{Out}\, L$ *равен* $\langle \delta', \phi, \gamma \rangle$; *подгруппа* $G^{(2)}$ *имеет индекс* 2 *в* $\mathrm{Aut}\, L$, *если* $(n,\varepsilon) \neq (4,+)$, *и индекс* 6, *если* $(n,\varepsilon) = (4,+)$.

17) $L = E_6(q)$, Ω — *множество смежных классов по подгруппе* M, *где* $M \cap L$ — *параболическая* $D_5(q)$*-подгруппа группы* L, Γ_G — *это граф коллинеарности геометрии* $E_{6,1}(q)$. *Тогда* $G^{(2)} = \widetilde{L} = \langle \mathrm{Inndiag}\, L, \phi \rangle$ — *подгруппа в* $\mathrm{Aut}\, L$ *индекса* 2, *а образ в* $\mathrm{Out}\, L$ *равен* $\langle \delta, \phi \rangle$.

Т а б л и ц а 2

Почти простые группы подстановок ранга 3 малой степени с цоколем лиева типа

пп.	$v = \|\Omega\|$	$L = \mathrm{Soc}\, G$	$M \cap L$	Γ_G	$G^{(2)}$	ссылка
1	10	$\mathrm{PSL}_2(5) \simeq \mathrm{Alt}(5)$	$\mathrm{Sym}(3)$	$T(5)$	$\mathrm{Aut}\, L \simeq \mathrm{Sym}(5)$	[2, §10.3]
2	15	$\mathrm{PSL}_2(9) \simeq \mathrm{Alt}(6)$	$\mathrm{Sym}(4)$	$T(6)$	$\mathrm{Sym}(6)$	[2, §10.5]
3	28	$\mathrm{PSL}_4(2) \simeq \mathrm{Alt}(8)$	$\mathrm{Sym}(6)$	$T(8)$	$\mathrm{Aut}\, L \simeq \mathrm{Sym}(7)$	[2, §10.11]
4	35	$\mathrm{PSL}_4(2) \simeq \mathrm{Alt}(8)$	$2^4 : (\mathrm{Sym}(3) \times \mathrm{Sym}(3))$	S_8-граф	$\mathrm{Aut}\, L \simeq \mathrm{Sym}(8)$	[2, §10.13]
5	36	$\mathrm{PSU}_3(3)$	$\mathrm{PSL}_3(2)$	$G_2(2)$-граф	$\mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.14]
6*	50	$\mathrm{PSU}_3(5)$	$\mathrm{Alt}(7)$	Хоффмана — Синглтона	$L.2$	[2, §10.19]
7*	56	$\mathrm{PSL}_3(4)$	$\mathrm{Alt}(6)$	Гевирца	$L : 2^2$	[2, §10.20]
8	117	$\mathrm{PSL}_4(3) \simeq \mathrm{P}\Omega_6^+(3)$	$\mathrm{PSp}_4(3) \simeq \mathrm{P}\Omega_5(3)$	$NO_6^+(3)$	$\mathrm{PGO}_6^+(3)$	[2, §10.35]
9*	162	$\mathrm{PSU}_4(3)$	$\mathrm{PSL}_3(4)$	$U_4(3)$-граф	$L.(2^2)_{133}$	[2, §10.48]
10	416	$G_2(4)$	HJ	$G_2(4)$-граф	$\mathrm{Aut}\, L$	[2, §10.68]
11*	1408	$\mathrm{PSU}_6(2)$	$\mathrm{PSU}_4(3).2$	Конвея	$L.2$	[2, §10.81]

Примечание. Группа $L = \mathrm{PSU}_4(3)$ имеет группу внешних автоморфизмов, изоморфную группе D_8, которая содержит три класса инволюций, обозначаемых в [5] символами 2_1 (центральный элемент в D_8), 2_2 и 2_3, и две элементарные абелевые подгруппы порядка 4, обозначенные как $(2^2)_{122}$ и $(2^2)_{133}$; расширение группы L с помощью последней из них и выступает в качестве группы $G^{(2)}$ в п. 9 табл. 2. В пп. 6, 7 и 11 строение группы $G^{(2)}$ однозначно восстанавливается из ее описания в табл. 2 по [5].

Предложение 4. *Пусть $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ — примитивная почти простая группа подстановок ранга 3 на конечном множестве Ω, L — ее цоколь, M — стабилизатор точки в этом действии и Γ_G — соответствующий граф ранга 3. Если $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} \neq L$, то с точностью до подстановочного изоморфизма $v = |\Omega|$, L, $M \cap L$, Γ_G и 2-замыкание $G^{(2)}$ группы G содержится в табл. 3.*

Т а б л и ц а 3

Почти простые группы подстановок G ранга 3, для которых $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} \neq \mathrm{Soc}\, G$

пп.	$v = \|\Omega\|$	$L = \mathrm{Soc}\, G$	$M \cap L$	Γ_G	$G^{(2)}$	ссылка
1*	36	$\mathrm{PSL}_2(8)$	D_{14}	$T(9)$	$\mathrm{Sym}(9)$	[2, §10.15]
2	55	M_{11}	$M_9.2$	$T(11)$	$\mathrm{Sym}(11)$	[2, §11.3.5]
3	66	M_{12}	$M_{10}.2$	$T(12)$	$\mathrm{Sym}(12)$	[2, §11.3.5]
4	120	$\mathrm{PSp}_6(2)$	$G_2(2)$	$NO_8^+(2)$	$\mathrm{PSO}_8^+(2)$	[2, §10.39]
5	120	$\mathrm{Alt}(9)$	$\mathrm{P\Gamma L}_2(8)$	$NO_8^+(2)$	$\mathrm{PSO}_8^+(2)$	[2, §11.3.1]
6	253	M_{23}	$M_{21}.2$	$T(23)$	$\mathrm{Sym}(23)$	[2, §11.3.5]
7	276	M_{24}	$M_{22}.2$	$T(24)$	$\mathrm{Sym}(24)$	[2, §11.3.5]
8	351	$G_2(3)$	$\mathrm{PSU}_3(3).2$	$NO_7^{-\perp}(3)$	$\mathrm{PSO}_7(3)$	[2, §10.66]
9	1080	$\mathrm{P}\Omega_7(3)$	$G_2(3)$	$NO_8^+(3)$	$\mathrm{PGO}_8^+(3)$	[2, §10.78]
10	2016	$G_2(4)$	$\mathrm{PSU}_3(4).2$	$NO_7^-(4)$	$\mathrm{P\Gamma Sp}_6(4)$	[2, §3.1.4]
11*	130816	$G_2(8)$	$\mathrm{PSU}_3(8).2$	$NO_7^-(8)$	$\mathrm{P\Gamma Sp}_6(8)$	[2, §3.1.4]

Примечание. Группы G с цоколями $L = PSL_2(8)$ и $L = G_2(8)$ из соответственно пп. 1 и 11 табл. 3 имеют ранг 3, только если $G = \mathrm{Aut}\, L$.

3. Доказательства основных результатов

Нам потребуются ряд вспомогательных лемм. Всюду далее Ω — конечное множество, $|\Omega| > 1$.

Лемма 1. *Пусть $G \leq G^* \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ и G транзитивна. Пусть $\alpha \in \Omega$, $H = G_\alpha$ и $H^* = G^*_\alpha$ — стабилизаторы точки α в G и G^* соответственно. Справедливы следующие утверждения.*

1) *$H = G \cap H^*$.*
2) *$G^* = H^* G$.*
3) *Если обе группы G и G^* имеют один и тот же ранг, то орбиты H и H^* на Ω совпадают.*

4) *Если* $G \trianglelefteq G^*$, *то* $H^G = H^{G^*}$.
5) *Если* $G \trianglelefteq G^*$ *и* H *не имеет орбит длины* 1, *отличных от* $\{\alpha\}$, *то* $H^* = N_{G^*}(H)$; *в частности,* $H = N_G(H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение п. 1 очевидно. Поскольку G — транзитивная группа, для любого $g^* \in G^*$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $\alpha g^* = \alpha g$ и, следовательно, $g^* g^{-1} \in H^*$ и $g^* \in H^* G$. Тем самым $G^* \subseteq H^* G$ и п. 2 доказан. Так как орбиты группы H^* на Ω являются объединениями обрит группы H, из совпадения числа орбит групп H и H^* (т. е. из совпадения рангов групп G и G^*) следует, что каждая орбита группы H будет также орбитой H^*. Таким образом, орбиты групп H и H^* одни и те же, что и утверждается в п. 3. Утверждение п. 4 следует из пп. 1,2: если $G \trianglelefteq G^*$, то $H = H^* \cap G \trianglelefteq H^*$ и

$$H^{G^*} = H^{H^* G} = H^G.$$

Докажем п. 5. Ясно, что $H^* \leq N_{G^*}(H)$, если $G \trianglelefteq G^*$. Допустим, $g \in N_{G^*}(H) \setminus H^*$. Тогда $\beta := \alpha g \neq \alpha$. С другой стороны,

$$\beta H = \beta H^g = \alpha g H^g = \alpha H g = \alpha g = \beta;$$

противоречие с тем, что $\{\alpha\}$ — единственная орбита длины 1 группы H.

Лемма 2. *Пусть* $G \trianglelefteq X$ *и* $C_X(G) = 1$. *Пусть* $\phi : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$ — *точное транзитивное подстановочное представление ранга* 3 *группы* G *и* $H = G_\alpha$ — *стабилизатор точки* $\alpha \in \Omega$. *Предположим, что орбиты на* Ω *группы* H *имеют попарно различные длины. Тогда* $GN_X(H)$ — *наибольшая подгруппа группы* X, *на которую отображение* ϕ *продолжается, оставаясь точным подстановочным представлением ранга* 3 *на множестве* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для краткости $H^0 := N_X(H)$ и $G^0 := H^0 G$.

Покажем сначала, что отображение $\phi : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$ можно продолжить до гомоморфизма $G^0 \to \mathrm{Sym}(\Omega)$, задающего действие на Ω группы G^0. Из условия следует, что $\{\alpha\}$ — единственная орбита длины 1 группы H. Теперь в силу утверждения п. 5 леммы 1 имеем $H = N_G(H) = H^0 \cap G$. Рассмотрим множества

$$\Delta^0 = \{H^0 g \mid g \in G^0\} \quad \text{и} \quad \Delta = \{Hg \mid g \in G\}.$$

Из равенств $G^0 = H^0 G$ и $H = H^0 \cap G$ следует, что $\Delta^0 = \{H^0 g \mid g \in G\}$ и что правило $Hg \leftrightarrow H^0 g$ для всех $g \in G$ корректно задает естественное взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств Δ^0 и Δ. Это соответствие показывает, что действия группы G правыми сдвигами на множествах Δ и Δ^0 эквивалентны. Первое из этих действий канонически эквивалентно действию ϕ группы G на Ω, а действие группы G на Δ^0 является сужением на G канонического действия на Δ^0 группы G^0. Следовательно, отображение ϕ по эквивалентности продолжается до действия на Ω группы G^0.

Покажем далее, что определенное таким образом действие на Ω группы G^0 по-прежнему имеет ранг 3. Стабилизатором точки α при таком действии будет подгруппа H^0, поэтому надо убедиться, что H^0 имеет ровно три орбиты. Всякая орбита подгруппы H^0 будет объединением орбит подгруппы H, поскольку $H \leq H^0$, причем одна из орбит подгруппы H^0 совпадает с орбитой $\{\alpha\}$ подгруппы H. Таким образом, если предположить, что число орбит подгруппы H^0 не равно 3, оно равно двум, и $\Omega \setminus \{\alpha\}$ — орбита подгруппы H^0. Но, поскольку $H \trianglelefteq H^0$, орбиты подгруппы H на $\Omega \setminus \{\alpha\}$, т. е. две отличные от $\{\alpha\}$ орбиты подгруппы H, образуют систему импримитивности для действия H^0 на $\Omega \setminus \{\alpha\}$. В частности, они имеют равную длину, вопреки условию.

Покажем, наконец, что действие группы G^0 на Ω точное. Ядро K этого действия тривиально пересекается с нормальной подгруппой G, поскольку G действует точно. Значит, $[G, K] \leq G \cap K = 1$ и $K \leq C_X(G) = 1$.

Если теперь G^* — другая подгруппа группы X, содержащая G и такая, что действие группы G на Ω можно продолжить до точного подстановочного представления группы G^* ранга 3, то по лемме 1 $G^* = H^*G$, где H^* — стабилизатор в G^* точки α и $H^* = N_{G^*}(H) \leq N_X(H) = H^0$. Тем самым $G^* = H^*G \leq H^0G = G^0$, т. е. G^0 — наибольшая подгруппа в X с требуемыми свойствами, как и утверждается в лемме.

З а м е ч а н и е. Если в условиях леммы 2 рассматривать действие группы X на множестве классов сопряженных подгрупп группы G, индуцированное сопряжениями, подгруппа $GN_X(H)$ совпадает со стабилизатором в X класса H^G.

Следующее утверждение хорошо известно и приводится здесь лишь для полноты изложения. Оно понадобится для того, чтобы непосредственно применить [13, теорема 1] при доказательстве предложений 1–4. В качестве альтернативы можно воспользоваться [15, теорема 2].

Лемма 3. *Пусть $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ — почти простая примитивная группа подстановок ранга 3 и $L = \mathrm{Soc}\, G$. Тогда $N_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(L)$ — также почти простая группа с цоколем L. В частности, цоколь группы $G^{(2)}$ равен L, если и только если $G^{(2)} \leq N_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(L)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку L является цоколем и единственной минимальной нормальной подгруппой примитивной группы G, группа $N_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(L)$ также примитивна и в соответствии с [7, теорема 4.3B] либо группа L регулярна на Ω, либо $C_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(L) = 1$. Допустим, L регулярна на Ω. Тогда $|\Omega| = |L|$. Так как G — группа ранга 3, длина одной из орбит группы G на Ω^2 не меньше, чем $(|L|^2 - |L|)/2$. Пусть пара (α, β) принадлежит этой орбите. Тогда

$$\frac{|L|^2 - |L|}{2} \leq |G : G_{\alpha\beta}| \leq |G| \leq |\,\mathrm{Aut}\, L|,$$

откуда $(|L| - 1)/2 \leq |\,\mathrm{Out}\, L|$. Но, какова бы ни была неабелева простая группа L, согласно [16, лемма 2.2] выполнено неравенство $|\,\mathrm{Out}\, L| \leq |L|/30$, что очевидно противоречит предыдущему неравенству. Значит, $C_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(L) = 1$ и нормализатор $N_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(L)$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}\, L$.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложений 1–4. Напомним, что G — почти простая группа с неабелевым простым цоколем L, действующая как группа подстановок ранга 3 на некотором конечном множестве Ω. Тем самым на Ω определена структура сильно регулярного графа Γ_G степени v и валентности k. Пусть также M — стабилизатор некоторой точки $\alpha \in \Omega$. Как следует из условий доказываемых предложений (см. также введение настоящей работы), мы считаем, что группа G примитивна, т. е. M — максимальная подгруппа группы G.

Допустим, что $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} \neq L$, как в условии предложения 4. Тогда $G^{(2)} \not\leq N_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(L)$ по лемме 3 и из [13, теорема 1] следует, что имеет место один из следующих случаев A.I–A.III.

С л у ч а й A.I: тройка $(G, v, G^{(2)})$ присутствует в списке

$$(\mathrm{P\Gamma L}_2(8), 36, \mathrm{Sym}(9)), \quad (M_{11}, 55, \mathrm{Sym}(11)), \quad (M_{12}, 66, \mathrm{Sym}(12)),$$
$$(M_{23}, 253, \mathrm{Sym}(23)), \quad (M_{24}, 276, \mathrm{Sym}(24)), \quad (\mathrm{Alt}(9), 120, \mathrm{PSO}_8^+(2)).$$

Как видно из [2, теоремы 11.3.1–11.3.5], группа G действительно имеет ранг 3, и каждая из перечисленных троек соответствует пп. 1–3 и 5–7 в табл. 3. По ссылке, указанной в последнем столбце табл. 3, определяем $M \cap L$ и граф Γ_G. Таким образом, утверждение предложения 4 в случае A.I верно.

С л у ч а й A.II: $L = G_2(q)$, $v = |\Omega| = q^3(q^3 - 1)/2$, и если q нечетно, то $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} = \mathrm{P\Omega}_7(q)$, а если q четно, то $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} = \mathrm{PSp}_6(q)$. Из [2, теорема 11.3.4] и [13, предложение 1] (и замечание после него) заключаем, что группа G с цоколем L может быть группой ранга 3 только при $q = 3, 4, 8$, что соответствует пп. 8, 10 и 11 в табл. 3, причем при $q = 8$ группа G с цоколем $L = G_2(q)$ может быть группой ранга 3, только если $G = G_2(8).3 = \mathrm{Aut}\, L$. По ссылке, указанной в последнем столбце табл. 3, определяем, что $M \cap L = \mathrm{PSU}_3(q).2$, и при q четном — $\Gamma_G = NO_7^-(q)$, а при $q = 3$ — $\Gamma_G = NO_7^{-\perp}(3)$. Информация о группе $G^{(2)}$ будет получена при доказательстве предложения 3 в пп. 8 и 9 (см. разбор случая B.IV ниже).

Случай A.III: $L = \mathrm{P}\Omega_7(q)$ при нечетном q и $L = \mathrm{PSp}_6(q)$ при четном q, $v = q^3(q^4 - 1)/(2, q-1)$ и $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} = \mathrm{P}\Omega_8^+(q)$. Из [13, предложение 2] с учетом принятых ранее соглашений заключаем, что группа G с цоколем L может быть группой ранга 3 только при $q = 2, 3$, что соответствует пп. 4 и 9 в табл. 3. По ссылке, указанной в последнем столбце табл. 3, определяем, что $M \cap L = G_2(q)$ и $\Gamma_G = NO_8^+(q)$. Полная информация о группе $G^{(2)}$ будет получена после того, как будет доказано предложение 3 в утверждениях пп. 15 и 16 этого предложения (см. разбор случая B.IV ниже).

Пусть далее, как и в условиях предложений 1–3, цоколь группы $G^{(2)}$ совпадает с L. Поскольку группа содержится в своем 2-замыкании, имеем

$$L \trianglelefteq G \leq G^{(2)} \leq X, \tag{3.1}$$

где $X = \mathrm{Aut}\, L$. Пусть $H = L_\alpha = M \cap L$ — стабилизатор в L точки $\alpha \in \Omega$. Рассмотрим случаи B.I–B.IV, когда группа L является соответственно знакопеременной, спорадической, исключительной или классической группой.

Случай B.I: L — знакопеременная группа степени не меньше 5 и $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} = L$. Все возможности для действия группы G со знакопеременным цоколем описаны в теореме Банаи [1] (см. также [2, теорема 11.3.1]). В частности, из этой теоремы вытекает, что группа L сама действует на Ω как группа ранга 3 и, за исключением случая, когда $L = \mathrm{Alt}(7)$ и $\Gamma_G = \Gamma_L = T(7)$, длины k и $v - k - 1$ отличных от $\{\alpha\}$ орбит группы H на Ω различны. Если $\Gamma_G = \Gamma_L = T(7)$, то $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, \Gamma_G = \mathrm{Sym}(7)$ согласно [3, теорема 9.1.2]. В остальных случаях в силу (3.1) и леммы 2 группа $G^{(2)}$ совпадает со стабилизатором в $\mathrm{Aut}\, L$ класса сопряженности H^L подгруппы H. Снова из теоремы Банаи и строения группы автоморфизмов знакопеременной группы заключаем, что либо $L \neq \mathrm{Alt}(6)$, класс сопряженности H^L инвариантен относительно $\mathrm{Aut}\, L = \mathrm{Sym}(6)$ и имеет место одно из утверждений 1), 2) в предложении 1, либо $L = \mathrm{Alt}(6)$ и с точностью до подстановочной эквивалентности $\Gamma_L = T(6)$. В последнем случае $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\, \Gamma_G = \mathrm{Sym}(6)$ — подгруппа индекса 2 в $\mathrm{Aut}\, L$ (см. [3, теорема 9.1.2]). Таким образом, в случае, когда L — простая знакопеременаая группа, справедливо предложение 1.

Случай B.II: L — спорадическая группа и $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} = L$. Все возможности (19 случаев), когда группа G со спорадическим цоколем действует как группа ранга 3, перечислены в [2, теорема 11.3.5 и табл. 11.3]. Если

$$(L, v) \in \{(M_{11}, 55), (M_{12}, 66), (M_{23}, 253), (M_{24}, 276)\},$$

то, как мы видели при разборе случая I, $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} \neq L$. Оставшиеся 15 случаев соответствуют пп. 1–15 табл. 1. Из параграфа монографии [2], указанного в последнем столбце таблицы, находим информацию о подгруппе $H = M \cap L$, графе Γ_G и группе $\mathrm{Aut}\, \Gamma_G = G^{(2)}$. Таким образом, убеждаемся в справедливости предложения 2.

Случай B.III: L — исключительная группа лиева типа и $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} = L$. Группы ранга 3 с исключительным простым цоколем описаны в [2, теорема 11.3.4]. Если

$$(L, v) \in \{(G_2(3), 351), (G_2(4), 2016), (G_2(8), 130816)\},$$

то, как мы видели при разборе случая A.II, $\mathrm{Soc}\, G^{(2)} \neq L$. В остальных случаях согласно [2, теорема 11.3.4] либо

$$L = G_2(4), \quad v = 416 \quad \text{и} \quad H = HJ = J_2,$$

$$\text{либо} \quad L = E_6(q), \quad v = \frac{(q^{12} - 1)(q^9 - 1)}{(q^4 - 1)(q - 1)} \quad \text{и} \quad H \text{ — параболическая подгруппа типа } D_5(q).$$

Ситуация $L = G_2(4)$ соответствует п. 10 в табл. 2, и из [2, §10.68] находим информацию о Γ_G и убеждаемся, что $G^{(2)} = \mathrm{Aut}\,\Gamma_G = \mathrm{Aut}\,L$, как и утверждается в предложении 3. Если же $L = E_6(q)$, то в силу [2, теорема 11.3.4] сама группа L действует на Ω как группа ранга 3. Поэтому $G^{(2)}$ совпадает со стабилизатором в $\mathrm{Aut}\,L$ класса сопряженности H^L подгруппы H. Известно (см., например, [6, табл. 9]), что в группе L имеется два класса сопряженности параболических подгрупп H указанного строения. Эти классы переставляются графовым автоморфизмом, а стабилизатор класса совпадает с группой $\widetilde{L}$, как указано в утверждении п. 17 предложения 3.

Случай B.IV: L — классическая простая группа лиева типа и $\mathrm{Soc}\,G^{(2)} = L$. Все возможности для действия группы G перечислены в [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3]. Часть этих возможностей соответствует случаям, перечисленным в табл. 2. Если L и v указаны в этой таблице, то $H = M \cap L$; граф Γ_G и группа автоморфизмов графа Γ_G находятся в параграфе монографии [2], указанном в последнем столбце табл. 3. Пункты 1–4 этой таблицы в силу известных изоморфизмов соответствуют случаям, когда L — знакопеременная группа и группа $G^{(2)}$ известна (см. случай B.I). В остальных случаях группа $\mathrm{Aut}\,\Gamma_G$ явно указана в соответствующем параграфе в [2]. Далее, часть возможностей в [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3] соответствуют случаю, когда

$$(L, v) \in \{(\mathrm{PSL}_2(8), 36), (\mathrm{PSp}_6(2), 120), (\mathrm{P\Omega}_7(3), 1080)\},$$

и тогда см. случаи A.I и A.II.

Наконец, все оставшиеся возможности в [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3] соответствуют случаям, когда группа L и действие группы G перечислены в пп. 1–16 предложения 3. Начнем их разбор со случая, когда $L = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, где $q = 8$, и группа G с цоколем L действует на множестве Ω гиперболических или эллиптических гиперплоскостей $(2n+1)$-мерного векторного пространства с невырожденной квадратичной формой; в этом случае, как явно указано в [2, теорема 11.3.2(iv)], группа G как подгруппа в $X = \mathrm{Aut}\,L$ определена однозначно, а именно $G = \mathrm{PSp}_{2n}(8).3 = \mathrm{P\Gamma Sp}_{2n}(8)$. В частности, $G^{(2)} = G = \mathrm{P\Gamma Sp}_{2n}(8) = \widetilde{L}$. Таким образом, выполнено утверждение п. 8 в предложении 3.

Во всех остальных случаях согласно [2, теоремы 11.3.2 и 11.3.3] цоколь L группы G сам действует на Ω как группа ранга 3. Это действие с точностью до подстановочной эквивалентности и возникающий граф $\Gamma_G = \Gamma_L$ совпадают с действием и графом, указанными в утверждениях пп. 1–16 предложения 3 (за исключением случая, когда $q = 8$ в п. 8, рассмотренном выше). Отсюда вытекает, что H — максимальная подгруппа, являющаяся стабилизатором некоторого подпространства, вполне изотропного или невырожденного, в соответствующем проективном модуле V. Значит, H является элементом класса Ашбахера $\mathcal{C}_1$. Стабилизаторы классов сопряженности элементов классов Ашбахера в $\mathrm{Aut}\,L$ известны и указаны для случая, когда проективная размерность V не меньше 12, в [12, табл. 3.5G] с учетом информации в столбце V из [12, табл. 3.5A–3.5F], а для случая, когда проективная размерность V не превосходит 11, — в [4, табл. 8.1–8.85]. Во всех случаях убеждаемся, что стабилизатор в $X = \mathrm{Aut}\,L$ класса сопряженности подгруппы H совпадает с группой, заявленной в качестве группы $G^{(2)}$ в соответствующем пункте предложения 3. Непосредственные вычисления с использованием параметров графа Γ_L показывают, что длины k и $v - k - 1$ отличных от $\{\alpha\}$ орбит подгруппы H различны (если p — характеристика поля, над которым рассматривается пространство V, то можно сравнить максимальные степени числа p, делящие k и $v - k - 1$). По лемме 2 каждое утверждение пп. 1–16 в предложении 3 выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bannai E.** Maximal subgroups of low rank of finite symmetric and alternating groups // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1971/72. Vol. 18. P. 475–486.
2. **Brouwer A.E., Van Maldeghem H.** Strongly regular graphs. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2022. 425 p. https://doi.org/10.1017/9781009057226
3. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumeier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; NY: Springer-Verlag, 1989. 495 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-74341-2

4. **Bray J., Holt D., Roney-Dougal C.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. 438 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139192576
5. **Conway J.H., et al.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. **Craven D.A.** The maximal subgroups of the exceptional groups $F_4(q)$, $E_6(q)$, and ${}^2E_6(q)$ and related almost simple groups // Invent. Math. 2023. Vol. 234. P. 637–719. https://doi.org/10.1007/s00222-023-01208-2
7. **Dixon J.D., Mortimer B.** Permutation groups. Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 163. NY: Springer, 1996. 348 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3
8. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, Number 3. Part I, Ch. A: Almost simple $\mathcal{K}$ -groups. Providence, RI: Ams. Math. Soc., 1998.
9. **Гречкосеева М.А.** О спектрах почти простых расширений ортогональных групп четной размерности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 791–813. https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.405
10. **Guo J., Vasil'ev A.V., Wang Z.** The automorphism groups of small affine rank 3 graphs. 12 p. URL: https://arxiv.org/abs/2410.04341 . https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.04341
11. **Kantor W.M., Liebler R. A.** The rank 3 permutation representations of the finite classical groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol 271. P. 1–71.
12. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. https://doi.org/10.1017/CBO9780511629235
13. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** On the 2-closures of finite permutation groups // J. London Math. Soc. (2). 1988. Vol. 37. no. 2. P. 241–252. https://doi.org/10.1112/JLMS/S2-37.2.241
14. **Liebeck M.W., Saxl J.** The finite primitive permutation groups of rank three // Bull. London Math. Soc. 1986. Vol. 18. P. 165–172. https://doi.org/10.1112/blms/18.2.165
15. **Praeger C.E., Saxl J.** Closures of finite primitive permutation groups // Bull. London Math. Soc. 1992. Vol. 24. P. 251–258. https://doi.org/10.1112/BLMS/24.3.251
16. **Quick M.** Probabilistic generation of wreath products of non-abelian finite simple groups // Comm. Algebra. 2004. Vol 32. no. 12. P. 4753–4768. https://doi.org/10.1142/S0218196706003074
17. **Skresanov S.V.** On 2-closures of rank 3 groups // Ars Math. Contemp. 2021. Vol. 21, no. 1. Paper no. 1.08. https://doi.org/10.26493/1855-3974.2450.1dc
18. **Steinberg R.** Automorphisms of finite linear groups // Canadian J. Math. 1960. Vol. 12. P. 606–615. https://doi.org/10.4153/CJM-1960-054-6

Поступила 12.10.2024
После доработки 6.12.2024
Принята к публикации 9.12.2024
Опубликована онлайн: 12.12. 2024

Ван Чжиган (Wang Zhigang)
PhD, профессор
Школа математики и статистики, Хайнаньский университет;
г. Хайкоу, провинция Хайнань, КНР
e-mail: wzhigang@hainanu.edu.cn

Васильев Андрей Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
e-mail: vasand@math.nsc.ru

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: revin@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Bannai E. Maximal subgroups of low rank of finite symmetric and alternating groups. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 1971/72 , vol. 18, pp. 475–486.

2. Brouwer A.E., Van Maldeghem H. *Strongly regular graphs*. Ser. Encyclopedia Math. and its Appl., vol. 182, Cambridge: Camb. Univ. Press, 2022, 425 p. https://doi.org/10.1017/9781009057226
3. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumeier A. *Distance-regular graphs*. Berlin, Heidelberg, NY: Springer-Verlag, 1989, 495 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-74341-2
4. Bray J., Holt D., Roney-Dougal C. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*. London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, 438 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139192576
5. Conway J.H., et al. *Atlas of finite groups*. Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p.
6. Craven D.A. The maximal subgroups of the exceptional groups $F_4(q)$, $E_6(q)$, and ${}^2E_6(q)$ and related almost simple groups. *Invent. Math.*, 2023, vol. 234, pp. 637–719. https://doi.org/10.1007/s00222-023-01208-2
7. Dixon J.D., Mortimer B. *Permutation groups*. Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 163, NY: Springer, 1996, 348 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3
8. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups*, Number 3, Part I, Ch. A: *Almost simple* $\mathcal{K}$ -groups, Ser. Math. Surv. Monogr., 40.3, Providence, RI: Ams. Math. Soc., 1998.
9. Grechkoseeva M.A. On spectra of almost simple extensions of even-dimensional orthogonal groups. *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 4, pp. 623–640. https://doi.org/10.1134/S0037446618040055
10. Guo J., Vasil'ev A.V., Wang Z. The automorphism groups of small affine rank 3 graphs. 12 p. Available at https://arxiv.org/abs/2410.04341 . https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.04341
11. Kantor W.M., Liebler R.A. The rank 3 permutation representations of the finite classical groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, vol. 271, pp. 1–71. https://doi.org/10.1017/CBO9780511629235
12. Kleidman P., Liebeck M. *The subgroup structure of the finite classical groups*. Cambridge: University Press, 1990.
13. Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J. On the 2-closures of finite permutation groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 1988, vol. 37., no. 2, pp. 241–252. https://doi.org/10.1112/JLMS/S2-37.2.241
14. Liebeck M.W., Saxl J. The finite primitive permutation groups of rank three. *Bull. London Math. Soc.*, 1986, vol. 18, pp. 165–172. https://doi.org/10.1112/blms/18.2.165
15. Praeger C.E., Saxl J. Closures of finite primitive permutation groups. *Bull. London Math. Soc.*, 1992, vol. 24, pp. 251–258. https://doi.org/10.1112/BLMS/24.3.251
16. Quick M. Probabilistic generation of wreath products of non-abelian finite simple groups. *Comm. Algebra.*, 2004, vol. 32, no. 12, pp. 4753–4768. https://doi.org/10.1142/S0218196706003074
17. Skresanov S.V. On 2-closures of rank 3 groups. *Ars Math. Contemp.*, 2021, vol. 21, no. 1, paper no. 1.08. https://doi.org/10.26493/1855-3974.2450.1dc
18. Steinberg, R. Automorphisms of finite linear groups. *Canadian J. Math.*, 1960, vol. 12, pp. 606–615. https://doi.org/10.4153/CJM-1960-054-6

Received October 12, 2024
Revised November 6, 2024
Accepted November 9, 2024
Published online: December 12, 2024

Funding Agency: The research of A. V. Vasil'ev and D. O. Revin was carried out within the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics (FWNF-2022-0002).

Zhigang Wang, PhD, Prof., School of Mathematics and Statistics, Hainan Univ., Haikou, Hainan, 570225, P. R. China, e-mail: wzhigang@hainanu.edu.cn .

Andrey Viktorovich Vasil'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberia Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: vasand@math.nsc.ru .

Danila Olegovich Revin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberia Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: revin@math.nsc.ru .

Cite this article as: Z. Wang, A. V. Vasil'ev, D. O. Revin. On the almost simple automorphism groups of rank 3 graphs. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*. Published online: December 12, 2024. doi: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-04