ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 31 № 1 2025

УДК 512.542

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ К СТАТЬЕ “О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ $\pi$-ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП НЕКОТОРЫХ $D_\pi$-ГРУПП”

**И. Н. Белоусов, В. И. Зенков**

Приведено в соответствии с просьбой разработчиков GAP (см. главную страницу сайта и http://www.gap-system.org/Contacts/cite.html).

## 1. Функция *OrbHall*

Функция $OrbHall(G,\pi)$ реализует алгоритм для нахождения количества всех регулярных орбит под действием $\pi$-холловой подгруппы $H$ группы $G$ на множестве всех $\pi$-холловых подгрупп сопряженных с $H$ в группе $G$ таких, что их пересечение с $H$ равно 1. Данная функция и все последующие написаны в системе GAP 4.12.1 с использованием пакета "AtlasRep 2.1.6" . Для функции $OrbHall(G,\pi)$ предполагается, что $G$ изоморфна группе автоморфизмов простой спорадической группы.

```
 OrbHall:=function(IdG, pi)
     local G,H,Cl_H, Intersect;

     if IdG in ["M11","M23","M24", "Co1", "Co2", "Co3",
     "Th", "Fi23", "Fi24", "B", "M", "J1",  "Ru", "J4", "Ly", "B", "M"] then
          G:=AtlasGroup(IdG);
    fi;
    if IdG in ["M12","M22", "HS", "J2", "McL", "Suz", "He", "HN", "Fi22",  "ON",
        "J3"]  then
        G:=AtlasGroup(Concatenation(IdG,".2"));
    fi;

    H:=HallSubgroup( G, pi );
    Cl_H:=ConjugateSubgroups(G,H);
    Intersect:=Filtered(Cl_H, x -> Order(Intersection(x,H))=1 );;
    return Size(Intersect)/Order(H);
end;
```

Функция $OrbHall(G,\pi)$ выбирает некоторую $\pi$-холлову подгруппу $H$ в $\mathrm{Aut}(G)$ с помощью функции $HallSubgroup(G,P)$[1]. Далее находится класс сопряженных с $H$ в $G$ подгрупп $Cl\_H$ также с помощью встроенной в GAP функцией $ConjugateSubgroups(G,H)$[2]. Из класса $Cl\_H$ выбирается множество $Intersect$ всех подгрупп, пересекающихся с $H$ по единице. Функция выводит результат отношения числа подгрупп во множестве $Intersect$ к порядку подгруппы $H$.

Результат работы описанной функции для небольших спорадических групп и $\pi=\{2\}$ или $\{3\}$ выписан в следующей табл. 1.

[1] https://docs.gap-system.org/doc/ref/chap39.html#X7EDBA19E828CD584

[2] https://docs.gap-system.org/doc/ref/chap39.html#X7BA181CA81D785BB

Таблица 1

| $G$ | $OrbHall(G,\{2\})$ | $OrbHall(G,\{3\})$ |
|---|---|---|
| $M_{11}$ | 27 | 6 |
| $M_{12}$ | 6 | 31 |
| $M_{22}$ | 5 | 683 |
| $M_{23}$ | 522 | 7867 |
| $M_{24}$ | 163 | 41956 |
| $HS$ | 39 | 17107 |
| $J_1$ | 127 | 975 |
| $J_2$ | 10 | 102 |

## 2. Нахождение нижней границы для $Orb_p(G)$, используя централизатор центра силовской $p$-подгруппы

Пусть $G$ — группа, изоморфная группе автоморфизмов простой спорадической группы, $H$ — ее силовская $p$-подгруппа и $C = C_G(Z(H))$. Если найдется элемент $g$ из силовской $q$-подгруппы $A$ такой, что $C \cap H^g = 1$, то $Orb_p(G) \geq |C : N_C(H^g)|/|H|$ .

Функция $IntersectOrders$ находит все порядки пересечений $C \cap H^g$, где $g$ пробегает все элементы подгруппы $A$, выводит массив этих порядков и, если существует элемент $g$ с указанным в предыдущем абзаце свойством, выводит значение $|C : N_C(H^g)|/|H|$. Иначе выдает $-1$. Подгруппы $H$ и $A$ выбираются с помощью встроенной в GAP функции $SylowSubgroup(G,p)$[3].

```
IntersectOrders:=function(IdG, p, q)
    local G,H, A, C, orbH, ListOrderIntersectH;

    if IdG in ["M11","M23","M24", "Co1", "Co2", "Co3",
    "Th", "Fi23", "Fi24", "B", "M", "J1",  "Ru", "J4", "Ly", "B", "M"] then
          G:=AtlasGroup(IdG);
    fi;

    if IdG in ["M12","M22", "HS", "J2", "McL", "Suz", "He", "HN", "Fi22",
    "ON", "J3"] then
          G:=AtlasGroup(Concatenation(IdG,".2"));
    fi;

    H:=SylowSubgroup(G,p);
    A:=SylowSubgroup(G,q);
    C:=Centralizer(G,Center(H));
    orbH:=H^A;
    ListOrderIntersectH:=List(orbH, x-> Order(Intersection(x,C)));
    if 1 in  ListOrderIntersectH then
           Print(ListOrderIntersectH, "\n");
           return Order(C)/(Order(Normalizer(C,orbH[Position(
           ListOrderIntersectH,1)]))*Order(H));
    else
           Print(ListOrderIntersectH, "\n");
           return -1;
    fi;

end;
```

[3] https://docs.gap-system.org/doc/ref/chap39.html#X7AA351308787544C

Результат выполнения программы для разных групп $G$ и простых чисел $p$ и $q$ представлен в табл. 2.

Таблица 2

| $G$ | $p$ | $q$ | $\{\lvert C\cap H^g\rvert \mid 1\neq g\in A\}$ | $\lvert C:N_C(H^g)\rvert/\lvert H\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| $M_{11}$ | 2 | 11 | $\{2,1\}$ | 3 |
| | 3 | 11 | $\{1\}$ | 1 |
| $\mathrm{Aut}(M_{12})$ | 2 | 11 | $\{4,2,1\}$ | 3 |
| | 3 | 11 | $\{1\}$ | 4 |
| $\mathrm{Aut}(M_{22})$ | 2 | 11 | $\{16,8,4,2,1\}$ | 3 |
| | 3 | 11 | $\{1\}$ | 1 |
| $M_{23}$ | 2 | 23 | $\{16,8,4,2,1\}$ | 21 |
| | 3 | 11 | $\{1\}$ | 1 |
| $M_{24}$ | 2 | 23 | $\{32,8,4,2,1\}$ | 21 |
| | 3 | 11 | $\{1\}$ | 20 |
| $\mathrm{Aut}(HS)$ | 2 | 11 | $\{4,2\}$ | |
| | 3 | 11 | $\{1\}$ | 4 |
| $J_1$ | 2 | 19 | $\{1\}$ | 1 |
| | 2 | 11 | $\{1\}$ | 1 |
| | 2 | 7 | $\{1\}$ | 1 |
| | 3 | 19 | $\{1\}$ | 10 |
| $\mathrm{Aut}(J_2)$ | 2 | 7 | $\{8,2\}$ | |
| | 3 | 7 | $\{1\}$ | 10 |
| $\mathrm{Aut}(J_3)$ | 2 | 19 | $\{2,1\}$ | 15 |
| | 3 | 19 | $\{1\}$ | 1 |
| | 3 | 17 | $\{1\}$ | 1 |
| | 3 | 5 | $\{1\}$ | 1 |
| $Co_1$ | 2 | 23 | $\{128,32,8,4,2,1\}$ | 42525 |
| | 3 | 23 | $\{1\}$ | 640 |
| $Co_2$ | 2 | 23 | $\{256,128,64,32,16\}$ | |
| | 2 | 11 | $\{128,64,32,16\}$ | |
| | 2 | 7 | $\{128,64,32,16\}$ | |
| | 3 | 23 | $\{1\}$ | 640 |
| $Co_3$ | 2 | 23 | $\{4,2,1\}$ | 2835 |
| | 3 | 23 | $\{1\}$ | 160 |
| $\mathrm{Aut}(McL)$ | 2 | 11 | $\{2,1\}$ | 315 |
| | 3 | 11 | $\{1\}$ | 80 |
| $\mathrm{Aut}(Suz)$ | 2 | 13 | $\{16,8,4,2,1\}$ | 405 |
| | 3 | 13 | $\{1\}$ | 16 |
| $\mathrm{Aut}(He)$ | 2 | 17 | $\{8,4,2,1\}$ | 21 |
| | 3 | 17 | $\{1\}$ | 560 |
| $\mathrm{Aut}(HN)$ | 2 | 19 | $\{1\}$ | 225 |
| | 3 | 19 | $\{1\}$ | 80 |
| $\mathrm{Aut}(Fi_{22})$ | 2 | 13 | $\{32,16,8,4\}$ | |
| | 2 | 11 | $\{16,8,4,2\}$ | |
| | 2 | 7 | $\{128,64,8,2\}$ | |
| | 3 | 13 | $\{1\}$ | 256 |
| $Fi_{23}$ | 2 | 17 | $\{4,2,1\}$ | 405 |
| | 3 | 23 | $\{81,9,3,1\}$ | 1024 |
| $Fi_{24}$ | 2 | 17 | $\{2,1\}$ | 76545 |
| | 3 | 13 | $\{3,1\}$ | 56320 |
| $\mathrm{Aut}(O'N)$ | 2 | 31 | $\{2,1\}$ | 315 |
| | 3 | 31 | $\{1\}$ | 1 |
| $Ru$ | 2 | 13 | $\{2,1\}$ | 15 |
| | 3 | 29 | $\{1\}$ | 80 |