Online First 2024

УДК 512.542

ИЗООРДНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Йи, С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Пусть A, B — подгруппы конечной группы G. Тогда A называется: *изоордно перестановочной с* B, если в G существует подгруппа C такая, что $|C| = |B|$ и $AC = CA$; *наследственно изоордно перестановочной с* B, если A изоордно перестановочна с B в любой подгруппе из G, содержащей A и B; *изоордно перестановочной в* G, если A изоордно перестановочна с любой подгруппой группы G; *наследственно изоордно перестановочной в* G, если A наследственно изоордно перестановочна с любой подгруппой группы G. В работе анализируются свойства изоордно перестановочных подгрупп и исследуется строение конечной группы G, все минимальные подгруппы которой являются наследственно изоордно перестановочными.

Ключевые слова: конечная группа, изоордно перестановочная подгруппа, наследственно изоордно перестановочная подгруппа, минимальная подгруппа.

X. Yi, S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov. Isoorderly permutable subgroups of finite groups.

Let A and B be subgroups of a finite group G. Then the subgroup A is called: *isoorderly permutable with* B if there is a subgroup C of G such that $|C| = |B|$ and $AC = CA$, *hereditarily isoorderly permutable with* B if A is isoorderly permutable with B in any subgroup of G containing A and B, *isoorderly permutable in* G if A is isoorderly permutable with every subgroup of G, and *hereditarily isoorderly permutable in* G if A is hereditarily isoorderly permutable with every subgroup of G. In this paper, the properties of isoorderly permutable subgroups are analyzed, and the structure of a finite group G all of whose minimal subgroups are hereditarily isoorderly permutable is studied.

Keywords: finite group, isoorderly permutable subgroup, hereditarily isoorderly permutable subgroup, minimal subgroup.

MSC: 20D10

DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-02

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными.

Напомним, что подгруппа A группы G называется *перестановочной* с подгруппой B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется *перестановочной* [1] или *квазинормальной* [2] подгруппой в G (ясно, что любая нормальная подгруппа из G является перестановочной).

Перестановочные подгруппы имеют ряд интересных свойств. Так, например, Оре в [2] доказал, что любая перестановочная подгруппа является субнормальной. Ито и Сеп усилили этот результат: они доказали в [3], что для каждой перестановочной подгруппы H группы G фактор-группа H/H_G нильпотентна. В дальнейшем Майер и Шмид доказали в [4], что при таких условиях $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$.

В работах Кегеля [5] и Дескинса [6] показано, что подгруппа H, перестановочная со всеми силовскими подгруппами конечной группы G (она называется S-*перестановочной* или S-*квазинормальной*), наследует ряд ключевых свойств перестановочных подгрупп. В частности, H по-прежнему субнормальна, а секция H/H_G нильпотентна. Если к тому же группа G разрешима и H перестановочна с системными нормализаторами группы G, то $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$.

Исследования второго и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта Ф23РНФ-237.

После работ [5; 6] многими авторами исследовались свойства других типов обобщенно перестановочных подгрупп. В частности, рассматривались *m-перестановочные* подгруппы [7], т. е. подгруппы, перестановочные со всеми максимальными подгруппами, и *полунормальные* подгруппы [8], т. е. подгруппы H, перестановочные со всеми подгруппами из некоторого добавления к H.

Все отмеченные выше концепции перестановочности в [9] обобщены следующим образом. Пусть Θ — некоторое множество подгрупп группы G. Если подгруппа H из G перестановочна со всеми подгруппами из Θ, то H называется *Θ-перестановочной*.

В то же время часто встречается ситуация (см., например, [10]), когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x, для которого справедливо равенство $AB^x = B^xA$. В связи с этим в [10] предложена концепция перестановочности, основанная на следующих определениях.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть A, B — подгруппы группы G и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Тогда A называется:

(1) X-перестановочной с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X$;

(2) наследственно X-перестановочной с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого элемента $x \in X \cap < A, B >$.

О п р е д е л е н и е 2. Подгруппа A группы G называется (наследственно) X-перестановочной в G, если A (наследственно) X-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Отметим, что 1-перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные подгруппы. В другом предельном случае мы имеем дело с G-перестановочными подгруппами. Понятно, что подгруппа A является наследственно G-перестановочной в G тогда и только тогда, когда A является E-перестановочной в каждой подгруппе $E \subseteq G$, содержащей A.

В качестве тривиального примера отметим, что в группе $G \cong S_3$ силовская 2-подгруппа G-перестановочна в G, но не является перестановочной и S-перестановочной подгруппой в G.

В данной работе мы предлагаем концепцию, которая развивает концепцию X-перестановочности.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть A, B — подгруппы группы G. Тогда A называется:

(1) изоордно перестановочной с B, если в G существует подгруппа C такая, что $|C| = |B|$ и $AC = CA$;

(2) наследственно изоордно перестановочной с B, если A изоордно перестановочна с B в любой подгруппе из G, содержащей A и B.

О п р е д е л е н и е 4. Подгруппа A группы G называется (наследственно) изоордно перестановочной в G, если A (наследственно) изоордно перестановочна с любой подгруппой группы G.

Очевидно, что X-перестановочность подгруппы для любого $\varnothing \neq X \subseteq G$ влечет ее изоордную перестановочность, но обратное утверждение неверно.

П р и м е р 1. Пусть

$$G = < a, b, c \,|\, a^p = b^p = c^p = 1, ba = abc, ca = ac, cb = bc >$$

— экстраспециальная группа порядка p^3 и экспоненты p. Простая проверка показывает, что подгруппа $< a >$ изоордно перестановочна в G, но не является G-перестановочной в G.

П р и м е р 2. Пусть $G \cong PSL_2(7)$ и P — ее силовская 3-подгруппа. Тогда P изоордно перестановочна в G, но не является G-перестановочной в G. Отметим, что подгруппа P не является наследственно изоордно перестановочной в G.

В данной работе анализируется влияние изоордно перестановочных минимальных подгрупп на строение группы G (при этом под *минимальной подгруппой* группы G понимается любая подгруппа простого порядка).

Исследования инициированы следующими результатами:

1) *Пусть все минимальные подгруппы группы G нормальны. Тогда G разрешима и ее коммутант G' имеет нормальную силовскую 2-подгруппу, фактор-группа по которой является нильпотентной* (Гашюц, Ито [11, теорема IV.5.7]).

2) *Если все минимальные подгруппы группы G, имеющей нечетный порядок, нормальны, то G сверхразрешима* (Бакли [12]);

3) *Если каждая минимальная подгруппа группы G является наследственно G-перестановочной в G, то G разрешима* (Каморников, Тютянов [13, теорема 1]).

Наша главная цель — доказательство следующих двух теорем, развивающих отмеченные выше результаты.

Теорема 1. *Если каждая минимальная подгруппа группы G является наследственно изоордно перестановочной, то G разрешима.*

В общем случае, как следует из [12], группа G, удовлетворяющая условию теоремы 1, не является сверхразрешимой. В то же время имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Если все минимальные подгруппы группы G, а также все ее циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно изоордно перестановочными в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 1. *Если любая минимальная подгруппа группы G, имеющая нечетный порядок, является наследственно изоордно перестановочной в G, то G сверхразрешима.*

1. Используемая терминология

В работе используются стандартные определения и обозначения теории групп, которые могут быть найдены в [12].

Далее через $\mathfrak{U}$ обозначается класс всех сверхразрешимых групп.

Будем использовать также следующие обозначения:

– $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G;

– $Z(G)$ — центр группы G;

– $G^{\mathfrak{U}}$ — $\mathfrak{U}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой сверхразрешима.

Для описания расширений групп используются следующие обозначения:

– $A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B;

– $A : B$ — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B.

Минимальная неразрешимая группа — это неразрешимая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Простая проверка показывает, что группа G является минимальной неразрешимой группой тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ — *минимальная простая группа*, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [14]. Этот список содержит следующие группы:

– $PSL_2(2^p)$, где p — простое число;

– $PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3;

– $PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$;

– $PSL_3(3)$;

– $Sz(2^p)$, p — простое нечетное число.

Описание подгрупп группы $PSL_2(q)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [11, теорема II.8.27]). В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

Минимальная несверхразрешимая группа — эта группа, у которой все собственные подгруппы сверхразрешимы, но сама она сверхразрешимой не является.

2. Предварительные результаты

Отметим следующее свойство минимальных неразрешимых групп.

Лемма 1. *Если G — минимальная неразрешимая группа и F — ее наследственно изоордно перестановочная подгруппа простого порядка, то $F \subseteq \Phi(G)$. В частности, любая минимальная простая группа не содержит наследственно изоордно перестановочных подгрупп простого порядка.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна, т. е. некоторая минимальная неразрешимая группа G содержит наследственно изоордно перестановочную подгруппу F простого порядка r, которая не содержится в $\Phi(G)$.

Рассмотрим все пять возможных случаев из списка Томпсона.

1. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$, где $q = 2^p$ и p — простое число.

Предположим, что $|F| = r$ — простое нечетное число. Поскольку

$$(q-1, q+1) = 1 \text{ и } |G/\Phi(G)| = q(q-1)(q+1),$$

то либо $r \in \pi(q-1)$, либо $r \in \pi(q+1)$. Пусть сначала $r \in \pi(q-1)$. Так как группа G содержит некоторую холлову $\pi(q+1)$-подгруппу H, то из изоордной перестановочности подгруппы F следует, что группа G содержит холлову $\pi(q+1)$-подгруппу S такую, что $FS = SF$. Но тогда группа $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу $FS\Phi(G)/\Phi(G)$ порядка $r(q+1)$, что невозможно. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда $r \in \pi(q+1)$.

Пусть теперь $|F| = 2$. Простая проверка показывает, что группа G содержит некоторую холлову $\{2\} \cup \pi(q-1)$-подгруппу H. При этом H/H_1 является группой Фробениуса с ядром S/H_1 порядка q и циклическим дополнением D/H_1 порядка $q-1$, где $H_1 = H \cap \Phi(G)$. Не нарушая общности рассуждений, можем полагать, что подгруппа F содержится в H. Так как подгруппа F является наследственно изоордно перестановочной в H, то в H существует холлова $\pi(q-1)$-подгруппа R такая, что $FR = RF$. Ясно, что F не содержится в H_1. Таким образом, в H/H_1 имеется подгруппа $(FH_1/H_1)(RH_1/H_1) = FH_1/H_1 \times RH_1/H_1$, что невозможно.

2. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$, где $q = 3^p$ и p — простое число, большее 3.

Предположим сначала, что $|F| = r > 3$. Поскольку

$$|G/\Phi(G)| = q(q-1)(q+1)/2,$$

то либо $r \in \pi(q-1)$, либо $r \in \pi(q+1)$. Пусть $r \in \pi(q-1)$ и H — некоторая холлова $\pi(q+1)$-подгруппа группы G. Тогда из изоордной перестановочности подгруппы F следует, что группа G содержит холлову $\pi(q+1)$-подгруппу S такую, что $FS = SF$. Но тогда группа $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу $FS\Phi(G)/\Phi(G)$ порядка $r(q+1)$, а значит, и группа $PSL_2(q)$ содержит подгруппу порядка $r(q+1)$, что невозможно. Аналогично приходим к противоречию и в случае, когда $r \in \pi(q+1)$.

Пусть $|F| = 3$. Тогда, как и выше, из изоордной перестановочности подгруппы F следует, что группа $G/\Phi(G) \cong PSL_2(3^p)$ содержит подгруппу порядка $3(q+1)$, что невозможно. Снова пришли к противоречию.

Предположим теперь, что $|F| = 2$. Так как $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу $H/\Phi(G) \cong A_4$ и все инволюции в $G/\Phi(G)$ сопряжены, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $F\Phi(G)/\Phi(G)$ содержится в подгруппе $H/\Phi(G)$. Так как подгруппа F является наследственно изоордно перестановочной в H, то в подгруппе H существует силовская 3-подгруппа S такая, что $FS = SF$. Отсюда следует, что $H/\Phi(G)$ содержит подгруппу порядка 6, что невозможно.

3. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$.

Предположим сначала, что $|F| = p$. Пусть d — порядок силовской 2-подгруппы группы $G/\Phi(G)$. Тогда, как и выше, из изоордной перестановочности подгруппы F следует, что $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу порядка pd, что невозможно.

Пусть $|F| = 2$. Тогда, как и в предыдущем пункте, показывается, что в группе $G/\Phi(G)$ существует подгруппа $H/\Phi(G) \cong A_4$, содержащая подгруппу порядка 6, что невозможно.

Предположим теперь, что r — простое нечетное число, отличное от p. Так как

$$|G/\Phi(G)| = p(p-1)(p+1)/2,$$

то либо $r \in \pi(p-1)$, либо $r \in \pi(p+1)$. Пусть сначала $r \in \pi(p+1)$. Тогда из изоордной перестановочности подгруппы F следует, что группа G содержит силовскую p-подгруппу S такую, что $FS = SF$. Но тогда группа $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу $FS\Phi(G)/\Phi(G)$ порядка pr, что невозможно.

Пусть теперь $r \in \pi(p-1)$ и $p > 7$. Рассмотрим в $G/\Phi(G)$ диэдральную подгруппу $H/\Phi(G)$ порядка $p-1$. Так как $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$, то при $p > 7$ подгруппа $H/\Phi(G)$ максимальна в $G/\Phi(G)$. Из изоордной перестановочности подгруппы F следует, что группа G содержит подгруппу M такую, что $|M| = |H|$ и $FM = MF$. Отметим, что

$$|FM\Phi(G)/\Phi(G)| = |FM|/|FM \cap \Phi(G)| \geq |FM|/|\Phi(G)| = |F| \cdot |M|/|\Phi(G)| = r(q+1).$$

Пришли к противоречию с тем, что группа $PSL_2(p)$ не содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на $r(q+1)$.

Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(7)$. Поскольку $|PSL_2(7)| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, то с учетом изложенного выше достаточно рассмотреть случай, когда $|F| = 3$. Так как $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу $H/\Phi(G) \cong A_4$ и все силовские 3-подгруппы группы $G/\Phi(G)$ сопряжены, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $F\Phi(G)/\Phi(G)$ содержится в подгруппе $H/\Phi(G)$. Рассмотрим в H подгруппу FD, где D — силовская 2-подгруппа из H. Ясно, что $D \trianglelefteq FD$ и $FD/D \cap \Phi(G) \cong A_4$. Поскольку подгруппа F является наследственно изоордно перестановочной в FD, то в подгруппе D существует 2-подгруппа D_1 индекса 2 такая, что $FD_1 = D_1F$. Если D_1 содержит $D \cap \Phi(G)$, то группа $FD/D \cap \Phi(G) \cong A_4$ содержит подгруппу $FD_1/(D \cap \Phi(G))$ порядка 6, что невозможно.

Следовательно, D_1 не содержит $D \cap \Phi(G)$. Тогда $D_1 \trianglelefteq FD_1$ и $FD_1/D_1 \cap \Phi(G) \cong A_4$. Так как подгруппа F является наследственно изоордно перестановочной в FD_1, то в подгруппе D_1 существует 2-подгруппа D_2 индекса 2 такая, что $FD_2 = D_2F$. Если D_2 содержит $D_1 \cap \Phi(G)$, то группа $FD_1/D_1 \cap \Phi(G) \cong A_4$ содержит подгруппу $FD_2/(D_1 \cap \Phi(G))$ порядка 6, что невозможно. Если D_2 не содержит $D_1 \cap \Phi(G)$, то продолжаем описанный процесс до тех пор, пока не придем к подгруппе D_k такой, что $FD_k \cong A_4$. Поскольку подгруппа F является наследственно изоордно перестановочной в FD_k, то она содержит подгруппу порядка 6, что невозможно.

4. $G/\Phi(G) \cong PSL_3(3)$.

Из [15, с. 13] следует, что $|G/\Phi(G)| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$ и группа $G/\Phi(G)$ содержит максимальные подгруппы $3^2 : 2S_4$, $13 : 3$ и S_4. Предположим сначала, что $|F| = 13$. Тогда из изоордной перестановочности подгруппы F следует, что группа G содержит силовскую 2-подгруппу S такую, что $FS = SF$. Но тогда группа $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу $FS\Phi(G)/\Phi(G)$ порядка $13 \cdot 2^4$, что невозможно.

Пусть $|F| = 2$. Так как $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу $H/\Phi(G) \cong A_4$ и все инволюции в $G/\Phi(G)$ сопряжены, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $F\Phi(G)/\Phi(G)$ содержится в подгруппе $H/\Phi(G)$. Так как подгруппа F является наследственно изоордно перестановочной в H, то в подгруппе H существует силовская 3-подгруппа S такая, что $FS = SF$. Отсюда следует, что $H/\Phi(G)$ содержит подгруппу порядка 6, что невозможно.

Пусть $|F| = 3$. Ввиду теоремы Силова, не нарушая общности рассуждений, можем полагать, что $F\Phi(G)/\Phi(G)$ содержится в холловой $\{2,3\}$-подгруппе

$$D/\Phi(G) = (< a\Phi(G) > \times < b\Phi(G) >) : H/\Phi(G) \cong 3^2 : 2S_4$$

группы $G/\Phi(G)$. Предположим сначала, что

$$F\Phi(G)/\Phi(G) \subseteq < a\Phi(G) > \times < b\Phi(G) > .$$

Тогда по условию подгруппа F перестановочна с некоторой силовской 2-подгруппой S подгруппы H. При этом подгруппа

$$F\Phi(G)/\Phi(G) = (< a\Phi(G) > \times < b\Phi(G) >) \cap FS\Phi(G)/\Phi(G)$$

нормальна в $FS\Phi(G)/\Phi(G)$. Отсюда, в частности, следует, что 2^3 делит

$$|C_{G/\Phi(G)}(< a\Phi(G) >)|.$$

Однако согласно таблице характеров [15, с. 13] группа $G/\Phi(G) \cong PSL_3(3)$ содержит только два класса сопряженных элементов порядка 3 с представителями $3A$ и $3B$, порядки централизаторов которых равны 54 и 9 соответственно. Пришли к противоречию.

Рассмотрим теперь случай, когда подгруппа $F\Phi(G)/\Phi(G)$ не содержится в подгруппе $< a\Phi(G) > \times < b\Phi(G) >$. Так как $< a\Phi(G) > \times < b\Phi(G) > \trianglelefteq D\Phi(G)/\Phi(G)$, то

$$R/\Phi(G) = (< a\Phi(G) > \times < b\Phi(G) >) : (F\Phi(G)/\Phi(G))$$

— силовская 3-подгруппа в $D/\Phi(G)$.

4.1. Пусть $F\Phi(G)/\Phi(G)$ не содержится в центре подгруппы $R/\Phi(G)$. Поскольку подгруппа $< a\Phi(G) > \times < b\Phi(G) >$ нетривиально пересекается с центром любой силовской 3-подгруппы группы $D/\Phi(G)$, то $F\Phi(G)/\Phi(G)$ не содержится в центре никакой силовской 3-подгруппы группы $D/\Phi(G)$. Отсюда, с одной стороны, $|C_{G/\Phi(G)}(F\Phi(G)/\Phi(G))| = 9$. С другой стороны, подгруппа $F\Phi(G)/\Phi(G)$ содержится в подгруппе $H/\Phi(G) \cong GL_2(3)$, имеющей центр порядка 2. Пришли к противоречию.

4.2. Пусть $F\Phi(G)/\Phi(G)$ содержится в центре подгруппы $R/\Phi(G)$. Тогда

$$C_{D/\Phi(G)}(< a\Phi(G) > \times < b\Phi(G) >)$$

содержит силовскую 3-подгруппу $R/\Phi(G)$. А так как $|C_{G/\Phi(G)}(< a\Phi(G) >)| = 54$, то подгруппа $R/\Phi(G)$ нормальна в $D/\Phi(G)$. Снова пришли к противоречию.

5. $G/\Phi(G) \cong Sz(2^p)$, где p — простое нечетное число.

Предположим сначала, что $|F| = 2$. Как следует из [16], группа $G/\Phi(G)$ содержит максимальную подгруппу $M_1/\Phi(G)$, являющуюся группой Фробениуса порядка $q^2(q-1)$, где $q = 2^p$. Пусть

$$M_1/\Phi(G) = (R/\Phi(G)) : (S/\Phi(G)),$$

где $R/\Phi(G)$ — ядро группы Фробениуса $M_1/\Phi(G)$, а $S/\Phi(G)$ — ее циклическое дополнение. Если R_1 — силовская 2-подгруппа группы G, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$F \subseteq R_1 \subseteq R_1\Phi(G) = R \subseteq M_1.$$

Таким образом, F — наследственно изоордно перестановочная подгруппа в M_1. Так как все холловы $2'$-подгруппы из M_1 сопряжены в M_1, то по определению в M_1 найдется элемент y такой, что $F^yS_1 = S_1F^y$ и $S_1\Phi(G) = S$, где S_1 — некоторая холлова $2'$-подгруппа из M_1. Значит, в $M_1/\Phi(G)$ существует подгруппа

$$L/\Phi(G) = (F^y\Phi(G)/\Phi(G)) : (S/\Phi(G)).$$

Так как $|L : S| = 2$, то

$$L/\Phi(G) = (F^y\Phi(G)/\Phi(G)) \times (S/\Phi(G))$$

и $C_{R/\Phi(G)}(S/\Phi(G)) \neq 1$. Отсюда следует, что $M_1/\Phi(G)$ не является группой Фробениуса. Пришли к противоречию.

Кроме отмеченной группы Фробениуса M_1 порядка $q^2(q-1)$ группа $G/\Phi(G)$ содержит максимальную подгруппу $M_2/\Phi(G)$, являющуюся группой Фробениуса порядка $4(q+\sqrt{2q}+1)$,

максимальную подгруппу $M_3/\Phi(G)$, являющуюся группой Фробениуса порядка $4(q-\sqrt{2q}+1)$, а также максимальную подгруппу $M_4/\Phi(G)$, являющуюся диэдральной группой порядка $2(q-1)$. При этом
$$|G/\Phi(G)| = q^2(q-1)(q^2+1)$$
и числа $q-1$, $q-\sqrt{2q}+1$ и $q+\sqrt{2q}+1$ — попарно взаимно простые.

Предположим, что $r \in \pi(q-1)$. Тогда из изоордной перестановочности подгруппы F следует, что $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу порядка $r(q-\sqrt{2q}+1)$; это невозможно. Случаи, когда $r \in \pi(q-\sqrt{2q}+1)$ или $r \in \pi(q+\sqrt{2q}+1)$, рассматриваются аналогично.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Минимальная простая группа может содержать нетривиальные наследственно изоордно перестановочные подгруппы, имеющие составной порядок. Например, в группе $PSL_2(7)$ любая максимальная подгруппа порядка 24 является наследственно изоордно перестановочной.

При доказательстве теоремы 1 мы будем опираться на следующий хорошо известный факт.

Лемма 2. *Пусть p и q — простые числа, m и n — натуральные числа, причем $p^m = q^n+1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1) $q=2$, $p=3$, $n=3$ *и* $m=2$;
2) $q=2$, $m=1$, n *является степенью числа* 2, *а* $p=q^n+1$ — *простое число Ферма*;
3) $p=2$, $n=1$ *и* $q=p^m-1$ — *простое число Мерсенна, в частности m является простым числом.*

В виде лемм приведем наиболее важные свойства минимальных несверхразрешимых групп.

Лемма 3. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда выполняются следующие утверждения*:

1) G *разрешима и* $|\pi(G)| \leq 3$;
2) $G^{\mathfrak{U}}$ — *силовская p-подгруппа группы G для некоторого простого p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из леммы C и теоремы 1 работы [17].

Лемма 4. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда*

1) $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — *главный фактор группы* G;
2) $|G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})| = p^n$, *где* $n>1$;
3) $\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = G^{\mathfrak{U}} \cap \Phi(G)$;
4) *если группа $G^{\mathfrak{U}}$ неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p*;
5) *если группа $G^{\mathfrak{U}}$ абелева, то она элементарна*;
6) *если $p>2$, то группа $G^{\mathfrak{U}}$ имеет экспоненту p; при $p=2$ экспонента $G^{\mathfrak{U}}$ не превышает* 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из леммы 5.9 и теоремы 24.2 книги [18].

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — минимальный контрпример к теореме 1. Тогда, очевидно, G — минимальная неразрешимая группа. Кроме того, из леммы 1 следует, что группа G не является простой неабелевой группой. Поэтому $\Phi(G) \neq 1$ и $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа.

Предположим, что $r \in \pi(G)$ и $r \notin \pi(\Phi(G))$. Тогда по лемме 1 подгруппа R порядка r содержится в $\Phi(G)$, что противоречит предположению. Значит, $\pi(G) = \pi(\Phi(G))$.

Проанализируем далее все возможные случаи из списка Томпсона.

Случай 1. Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$, где $q = 2^p$ и p — простое число.

Отметим, что в группе $PSL_2(q)$ силовская 2-подгруппа U содержится в единственной максимальной подгруппе $B \cong q : (q-1)$. Кроме того, $PSL_2(q)$ содержит циклическую подгруппу $T \cong q+1$. При этом числа q, $q-1$, $q+1$ являются попарно взаимно простыми. Согласно лемме 2 равенство $2^p + 1 = 3^m$ справедливо только в случае $p = 3$ и $m = 2$ для группы $PSL_2(2^3)$. В оставшихся случаях имеется простой делитель s числа $q+1$, отличный от 3. Пусть $S \in Syl_s(PSL_2(q))$. В силу изложенного имеем $< U, S >= PSL_2(q)$.

Пусть сначала $p \neq 3$. Пусть $r = 3$. Рассмотрим элемент $x \in \Phi(G)$ такой, что $|x| = 3$. Так как подгруппа $< x >$ является наследственно изоордно перестановочной в G, то для некоторых $U \in Syl_2(G)$ и $S \in Syl_s(G)$, где $s \in \pi(q+1) \setminus \{3\}$, существуют подгруппы $< x > S$ и $< x > U$. Поскольку подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна, то подгруппа $R \in Syl_3(\Phi(G))$ нормальна в G. Отсюда следует, что

$$< x > S \cap R =< x > U \cap R =< x > .$$

Поэтому $< x > S =< x >: S$ и $< x > U =< x >: U$. Если $< S, U >\subset G$, то $< S, U >$ является разрешимой группой. Тогда группа $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$ содержит собственную разрешимую подгруппу

$$< U\Phi(G)/\Phi(G), S\Phi(G)/\Phi(G) >,$$

где $U\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_2(G/\Phi(G))$ и $S\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_s(G/\Phi(G))$. Последнее невозможно согласно замечаниям о строении группы $PSL_2(q)$.

Таким образом, $< S, U >= G$ и подгруппа $< x >$ нормальна в G. Следовательно, для любого элемента $z \in G$ порядка 3 подгруппа $< z >$ нормальна в G. Ясно, что $< z >\in Z(R)$. Поэтому $\Phi(G) \subset C_G(< z >)$. Так как подгруппа $C_G(< z >)$ является нормальной в G, то $C_G(< z >) = G$ и $z \in Z(G)$. Поскольку z — произвольный элемент порядка 3, то все элементы группы G, имеющие порядок 3, содержатся в $Z(G)$. Согласно [11, теорема IV.5.5] группа G является 3-нильпотентной, что невозможно.

Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(8)$.

В группе $PSL_2(8)$ порядка $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ силовская 2-подгруппа S и силовская 3-подгруппа T порождают $PSL_2(8)$. Положим $r = 7$ и точно так же, как и выше, придем к противоречию.

Все оставшиеся случаи рассматриваются по аналогии со случаем 1, поэтому мы укажем только две силовские подгруппы группы G, которые ее порождают, а также соответствующее нечетное $r \in \pi(G)$.

Случай 2. Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(q)$, где $q = 3^p$ и p — простое число, большее 3.

Группа $PSL_2(q)$ содержит силовскую 3-подгруппу U, которая содержится в единственной максимальной подгруппе $B \cong q : ((q-1)/2)$. Так как подгруппа $(q-1)/2$ является циклической, то она не содержит силовскую 2-подгруппу S группы G. Поэтому $< U, S >= PSL_2(q)$. Следовательно, в группе G силовская 2-подгруппа и силовская 3-подгруппа порождают G. Теперь в качестве r достаточно взять любое число из $\pi(G) \setminus \{2, 3\}$.

Случай 3. Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$.

Так же как и в случае 2, показывается, что $U \in Syl_p(G)$ и $S \in Syl_2(G)$ порождают G. В качестве r достаточно взять любое число из $\pi(G) \setminus \{2, p\}$.

Случай 4. Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_3(3)$.

Из [15, с. 13] следует, что $U \in Syl_2(G)$ и $S \in Syl_7(G)$ порождают G. В этом случае $r = 3$.

Случай 5. Пусть $G/\Phi(G) \cong Sz(q)$, где $q = 2^p$ и p — простое нечетное число.

Пусть $U \in Syl_2(Sz(q))$. Число 5 делит $q^2 + 1$ и в группе $Sz(q)$ имеются два максимальных тора T_1 и T_2 взаимно простых порядков $q+\sqrt{2q}+1$ и $q-\sqrt{2q}+1$ соответственно. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $(|T_1|, 5) = 1$. Пусть $s \in \pi(T_1)$ и $S \in Syl_s(Sz(q))$.

Тогда, как следует из [16], $< S, U >= Sz(q)$. Поэтому в группе G силовская 2-подгруппа и силовская s-подгруппа порождают G. В качестве r следует взять число 5.

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не верна, и пусть M — ее произвольная максимальная подгруппа. Тогда из $|M| < |G|$ и выбора группы G следует, что M — сверхразрешимая группа. Так как группа G не является сверхразрешимой, то G — минимальная несверхразрешимая группа.

Ввиду леммы 3 сверхразрешимый корадикал $G^{\mathfrak{U}}$ группы G является силовской p-подгруппой в G. При этом по лемме 4 $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — главный фактор группы G, $\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = G^{\mathfrak{U}} \cap \Phi(G)$ и $|G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})| = p^n$, где $n > 1$. Кроме того, из условия теоремы следует, что если $p > 2$, то группа $G^{\mathfrak{U}}$ имеет экспоненту p, а если $p = 2$, то группа $G^{\mathfrak{U}}$ имеет экспоненту, не превышающую 4. Отсюда, в частности, получаем, что найдется по крайней мере один элемент $x \in G^{\mathfrak{U}}$, который не лежит в $\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ и имеет простой порядок p или порядок 4.

Пусть $M/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$, не содержащая $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$. Так как группа $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ разрешима и $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — ее минимальная нормальная подгруппа, то из максимальности $M/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ в $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ следует, что

$$G/\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = (M/\Phi(G^{\mathfrak{U}}))(G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) \;\text{ и }\; (M/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) \cap (G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) = 1.$$

Отсюда, в частности, $M/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — холлова p'-подгруппа группы $G/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$, а значит, $M = H\Phi(G^{\mathfrak{U}})$, где H — холлова p'-подгруппа группы G.

Поскольку подгруппа $< x >$ является изоордно перестановочной в G, то в G существует подгруппа D такая, что $|D| = |M|$ и $< x > D = D < x >$. Из $|D| = |M|$ следует, что $|D|$ делится на $|H|$. Теперь из разрешимости группы G по теореме Холла $H^y \subseteq D$ для некоторого $y \in G$. Если S — максимальная подгруппа группы G, содержащая D, то из $\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = G^{\mathfrak{U}} \cap \Phi(G)$ следует, что $S = H^y\Phi(G^{\mathfrak{U}})$. Таким образом, $|S| = |M|$. А поскольку $|D| = |M|$ и $D \subseteq S$, то $D = S$, т. е. D — максимальная подгруппа группы G, изолирующая главный фактор $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ группы G. Поэтому

$$(D/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) \cap (G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) = 1.$$

Следовательно, $|G : D| = p^n$, где $n > 1$.

С другой стороны,

$$< x > \Phi(G^{\mathfrak{U}})/\Phi(G^{\mathfrak{U}}) \subseteq G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$$

и $< x > \Phi(G^{\mathfrak{U}})/\Phi(G^{\mathfrak{U}}) \neq 1$. Отсюда и из максимальности D в G следует, что $D < x >= G$. Значит, если $p > 2$, то из $|x| = p$ имеем $|G : D| = p$, что невозможно. Если $p = 2$, то при $|x| = 4$ из $< x > \Phi(G^{\mathfrak{U}})/\Phi(G^{\mathfrak{U}}) \subseteq G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ и элементарной абелевости группы $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ имеем $|G : D| = 2$. Снова приходим к противоречию, которое завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. doi: 10.1515/9783110870138
2. **Ore O.** Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. Vol. 5. P. 431–460. doi: 10.1215/S0012-7094-39-00537-5
3. **Itô N., Szép J** Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. Vol. 23, no. 1–2. P. 168–170.
4. **Maier R., Schmid P.** The embedding of quasinormal subgroups in finite groups // Math. Z. 1973. Vol. 131, no. 3. P. 269–272. doi: 10.1007/BF01187244

5. **Kegel O.H.** Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Vol. 78, no. 1. P. 205–221. doi: 10.1007/BF01195169
6. **Deskins W.E.** On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. Vol. 82, no. 2. P. 125–132. doi: 10.1007/BF01111801
7. **Maier R.** Zur Vertauschbarkeit und Subnormalität von Untergruppen // Arch. Math. 1989. Vol. 53, no. 2. P. 110–120.
8. **Su H.** Semi-normal subgroups of finite groups // Math. Mag. 1988. Vol. 8, no. 1. P. 7–9.
9. **Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.** Products of finite groups. Berlin; NY: Walter De Gruyter, 2010. Ser. De Gruyter Expos. Math., vol. 53. doi: 10.1515/9783110220612
10. **Го В., Скиба А.Н., Шам К.П.** X-перестановочные подгруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Vol. 48, no. 4. P. 741–759.
11. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1967. 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3
12. **Buckley J.** Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z. 1970. Vol. 116, no. 1. P. 15–17. doi: 10.1007/BF01110184
13. **Kamornikov S.F., Tyutyanov V.N.** Finite groups with hereditarily G-permutable minimal subgroups // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.) 2023. Vol. 321, Suppl. 1. P. 101–108. doi: 10.1134/S0081543823060093
14. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, no. 3. P. 383–437. doi: 10.1090/S0002-9904-1968-11953-6
15. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985. 252 p. doi: 10.1017/S001309150002839X
16. **Suzuki M.** On a class double transitive groups // Ann. Math. 1962. Vol. 75, No 1. P. 105–145. doi: 10.2307/1970423
17. **Doerk K.** Minimal nichtüberauflösbare endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Vol. 91, no. 3. P. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426
18. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. Москва: Наука, 1978. 271 с.

Поступила 23.08.2024
После доработки 8.10.2024
Принята к публикации 14.10.2024
Опубликовано онлайн: 1.11. 2024

Йи Сяолан (Yi Xiaolan)
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China
e-mail: yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”, Гомель, Беларусь
e-mail: vtutanov@gmail.com

REFERENCES

1. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin, NY, Walter de Gruyter, 1992, 891 p. doi: 10.1515/9783110870138
2. Ore O. Contributions in the theory of groups of finite order. *Duke Math. J.*, 1939, vol. 5, pp. 431–460. doi: 10.1215/S0012-7094-39-00537-5
3. Itô N., Szép J Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen. *Act. Sci. Math.*, 1962, vol. 23, no. 1–2, pp. 168–170.
4. Maier R., Schmid P. The embedding of quasinormal subgroups in finite groups. *Math. Z.*, 1973, vol. 131, no. 3, pp. 269–272. doi: 10.1007/BF01187244

5. Kegel O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen. *Math. Z.*, 1962, vol. 78, pp. 205–221. doi: 10.1007/BF01195169
6. Deskins W.E. On quasinormal subgroups of finite groups. *Math. Z.*, 1963, vol. 82, no. 2, pp. 125–132. doi: 10.1007/BF01111801
7. Maier R. Zur Vertauschbarkeit und Subnormalität von Untergruppen . *Arch. Math.*, 1989, vol. 53, no. 2, pp. 110–120.
8. Su H. Semi-normal subgroups of finite groups. *Math. Mag.*, 1988, vol. 8, no. 1, pp. 7–9.
9. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of finite groups.* Ser. De Gruyter Expos. Math., vol. 53, Berlin, NY, Walter De Gruyter, 2010, doi: 10.1515/9783110220612
10. Guo W., Skiba A.N., Sham K.P. *Sib. Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 4, pp. 593–605. doi: 10.1007/s11202-007-0061-x
11. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin, Springer-Verl., 1967, 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3
12. Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal. *Math. Z.*, 1970, vol. 116, no. 1, pp. 15–17. doi: 10.1007/BF01110184
13. Kamornikov S.F., Tyutyanov V.N. Finite groups with hereditarily G-permutable minimal subgroups. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 321, Suppl. 1. P. 101–108. doi: 10.1134/S0081543823060093
14. Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 74, no. 3, pp. 383–437. doi: 10.1090/S0002-9904-1968-11953-6
15. Conway J.N., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Oxford Univ. Press, 1985, 252 p. doi: 10.1017/S001309150002839X
16. Suzuki M. On a class double transitive groups. *Ann. Math.*, 1962, vol. 75, no 1, pp. 105–145. doi: 10.2307/1970423
17. Doerk K. Minimal nichtüberauflösbare endliche Gruppen. *Math. Z.*, 1966, vol. 91, no. 3, pp. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426
18. Shemetkov L.A. Formatsii konechnykh grupp [Formations of finite groups]. Moskow, Nauka Publ., 1978, 271 p.

Received August 23, 2024
Revised October 8, 2024
Accepted October 14, 2024
Published online: November 1, 2024

Funding Agency: The research of the second and of the third authors was supported by the Russian Science Foundation and by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф23РНФ-237).

Xiaolan Yi, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China, e-mail: yixiaolan2005@126.com .

Sergei Fedorovich Kamornikov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., F. Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Republic of Belarus, e-mail: sfkamornikov@mail.ru .

Valentin Nikolayevich Tyutyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gomel Branch of International University "MITSO", Gomel, 246029 Republic of Belarus, e-mail: vtutanov@gmail.com .

Cite this article as: X. Yi, S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov. Isoorderly permutable subgroups of finite groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*. Published online: November 1, 2024. doi: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-02