АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

В.В.КАБАНОВ, А.С.КОНДРАТЬЕВ

СИЛОВСКИЕ 2-ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Обзор)

СВЕРДЛОВСК, 1979

ОГЛАВЛЕНИЕ

БИБЛИОТЕКА
Института математики и механики
Уральского отделения РАН

В В Е Д Е Н И Е

Пусть G – конечная группа. Рассмотрим каноническое разложение порядка $|G|$ группы G :

$$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

В 1872 г. норвежским математиком Л.Силовом была доказана ставшая классической теорема о том, что группа G содержит подгруппу порядка $p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$ и все подгруппы этого порядка сопряжены в G . В честь автора этой теоремы подгруппы G порядка, равного максимальной степени простого числа p , делящей порядок G , называют силовскими p - подгруппами группы G .

В начале 20 века Бернсайдом была высказана гипотеза о том, что число 2 делит порядок конечной неразрешимой группы. Эта гипотеза была доказана Фейтом и Томпсоном только в 1963 году [91] . Из теоремы Силова и теоремы Фейта-Томпсона вытекает, что силовская 2-подгруппа конечной неразрешимой группы неединична. Ввиду этого результата внимание исследователей естественно обращается к конечным группам четного порядка. Ставится следующий вопрос. Что можно сказать о строении конечной группы G , если известно строение ее силовской 2-подгруппы T или задан способ вложения T в G ? Казалось удивительным, что в этих условиях могут быть получены нетривиальные результаты относительно G . На первых порах доказывалась непростота конечных групп G с конкретными типами силовских 2-подгрупп (см. результаты о существовании подгрупп индекса 2, являющиеся следствиями хорошо известных теорем о сдвиге, результаты Брауэра и Судзуки [66, 68] о непростоте конечных групп с кватернионной или изоморфной $Z_{2^m} \times Z_{2^m}$,

$m>1$, силовской 2-подгруппой) или устанавливались качественные результаты о существовании лишь конечного числа простых групп с определенными типами силовских 2-подгрупп (см. результаты Брауэра [65] о группах с абелевой силовской 2-подгруппой, не имеющей прямых множителей вида $Z_2 \times Z_2$). Затем с развитием техники работы с силовскими 2-подгруппами и успехами в реализации программы Брауэра характеризации простых групп свойствами централизаторов их инволюций (см. [5]) сложилось направление, связанное с исследованием неразрешимых групп в зависимости от свойств их силовских 2-подгрупп. Хотя может существовать бесконечно много конечных простых групп с данной силовской 2-подгруппой, оказалось, что во многих случаях можно дать полную классификацию всех простых групп (или даже групп, близких к простым, например, слитно-простых), силовские 2-подгруппы которых удовлетворяют некоторому условию. Такие классификации позволяют узнавать известные простые группы по довольно общим свойствам их силовских 2-подгрупп, а попытка такой классификации может дать толчок к открытию новых простых групп. В последнее время это направление является одним из наиболее интенсивно развивающихся в теории конечных групп.

Настоящий обзор своей целью имеет следующее:

I) отразить полученные к настоящему времени результаты изучения связей между строением конечной группы и свойствами ее силовской 2-подгруппы;

2) по возможности дать описание силовских 2-подгрупп в известных простых группах;

3) рассмотреть некоторые методы работы с силовскими 2-подгруппами.

Работа основывается на лекциях, прочитанных авторами на школе по теории конечных групп (пос. Шушенское Красноярского

края, 5-10 февраля 1978 г.).

Обзор состоит из введения, четырех глав и библиографии. Главы I,2,3 написаны А.С.КОНДРАТЬЕВЫМ, глава 4 – В.В.КАБАНОВЫМ. Внутри каждой главы для выделенных утверждений используется своя нумерация. Библиография включает все относящиеся к теме работы публикации, попавшие в поле зрения авторов. Алфавитный принцип ее построения нарушен, начиная с номера 238, добавлением статей, поступивших в самое последнее время.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Наши обозначения будут в основном стандартными, они приведены в [115] и [148]. Приведем некоторые из них, в частности, приведем обозначения для известных простых групп. Z_n – циклическая группа порядка n. Если n – степень 2, то E_n, D_n, SD_n и Q_n означают, соответственно, элементарную абелеву, диэдральную, полудиэдральную и кватернионную группу порядка n. Σ_n и A_n – симметрическая и знакопеременная группа степени n. $A \rtimes B$ – полупрямое произведение групп A и B с инвариантным множителем A.

$A \wr B$ – (регулярное) сплетение группы A с группой B.

$A \circ B$ – центральное произведение групп A и B с объединенными центрами.

Приведем теперь обозначения некоторых классических групп.

$GL(n,q)$ – общая линейная группа размерности n над $GF(q)$.

$SL(n,q)$ – специальная линейная группа размерности n над $GF(q)$.

$PSL(n,q)$ – проективная специальная линейная группа размерности n над $GF(q)$.

$Sp(2n,q)$ – симплектическая группа размерности $2n$ над $GF(q)$.

$PSp(2n,q)$ – проективная симплектическая группа размерности $2n$ над $GF(q)$.

$U(n,q^2)$ – унитарная группа размерности n над $GF(q^2)$.

$SU(n,q^2)$ – специальная унитарная группа размерности n над $GF(q^2)$.

$PSU(n,q^2)$ – проективная специальная унитарная группа размерности n над $GF(q^2)$.

$O(2n+1,q)$ – ортогональная группа нечетной размерности $2n+1$ над $GF(q)$.

$SO(2n+1,q)$ – специальная ортогональная группа нечетной размерности $2n+1$ над $GF(q)$, обозначается также через $O^{+}_{2n+1}(q)$.

$\Omega(2n+1,q)$ – коммутант $O(2n+1,q)$.

$P\Omega(2n+1,q) = \Omega(2n+1,q)/Z(\Omega(2n+1,q))$.

$O_{2n}(\varepsilon,q)$ – ортогональная группа четной размерности $2n$ над $GF(q)$, имеющая порядок

$$2q^{n(n-1)}(q^n-\varepsilon)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1),\ \varepsilon=\pm 1 .$$

$\Omega_{2n}(\varepsilon,q)$ – коммутант $O_{2n}(\varepsilon,q)$.

Существует шестнадцать бесконечных серий простых конечных групп, связанных с алгебрами Ли. Они называются группами лиевского типа или группами Шевалле. В таблице на стр. 8 приведены эти группы. В первой колонке дается обозначение группы, во второй указан ее порядок, в третьей порядок группы диагональных автоморфизмов. В последней колонке перечисляются другие обозначения для групп.

$Spin(2n+1,q)$ – универсальная группа Шевалле типа B_n над $GF(q)$, $Z(Spin(2n+1,q)) \cong Z_2$.

$Spin_{\varepsilon}(2n,q)$ – универсальная группа Шевалле $Spin(2n,q)$ типа D_n над $GF(q)$, когда $\varepsilon = 1$, и универсальная группа Шевалле типа ${}^2D_n$ над $GF(q^2)$, когда $\varepsilon = -1$.

$A_{\ell}(q),\ \ell\geq 1$	$\frac{1}{d}q^{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{\ell+1}-1)$	$(\ell+1,q-1)$	$PSL(\ell+1,q)$
$B_{\ell}(q),\ \ell\geq 2$	$\frac{1}{d}q^{\ell^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2\ell}-1)$	$(2,q-1)$	$P\Omega(2\ell+1,q)$
$C_{\ell}(q),\ \ell\geq 3$	$\frac{1}{d}q^{\ell^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2\ell}-1)$	$(2,q-1)$	$PSp(2\ell,q)$
$D_{\ell}(q),\ \ell\geq 4$	$\frac{1}{d}q^{\ell(\ell-1)}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2\ell-2}-1)(q^{\ell}-1)$	$(4,q^{\ell}-1)$	$P\Omega_{2\ell}(1,q)$
$G_2(q)$	$q^6(q^2-1)(q^6-1),\ q>2$	1	$E_2(q)$
$F_4(q)$	$q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$	1	
$E_6(q)$	$\frac{1}{d}q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)$	$(3,q-1)$	
$E_7(q)$	$\frac{1}{d}q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)$	$(2,q-1)$	
$E_8(q)$	$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)$	1	
${}^2A_{\ell}(q),\ \ell\geq 2$	$\frac{1}{d}q^{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)\cdots(q^{\ell+1}+(-1)^{\ell})$	$(\ell+1,q+1)$	$PSU(\ell+1,q^2)$
${}^2D_{\ell}(q),\ \ell\geq 4$	$\frac{1}{d}q^{\ell(\ell-1)}(q^2-1)\cdots(q^{2\ell-2}-1)(q^{\ell}+1)$	$(4,q^{\ell}+1)$	$P\Omega_{2\ell}(-1,q)$
${}^2E_6(q)$	$\frac{1}{d}q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)$	$(3,q+1)$	
${}^3D_4(q)$	$q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$	1	
${}^2B_2(q)$	$q^2(q-1)(q^2+1),\ q=2^{2n+1},\ n>0$	1	$Sz(q)$
${}^2G_2(q)$	$q^3(q-1)(q^3+1),\ q=3^{2n+1},\ n>0$	1	$E_2^*(q), R_1(q)$
${}^2F_4(q)$	$q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1),\ q=2^{2n+1},\ n>0$	1	$R_2(q)$

Заметим, что $Z(Spin(4n+2,q)) \cong Z_{(4,q-1)}$, $Z(Spin(4n,q)) \cong E_4$, $Z(Spin_{-1}(4n+2,q)) \cong Z_{(4,q+1)}$, $Z(Spin_{-1}(4n,q)) \cong Z_2$.

К настоящему времени открыто 26 простых "спорадических" групп, не входящих в известные бесконечные серии простых групп лиевского типа. Мы укажем общепринятые обозначения и порядки этих групп.

M_{11}	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
M_{12}	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
M_{23}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
J_1 (Ja)	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
J_2 (HaJ)	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
J_3 (HJM)	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$
He (HHM)	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$
HiS	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
McL (M^c)	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
Suz (SZ)	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
Co_1 (.1)	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
Co_2 (.2)	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Co_3 (.3)	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Fi_{22} (M(22))	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$

Fi_{23} (M(23))	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
Fi'_{24} (M(24)')	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
Ly (LyS)	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
Ru (R)	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
O'N (O-S)	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$
T (F_3)	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31$
HN (F_5)	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
J_4 (Ja_2)	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$
F_1	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$
F_2	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$

Глава I. ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПРОСТЫХ ГРУПП СВОЙСТВАМИ СТРОЕНИЯ ИХ СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУПП

§ I. Характеризации известных простых групп их силовскими 2-подгруппами

Пусть H – данная группа. Говорят, что 2-группа T имеет тип H (T – типа H), если T изоморфна силовской 2-подгруппе H. Под характеризацией простой группы H ее силовской 2-подгруппой понимают теорему такого вида: Если силовская 2-подгруппа простой группы G типа H, то G изоморфна одной из групп следующего далее списка, включающего, конечно, группу H. Ниже в таблице приведены полученные к настоящему времени характеризации известных простых групп их силовскими 2-подгруппами.

Тип силовской 2-подгруппы	Простые группы с таким типом силовской 2-подгруппы	Кто охарактеризовал
$PSL(2,q)$, q нечетно	$PSL(2,r)$, r нечетно, A_7	Горенстейн, Уолтер [127]
$PSL(2,2^n)$, $n\geq 2$	$PSL(2,q)$, $q\equiv\pm 3 \pmod 8$, $q>3$; $PSL(2,2^n)$; группы типа Ри; J_1	Уолтер [227]
$PSL(3,q)$, q нечетно	$PSL(3,r)$, $PSU(3,r^2)$, r нечетно, M_{11}	Алперин, Брауэр, Горенстейн [52, 53, 54]
$PSL(3,2^n)$, $n>1$	$PSL(3,2^n)$	Горенстейн, Харада [117], Мазуров, Сыскин [34], Коллинз [79, 80]
$PSU(3,2^{2n})$, $n>1$	$PSU(3,2^{2n})$	Лайонс [166], Сыскин [41], Коллинз [78]

$PSL(4,q)$, q нечетно	$PSL(4,r)$, $PSU(4,r^2)$, r нечетно, M_{22}, M_{23}, McL, A_{10}, A_{11}	Д.Мейсон [171, 172], Горенстейн, Харада [118]
$PSL(5,q)$, q нечетно	$PSL(5,r)$, $PSU(5,r^2)$, r нечетно	Д.Мейсон [174], Коллинз, Соломон [81]
$PSL(n,2^m)$, $n\geq 4$, $m\geq 2$	$PSL(n,2^m)$	[illegible] [176]
$PSp(4,q)$, q нечетно	$PSp(4,r)$, r нечетно, A_8, A_9	Горенстейн, Харада [118, 122]
$PSp(4,2^n)$, $n>1$	$PSp(4,2^n)$	Гилман, Горенстейн [98]
$G_2(q)$, q нечетно	M_{12}, $G_2(r)$, ${}^3D_4(r)$, r нечетно	Горенстейн, Харада [120]
$PSp(6,q)$, q нечетно	$PSp(6,r)$, r нечетно	Харрис [135]
$G_2(2^n)$, $n>1$	$G_2(2^n)$	Г.Мейсон [175]
${}^3D_4(2^n)$	${}^3D_4(2^n)$	Хьюз [147]
$Sz(2^{2n+1})$, $n\geq 1$	$Sz(2^{2n+1})$	Сыскин [41], Коллинз [77]
J_2	J_2, J_3	Горенстейн, Харада [117]
M_{24}	M_{24}, He, $PSL(5,2)$	Шенвельдер [193]
Ly	Ly	Лайонс [167], Горенстейн, Харада [119]
HiS	HiS	Горенстейн, Харрис [134]
Co_3	Co_3	Соломон [202]
Co_2	Co_2	Иошида [237]
Suz	Suz	Рейфарт [188], Ямаки [236]
$O'N$	$O'N$	О'Нэн [179]
T	T	Рейфарт [189]
Ru	Ru	Асса [59], Окуяма, Иошида [237]
${}^2F_4(2)'$	${}^2F_4(2)'$	Асса [59]

Силовские 2-подгруппы первой группы Янко J_1, $PSL(2,8)$ и групп Ри ${}^2G_2(3^{2n+1})$ $(n\geq 1)$ изоморфны E_8. Характеризация J_1, $PSL(2,8)$ и ${}^2G_2(3^{2n+1})$ $(n\geq 1)$ их силовской 2-подгруппой до сих пор не завершена, хотя к этому прилагаются немалые усилия. Мы подытожим полученные результаты.

Из работ Янко [155, 156], Янко и Томпсона [[illegible]], Уорда [[illegible]], Уолтера [[illegible], [illegible]], Томпсона [219] вытекает следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е . Пусть G^* – простая группа с элементарной силовской 2-подгруппой T порядка 8. Тогда либо G изоморфна J_1 или $PSL(2,8)$, либо выполняются следующие утверждения:

(1) $|G|=q^3(q^3+1)(q-1)$, где $q=3^{2n+1}>5$.

(2) $C_G(T)=T$ и $N_G(T)=T\leftthreetimes K$, где K – группа Фробениусов порядка 21. Все инволюции в G сопряжены и если t – инволюция из G, то $C_G(t)=\langle t\rangle\times F$, где F изоморфна $PSL(2,q)$.

(3) Если P – силовская 3-подгруппа в G и $N=N_G(P)$, то P – TI – подгруппа в G и существует автоморфизм σ поля $GF(q)$ такой, что N изоморфна группе $N(\sigma)$, которая задается упорядоченными четверками чисел $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ из поля $GF(q)$, $\alpha\neq 0$, с умножением

$$(\kappa,\alpha,\beta,\gamma)(\lambda,\xi,\eta,\zeta)=(\kappa\lambda,\alpha\lambda+\xi,\beta\lambda^{1+\sigma}+\eta+\alpha\lambda\xi^{\sigma}-\alpha^{\sigma}\lambda^{\sigma}\xi,\zeta+\gamma\lambda^{2+\sigma}+\xi\beta\lambda^{1+\sigma}+\alpha^{\sigma}\lambda^{\sigma}\xi^{2}+\alpha\lambda\xi^{1+\sigma}-\alpha^{2}\lambda^{2}\xi^{\sigma})$$

В частности, имеем следующее: $|P|=q^3$; $Z(P)$ – элементарная группа порядка q; P – ступени нильпотентности 3; $Z_2(P)=P'=\Phi(P)=\Omega_1(P)$ – элементарная группа порядка q^2, все элементы из $P-P'$ имеют порядки 9 и их кубы образуют $Z(P)-\{1\}$; $N=P\leftthreetimes W$, где W – циклическая

подгруппа порядка $q-1$; если i – инволюция из W, то $Z_2(P)=Z(P)\times C_P(i)$; если x – элемент W (нечетного) порядка $\frac{q-1}{2}$, то $C_P(x^a)=1$ при $x^a\neq 1$; если $1\neq P_0\leq P$, то $N_G(P_0)\leq N$.

(4) G содержит абелевы холловские подгруппы M^+ и M^- порядков $q+1+3m$ и $q+1-3m$, соответственно, где $q^2-q+1=(q+1+3m)(q+1-3m)$. M^+ и M^- – TI – подгруппы в G, содержащие централизатор в G каждого своего неединичного элемента. $N_G(M^+)=M^+\leftthreetimes W^+$ и $N_G(M^-)=M^-\leftthreetimes W^-$, где W^+ и W^- – циклические подгруппы порядка 6.

(5) G имеет точное дважды транзитивное представление степени q^3+1 на правых смежных классах по $N_G(P)$, в котором стабилизатор трех точек имеет порядок 2.

(6) Таблица характеров G однозначно определена с точностью до значений некоторых "исключительных характеров".

(7) Группа внешних автоморфизмов G циклическая порядка, делящего $2n+1$. G имеет тривиальный мультипликатор Шура.

Простая группа с элементарной силовской 2-подгруппой порядка 8, не изоморфная J_1 или $PSL(2,8)$, называется группой типа Ри. В работе [[illegible]] Томпсон получил дальнейшую информацию о таблице умножения группы G типа Ри, связанную с так называемым структурным уравнением (обусловленным свойством (5)) и с различными определяющими соотношениями. Наконец в [[illegible]] Томпсон свел решение всей проблемы отождествления групп Ри с группами Ри ${}^2G_2(q)$ $(q=3^{2n+1}>5)$ к одной проблеме частного характера: показать, что автоморфизм σ из пункта (3) предложения является квадратным корнем фробениусова автоморфизма $x\to x^3$ поля $GF(q)$.

Все эти результаты показывают, что группы типа Ри настолько близки по своему строению к группам Ри, что их "неизвестность" практически не мешает исследованиям, в которых группы типа Ри появляются как композиционные факторы подгрупп изучаемых групп, Отметим еще две незавершенные характеризации силовскими 2-подгруппами. Пусть G – простая группа с силовской 2-подгруппой T типа H, где H – данная простая группа. Будем говорить, что картина слияния инволюций в G такая же, как и H, если существует такой изоморфизм T на силовскую 2-подгруппу H, что две инволюции из T сопряжены в G тогда и только тогда, когда их образы при этом изоморфизме сопряжены в H.

Если T типа A_{16}, то G изоморфна A_{16}, A_{17} или картина слияния инволюций в G такая же, как в $\Omega(9,3)$ (см. Инаба [235]).

Если T типа A_{12}, то либо G изоморфна A_{12}, A_{16}, $Sp(6,2)$, либо G имеет картину слияния инволюций, как в $\Omega(7,3)$ и для некоторого $q \equiv \pm 3 (mod 8)$ и некоторой подгруппы B, $\Omega(7,q) \le B \le Aut(\Omega(7,q))$, $|B:\Omega(7,q)|$ нечетно, существует изоморфизм $\theta : T \to B$ такой, что $C_G(\sigma) \cong C_B(\theta(\sigma))$ для любой инволюции σ из T (см. Соломон [200,201]).

§ 2. Абстрактные характеризации простых групп свойствами их силовских 2-подгрупп

В характеризациях простых групп их силовскими 2-подгруппами последние однозначно определены. В последнее время развивается направление, связанное с абстрактными характеризациями простых групп свойствами их силовских 2-подгрупп, т.е. классификациями простых групп, силовские 2-подгруппы которых удовлетворяют некоторому общему условию. И это естественно, так как узнавать простую группу по абстрактному свойству ее силовской 2-подгруппы гораздо легче, чем полностью восстанавливать изоморфный тип ее силовской 2-подгруппы. Конечно, это направление тесно связано с характеризациями известных простых групп их силовскими 2-подгруппами.

Мы рассмотрим основные виды условий, которые накладываются на силовские 2-подгруппы, одновременно давая обзор полученных результатов.

1) Ограничения на ранг (2-ранг, нормальный 2-ранг, секционный 2-ранг).

Рангом абелевой группы называется минимальное число ее образующих. Максимум рангов (нормальных) абелевых подгрупп силовской p-подгруппы группы G называется (нормальным) p-рангом группы G. Секционный p-ранг группы есть максимум рангов абелевых сечений ее силовской p-подгруппы.

Группа 2-ранга 0 имеет нечетный порядок и поэтому разрешима (Фейт–Томпсон [91]).

Группа 2-ранга 1 имеет циклическую или (обобщенную) кватернионную силовскую 2-подгруппу и поэтому непроста (Бернсайд [70], Брауэр–Сузуки [68]).

В случае простых групп G 2-ранга 2 почти вся работа падает на характеризации силовскими 2-подгруппами, так как Альперин короткими рассуждениями доказал, что силовская 2-подгруппа G либо диэдральная, либо полудиэдральная, либо сплетение циклической группы с группой порядка 2, либо типа $PSU(3,4^2)$. Его результат, объединенный с предварительно установленными характеризационными теоремами, дает полное определение всех простых групп 2-ранга 2 (см. работы Альперина, Брауэра, Горенстейна [52,53,54]). Они исчерпываются группами $PSL(2,q)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q^2)$, q нечетно, A_7, M_{11}, $PSU(3,4^2)$.

С.А.Сыскин [30, 42] при некоторых ограничениях (разрешимость централизаторов инволюций или нецикличность центра силовской 2-подгруппы) описал простые группы 2-ранга 3. О'Нэн [180] описал простые группы 2-ранга 3, все 2-локальные подгруппы которых 2-скованы. Строт [207] полностью классифицировал простые группы 2-ранга 3. Это группы из следующего списка: $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, q нечетно, $PSL(2,8)$, $PSU(3,8^2)$, $Sz(8)$, J_1, M_{12}, $O'N$, группы типа Ри.

Совсем недавно Строт [210] описал все простые группы 2-ранга 4 с разрешимыми централизаторами инволюций. Проблема полного описания простых групп 2-ранга 4 остается. Из известных простых групп 2-ранга 4 остались неохарактеризованными своей силовской 2-подгруппой лишь группы $PSL(6,q)$, $q \equiv -1 \pmod 4$, $PSU(6,q^2)$, $q \equiv 1 \pmod 4$.

При исследовании простых групп по техническим причинам резко выделяется случай, когда эти группы имеют нормальный 2-ранг ≤ 2 или, в обозначениях Томпсона, $SCN_3(2) = \emptyset$. Таким образом, стало важным определить все простые группы, в которых $SCN_3(2) = \emptyset$. Томпсон [220] выполнил это при условии, что G N - группа. В дальнейшем он и Янко [159] расширили этот результат до случая, когда централизатор инволюции из силовской 2-подгруппы S группы G разрешим, если $|S : C_S(t)| \leq 2$. Результаты Томпсона и Янко обобщил Сегев [196], заменивший условие разрешимости соответствующих централизаторов инволюций на условие их 2-скованности. Наконец, Мак Вильямс-Паттерсон [178, 182] изучила общую ситуацию, перечислив все изоморфные типы силовских 2-подгрупп простых групп нормального 2-ранга ≤ 2. Вместе с характеризациями известных

простых групп нормального 2-ранга ≤ 2 их силовскими 2-подгруппами, а также признаками непростоты групп с определенными типами силовских 2-подгрупп это дает полное описание простых групп нормального 2-ранга ≤ 2. Простая группа с $SCN_3(2) = \emptyset$ изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,q)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q^2)$, q нечетно; $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 8$; $PSL(4,q)$, $q \equiv -1 \pmod 8$; $PSU(4,q^2)$, $q \equiv 1 \pmod 8$; $PSp(4,q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 8$; $PSL(5,q)$, $q \equiv -1 \pmod 4$; $PSU(5,q^2)$, $q \equiv 1 \pmod 4$; $PSU(3,4^2)$; A_7; M_{11}; J_2; J_3; Ly.

Важным вспомогательным результатом Мак-Вильямс [178] было доказательство того, что 2-группа нормального ранга ≤ 2 имеет секционный ранг не более 4. Заметим, что этот результат следует также из классификации А.Д.Устюжанинова [45] 2-групп с $SCN_3(2) = \emptyset$. Ограничение на секционный ранг более удобно, чем ограничение на нормальный 2-ранг, так как оно переносится на подгруппы и факторгруппы и поэтому позволяет проводить классификацию по индукции. Опираясь на многочисленные характеризации и ранние результаты, Горенстейн и Харада [123] полностью описали простые группы секционного 2-ранга не более 4. Это в точности следующие группы: $PSL(2,q)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q^2)$, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $PSp(4,q)$, $PSL(4,q)$, $q \not\equiv 1 \pmod 8$, $PSU(4,q^2)$, $q \not\equiv 7 \pmod 8$, $PSL(5,q)$, $q \equiv 3 \pmod 4$, $PSU(5,q^2)$, $q \equiv 1 \pmod 4$ (q везде нечетно), $PSL(2,8)$, $PSL(2,16)$, $PSL(3,4)$, $PSU(3,4^2)$, $Sz(8)$, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, J_1, группы типа Ри, M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, J_2, J_3, Ly, McL.

[illegible stamp]

2). Ограничения на ступень нильпотентности.

Уолтер [227] классифицировал простые группы с абелевой силовской 2-подгруппой. Они исчерпываются группами $PSL(2,2^n)$, $n \geq 2$, $PSL(2,q)$, $q \equiv \pm 3 (mod 8)$, J_1 и группами типа Ри.

Гилман и Горенстейн [98] показали, что простая группа с силовской 2-подгруппой ступени нильпотентности 2 изоморфна $PSL(2,q)$, $q \equiv \pm 7 (mod 16)$, A_7, $Sz(2^n)$, $PSU(3,2^{2n})$, $PSL(3,2^n)$ или $PSp(4,2^n)$.

3). Существование в силовской 2-подгруппе подгрупп, содержащих свой централизатор.

Пусть G – простая группа и силовская 2-подгруппа T из G содержит подгруппу A такую, что $C_T(A) \leq A$. Если $|A|=4$, то T диэдральная, либо полудиэдральная (см. [211, 212]) и поэтому группа G известна по результатам [52, 127]).

Описание простых групп секционного 2-ранга не выше 4 позволяет сделать следующий шаг. В работах В.И.Ситникова [39, 40], Шпельбуша [191], Харади [134] было показано, что если $|A| = 8$, то секционный 2-ранг G не превосходит 4.

Недавно Строт [209] доказал, что если $|A| \leq 16$, $Z(A)$ – силовская 2-подгруппа в $C_G(A)$ и $N_G(A)/AC_G(A)$ неразрешимая группа, то либо G секционного 2-ранга не более 4, либо G изоморфна $PSL(4,q)$, $q \equiv 1 (mod 8)$, $PSU(4,q^2)$, $q \equiv -1 (mod 8)$, HiS, Co_3, He, M_{24}, $PSL(5,2)$, A_{16}, A_{17}, либо G имеет силовскую 2-подгруппу типа A_{18} или $PSL(6,q)$, $q \equiv -1 (mod 4)$.

В работе А.П.Ильиных [8] изучены группы, в которых силовская 2-подгруппа T имеет элементарную абелеву подгруппу A порядка 2^{2n}, $n \geq 2$, такую, что $A = E \times Z(T)$,

$|E| = 2^n$ и $C_T(e) = A$ для любой инволюции $e \in E$. Простая группа, удовлетворяющая этому условию, изоморфна $PSL(3,2^n)$.

4) Ограничения на коммутант.

В работах Шабо [74], Р.Ж.Алеева [1] и А.С.Кондратьева [17] показано, что если коммутант силовской 2-подгруппы простой группы G циклический, то G изоморфна $PSL(2,2^n)$; $PSL(2,q)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q^2)$, q нечетно; A_7; M_{11}; J_1; группе типа Ри. А.С.Кондратьев [18, 239] показал, что простые группы с силовской 2-подгруппой, имеющей элементарный коммутант порядка 4 или 8, исчерпываются группами $PSL(3,4)$, $PSU(3,4^2)$, $PSL(3,8)$, $PSU(3,8^2)$, $Sz(8)$, $PSp(4,q)$, $q \equiv \pm 3 (mod 8)$, A_8, A_9.

5) Ограничения на некоторые подгруппы и факторгруппы из силовской 2-подгруппы.

Берноайдом [70], Брауэром и Судзуки [68], Горенстейном и Уолтером [127], Уонгом [229], Альпериным, Брауэром и Горенстейном [52] были полностью исследованы простые группы, в которых силовская 2-подгруппа содержит циклическую подгруппу индекса 2. В.Д.Мазуров [26] изучил группы, в которых силовская 2-подгруппа метациклическая, т.е. является расширением циклической группы с помощью циклической. Им было доказано, что метациклическая силовская 2-подгруппа неразрешимой группы может быть лишь группой кватернионов, диэдральной группой или полудиэдральной группой. Голдшмидт [109] показал, что если силовская 2-подгруппа T простой группы содержит абелеву подгруппу индекса 2, то коммутант T циклический. А.С.Кондратьев [16] доказал, что если силовская 2-подгруппа T простой группы является расширением абелевой группы с помощью группы 2-ранга 1 (т.е. циклической или (обобщенной) кватернионной), то T содержит абелеву подгруппу индекса 2. Голдшмидт [109] описал простые группы, в которых силовская 2-подгруппа

T удовлетворяет одному из условий: А) $\Omega_1(T)$ абелев, Б) $T \cong T_0 \wr T_1$, где $\Omega_1(T_0)$ абелев. Пальчик [38] показал, что если силовская 2-подгруппа простой группы G содержит циклическую подгруппу индекса 16, то либо G секционного 2-ранга не более 4, либо G изоморфна $PSL(2,32)$. В.В.Кабанов, В.Д.Мазуров, С.А.Сыскин [14] описали простые группы, в которых силовская 2-подгруппа содержит экстраспециальную подгруппу индекса 2, т.е. 2-подгруппу, в которой центр, коммутант, подгруппа Фраттини совпадают и имеют порядок 2. Простые группы с таким свойством исчерпываются группами $PSL(2,q)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q^2)$, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $PSp(4,q)$ для подходящего нечетного числа q, A_8, A_9, M_{11}, M_{12}. В.Д.Мазуров и С.А.Сыскин получили следующий результат [30]. Пусть T – силовская 2-подгруппа простой группы G. Если T изоморфна S/Z, где S – 2-группа типа $PSU(3,2^{2n})$, $Sz(2^{2n+1})$ или $PSL(3,2^n)$, $n>1$, а $Z < Z(S)$, то $Z=1$ и G изоморфна $PSU(3,2^{2n})$, $Sz(2^{2n+1})$ или $PSL(3,2^n)$. В.Д.Мазуров и С.А.Сыскин [33] показали, что если силовская 2-подгруппа простой группы G изоморфна неабелевой силовской 2-подгруппе из некоторой группы Шмидта, то G изоморфна $PSU(3,2^{2n})$. А.С.Кондратьев [18, 19] описал группы, силовская 2-подгруппа которых обладает элементарной абелевой подгруппой индекса 4. Среди простых это в точности следующие группы: $PSL(2,2^n)$, $n \ge 2$; $PSL(2,q)$, q нечетно и $q \not\equiv \pm 1 \pmod{32}$; $PSL(3,q)$, $q \equiv 3 \pmod 8$; $PSU(3,q^2)$, $q \equiv 5 \pmod 8$; группы типа Янко-Ри; M_{11}; A_7; A_8; A_9.

6) Ограничения на порядок силовской 2-подгруппы.

Простые группы с конкретными силовскими 2-подгруппами малых порядков исследовались многими авторами. Мы приведем лишь наиболее общие результаты. Вонг в неопубликованных работах (см. [131]) исследовал 2-группы, встречающиеся в качестве силовских 2-подгрупп в простых группах. Это исследование охватывает все 2-группы порядка $\le 2^5$ и, кроме того, описывает строение групп порядка 2^6 как возможных силовских 2-подгрупп в простых группах. Результаты Вонга были использованы при классификации простых групп секционного 2-ранга не более 4 [123]. Из описания простых групп с циклическим коммутантом силовских 2-подгрупп следует, что если силовская 2-подгруппа T конечной простой группы имеет порядок $\le 2^6$, то либо T абелева, либо секционный 2-ранг T не превосходит 4. А.С.Кондратьев [18] показал, что если силовская 2-подгруппа T простой группы имеет порядок 2^7, то либо ступень нильпотентности T не более 2, либо секционный 2-ранг T не превосходит 4. В [95] упоминается о том, что в серии работ коллектива авторов из Майнца (ФРГ), а именно, Бейзнгеля, Стингля, Шмида и Фрица описаны все простые группы, в которых порядок силовской 2-подгруппы не превосходит 2^{10}. Из этой серии опубликованы пока лишь работы Бейзнгеля [62] и Фрица [95].

7). Ограничение на экспоненту силовской 2-подгруппы.

В.Д.Мазуров [31] изучает простые группы с силовской 2-подгруппой экспоненты 4.

Отметим в связи с этим следующий удивительный результат Гольдшмидта [106]. Если неабелева силовская 2-подгруппа T простой группы имеет ступень нильпотентности n, то центр T имеет экспоненту не более 2^{n-1}, а T имеет экспоненту не более $2^{n(n-1)}$.

§ 3. Группы с разложимой силовской 2-подгруппой

Характеризации простых групп свойствами их силовских 2-подгрупп тесно связаны с теоремами непростоты групп с определенными типами силовских 2-подгрупп. Мы остановимся на проблеме непростоты групп с разложимой неабелевой силовской 2-подгруппой. Группа называется разложимой, если она представима в виде прямого произведения двух нетривиальных множителей. Интерес к изучению групп с разложимой силовской 2-подгруппой обусловлен тем, что в ряде статей, посвященных классификациям простых групп, исследователи были вынуждены изучать вспомогательную ситуацию, когда в группе G силовская 2-подгруппа T есть прямое произведение $T = T_1 \times T_2$ двух нетривиальных подгрупп. Например, при изучении групп с силовскими 2-подгруппами типа $G_2(q)$ и $PSp(4,q)$, q нечетно, определение строения централизатора инволюции требует решения вспомогательной задачи для случая, в котором T_1 и T_2 диэдральные группы. Аналогичные проблемы возникли с T_1 – диэдральной и $T_2 \cong Z_{2^n} \wr Z_2$ в работе Мейсона о группах с силовской 2-подгруппой типа $PSL(5,q)$, q нечетно. Также в анализе групп с силовской 2-подгруппой типа $PSp(6,q)$, q нечетно, в ходе определения строения централизаторов инволюций возникают две другие такие проблемы о прямом произведении. В абстрактных характеризациях простых групп свойствами их силовских 2-подгрупп также дело часто сводится к рассмотрению случаев, когда силовская 2-подгруппа разложима. Так классификация групп с циклическими коммутантами силовских 2-подгрупп свелась к случаю, когда силовская 2-под-

группа имеет вид $V \times D$, где V – элементарная абелева группа, а D либо диэдральная, либо полудиэдральная, либо сплетение циклической 2-группы с группой порядка 2. При классификации простых групп секционного 2-ранга не более 4 также пришлось рассматривать несколько частных случаев с разложимой силовской 2-подгруппой.

Результаты о группах с разложимой силовской 2-подгруппой пока в основном носят частный характер (относятся к конкретным типам разложимых силовских 2-подгрупп), даются тяжело и весьма объемны. Первый общий вопрос, который естественно поставить о группах с разложимой силовской 2-подгруппой, – это вопрос Голдшмидта, записанный им в "Коуровскую тетрадь" [22].

"Возможно ли, чтобы неабелева силовская 2-подгруппа T конечной простой группы G была разложима?"

Изучая строение силовских 2-подгрупп в известных простых группах, один из авторов (см. [20]) недавно наткнулся на простые группы с разложимой силовской 2-подгруппой. Таким образом, ответ на вопрос Голдшмидта положительный. В качестве простой группы G можно взять проективную ортогональную группу $P\Omega_{2n}(\varepsilon, q)$, где $\varepsilon = \pm 1$, $n \geq 3$, q нечетно и $q^n \equiv -\varepsilon \pmod 4$. Обозначим через W_1 диэдральную группу порядка, равного наибольшей степени 2, делящей q^2-1, а через T_1 – группу порядка 2. Для $m \geq 2$ рекуррентно определим теперь группы T_m, W_m, полагая $T_m = T_{m-1} \wr T_1$ и $W_m = W_1 \wr T_{m-1}$. Тогда из результатов Картера-Фонга [73] и Уонга [232] следует, что силовская 2-подгруппа T группы G изоморфна $W_{r_1} \times W_{r_2} \times \cdots \times W_{r_t}$, где натуральные числа $r_1, r_2, \ldots, r_t$ находятся из условий: $2(n-1) = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_t}$ и $r_1 \leq r_2 < \cdots < r_t$. В частности, если

$G = {}^2D_4(3) = P\Omega_8(-1, 3)$, то $T \cong D_8 \times (D_8 \wr Z_2)$. Из описания Уонга [232] силовских 2-подгрупп знакопеременных групп следует, что силовские 2-подгруппы знакопеременных групп A_{4n+2}, A_{4n+3} имеют тип Σ_{4n} и $P\Omega_{2n+2}(\varepsilon, q)$, где $q^{2n+1} \equiv -\varepsilon \pmod 4$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Поэтому и среди знакопеременных групп имеются группы с разложимыми силовскими 2-подгруппами. Например, группы A_{14} и A_{15} имеют тип ${}^2D_4(3)$.

Существование простых групп с разложимыми неабелевыми силовскими 2-подгруппами кажется все же изолированным случаем. Остается актуальной задача доказательства непростоты групп с неабелевыми разложимыми силовскими 2-подгруппами, удовлетворяющими достаточно общим условиям.

Кажется естественной следующая гипотеза.

Г и п о т е з а I. Если неабелева силовская 2-подгруппа группы G имеет нетривиальный абелев прямой множитель, то группа G не проста.

Для обоснования этой гипотезы заметим, что в известных простых группах неабелевы силовские 2-подгруппы нетривиальных абелевых прямых множителей не имеют. Этот факт можно установить на основе информации, собранной в главе 2, показывая для неабелевой силовской 2-подгруппы T известной простой группы, что либо $Z(T)$ циклический, либо $Z(T) \leq T'$.

Первым результатом по проблеме непростоты групп с неабелевой разложимой силовской 2-подгруппой был, по-видимому, результат Глаубермана [99]: если $T = Q_{2^{n+1}} \times T_0$, где $\Omega_1(T_0)$ лежит в n-ом члене верхнего центрального ряда T, то T не может быть силовской 2-подгруппой простой группы. Случай, когда T произведение групп кватернио-

нов, был рассмотрен независимо В.Д.Мазуровым [25].

Харада [130] показал, что если силовская 2-подгруппа T группы G разложима в прямое произведение циклической группы и группы, содержащей циклическую подгруппу индекса 2, то либо G не проста, либо T элементарная абелева группа порядка 4 или 8.

Рассмотрим некоторые задачи о группах с разложимой силовской 2-подгруппой, которые можно ставить и решать.

З а д а ч а I. Пусть $T = T_1 \times T_2$ – силовская 2-подгруппа группы G. В каких случаях группа G по строению близка к прямому произведению $G_1 \times G_2$ групп G_1 и G_2 с силовскими 2-подгруппами, изоморфными T_1 и T_2, соответственно.

В работах Горенстейна-Харады [121], Смита [198,199], Мейсона [174], Шабо [74], Р.Ж.Алеева [I], А.С.Кондратьева [17], показано, что если группа G с тривиальным разрешимым радикалом и совпадающая со своим коммутантом имеет силовскую 2-подгруппу $T = T_1 \times T_2$, где T_i абелева, диэдральная, полудиэдральная или сплетение циклической группы с группой порядка 2, то $G = G_1 \times G_2$, где T_i изоморфна силовской 2-подгруппе G_i и группа G_i проста $(i = 1, 2)$. Р.Ж.Алеев [2,3] получил аналогичный результат в случае, когда силовская 2-подгруппа группы разложима в прямое произведение конечного числа абелевых, диэдральных или полудиэдральных групп.

Обобщая рассуждения своей работы [74], Шабо получил следующий результат [75].

Пусть $T = A \times B$ – силовская 2-подгруппа группы $G = O^{2'}(G/O(G))$, где A – абелева, а B не имеет абелевых прямых множителей. Предположим

1) $A \lhd N_G(T)$, $B \lhd N_G(T)$;

2) если X – $N_G(T)$- класс в $\Omega_1(Z(T))$ и Y – $N_G(T)$ - класс инволюций в B, то комплекс XY – $N_G(T)$- класс;

3) $\Omega_1(T) \leq Z(T)$;

4) число $N_G(T)$ - классов инволюций в B не превосходит 5.

Тогда $G = G_1 \times G_2$, где $G_1 = \langle A^G \rangle$ и $G_2 = \langle B_1^G \rangle$ для некоторой подгруппы B_1 такой, что $T = A \times B_1$.

А.С.Кондратьев [19] доказал следующую теорему.

Пусть G – группа с силовской 2-подгруппой, разложимой в прямое произведение абелевой группы и 2-группы типа A_8. Тогда последний член ряда коммутантов группы $G/O(G)$ равен $N_1 \times \dots \times N_m$, где группа N_1 единична или изоморфна одной из групп A_8; A_8; $Hol(E_8)$ - голоморф E_8; $A_5 \cdot E_{16}^{(1)}$ –единственное нетривиальное расщепляемое расширение элементарной группы A порядка 16 с помощью группы A_5, действующей нетранзитивно на инволюциях A; $PSp(4,q)$, $q \equiv \pm 3 (mod 8)$; $SL(2,q) \circ SL(2,q)$, $q \equiv \pm 3 (mod 8)$, а для каждого $i = 2, \dots, m$ группа N_i изоморфна одной из простых групп с абелевой силовской 2-подгруппой.

Заметим, что к этой теореме свелось изучение групп, силовская 2-подгруппа которых обладает элементарной подгруппой индекса 4.

В некоторых случаях применения результатов о группах с разложимой силовской 2-подгруппой достаточно рассматривать ситуацию, когда в группе G силовская 2-подгруппа T есть прямое произведение $T = T_1 \times T_2$, в котором

слияние 2-элементов относительно G соответствует слиянию 2-элементов в прямом произведении двух групп, имеющих T_1 и T_2, соответственно, своими силовскими 2-подгруппами. Ясно, что в этом случае T_1 и T_2 сильно замкнуты в T относительно G.

Если $T = T_1 \times T_2$ – силовская 2-подгруппа группы G, то говорят, что G имеет слияние произведения относительно данного прямого разложения T, если T_1 и T_2 обе сильно замкнуты в T относительно G.

Харрис [136] показал разложимость слитно-простой группы со слиянием произведения относительно разложения ее силовской 2-подгруппы T вида $T = T_1 \times T_2$, где T_1 – абелева или диэдральная, а T_2 – типа $PSp(4,q)$, q нечетно.

Было полезно иметь в распоряжении эффективные результаты о строении группы G со слиянием произведения относительно прямого разложения ее силовской 2-подгруппы $T = T_1 \times T_2$, когда T_1 и T_2 произвольны.

Горенстейн и Харрис [125] показали, что группа G со слиянием произведения относительно разложения ее силовской 2-подгруппы $T = T_1 \times T_2$ и с $O(G) = 1$, $O^{2'}(G) = G$ есть на самом деле прямое произведение $G_1 \times G_2$, где T_i – силовская 2-подгруппа в G_i, если неабелевы композиционные факторы некоторых подгрупп G удовлетворяют некоторым условиям, которым, по-видимому, удовлетворяют все известные простые группы. Наконец, недавно Голдшмидт [110] доказал это общее утверждение без ограничений на композиционные факторы подгрупп G.

Заметим, что если $T = A \times B$ – силовская 2-подгруппа группы $G = O^{2'}(G/O(G))$ и A абелева, то условие сильной замкнутости A в T относительно G по основной теореме Голдшмидта [109] быстро приводит к разложению $G = G_1 \times G_2$, где $G_1 = \langle A^G \rangle$ и $G_2 = \langle B_1^G \rangle$ для некоторой подгруппы B_1, $T = A \times B_1$. Поэтому результат Голдшмидта [110] не может быть непосредственно использован для дальнейших продвижений в подтверждении гипотезы I.

Можно ставить также задачи такого типа.

З а д а ч а 2. Если T_1 – любая 2-группа, то при некоторых ограничениях на 2-группу T_2 показать, что любая группа G с силовской 2-подгруппой, изоморфной $T_1 \times T_2$, не проста.

В связи с этим отметим следующие результаты Глаубермана [102].

Пусть Q – неабелева неразложимая 2-группа такая, что $\Omega_1(Q) \leq Z(Q)$. Тогда следующие условия равносильны:

(а) Для каждой группы G, которая содержит Q в качестве силовской 2-подгруппы, $Q \cap Z^*(G) \neq 1$.

(б) Для каждой 2-группы R и каждой группы G, которая содержит $Q \times R$ в качестве силовской 2-подгруппы, $(Q \times R) \cap Z^*(G) \neq 1$.

Если везде в формулировке этой теоремы $Z^*(G)$ заменить на $O_{2',2}(G)$, то теорема останется верной. В качестве следствия этого результата получается непростота группы, силовская 2-подгруппа которой имеет в качестве прямого множителя (обобщенную) группу кватернионов.

Отметим еще один общий результат о группах с разложимыми силовскими p - подгруппами. Этот полезный результат принад-

лежит Глауберману и Томпсону [104] и формулируется следующим образом:

Пусть $T = Q \times R$ – силовская p - подгруппа группы G. Предположим, что никакой неразложимый прямой множитель группы R не изоморфен подгруппе из Q и при $p = 2$ фактор-группа $N_G(R')/R'$ не содержит сечений, изоморфных Σ_4. Тогда T содержит прямой множитель, изоморфный R и слабо замкнутый в T относительно G.

Из этого результата, в частности, следует такой полезный факт (см. также лемму 2.1 из [75]).

Пусть на p - группе T действует p'-группа H. Тогда $T = T_1 \times T_2$, где $T_1^H = T_1$, $T_2^H = T_2$, T_1 абелева и T_2 не имеет абелевых прямых множителей.

Основываясь на результате Глаубермана – Томпсона, А.С. Кондратьев [20] доказал следующее утверждение.

Пусть T – силовская 2-подгруппа группы G. Предположим, что $T = \langle t \rangle \times T_1$, где подгруппа T_1 не имеет прямых множителей, изоморфных $\langle t \rangle$. Тогда $\langle t \rangle \cap G' = 1$. В частности, G не проста.

Покажем, как можно использовать этот результат. Частным случаем гипотезы I, высказанной выше, является следующая гипотеза.

Г и п о т е з а 2. Пусть G – конечная группа и t – инволюция, лежащая в центре некоторой силовской 2-подгруппы G. Предположим, что $C_G(t) = \langle t \rangle \times F$, где F – простая группа с неабелевой силовской 2-подгруппой. Тогда G не проста.

В работах Ямаки [234], Куррана [83,84,85], Райта [233] эта гипотеза подтверждается при некоторых ограничениях на группу F и, в частности, для знакопеременных групп, групп лиевского типа нечетной характеристики и многих спорадических групп.

Доказанная нами теорема подтверждает гипотезу в случае когда F принадлежит широкому классу простых групп, силовская 2-подгруппа которых не имеет нетривиальных элементарных прямых множителей. Этот класс охватывает все случаи для F из процитированных выше пяти работ и все известные простые группы с неабелевой силовской 2-подгруппой.

В заключение главы I мы приведем два факта, которые часто бывают полезны при исследовании групп с разложимыми силовскими 2-подгруппами.

Следующее предложение является частным случаем теоремы 13 из работы Бэланца [28].

Предложение 1. (см. лемму 5 из [14]).
Пусть p – простое число, G – конечная группа и $P \in Syl_p(G)$. Пусть $n = |N_G(P):P|$ и V – сдвиг G в P/P'.

(а) Если $a \in P \cap Z(N_G(P))$ и $a^p = 1$, то $V(a) = a^n P'$.

Кроме того, пусть $P' \leq Q \leq P$ и W – сдвиг G в P/Q.

Тогда

(б) Если $A \leq P \cap Z(N_G(P))$ и $A \cap Q = 1$, то $A \cap G' = A \cap \ker W = 1$.

(в) Если $Q \lhd N_G(P)$, то $\Omega_1(Q \cap Z(P)) = \ker W$.

Второе предложение касается разложимости некоторых разрешимых групп π-длины 2, силовская 2-подгруппа которых изоморфна $E \times D_8$, где E – абелева группа. Эта ситуация является своего рода минимальным случаем в группах с неабелевой разложимой силовской 2-подгруппой, к ней сводится много более сложных ситуаций.

Предложение 2. (см. [17] и [19]).
Пусть $G = A \leftthreetimes (R \leftthreetimes \langle t \rangle)$, где A – абелева 2-группа, $|t| = 2$, $A \leftthreetimes \langle t \rangle$ изоморфна прямому произведению абелевой группы и D_8, R – группа нечетного порядка. Положим $\langle z \rangle = [A, t]$, $U = C_A(t)$ и допустим, что $z \notin Z(G)$.
Тогда выполняются следующие утверждения:

(I) $R = C_R(z)\langle x \rangle$, где $x^3 \in C_R(z)$ и $x^t = x^{-1}$;

(2) $C_A(x) = U \cap U^x$, $U = (U \cap U^x) \times \langle z \rangle$ и $U \cap U^x$ инвариантна в G;

(3) $[A, x] = \langle z \rangle \times \langle z^x \rangle$ инвариантна в G;

(4) $\overline{G} = G/O(G) = (\overline{U \cap U^x} \leftthreetimes \overline{C_R(z)}) \times$
$\times ((\langle \bar{z} \rangle \times \langle \overline{z^x} \rangle) \leftthreetimes (\langle \bar{x} \rangle \leftthreetimes \langle \bar{t} \rangle))$.

Глава 2. СИЛОВСКИЕ 2-ПОДГРУППЫ В ИЗВЕСТНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ

По существу все классификационные теоремы в теории конечных простых групп включают существенным образом свойства известных простых групп. Поэтому установление таких свойств очень важно для теории простых групп. Описанием силовских 2-подгрупп в известных простых группах мы займемся в этой главе.

§ I. Знакопеременные группы и классические группы над полем нечетной характеристики

В работе Картера и Фонга [73] дано рекуррентное описание в терминах сплетений силовских 2-подгрупп следующих классических групп над полем нечетной характеристики: $GL(n,q)$, $Sp(2n,q)$, $U(n,q^2)$, $O_{2n}(\pm 1,q)$ и $O^+_{2n+1}(q)$. Мы приведем это описание.

Пусть T_1 – группа порядка 2. Для $m \geqslant 2$ рекуррентно определим группы T_m, полагая $T_m = T_{m-1} \wr T_1$. Пусть W_1 – силовская 2-подгруппа $GL(2,q)$, $Sp(2,q)$, $U(2,q^2)$ или $O_2(\varepsilon,q)$ при $q \equiv \varepsilon \pmod 4$. Для $m \geqslant 2$ рекуррентно определим группы W_m, полагая $W_m = W_1 \wr T_{m-1}$. Тогда W_m изоморфна силовской 2-подгруппе $GL(2^m,q)$, $Sp(2^m,q)$, $U(2^m,q^2)$ или $O^+_{2^m+1}(q)$, соответственно. Определим теперь W_1 в каждом из случаев. Пусть 2^{s+1} – наибольшая степень 2, делящая q^2-1. Если W_1 – силовская 2-подгруппа $GL(2,q)$, то $W_1 \cong Z_{2^s} \wr Z_2$ при $q \equiv 1 \pmod 4$ и $W_1 \cong SD_{2^{s+2}}$ при $q \equiv 3 \pmod 4$. Если W_1 – силовская 2-подгруппа $Sp(2,q)$, то $W_1 \cong Q_{2^{s+1}}$.

Если W_1 – силовская 2-подгруппа $U(2,q^2)$, то $W_1 \cong Z_{2^s} \wr Z_2$ при $q \equiv 3 \pmod 4$ и $W_1 \cong SD_{2^{s+2}}$ при $q \equiv 1 \pmod 4$. Если W_1 – силовская 2-подгруппа $O_2(\varepsilon,q)$ при $q \equiv \varepsilon \pmod 4$, то $W_1 \cong D_{2^{s+1}}$.

Пусть S – силовская 2-подгруппа $GL(n,q)$, $Sp(2n,q)$, $U(n,q^2)$ или $O^+_{2n+1}(q)$ и $2^{r_1}+2^{r_2}+\dots+2^{r_t}$, $r_1<\dots<r_t$, – 2-адическое разложение чисел n, $2n$, n или $2n$, соответственно. Тогда $S \cong W_{r_1} \times W_{r_2} \times \dots \times W_{r_t}$, где для $1 \leqslant i \leqslant n$ W_{r_i} – силовская 2-подгруппа $GL(2^{r_i},q)$, $Sp(2^{r_i},q)$, $U(2^{r_i},q^2)$ или $O^+_{2^{r_i}+1}(q)$, соответственно.

Пусть S – силовская 2-подгруппа $O_{2n}(\varepsilon,q)$. Тогда если $q^n \equiv \varepsilon \pmod 4$, то S изоморфна силовской 2-подгруппе $O^+_{2n+1}(q)$, а если $q^n \equiv -\varepsilon \pmod 4$, то $S \cong E_4 \times S_0$, где S_0 – силовская 2-подгруппа $O^+_{2n-1}(q)$.

В работе Уонга [232] в терминах скрещенных сплетений описаны силовские 2-подгруппы знакопеременных групп и простых классических групп над полем нечетной характеристики. В этой работе есть замечание о том, что если мономиальные представления, входящие в определение скрещенного сплетения групп, точны, то это скрещенное сплетение можно отождествить естественным образом с группой мономиальных матриц с коэффициентами в некоторой группе. Далее, все мономиальные представления, использованные Уонгом при описании силовских 2-подгрупп точны. Поэтому нам кажется более удобным дать рекуррентное описание силовских 2-подгрупп знакопеременных групп и простых классических групп над полем нечетной характеристики как факторгрупп некоторых групп мономиальных матриц по определенным подгруппам их центров.

1) Группы $PSL(n,q)$ и $PSU(n,q^2)$.

Пусть $\delta = \pm 1$, $G_n = GL(n,q)$, $H_n = SL(n,q)$, $PH_n = PSL(n,q)$

при $\delta = 1$ и $G_n = U(n,q^2)$, $H_n = SU(n,q^2)$, $PH_n = PSU(n,q^2)$ при $\delta = -1$. Пусть 2^s и 2^{t+1} наибольшая степень 2, делящая $q-\delta$ и q^2-1, соответственно.

Пусть сначала $n = 2^m$, $m \geqslant 1$. Положим $\langle e \rangle \cong Z_{2^s}$, $e_1 = e$,

$$e_i = \left\| \begin{matrix} e_{i-1} & I_{2^{i-2}} \end{matrix} \right\| \quad \text{для} \quad i \geqslant 2,$$

где I_r – единичная $r \times r$ – матрица, $\langle v, w \rangle \cong Q_{2^{t+1}}$, $v^{2^t} = 1$, $w^2 = v^{2^{t-1}}$, $v^w = v^{-1}$, $z = v^{t-s}$, v^e равно v при $q \equiv \delta \pmod 4$ и v^{-1} при $q \equiv -\delta \pmod 4$, $v^e = vw$. Пусть также

$$b_i = \left\| \begin{matrix} e_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & e_{i-1} \end{matrix} \right\|, \quad c_i = \left\| \begin{matrix} 0 & I_{2^{i-2}} \\ I_{2^{i-2}} & 0 \end{matrix} \right\| \quad \text{для } i \geqslant 2.$$

Построим рекуррентно последовательность групп $T_1, T_2, \dots$ и элементов $z_1, z_2, \dots$, отмеченных в этих группах ($z_i \in T_i$ для $i = 1, 2, \dots$). Положим $T_1 = \langle v, w \rangle$ и $z_1 = z$. Пусть группы $T_1, \dots, T_k$ и элементы $z_1, \dots, z_k$ уже построены. Построим группу T_{k+1} и отметим в ней элемент z_{k+1}. Для этого положим

$$T_{k+1} = \left\langle \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{matrix} \right\| \;\middle|\; a_1, a_2 \in T_k \right\rangle \leftthreetimes (\langle b_{k+1} \rangle \leftthreetimes \langle c_{k+1} \rangle) \text{ и}$$

$$z_{k+1} = \left\| \begin{matrix} z_k & 0 \\ 0 & z_k \end{matrix} \right\| b_{k+1}^{2^k}.$$

Тогда группа T_m изоморфна силовской 2-подгруппе из H_n, группа $T_m \leftthreetimes \langle e_m \rangle$ изоморфна силовской 2-подгруппе из G_n и группа $S_{2^m} = T_m / \langle z_m^{2^{s-r}} \rangle$, где $r = \min\{s, m\}$, изоморфна силовской 2-подгруппе из PH_n.

В общем случае выразим n диадически: $n = 2^{m_1} + \dots + 2^{m_t}$,

где $m_1 < \dots < m_t$. Для $i = 1, \dots, t$ пусть T_{m_i} и e_{m_i} построены как выше и z_{m_i} – отмеченный элемент T_{m_i}. Тогда группа $(T_{m_1} \leftthreetimes \langle e_{m_1} \rangle) \times \dots \times (T_{m_t} \leftthreetimes \langle e_{m_t} \rangle)$ изоморфна силовской 2-подгруппе G_n, группа $T = (T_{m_1} \times \dots \times T_{m_t}) \leftthreetimes (\langle f_1 \rangle \times \dots \times \langle f_{t-1} \rangle)$, где для $1 \leqslant i \leqslant t-1$ $f_i = e_i^{-1} e_{i+1}$, $|f_i| = 2^s$ и действие f_i на T_{m_j} то же, что и $e_{m_j}^{-1}$, если $j = i$, то же, что и e_{m_j}, если $j = i+1$, и тривиальное во всех других случаях, изоморфна силовской 2-подгруппе H_n. Группа $S_n = T / \langle (z_{m_1} \cdots z_{m_t})^{2^{s-r}} \rangle$, где $r = \min\{m_1, s\}$, изоморфна силовской 2-подгруппе PH_n.

2) Группы $PSp(2n, q)$.

Пусть 2^t – наибольшая степень 2, делящая $q^2 - 1$, группа $T \cong Q_{2^t}$ и $\langle z \rangle = \Omega_1(T)$. Построим рекуррентно последовательность групп $T_1, T_2, \dots$ и элементов $z_1, z_2, \dots$, отмеченных в этих группах ($z_i \in T_i$ для $i = 1, 2, \dots$). Положим $T_1 = T$ и $z_1 = z$. Пусть группы $T_1, \dots, T_k$ и элементы $z_1, \dots, z_k$ уже построены. Построим группу T_{k+1} и отметим в ней элемент z_{k+1}. Для этого положим

$$T_{k+1} = \left\langle \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{matrix} \right\| \;\middle|\; a_1, a_2 \in T_k \right\rangle \leftthreetimes \left\langle \left\| \begin{matrix} 0 & I_{2^{k-1}} \\ I_{2^{k-1}} & 0 \end{matrix} \right\| \right\rangle, \quad z_{k+1} = \left\| \begin{matrix} z_k & 0 \\ 0 & z_k \end{matrix} \right\|.$$

Тогда для $m \geqslant 2$ $T_m \cong T_{m-1} \wr Z_2$. Если $2n = 2^m$, $m \geqslant 1$, то группа T_m изоморфна силовской 2-подгруппе из $Sp(2n,q)$, а группа $S_{2^m} = T_m / \langle z_m \rangle$ изоморфна силовской 2-подгруппе из $PSp(2n,q)$. Заметим, что $S_2 \cong D_{2^{t-1}}$, а для $m \geqslant 2$ $S_{2^m} \cong (L_1 \circ L_2) \leftthreetimes \langle u \rangle$ где $L_1 \cong L_2 \cong T_{m-1}$, $|u| = 2$ и $L_1^u = L_2$.

В общем случае выразим $2n$ диадически:

$$2n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_t}, \text{ где } m_1 < m_2 < \dots < m_t.$$

Для $i = 1, \dots, t$ пусть T_{m_i} – силовская 2-подгруппа $S(2^{m_i}, q)$ и $\langle z_i \rangle = Z(T_{m_i})$. Тогда $T = T_{m_1} \times \dots \times T_{m_t}$ изоморфна силовской 2-подгруппе $Sp(2n, q)$ и $S_{2n} = T / \langle z_1 \dots z_t \rangle$ изоморфна силовской 2-подгруппе $PSp(2n, q)$. Заметим, что в случае $t > 1$; S_{2n} изоморфна центральному произведению групп $T_{m_1}, \dots, T_{m_t}$.

3) Группы $P\Omega(2n+1, q) = \Omega(2n+1, q)$.

Пусть 2^{t+1} – наибольшая степень 2, делящая $q^2 - 1$.

Пусть сначала $n = 2^m$, $m \geqslant 0$. Пусть $\langle e \rangle$ – группа порядка 2,

$$\langle v, w \rangle \cong D_{2^t}, \; v^{2^{t-1}} = w^2 = 1, \; v^w = v^{-1}, \; w^e = vw.$$

Положим $e_1 = e$ и для $i \geqslant 2$ $e_i = \begin{Vmatrix} e_{i-1} & 0 \\ 0 & I_{2^{i-1}} \end{Vmatrix}$,

$$b_i = \begin{Vmatrix} e_{i-1} & 0 \\ 0 & e_{i-1} \end{Vmatrix}, \quad c_i = \begin{Vmatrix} 0 & I_{2^{i-2}} \\ I_{2^{i-2}} & 0 \end{Vmatrix}.$$

. Определим рекуррентно силовскую 2-подгруппу S_{2^m} группы $P\Omega(2n+1, q)$, полагая $S_1 = \langle v, w \rangle$ и

$$S_{2^i} = \left\langle \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{Vmatrix} \,\middle|\, a_1, a_2 \in S_{2^{i-1}} \right\rangle \leftthreetimes (\langle b_i \rangle \times \langle c_i \rangle)$$

для $i \geqslant 1$. Заметим, что $S_{2^m} \leftthreetimes \langle e_m \rangle$ изоморфна силовской 2-подгруппе $O_{2n}(\varepsilon, q)$, где $q^n \equiv \varepsilon \pmod 4$.

В общем случае выразим n диадически:

$n = 2^{m_1} + \dots + 2^{m_t}$, где $m_1 < \dots < m_t$. Для $i = 1, \dots, t$

пусть $S_{2^{m_i}}$ и e_{m_i} построены, как выше. Тогда группа

$$S_n = (S_{2^{m_1}} \times \dots \times S_{2^{m_t}}) \leftthreetimes (\langle g_1 \rangle \times \dots \times \langle g_{t-1} \rangle), \text{ где для}$$

$i = 1, \dots, t-1$, $g_i = e_{m_i} e_{m_{i+1}}$, $|g_i| = 2$ и действие g_i на $S_{2^{m_j}}$ то же, что и e_{m_j}, если $j = i$ или $j = i+1$, и тривиальное во всех других случаях, изоморфна силовской 2-подгруппе $P\Omega(2n+1, q)$. При этом

$$(S_{2^{m_1}} \leftthreetimes \langle e_{m_1} \rangle) \times \dots \times (S_{2^{m_t}} \leftthreetimes \langle e_{m_t} \rangle)$$

изоморфна силовской 2-подгруппе $O_{2n}(\varepsilon, q)$, где $q^n \equiv \varepsilon \pmod 4$.

4) Группы $P\Omega_{2n}(\varepsilon, q)$.

Если $q^n \equiv -\varepsilon \pmod 4$, то силовская 2-подгруппа $P\Omega_{2n}(\varepsilon, q) = \Omega_{2n}(\varepsilon, q)$ изоморфна силовской 2-подгруппе $O_{2n-2}(\varepsilon_1, q)$, где $q^{n-1} \equiv \varepsilon_1 \pmod 4$, которая была описана выше.

Рассмотрим теперь случай, когда $q^n \equiv \varepsilon \pmod 4$.

Пусть 2^{t+1} – наибольшая степень 2, делящая $q^2 - 1$. Пусть сначала $n = 2^m$, $m \geqslant 1$. Пусть $\langle e \rangle \times \langle f \rangle$ – четверная группа, $\langle d, g, h, k \rangle \cong$

$$\cong D_{2^{t+1}} \circ D_{2^{t+1}}, \; d^{2^{t-1}} = g^{2^{t-1}} = z, \; z^2 = h^2 = k^2 = 1,$$

$$d^h = d^{-1}, \; g^k = g^{-1}, \; [d, g] = [d, k] = [h, g] = [h, k] = 1,$$

$$d^e = g^{-1}, \; g^e = d^{-1}, \; h^e = gk, \; k^e = dh, \; d^f = g, \; h^f = k, \; g^f = d, \; k^f = h.$$

Положим $e_1 = e$, $f_1 = f$ и для $i \geqslant 2$ $e_i = \begin{Vmatrix} e_{i-1} & 0 \\ 0 & I_{2^{i-2}} \end{Vmatrix}$,

$$f_i = \begin{Vmatrix} f_{i-1} & 0 \\ 0 & I_{2^{i-2}} \end{Vmatrix}, \quad a_i = \begin{Vmatrix} e_{i-1} & 0 \\ 0 & e_{i-1} \end{Vmatrix}, \quad b_i = \begin{Vmatrix} f_{i-1} & 0 \\ 0 & f_{i-1} \end{Vmatrix}, \quad c_i = \begin{Vmatrix} 0 & I_{2^{i-2}} \\ I_{2^{i-2}} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Построим рекуррентно последовательность групп $T_1, T_2, \dots$,и элементов $z_1, z_2, \dots$, отмеченных в этих группах ($z_i \in T_i$ для $i = 1, 2, \dots$). Положим $T = \langle d, g, h, k \rangle$, $\langle z \rangle = Z(T)$, $z_1 = z$. Пусть группы $T_1, \dots, T_K$ и элементы $z_1, \dots, z_K$ уже построены. Построим группу T_{K+1} и отметим в ней элемент z_{K+1}, полагая

$$T_{K+1} = \left\langle \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{Vmatrix} \,\middle|\, a_1, a_2 \in T_K \right\rangle \leftthreetimes (\langle a_{K+1} \rangle \times \langle b_{K+1} \rangle \times \langle c_{K+1} \rangle)$$

и $z_{K+1} = \begin{Vmatrix} z_K & 0 \\ 0 & z_K \end{Vmatrix}$. Тогда группа T_m изоморфна силовской 2-подгруппе $\Omega_{2n}(1, q)$, а группа $T_m / \langle z_m \rangle$ изоморфна силовской 2-подгруппе $P\Omega_{2n}(1, q)$. Группа $T_m \leftthreetimes (\langle e_m \rangle \times \langle f_m \rangle)$ изоморфна силовской 2-подгруппе $O_{2n}(1, q)$.

В общем случае выразим n диадически:
$n = 2^{m_1} + \dots + 2^{m_t}$, где $m_1 < m_2 < \dots < m_t$.

Пусть сначала $m_1 > 0$, т.е. n четно. Для $i = 1, \dots, t$ пусть T_{m_i} , e_{m_i} и z_{m_i} построены, как выше. Тогда группа

$$T_n = (T_{m_1} \times \dots \times T_{m_t}) \leftthreetimes (\langle g_1 \rangle \times \dots \times \langle g_{t-1} \rangle \times \langle h_1 \rangle \times \dots \times \langle h_{t-1} \rangle),$$

где для $i = 1, \dots, t-1$, $g_i = e_{m_i} e_{m_{i+1}}$, $h_i = f_{m_i} f_{m_{i+1}}$, $|g_i| = |f_i| = 2$ и действие g_i (соответственно h_i) на T_{m_j} то же, что и e_{m_j} (соответственно f_{m_j}), если $j = i$ или $j = i+1$ и тривиальное во всех других случаях, изоморфна силовской 2-подгруппе $\Omega_{2n}(1, q)$. Группа $T_n / \langle z_{m_1} \cdots z_{m_t} \rangle$ изоморфна силовской 2-подгруппе $P\Omega_{2n}(1, q)$. Наконец, группа $(T_{m_1} \leftthreetimes \langle e_{m_1}, f_{m_1} \rangle) \times \dots \times (T_{m_t} \leftthreetimes \langle e_{m_t}, f_{m_t} \rangle)$ изоморфна силовской 2-подгруппе $O_{2n}(1, q)$.

Пусть теперь $m_1 = 0$, т.е. n нечетно. Пусть $R = \langle e, f \rangle \cong D_{2^{t+1}}$, $e^2 = f^2 = (ef)^{2^t} = 1$, $T = \langle (ef)^2 \rangle = R'$, $\langle z \rangle = \Omega_1(T)$.

Тогда T изоморфна силовской 2-подгруппе $\Omega_2(\varepsilon, q)$ и $T / \langle z \rangle$ изоморфна силовской 2-подгруппе $P\Omega_2(\varepsilon, q)$, $q \equiv \varepsilon \pmod 4$. Если $n = 1 + n_1$, где n_1 – положительное четное число, то пусть T_1 – силовская 2-подгруппа $\Omega_{2n_1}(1, q)$, нормализуемая четверной подгруппой $\langle e_1, f_1 \rangle$ такой, что $T_1 \leftthreetimes (\langle e_1 \rangle \times \langle f_1 \rangle)$ – силовская 2-подгруппа $O_{2n_1}(1, q)$ и действие $\langle e_1 \rangle \times \langle f_1 \rangle$ на T_1 естественное, определенное в предыдущем абзаце. Пусть $\langle z_1 \rangle = Z(T_1)$. Тогда группа $R \times T_1 \langle e_1, f_1 \rangle$ изоморфна силовской 2-подгруппе $O_{2n}(\varepsilon, q)$, где $q^n \equiv \varepsilon \pmod 4$. Группа $U = T_1 \leftthreetimes \langle g, h \rangle$, где $g = ee_1$, $h = ff_1$, $g^2 = h^2 = (gh)^{2^t} = 1$ и действие g (соответственно h) на T_1 то же, что и e_1 (соответственно f_1), изоморфна силовской 2-подгруппе $\Omega_{2n}(\varepsilon, q)$, где $q^n \equiv \varepsilon \pmod 4$. Группа $U / \langle z_1 z \rangle$ изоморфна силовской 2-подгруппе $P\Omega_{2n}(\varepsilon, q)$, где $q^n \equiv \varepsilon \pmod 4$.

5) Знакопеременные группы.

Из описания Уонга [232] силовских 2-подгрупп знакопеременных групп, следует, что силовские 2-подгруппы A_{4n} и A_{4n+1} изоморфны силовской 2-подгруппе $P\Omega(2n+1, q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, которая уже описана нами выше, а силовские 2-подгруппы A_{4n+2} и A_{4n+3} изоморфны силовской 2-подгруппе Σ_{4n} , которая, как известно, в свою очерядь изоморфна $T_{m_1}\times\dots\times T_{m_t}$, где натуральные числа $m_1,\dots,m_t$ получены из условий $4n=2^{m_1}+\dots+2^{m_t}$ и $m_1<\dots<m_t$, а T_τ означает сплетение τ копий группы Z_2.

§ 2. Группы исключительного лиевского типа нечетной характеристики

1) Группы $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$ (см. [120]).

Пусть 2^{m+1} – наибольшая степень 2, делящая q^2-1. Тогда силовская 2-подгруппа $G_2(q)$ и ${}^3D_4(q)$ изоморфна следующей группе S:

$S=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\leftthreetimes(\langle u\rangle\times\langle t\rangle)$, где $|a|=|b|=2^m$, $|u|=|t|=2$, $a^t=b$, $a^u=a^{-1}$, $b^u=b^{-1}$.

Заметим, что $S=(S_1\circ S_2)\leftthreetimes\langle\tau\rangle$, где $S_1\cong S_2\cong Q_{2^{m+1}}$ и $\langle S_1,\tau\rangle\cong\langle S_2,\tau\rangle\cong SD_{2^{m+2}}$, $|S|=2^{2m+2}$, $Z(S)=\langle(ab)^{2^{m-1}}\rangle$, $S'=\Phi(S)=\langle ab,a^2\rangle\cong Z_{2^m}\times Z_{2^{m-1}}$, S 2-ранга 3.

2) Группы ${}^2G_2(3^{2n+1})$, $n\geqslant 1$ (см. [187]).

Силовская 2-подгруппа ${}^2G_2(3^{2n+1})$, $n\geqslant 1$, изоморфна E_8.

3) Группы $F_4(q)$ (см. [7]).

Силовская 2-подгруппа $F_4(q)$ изоморфна силовской 2-подгруппе $Spin(9,q)$.

4) Группы $E_6(q)$ (см. [183]).

Силовская 2-подгруппа $E_6(q)$ изоморфна силовской 2-подгруппе группы $L\langle h\rangle$, где $L\cong Spin(10,q)$, $|h|=q-1$, L – нормальная подгруппа индекса $(q-1)/(3,q-1)$ в $L\langle h\rangle$ и, если u – инволюция из $\langle h\rangle$, то

$C_{L\langle h\rangle}(u)=\langle h\rangle\times N$, $N\cong GL(5,q)$.

5) Группы ${}^2E_6(q)$ (см. [183]).

Силовская 2-подгруппа ${}^2E_6(q)$ изоморфна силовской 2-подгруппе группы $L\langle h\rangle$, где $L\cong Spin_{-1}(10,q)$, $|h|=q+1$, L – нормальная подгруппа индекса $(q+1)/(3,q+1)$ в $L\langle h\rangle$ и, если u – инволюция из $\langle h\rangle$, то $C_{L\langle h\rangle}(u)=\langle h\rangle\times N$, $N\cong U(5,q^2)$.

6) Группы $E_7(q)$ (см. [7]).

Силовская 2-подгруппа $E_7(q)$ изоморфна силовской 2-подгруппе группы H, содержащей подгруппу L индекса 2, где $L=L_1\circ L_2$, $L_1\cong SL(2,q)$, $L_2\cong Spin(12,q)/C$ и C – подгруппа порядка 2 в центре $Spin(12,q)$.

7) Группы $E_8(q)$ (см. [7]).

Силовская 2-подгруппа $E_8(q)$ изоморфна силовской 2-подгруппе группы H, содержащей подгруппу L индекса 2, изоморфную $Spin(16,q)/C$, где C – подгруппа порядка 2 в центре $Spin(16,q)$.

§ 3. Группы лиевского типа четной характеристики

Силовские 2-подгруппы простых групп лиевского типа четной характеристики описаны Шевалле [48], Стейнбергом [203], Судзуки [214], Ри [186, 187].

1) Группы $A_n(q)=PSL(n+1,q)$, $n\geqslant 1$.

Пусть $q=2^m$, $m\geqslant 1$, $\Gamma=GF(q)$, Δ – система корней типа A_n с множеством положительных корней Δ^+ и фундаментальной системой $\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$.

упорядоченной согласно схеме Дынкина:

$$\underset{r_1}{\circ}-\underset{r_2}{\circ}-\cdots-\underset{r_{n-1}}{\circ}-\underset{r_n}{\circ}$$

Тогда корни в Δ^+ имеют вид $\sum\limits_{i\le k<j} r_k$, где $1\le i<j\le n+1$ (см. [6]).

Силовская 2-подгруппа $A_n(q)$ изоморфна группе $S=S_n(q)$, заданной порождающими $x_r(\alpha)$, где $r\in\Delta^+$, $\alpha\in\Gamma$, и соотношениями:

$$x_r(\alpha)^2=1,\quad x_r(\alpha)x_r(\beta)=x_r(\alpha+\beta),$$

$$[x_r(\alpha),x_s(\beta)]=\begin{cases}1, & \text{если } r+s\notin\Delta^+\\ x_{r+s}(\alpha\beta), & \text{если } r+s\in\Delta^+\end{cases}$$

$(r,s\in\Delta^+,\ \alpha,\beta\in\Gamma)$

Заметим также, что $S_n(q)$ изоморфна группе всех унитреугольных $(n+1)\times(n+1)$ – матриц вида

$$\left\|\begin{array}{ccccc}1 & & & & \\ * & 1 & & O & \\ \cdot & \cdot & \ddots & & \\ \cdot & \cdot & & \ddots & \\ \cdot & \cdot & & & \\ * & * & \cdots & 1 & \\ * & * & \cdots & * & 1\end{array}\right\|$$

с коэффициентами из поля Γ. $|S_n(q)|=q^{n(n+1)}$.

Для $r=\sum\limits_{i\le k<j} r_k\in\Delta^+$ определим $ch(r)=\{r_k \mid i\le k\le j-1\}$, $h(r)=j-i$, $X_r=\{x_r(\alpha)\mid \alpha\in\Gamma\}$, $A_r=\langle X_s \mid ch(r)\subseteq ch(s)\rangle$. Для каждого непустого подмножества R из $\{r_1,\dots,r_n\}$ определим $A_R=\prod\limits_{r\in R} A_r$ и $R^c=\langle X_r \mid X_r\not\subseteq A_R\rangle$. Для каждого $r\in\Delta^+$ определим $A^r=A_{ch(r)}$. Тогда для каждого $r\in\Delta^+$ подгруппа A_r элементарная абелева и нормальна в S;

$C_S(A_r)=A^r$; $C_S(A_r)=A_r$ тогда и только тогда, когда $h(r)=1$; $A^r=[X_s \mid ch(s)\cap ch(r)\neq\emptyset,\ s\in\Delta^+]$; если $\emptyset\neq R\subseteq\{r_1,\dots,r_n\}$, то R^c – дополнение для A_R в S. Определим $S_k=\langle X_r\le S \mid h(r)\ge k\rangle$ для $k\le n$ и $S_{n+1}=1$. Пусть $L_1(S)\ge L_2(S)\ge\dots$ – нижний центральный ряд S и $1=Z_0(S)\le Z_1(S)\le\dots$ – верхний центральный ряд S. Тогда $L_k(S)=S_k=Z_{n-k+1}(S)$ для $1\le k\le n+1$, $\Phi(S)=S_2$ и $C_S(S_2)=A_r$ для $r=\sum\limits_{2\le i\le n-1} r_i$.

2) Группы ${}^2A_n(q)=PSU(n+1,q^2)$, $n\ge 2$.

Пусть $q=2^m$, $m\ge 1$, $\Gamma=GF(q^2)$, σ – автоморфизм Γ, заданный равенством $\sigma(\alpha)=\alpha^q$ для всех $\alpha\in\Gamma$ и Γ_0 – подполе Γ из q элементов α, для которых $\sigma(\alpha)=\alpha$. Обозначим $\sigma(\alpha)$ через $\bar\alpha$. Пусть $\Pi=\Delta^+$ – множество положительных корней системы корней типа A_n в обозначениях предыдущего пункта 1) и ρ – подстановка порядка 2 на Π, определенная равенством $\rho(\sum\limits_{i\le k<j} r_k)=\sum\limits_{i\le k<j} r_{n-k}$, где $1\le i<j\le n+1$. Подстановка ρ определяет разбиение Π на подмножества одного из следующих трех типов:

(1) $\{r\}$, где $r=\rho(r)=\sum\limits_{i\le k\le n-i} r_k$ и $1\le i\le n$.

Этот тип встречается только для нечетного n.

(2) $\{r,\rho(r)\}$, где $r=\sum\limits_{i\le k<j} r_k$ и $1\le i<j\le[\frac{n+1}{2}]$.

(3) $\{r,\rho(r),r+\rho(r)\}$, где $r=\sum\limits_{i\le k\le\frac{n}{2}} r_k$ и $1\le i\le\frac{n}{2}$

Этот тип встречается только для четного n.

Через Π^1 обозначим множество всех подмножеств из Π типа (1), (2) или (3).

Пусть $S_n(q^2)$ – группа, введенная в предыдущем пункте 1). Для $\alpha \in \Gamma$ и $A \in \Pi^1$ в случае, когда A типа (1), (2) или (3), соответственно, положим $x_A(\alpha)$ равным (1) $x_r(\alpha)$, $\alpha \in \Gamma_0$, (2) $x_r(\alpha)x_{\rho(r)}(\bar{\alpha})$, (3) $x_r(\alpha)x_{\rho(r)}(\bar{\alpha})x_{r+\rho(r)}(\beta)$, $\beta+\bar{\beta}=\alpha\bar{\alpha}$.

Силовская 2-подгруппа ${}^2A_n(q)$ изоморфна подгруппе S из $S_n(q^2)$, порожденной всеми элементами $x_A(\alpha)$ $(A\in\Pi^1, \alpha\in\Gamma)$. Каждый элемент из S однозначно представим в виде $\prod_{A\in\Pi^1} x_A(t_A)$, где $t_A \in \Gamma$, и произведение берется в любом фиксированном порядке.

$$|S| = q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Если для $A\in\Pi^1$ через S_A обозначим множество $\{x_A(\alpha) \mid \alpha\in\Gamma\}$, то S_A изоморфна E_q, E_{q^2} или силовской 2-подгруппе из $PSU(3,q^2)$, когда A типа (1), (2) или (3), соответственно.

3) Группы $B_n(q) = \Omega(2n+1,q) \cong C_n(q) = Sp(2n,q)$, $n\geq 2$, q четно.

Пусть $q=2^m$, $m\geq 1$, $\Gamma = GF(q)$, Δ – система корней типа B_n с множеством положительных корней Δ^+ и фундаментальной системой $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, упорядоченной согласно схеме Дынкина:

Тогда, корни в Δ^+ имеют вид (см. [6]):

$$\sum_{i\leq k\leq n} r_k \quad (1\leq i\leq n),$$

$$\sum_{i\leq k<j} r_k \quad (1\leq i<j\leq n),$$

$$\sum_{i\leq k<j} r_k + 2\sum_{j\leq k\leq n} r_k \quad (1\leq i<j\leq n)$$

Силовская 2-подгруппа $B_n(q)$ изоморфна группе S, заданной порождающими $x_r(\alpha)$, где $r\in\Delta^+$, $\alpha\in\Gamma$, и соотношениями:

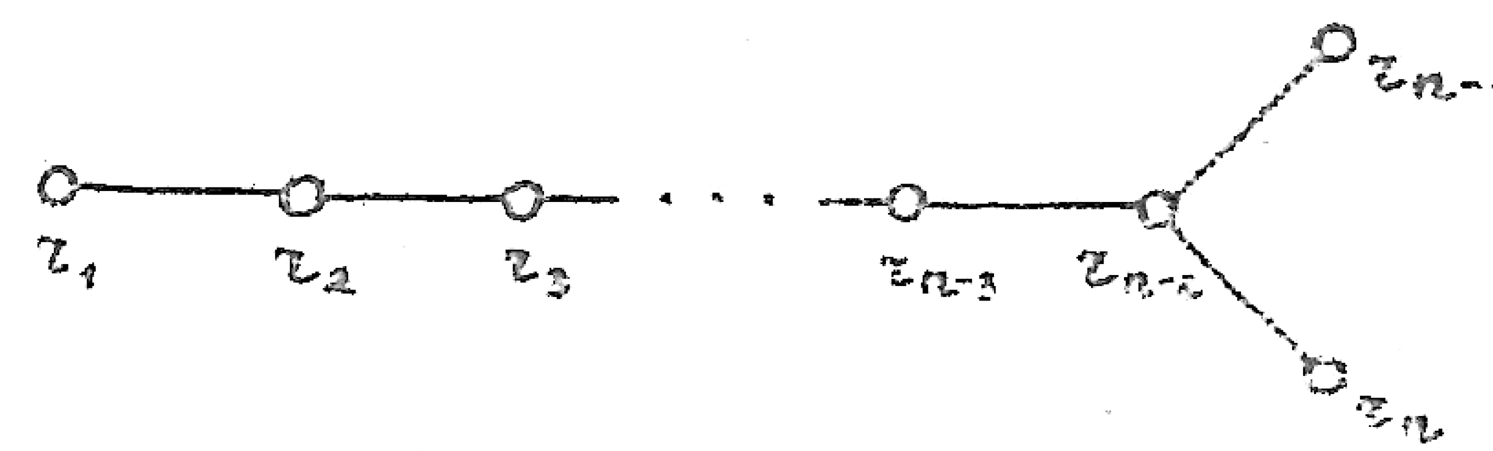
$$[x_r(\alpha), x_s(\beta)] = \begin{cases} 1, & \text{если } r+s \notin \Delta^+ \\ x_{r+s}(\alpha\beta), & \text{если } r+s\in\Delta^+ \text{ и } r+2s,\ 2r+s\notin\Delta^+ \\ x_{r+s}(\alpha\beta)x_{2r+s}(\alpha^2\beta), & \text{если } r+s,\ 2r+s\in\Delta^+ \\ x_{r+s}(\alpha\beta)x_{r+2s}(\alpha\beta^2), & \text{если } r+s,\ r+2s\in\Delta^+ \end{cases}$$

для всех $r, s\in\Delta^+$, $\alpha,\beta\in\Gamma$.

$$|S| = q^{2n^2}.$$

4) Группы $D_n(q) = P\Omega_{2n}(1,q)$, $n\geq 4$.

Пусть $q=2^m$, $m\geq 1$, $\Gamma=GF(q)$, Δ – система корней типа D_n с множеством положительных корней Δ^+ и фундаментальной системой $\{r_1, \ldots, r_n\}$, упорядоченной согласно схеме Дынкина



Тогда, корни в Δ^+ имеют вид (см. [6]):

$$\begin{cases} \sum\limits_{i<k<j} r_k & (1\le i<j\le n) \\ \sum\limits_{i\le k\le n-2} r_k & (1\le i<n) \\ \sum\limits_{i\le k<j} r_k + 2\sum\limits_{j\le k<n-1} r_k + r_{n-1}+r_n & (1\le i<j<n) \end{cases}$$

Силовская 2-подгруппа $D_n(q)$ изоморфна группе $S_n(q)$, заданной порождающими $x_r(\alpha)$, где $r\in\Delta^+$, $\alpha\in\Gamma$, и соотношениями:

$$x_r(\alpha)^2=1, \quad x_r(\alpha)x_r(\beta)=x_r(\alpha+\beta),$$

$$[x_r(\alpha),x_s(\beta)] = \begin{cases} 1, & \text{если } r+s\notin\Delta^+ \\ x_{r+s}(\alpha\beta), & \text{если } r+s\in\Delta^+ \end{cases}$$

для всех $r,s\in\Delta^+$, $\alpha,\beta\in\Gamma$.

$$|S_n(q)|=q^{2n(n-1)}.$$

5) Группы $^2D_n(q)=P\Omega_{2n}(-1,q)$.

Пусть $q=2^m$, $m\ge 1$, $\Gamma=GF(q^2)$, σ – автоморфизм Γ, заданный равенством $\sigma(\alpha)=\alpha^q$ для всех $\alpha\in\Gamma$, и Γ_0 – подполе Γ из q элементов α, для которых $\sigma(\alpha)=\alpha$. Обозначим $\sigma(\alpha)$ через $\bar\alpha$. Пусть $\Pi=\Delta^+$ – множество положительных корней системы корней типа D_n в обозначениях предыдущего пункта 4) и ρ – подстановка порядка 2 на Π, определенная равенствами: $\rho(r_i)=r_i$ для $1\le i\le n-2$, $\rho(r_{n-1})=r_n$, $\rho(r+s)=\rho(r)+\rho(s)$ для $r,s\in\Pi$.

Подстановка ρ определяет разбиение Π на подмножества одного из следующих двух типов:

(1) $\{r\}$, где $r=\rho(r)$,

(2) $\{r,\rho(r)\}$, $r\ne\rho(r)$.

Через Π^1 обозначим множество всех подмножеств из Π типа (1) или (2).

Пусть $S_n(q^2)$ – группа, введенная в предыдущем пункте 4), $\alpha\in\Gamma$ и $A\in\Pi^1$. Положим $x_A(\alpha)=x_r(\alpha)$, если A типа (1) и $\alpha\in\Gamma_0$, и $x_A(\alpha)=x_r(\alpha)x_{\rho(r)}(\bar\alpha)$, если A типа (2).

Силовская 2-подгруппа $^2D_n(q)$ изоморфна подгруппе S из $S_n(q^2)$, порожденной всеми элементами $x_A(\alpha)$, ($A\in\Pi^1$, $\alpha\in\Gamma$). Каждый элемент из S однозначно представим в виде $\prod\limits_{A\in\Pi^1} x_A(t_A)$, где $t_A\in\Gamma$ и произведение берется в любом фиксированном порядке.

$$|S|=q^{n(n-1)}.$$

Если для $A\in\Pi^1$ через S_A обозначим множество $\{x_A(\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$, то S_A изоморфно E_q или E_{q^2}, когда A типа (1) или (2), соответственно.

6) Группы $^3D_4(q)$ (см. [217]).

Пусть $I=\{1,2,3,4,5,6\}$, $I_1=\{2,5,6\}$, $I_2=I-I_1$, $\Gamma=GF(q^3)$, $q=2^m$, $m\ge 1$. Пусть σ – автоморфизм Γ, заданный равенством $\sigma(\alpha)=\alpha^q$ для всех $\alpha\in\Gamma$ и Γ_0 – подполе Γ порядка q, состоящее из элементов α, для которых $\sigma(\alpha)=\alpha$. Обозначим $\sigma(\alpha)$ через $\bar\alpha$. Тогда силовская 2-подгруппа $^3D_4(q)$ изоморфна группе S, заданной порождающими $x_i(\alpha)$, где

$\alpha \in \Gamma_0$ для $i \in I_1$ и $\alpha \in \Gamma$ для $i \in I_2$,
и соотношениями: $x_i(\alpha)^2 = 1$, $x_i(\alpha)x_i(\beta) = x_i(\alpha+\beta)$
для всех i, α, β; все нетривиальные коммутаторы пар порождающих следующие:

$$[x_1(\alpha), x_2(\beta)] = x_3(\alpha\beta)\, x_4(\bar{\alpha}\bar{\bar{\alpha}}\beta)\, x_5(\alpha\bar{\alpha}\bar{\bar{\alpha}}\beta),$$

$$[x_1(\alpha), x_3(\beta)] = x_4(\bar{\alpha}\bar{\bar{\beta}} + \bar{\bar{\alpha}}\bar{\beta})\, x_5[(1+\sigma+\sigma^2)\alpha\bar{\alpha}\bar{\bar{\beta}}]\cdot$$

$$\cdot x_6[(1+\sigma+\sigma^2)\alpha\bar{\beta}\bar{\bar{\beta}}],$$

$$[x_1(\alpha), x_4(\beta)] = x_5[(1+\sigma+\sigma^2)\alpha\beta],\ [x_2(\alpha), x_5(\beta)] =$$

$$= x_6(\alpha\beta),\ [x_3(\alpha), x_4(\beta)] = x_6[(1+\sigma+\sigma^2)\alpha\beta].$$

При использовании символа $x_i(\alpha)$ всегда понимается, что $\alpha \in \Gamma_0$ для $i \in I_1$ и $\alpha \in \Gamma$ для $i \in I_2$.

$|S| = q^{12}$, $Z(S) = \{x_6(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma_0\}$.

7) Группы $Sz(q) = {}^2B_2(q)$ (см. [214]).

Пусть $q = 2^{2n+1}$, $n \geq 1$, $z = 2^n$ α, $\beta \in \Gamma = GF(q)$,

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^z & 1 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^{2z+1} + \alpha^z\beta + \beta^{2z} & \alpha^{z+1} + \beta & \alpha^z & 0 \end{matrix}\right\|$$

Тогда силовская 2-подгруппа $Sz(q)$ изоморфна группе матриц $S = \{S(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \Gamma\}$

$|S| = q^2$, $S' = \Phi(S) = Z(S) = \Omega_1(S) = \{S(0,\beta) \mid \beta \in \Gamma\} \cong$
$\cong E_q$.

8) Группы $G_2(q)$ (см. [216]).

Пусть $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\Gamma = GF(q)$, $q = 2^m$, $m \geq 2$. Тогда силовская 2-подгруппа $G_2(q)$ изоморфна группе S, заданной порождающими $x_i(\alpha)$, где $i \in I$, $\alpha \in \Gamma$, и соотношениями:

$x_i(\alpha)^2 = 1$, $x_i(\alpha)x_i(\beta) = x_i(\alpha+\beta)$ для всех $i \in I$, $\alpha, \beta \in \Gamma$; все нетривиальные коммутаторы пар порождающих следующие:

$$[x_1(\alpha), x_2(\beta)] = x_3(\alpha\beta)\, x_4(\alpha^2\beta)\, x_5(\alpha^3\beta),$$

$$[x_1(\alpha), x_3(\beta)] = x_5(\alpha^2\beta)\, x_6(\alpha\beta^2),$$

$$[x_1(\alpha), x_4(\beta)] = x_6(\alpha\beta),$$

$$[x_2(\alpha), x_5(\beta)] = x_6(\alpha\beta),$$

$$[x_3(\alpha), x_4(\beta)] = x_6(\alpha\beta).$$

$|S| = q^6$, $exp(S) = 8$, $Z(S) = \{x_6(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$,

$Z_2(S) = \{x_5(\alpha)x_6(\beta) \mid \alpha, \beta \in \Gamma\}$, $Z_3(S) = S' =$

$= \Phi(S) = \{x_3(\alpha)x_4(\beta)x_5(\gamma)x_6(\delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma\}$.

9) Группы $F_4(q)$ (см. [128]).

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, 24\}$, $q = 2^m$, $m \geq 1$, $\Gamma = GF(q)$. Тогда силовская 2-подгруппа $F_4(q)$ изоморфна группе S, заданной порождающими $x_i(\alpha)$, где $i \in I$, $\alpha \in \Gamma$, и соотношениями: $x_i(\alpha)^2 = 1$, $x_i(\alpha)x_i(\beta) = x_i(\alpha+\beta)$ для всех $i \in I$, $\alpha, \beta \in \Gamma$; все нетривиальные коммутаторы $[x_i(\alpha), x_j(\beta)]$, $1 \le i < j \le 24$, таковы:

значения $(i, j : m)$, для которых $[x_i(\alpha), x_j(\beta)] = x_m(\alpha\beta)$

(I,I0: II)	(I,I2 : I3)	(I,I4 : I5)	(I,I6 : I7)
(2, 5 : 6)	(2, 8 : 9)	(2,I9 : 20)	(2,22 : 23)
(3,I0 : I2)	(3,II : I3)	(3,I4 : I6)	(3,I5 : I7)
(4, 5 : 8)	(4, 6 : 9)	(4,I9 : 22)	(4,20 : 23)
(5,I8 : I9)	(5,23 : 24)	(6,I8 : 20)	(6,22 : 24)
(7,I0 : I4)	(7,II : I5)	(7,I2 : I6)	(7,I3 : I7)
(8,I8 : 22)	(8,20 : 24)	(9,I8 : 23)	(9,I9 : 24)
(I0,I7: 2I)	(II,I6: 2I)	(I2,I5:2I)	(I3,I4: 2I)

значения $(i, j : m, n)$, для которых $[x_i(\alpha), x_j(\beta)] = x_m(\alpha\beta)x_n(\alpha^2\beta)$

(I,2 : 3,4)	(I,6 : 7,8)	(I,20 : 2I,22)
(3,5 : 7,9)	(3,I9:2I,23)	(7,I8:2I,24)

Значения $(i, j : m, n)$, для которых $[x_i(\alpha), x_j(\beta)] = x_m(\alpha\beta)x_n(\alpha\beta^2)$

(2,II : I2,I8)	(2,I5 : I6,24)	(4,I0 : I3,I8)
(4,I4 : I7,24)	(5,I2 : I4,20)	(5,I3: I5,22)
(6,II : I4,I9)	(6,I3 : I6,23)	(8,I0 : I5,I9)
(8,I2 : I7,23)	(9,I0 : I6,20)	(9,II : I7,22)

$$|S| = q^{24}, \quad Z(S) = \{ x_{24}(\alpha)x_{24}(\beta) \mid \alpha, \beta \in \Gamma \}.$$

I0) Группы ${}^2F_4(q)$, $q > 2$ (см. [I8I]).

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, 12\}$, $I_1 = \{1, 4, 5, 6\}$, $I_2 = I - I_1 = \{2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\Gamma = GF(q)$, $q = 2^{2n+1}$, $n \geq 1$, $2^t = 2^n$.

Пусть σ – автоморфизм поля Γ, заданный равенством $\sigma(\alpha) = \alpha^t$, так что $2\sigma^2 = 1$. Тогда силовская 2-подгруппа ${}^2F_4(q)$ изоморфна группе S, заданной порождающими $x_i(\alpha)$, где $\alpha \in I$, $\alpha \in \Gamma$, и соотношениями:

$x_i(\alpha)x_i(\beta) = x_i(\alpha+\beta)$ для всех $i \in I_2$ и всех $\alpha, \beta \in \Gamma$,

$$x_1(\alpha)^2 = x_2(\alpha^{2\sigma+1}), \ [x_1(\alpha), x_1(\beta)] = x_2(\alpha^{2\sigma}\beta + \alpha\beta^{2\sigma}),$$

$$x_4(\alpha)^2 = x_8(\alpha^{2\sigma+1}), \ [x_4(\alpha), x_4(\beta)] = x_8(\alpha^{2\sigma}\beta + \alpha\beta^{2\sigma}),$$

$$x_5(\alpha)^2 = x_{12}(\alpha^{2\sigma+1}), \ [x_5(\alpha), x_5(\beta)] = x_{12}(\alpha^{2\sigma}\beta + \alpha\beta^{2\sigma}),$$

$$x_6(\alpha)^2 = x_{11}(\alpha^{2\sigma+1}), \ [x_6(\alpha), x_6(\beta)] = x_{11}(\alpha^{2\sigma}\beta + \alpha\beta^{2\sigma}),$$

$$[x_{11}(\alpha), x_3(\beta)] = [x_{10}(\alpha), x_4(\beta)] = [x_9(\alpha), x_5(\beta)] = [x_8(\alpha), x_2(\beta)] = x_{12}(\alpha\beta),$$

$$[x_{10}(\alpha), x_1(\beta)] = [x_9(\alpha), x_2(\beta)] = x_{11}(\alpha\beta),$$

$$[x_6(\alpha), x_1(\beta)] = x_{10}(\alpha\beta^{2\sigma})x_{11}(\alpha\beta^{2\sigma+1})x_{12}(\alpha^{2\sigma}\beta),$$

$$[x_8(\alpha), x_2(\beta)] = x_{10}(\alpha\beta)x_{11}(\alpha^{2\sigma}\beta)x_{12}(\alpha^{2\sigma}\beta),$$

$$[x_8(\alpha), x_1(\beta)] = x_9(\alpha\beta)x_{11}(\alpha^{2\sigma+2}\beta)x_{12}(\alpha^{2\sigma}, \beta^{2\sigma+1}),$$

$$[x_5(\alpha), x_7(\beta)] = x_{11}(\alpha\beta), \ [x_5(\alpha), x_6(\beta)] = x_{10}(\alpha\beta),$$

$$[x_7(\alpha),\ x_4(\beta)] = x_{10}(\alpha^{2\sigma}\beta)\, x_{11}(\alpha^{2\sigma}\beta)\, x_{12}(\alpha^{2\sigma+1}\beta),$$

$$[x_7(\alpha),\ x_3(\beta)] = x_9(\alpha\beta^{2\sigma})\, x_{10}(\alpha^{2\sigma}\beta),$$

$$[x_6(\alpha),\ x_3(\beta)] = x_8(\alpha\beta^{2\sigma})\, x_9(\alpha^{2\sigma}\beta)\, x_{12}(\alpha^{2\sigma+1}\beta),$$

$$[x_6(\alpha),\ x_1(\beta)] = x_7(\alpha\beta),$$

$$[x_4(\alpha),\ x_2(\beta)] = x_7(\alpha\beta)\, x_{11}(\alpha^{2\sigma+1}\beta^{2\sigma})\, x_{12}(\alpha^{2\sigma+2}\beta),$$

$$[x_4(\alpha),\ x_1(\beta)] = x_5(\alpha^{2\sigma}\beta)\, x_6(\alpha\beta^{2\sigma})\, x_7(\alpha\beta^{2\sigma}) \cdot$$
$$\cdot x_9(\alpha^{2\sigma+1}\beta)\, x_{11}(\alpha^{2\sigma+1}\beta^{2\sigma+2}) \cdot$$
$$\cdot x_{12}(\alpha^{2\sigma+2}\beta^{2\sigma+1})$$

$$[x_3(\alpha),\ x_2(\beta)] = x_5(\alpha^{2\sigma}\beta)\, x_6(\alpha\beta)\, x_7(\alpha\beta^{2\sigma}) \cdot$$
$$\cdot x_8(\alpha^{2\sigma+1}\beta)\, x_9(\alpha^{2\sigma+1}\beta^{2\sigma}) \cdot$$
$$\cdot x_{10}(\alpha^{2\sigma+1}\beta^{2})\, x_{12}(\alpha^{2\sigma+2}\beta^{2\sigma+1}),$$

$$[x_3(\alpha),\ x_1(\beta)] = x_4(\alpha\beta)\, x_5(\alpha^{2\sigma}\beta^{2\sigma+1})\, x_7(\alpha\beta^{2\sigma+2}) \cdot$$
$$\cdot x_8(\alpha^{2\sigma+1}\beta^{2\sigma+1})\, x_9(\alpha^{2\sigma+1}\beta^{2\sigma+2}) \cdot$$
$$\cdot x_{10}(\alpha^{2\sigma+1}\beta^{4\sigma+2})\, x_{11}(\alpha^{2\sigma+1}\beta^{4\sigma+3}) \cdot$$
$$\cdot x_{12}(\alpha^{2\sigma+2}\beta^{4\sigma+3}).$$

$[x_i(\alpha),\ x_j(\beta)] = 1$ для всех других пар порождающих. $|S| = q^{12}$. Если $V_i = \langle x_i(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma \rangle$ для $i \in I$, то $V_i \cong E_q$ для $i \in I_2$ и V_i изоморфна силовской 2-подгруппе $Sz(q)$ для $i \in I_1$. Подгруппы $E = \prod_{i=8} V_i$, $F = \langle V_{12}, V_{11}, V_{10}, V_9, V_7 \rangle$, $K = \langle V_{12}, V_{11}, V_{10}, V_7, V_2 \rangle$ изоморфны E_{q^5}, причем E и F нормальны в S. $Z(S) = V_{12}$.

II) Группа Титса ${}^2F_4(2)'$ (см. [59]).

Силовская 2-подгруппа группы ${}^2F_4(2)'$ изоморфна группе S, заданной порождающими $\alpha_1\alpha_5$, α_3, $\alpha_4\alpha_5$, α_7, α_8, α_9, $\alpha_6\alpha_5$, α_{10}, α_{11}, α_{12} и определяющими соотношениями:

$$(\alpha_1\alpha_5)^2 = \alpha_2\alpha_{12},\quad (\alpha_6\alpha_5)^2 = \alpha_{10}\alpha_{11},\quad (\alpha_4\alpha_5)^2 = \alpha_8\alpha_9,$$

$$\alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_7^2 = \alpha_8^2 = \alpha_9^2 = \alpha_{10}^2 = \alpha_{11}^2 = \alpha_{12}^2 = (\alpha_2\alpha_{12})^2 =$$

$$= (\alpha_{10}\alpha_{11})^2 = (\alpha_8\alpha_9)^2 = 1,\quad \alpha_{12} = [\alpha_7, \alpha_8] = [\alpha_6\alpha_5, \alpha_9] =$$

$$= [\alpha_4\alpha_5, \alpha_{10}] = [\alpha_3, \alpha_{11}],\quad \alpha_{11} = [\alpha_7, \alpha_6\alpha_5] =$$

$$= [\alpha_1\alpha_5, \alpha_{10}] = [\alpha_1\alpha_5, \alpha_7] = [\alpha_2\alpha_{12}, \alpha_9],$$

$$\alpha_{10}\alpha_{12} = [\alpha_7, \alpha_4\alpha_5],\quad [\alpha_7, \alpha_3] = [\alpha_6\alpha_5, \alpha_4\alpha_5] =$$

$$= \alpha_9\alpha_{10},\quad \alpha_9\alpha_{12} = [\alpha_6\alpha_5, \alpha_3],\quad \alpha_8 = [\alpha_4\alpha_5, \alpha_3],$$

$$\alpha_7\alpha_{10} = [\alpha_1\alpha_5, \alpha_6\alpha_5],\quad \alpha_7\alpha_{11} = [\alpha_2\alpha_{12}, \alpha_4\alpha_5],$$

$$\alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12} = [\alpha_2\alpha_{12}, \alpha_8] = [\alpha_1\alpha_5, \alpha_9],$$

$\alpha_9\alpha_{11}\alpha_{12} = [\alpha_4\alpha_5, \alpha_3]$, $\alpha_6\alpha_5\alpha_8\alpha_{10}\alpha_{12} = [\alpha_4\alpha_5, \alpha_4\alpha_5]$,

$\alpha_6\alpha_5\alpha_8\alpha_7\alpha_9\alpha_{11}\alpha_{12} = [\alpha_3, \alpha_8\alpha_{12}], [\alpha_4\alpha_5, \alpha_3] = \alpha_4\alpha_6\alpha_8\alpha_9 \cdot \alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}$.
все другие коммутаторы пар порождающих тривиальны.

$|S| = 2^{11}$, $J = \langle \alpha_3, \alpha_4\alpha_5, \alpha_6\alpha_5, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle$ инвариантна в S, $J' = \Phi(J) = \langle \alpha_{12}, \alpha_{11}, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_8 \rangle \cong$ $\cong E_{32}$, $Z(S) = Z(J) = \langle \alpha_{12} \rangle$.

Существует 3 максимальные неизоморфные подгруппы S и только одна из них, изоморфная $C_S(\alpha_{11})$, имеет центр порядка $\neq 2$; S не имеет подгрупп порядка 2^9 с центром порядка 8;

если подгруппа S порядка 2^9 имеет центр порядка 4, то она изоморфна $C_S(\alpha_{10})$ или подгруппе $C_S(\alpha_{11})$;

существует единственная третья максимальная подгруппа S с центром порядка 8, а именно, $\Phi(C_S(\alpha_{11}))$ с центром $\langle \alpha_{12}, \alpha_{11}, \alpha_{10} \rangle$;

в J/J' точно 5 смежных классов содержат инволюции, а именно, $\alpha_7 J'$, $\alpha_3 J'$, $\alpha_3\alpha_6\alpha_5 J'$, $\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_4\alpha_5\alpha_3 J'$, $\alpha_3\alpha_4\alpha_5 J'$;

секционный 2-ранг S равен 5;

все S - сопряженные классы инволюций S представления элементами α_{12}, α_{11}, α_{10}, α_9, α_8, $\alpha_8\alpha_{11}$, α_7, α_3, α_2, $\alpha_2\alpha_{12}$.

12) Группы $E_6(q)$ (см. [205]).

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, 36\}$, $\Gamma = GF(q)$, $q = 2^n$, $n > 1$. Тогда силовская 2-подгруппа $E_6(q)$ изоморфна группе S, заданной порождающими $x_i(\alpha)$, где $i \in I$, $\alpha \in \Gamma$, в

значения $(i, j : m)$ для коммутаторов $[x_i(\alpha), x_j(\beta)] = x_m(\alpha\beta) \neq 1$

(I,2 : 7)	(I,8 : I2)	(I,I4 : I7)	(I,I5 : I9)	(I,I8 : 22)	(I,2I : 23)	(I,24 : 26)
(I,25: 27)	(I,28: 29)	(I,3I : 33)	(2, 3 : 8)	(2,I0 : I4)	(2,I6 : 2I)	(2,20 : 24)
(2,27: 30)	(2,29: 32)	(2,33 : 34)	(3, 4 : II)	(3 ,5 : I0)	(3,7 : I2)	(3,9 : I3)
(3,2I : 25)	(3,23 : 27)	(3,24 : 28)	(3,26 : 29)	(3,34 : 35)	(4 ,8 : I5)	(4,I0 : I6)
(4,I2: I9)	(4,I3 : 20)	(4,I4 : 2I)	(4,I7 : 23)	(4,I8 : 24)	(4,22 : 26)	(5, 6 : 9)
(5 ,8: I4)	(5,II : I6)	(5,I2 : I7)	(5,I5 : 2I)	(5,I9 :23)	(5,28 : 3I)	(5,29 : 33)
(5,32 :34)	(6,I0 : I3)	(6,I6 : 20)	(6,I7 : 22)	(6,2I : 24)	(6,23: 26)	(6,25 : 28)
(6,27 : 29)	(6,30 : 32)	(7,I0 : I7)	(7,II : I9)	(7,I3 : 22)	(7,I6: 23)	(7,20 : 26)
(7,25 : 30)	(7,28 : 32)	(7,3I : 34)	(8,I6 : 25)	(8,23 : 30)	(8,26 : 32)	(8,33 : 35)
(9,II : 20)	(9,I2 : 22)	(9,I5 : 24)	(9,I9 : 26)	(9,25 : 3I)	(9,27 : 33)	(9,30 : 34)
(I0,I5: 25)	(I0,I9: 27)	(I0,24: 3I)	(I0,26: 32)	(I0,32: 35)	(II,I4: 25)	(II,I7: 27)
(II,I8: 28)	(II,22: 29)	(II,34: 36)	(I2,I6:27)	(I2,20: 29)	(I2,2I: 30)	(I2,24: 32)
(I3,I5: 28)	(I3,I9: 29)	(I3,2I: 3I)	(I3,23: 33)	(I3,30: 35)	(I4,I9: 30)	(I4,20: 3I)
(I4,26: 34)	(I4,29: 35)	(I5,I7: 30)	(I5,22: 32)	(I5,33: 36)	(I6,I8: 3I)	(I6,22 : 33)
(I6,32: 36)	(I7,20: 33)	(I7,24: 34)	(I7,28: 35)	(I8,I9: 32)	(I8,23: 34)	(I8,27: 35)
(I9,3I: 36)	(20,20: 36)	(2I,22: 34)	(2I,29: 36)	(22,25: 35)	(23,28: 36)	(24,27: 36)
(25,26: 36)						

соотношениями

$x_i(\alpha)^2=1$, $x_i(\alpha)x_i(\beta)=x_i(\alpha+\beta)$ для всех $i\in I$, $\alpha,\beta\in\Gamma$;

все нетривиальные коммутаторы пар порождающих приведены в таблице на стр. 56. $|S|=q^{36}$, $Z(S)=\{x_{36}(\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$.

13) Группы ${}^2E_6(q)$ (см. [87]).

Пусть $I=\{1,2,\dots,24\}$, $I_1=\{3,4,7,9,13,14,16,17,19,22,23,24\}$, $I_2=\{1,2,5,6,8,10,11,12,15,18,20,21\}$, $\Gamma=GF(q^2)$. Пусть σ – автоморфизм Γ, заданный равенством $\sigma(\alpha)=\alpha^q$ для всех $\alpha\in\Gamma$, и Γ_0 – подполе Γ порядка q, состоящее из элементов α, для которых $\sigma(\alpha)=\alpha$. Обозначим $\sigma(\alpha)$ через $\bar\alpha$. Тогда силовская 2-подгруппа ${}^2E_6(q)$ изоморфна группе S, заданной порождающими $x_i(\alpha)$, где $\alpha\in\Gamma_0$ для $i\in I_1$ и $\alpha\in\Gamma$ для $i\in I_2$, и соотношениями:

$x_i(\alpha)^2=1$, $x_i(\alpha)x_i(\beta)=x_i(\alpha+\beta)$ для всех i,α,β;

все нетривиальные коммутаторы пар порождающих даны в следующей таблице:

---

1 (2,5)a, (6,8)a, (9,11,14)e, (10,12)a, (11,14)d, (13,15,17)e, (15,17)d, (16,18,19)e, (18,19)d, (20,21)b

2 (3,6,9)e, (6,9)d, (7,10,13)e, (8,11)b, (10,13)d, (12,15)b, (18,20)a, (19,21,22)e, (21,22)d

3 (4,7)a, (5,8,14)f, (13,16)a, (15,18,24)f, (17,19)a, (22,23)a

4 (6,10,16)f, (8,12,19)f, (9,13)a, (11,15,22)f, (14,17)a, (23,24)a

5 (6,11)c, (7,12,17)e, (8,14)d, (10,15)c, (12,17)d, (16,20,22)e, (18,21)c, (20,22)d

6 (10,13)d, (12,18)b, (15,20)a, (17,21,23)e, (21,23)d

7 (9,16)a, (11,18,23)f, (14,19)a, (22,24)a

8 (10,18)c, (12,19)d, (13,20,23)e, (15,21)c, (20,23)a

9 (12,20,24)f, (17,22)a, (19,23)a

10 (11,20)a, (14,21,24)e, (21,24)d

11 (12,21)b, (15,22)a, (18,23)d

12 (20,24)d

13 (14,22)a, (19,24)a

14 (16,23)a

15 (18,24)d

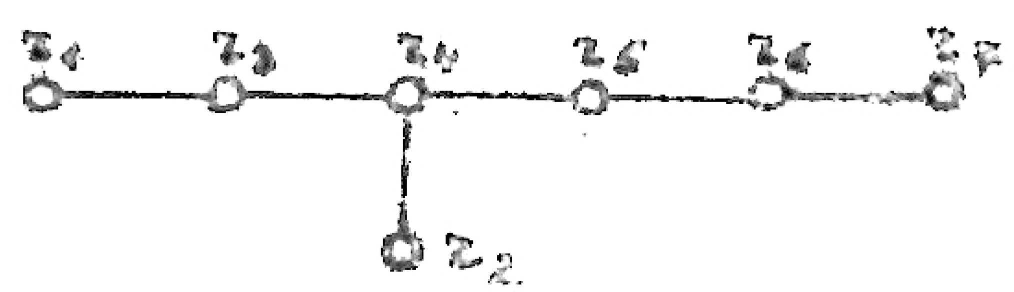
16 (17,24)a

Для i в левом столбце значение в i-й строке	означает $[x_i(\alpha),x_j(\beta)]=$
$(j,k)a$	$x_k(\alpha\beta)$
$(j,k)b$	$x_k(\bar\alpha\beta)$
$(j,k)c$	$x_k(\alpha\bar\beta)$
$(j,k)d$	$x_k(\alpha\bar\beta+\bar\alpha\beta)$
$(j,k,h)e$	$x_k(\alpha\beta)x_h(\alpha\bar\alpha\beta)$
$(j,k,h)f$	$x_k(\alpha\beta)x_h(\alpha\beta\bar\beta)$

$|S|=q^{36}$, $Z(S)=\{x_{24}(\alpha)\mid\alpha\in\Gamma_0\}\cong E_q$, $exp(S)=16$.

14) Группа $E_7(q)$ (см. [58]).

Пусть $q=2^m, m\geq 1, \Gamma = GF(q)$, Δ – система корней типа E_7 с множеством положительных корней Δ^+ и фундаментальной системой $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\}$ упорядоченной согласно схеме Дынкина



Если положительный корень r выражен в виде $r=\sum_{i=1}^{7}\alpha_i r_i$, то мы будем писать $r = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$. Тогда (см. [6], [58]) корни в Δ^+ имеют следующий вид:

000000I	00000II	0000III	000IIII	00IIIII
I0IIIII	0I0IIII	0IIIIII	IIIIIII	0II2III
III2III	0II22II	III22II	II22III	0II222I
II222II	III222I	II2222I	II232II	II2322I
II2332I	I22321I	I22322I	I22332I	I224321
I234321	2234321	0I00000	0I0I000	0III000
0I0II00	0I0III0	0IIII00	0IIIII0	0II2I00
0II2II0	0II22I0	IIII000	IIIII00	IIIIII0
III2I00	III2II0	II22I00	III22I0	II22II0
II222I0	II232I0	I22321O	I000000	I0I0000
I0II000	I0III00	I0IIII0	00I0000	00II000
00III00	00IIII0	000I000	000II00	000III0
0000I00	0000II0	00000I0		

Силовская 2-подгруппа $E_7^+(q)$ изоморфна группе S, заданной порождающими $x_r(\alpha)$, где $r\in\Delta^+$, $\alpha\in\Gamma$, и соотношениями:

$$x_r(\alpha)^2 = 1, \quad x_r(\alpha)x_r(\beta) = x_r(\alpha+\beta),$$

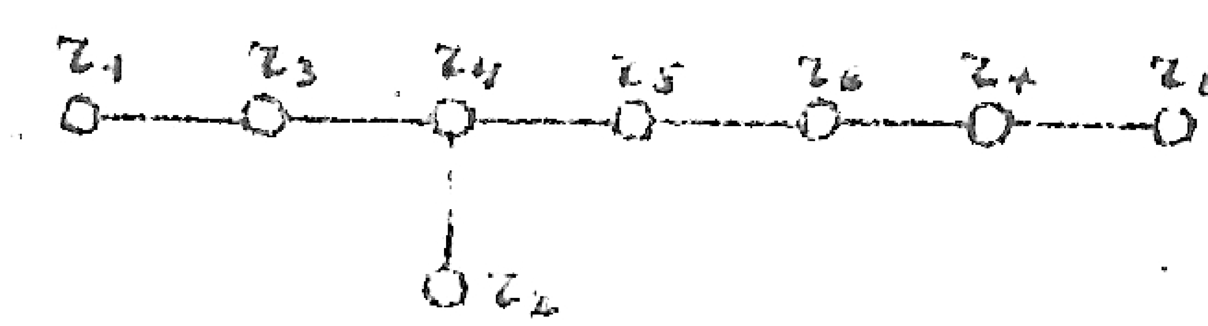
$$[x_r(\alpha), x_s(\beta)] = \begin{cases} 1, & \text{если } r+s\notin\Delta^+ \\ x_{r+s}(\alpha\beta), & \text{если } r+s\in\Delta^+ \end{cases}$$

для всех $r, s\in\Delta^+$, $\alpha, \beta\in\Gamma$.

$|S| = q^{63}$, $Z(S) = \{x_{r_0}(\alpha) \mid \alpha\in\Gamma\}$, где $r_0 = 2234321$.

15) Группа $E_8(q)$ (см. [58]).

Пусть $q=2^m$, $m\geq 1$, $\Gamma = GF(q)$, Δ – система корней типа E_8 с множеством положительных корней Δ^+ и фундаментальной системой $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}$ упорядоченной согласно схеме Дынкина



Если положительный корень r выражен в виде $r=\sum_{i=1}^{8}\alpha_i r_i$, то мы будем писать $r = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$. Тогда (см. [6], [43]) корни в Δ^+, имеющие ненулевой коэффициент α_8, имеют следующий вид:

0000000I	000000II	00000III	0000IIII	000IIIII
0I0IIIII	00IIIIII	0IIIIIII	I0IIIIII	IIIIIIII
0II2IIII	III2IIII	0II22III	III22III	II22IIII
0II222II	II222III	III222II	II2222II	II232III
II2322II	II2332II	I2232III	I22322II	I22332II
I22432II	I23432II	223432II	I234322I	I224332I

01122221	01122221	11222221	11232221	122232221
11233221	12233221	11233321	12243221	12233321
22343221	12343321	12244321	22343321	12344321
12354321	22344321	13354321	22354321	23354321
22454321	23454321	23464321	23465321	23465421
23465431	23465432			

а все корни в Δ^+, имеющие нулевой коэффициент α_8, получаются из положительных корней $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7$ системы корней типа E_7, которые приведены нами выше, приписыванием нуля справа.

Силовская 2-подгруппа $E_8(q)$ изоморфна группе S, заданной порождающими $x_r(\alpha)$, где $r \in \Delta^+$, $\alpha \in \Gamma$, и соотношениями:

$$x_r(\alpha)^2, \quad x_r(\alpha)x_r(\beta) = x_r(\alpha+\beta),$$

$$[x_r(\alpha), x_s(\beta)] = \begin{cases} 1, & \text{если } r+s \notin \Delta^+ \\ x_{r+s}(\alpha\beta), & \text{если } r+s \in \Delta^+ \end{cases}$$

для всех $r, s \in \Delta^+$, $\alpha, \beta \in \Gamma$.

$|S| = q^{120}$, $Z(S) = \{x_{r_0}(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$, где $r_0 = 23465432$.

§ 4. Спорадические группы

1) Группа M_{11} (см. [52]).

Силовская 2-подгруппа M_{11} типа $PSL(3,3)$, т.е. изоморфна SD_{16}.

2) Группа M_{12} (см. [120]).

Силовская 2-подгруппа M_{12} типа $G_2(3)$, т.е. изоморфна группе $S = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes (\langle t\rangle \times \langle u\rangle)$, где $|a| = |b| = 4$, $|t| = |u| = 2$, $a^t = b$, $a^u = a^{-1}$, $b^u = b^{-1}$.

$|S| = 2^6$, $Z(S) = \langle a^2 b^2\rangle \cong Z_2$, $S' = \Phi(S) = Z_2(S) = \langle ab\rangle \times \langle a^2\rangle \cong Z_2 \times Z_4$, $exp(S) = 8$, $SCN_3(S) \neq \emptyset$, например, $\langle a^2\rangle \times \langle b^2\rangle \times \langle u\rangle$ инвариантна в S.

3) Группы M_{22}, M_{23}, McL (см. [172]).

Силовские 2-подгруппы M_{22}, M_{23}, McL имеют тип $PSU(4,3^2)$, т.е. изоморфны группе S, порожденной инволюциями z_1, z_2, a_1, a_2, b_1, b_2, u со следующими определяющими соотношениями:

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = z_1, \; [a_2, b_1] = z_2, \; [a_1, b_2] = z_1 z_2,$$

$$[a_1, u] = [a_2, u] = a_1 a_2, \; [b_1, u] = [b_2, u] = b_1 b_2, \; [z_2, u] = z_1;$$

все остальные коммутаторы пар порождающих тривиальны.

$|S| = 2^7$, $Z(S) = \langle z_1\rangle$, $S' = \Phi(S) = \langle z_1, z_2, a_1 a_2, b_1 b_2\rangle \cong Z_2 \times D_8$.

S содержит точно две элементарные абелевы подгруппы порядка 16, а именно, $A = \langle z_1, z_2, a_1, a_2\rangle$ и $B = \langle z_1, z_2, b_1, b_2\rangle$, каждая из которых нормальна в S; AB типа $PSL(3,4)$.

4) Группы M_{24}, He (см. [193]).

Силовские 2-подгруппы M_{24}, He имеют тип $PSL(5,2)$ и $Hol(E_{16})$, т.е. изоморфны группе S, порожденной инволюциями z, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, w, v_1, v_2, со следующей таблицей сопряженных x^y. Черточка означает, что x и y перестановочны.

$x \backslash y$	z	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	w	v_1	v_2
z	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
a_1	–	–	–	–	–	–	za_1	–	–	–
b_1	–	–	–	–	–	zb_1	zb_1	–	–	a_1b_1
c_1	–	–	–	–	zc_1	zc_1	–	a_1c_1	$a_1b_1c_1$	–
a_2	–	–	–	za_2	–	–	–	–	–	–
b_2	–	–	zb_2	zb_2	–	–	–	–	a_2b_2	–
c_2	–	zc_2	zc_2	–	–	–	–	a_2c_2	–	$a_2b_2c_2$
w	–	–	–	a_1w	–	–	a_2w	–	–	–
v_1	–	–	–	$a_1b_1v_1$	–	a_2v_1	–	–	–	wv_1
v_2	–	–	a_1v_1	–	–	–	$a_2b_2v_2$	–	wv_2	–

$|S| = 2^{10}$; $Z(S) = \langle z \rangle$; $Z_2(S) = \langle z, a_1, a_2 \rangle$;

$S' = \langle z, a_1, b_1, a_2, b_2, w \rangle$; $E = \langle z, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \rangle$ изоморфна $D_8 \circ D_8 \circ D_8$ и нормальна в S; S имеет точно две элементарных абелевых подгруппы порядка 2^6, а именно, подгруппы $R_1 = \langle z, a_1, a_2, w, b_1, v_1 \rangle$ и $R_2 = \langle z, a_1, a_2, w, b_2, v_2 \rangle$, которые являются максимальными абелевыми подгруппами, нормальными в S.

5) Группа J_1 (см. [154]).

Силовская 2-подгруппа J_1 изоморфна E_8.

6) Группы J_2, J_3 (см. [117]).

Силовские 2-подгруппы J_2, J_3 изоморфны группе S, порожденной инволюциями $z_1, z_2, a_1, a_2, b_1, b_2, t$, со следующими определяющими соотношениями:

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = z_1, \quad [a_2, b_1] = z_2,$$

$$[a_1, t] = [t, b_1] = a_1b_1, \quad [a_2, t] = [t, b_2] = a_2b_2,$$

$$[a_1, b_2] = z_1z_2, \quad [t, z_2] = z_1;$$

все остальные коммутаторы пар порождающих тривиальны.

$|S| = 2^7$; $Z(S) = \langle z_1 \rangle$; $S' = \Phi(S) = \langle z_2 \rangle \times \langle a_1b_1, a_2b_2 \rangle \cong Z_2 \times Q_8$;

S имеет точно две элементарные абелевы подгруппы порядка 16, а именно, $A = \langle z_1, z_2, a_1, a_2 \rangle$ и $B = A^t = \langle z_1, z_2, b_1, b_2 \rangle$, причем AB типа $PSL(3,4)$; $V = \langle z_1, z_2, a_1b_1, a_2b_2, t \rangle \cong D_8 \circ D_8$; $\langle z_1, z_2 \rangle$ – единственная нормальная четверная подгруппа в S; $S/\langle z_1 \rangle$ типа A_8. $SCN_3(S) = \emptyset$.

7) Группа HiS (см. [124]).

Силовская 2-подгруппа HiS изоморфна группе S, порожденной элементами $z, l, d_1, d_2, d_3, d_4, x, y, a$ со следующими определяющими соотношениями:

$$\ell^2 = d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = d_4^2 = z, \quad z^2 = x^2 = y^2 = a^2 = 1,$$

$$[d_1, d_3] = [d_2, d_4] = [x, d_1] = [x, d_2] = [y, d_2] =$$

$$= [a, \ell] = z, \ [x, d_3] = d_1, \ [x, d_4] = d_2, \ [y, d_3] =$$

$$= d_1 d_2 \ell, \ [y, d_4] = d_1 \ell z, \ [a, d_1] = [a, d_2] = d_1 d_2 z,$$

$$[a, d_3] = [a, d_4] = d_3 d_4 z, \ [a, y] = x d_1 d_2 \ell z;$$

все остальные коммутаторы пар порождающих тривиальны.

$|S| = 2^9$, $Z(S) = \langle z \rangle$, $S' = \Phi(S) = \langle d_1, d_2, \ell, d_3 d_4, x \rangle$,

$|S'| = 2^6$, $\exp(S) = 8$, $\mho^2(S) = \langle z, t \rangle$, $\Omega_1(S) = S$,

$S = Q \leftthreetimes D$, $Q = \langle \ell, x d_3 d_4, y d_4 \rangle \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4$,

Q – единственный элемент $SCN_3(S)$, $D = \langle a d_3, a d_1 d_2 \rangle \cong$ $\cong D_8$, $E = \langle \ell, d_1, d_2, d_3, d_4 \rangle \cong Z_4 \circ Q_8 \circ Q_8$,

E инвариантна в S и $S/E \cong D_8$.

S 2-ранга 4, в S точно три класса сопряженных подгрупп, изоморфных E_{16}, с представителями $\langle a, d_3 d_4, t, z \rangle$, $\langle a\ell, d_3 d_4, t, z \rangle$ и $\langle a, x, t, z \rangle$, которые совпадают со своими централизаторами в S.

8) Группа Ly (см. [118], [167]).

Силовская 2-подгруппа Ly изоморфна группе S, порожденной инволюциями $z_1, z_2, a_1, a_2, b_1, b_2, t, u$, удовлетворяющими соотношениям:

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = z_1, \ [a_2, b_1] = z_2, \ [a_1, b_2] = z_1 z_2,$$

$$[a_1, t] = [t, b_1] = a_1 b_1, \ [a_2, t] = [t, b_2] = a_2 b_2,$$

$$[t, z_2] = z_1, \ [a_1, u] = [a_2, u] = a_1 a_2, \ [b_1, u] = [b_2, u] =$$

$= b_1 b_2$, $[u, z_2] = z_1$; все другие коммутаторы пар порождающих тривиальны.

$|S| = 2^8$, $Z(S) = \langle z_1 \rangle$, $S' = \Phi(S) = \langle z_1, z_2, a_1 b_1,$ $a_2 b_2, a_1 a_2 \rangle$, $S'' = \Phi(S') = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle$, $S/\langle z_1 \rangle$ типа A_{10}.

S имеет точно две элементарные абелевы подгруппы порядка 16, а именно, $A = \langle z_1, z_2, a_1, a_2 \rangle$ и $B = A^t = \langle z_1, z_2, b_1, b_2 \rangle$, причем AB типа $PSL(3,4)$, $\langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle$ – единственная инвариантная в S четверная группа, $SCN_3(S) = \emptyset$.

Если $V = \langle z_1, z_2, a_1 b_1, a_2 b_2, t \rangle$ и $W = \langle z_1, z_2, a_1 a_2, b_1 b_2, u \rangle$, то V и W инвариантны в S, $V \cong D_8 \circ Q_8$, $W \cong Q_8 \circ Q_8$.

$T_1 = AB\langle u \rangle$ – типа M_{22};

$T_2 = AB\langle tu \rangle = C_S(z_2)$, $\Omega_1(T_2') = \mho^2(S)$;

$T_3 = AB\langle t \rangle$ – типа J_2;

$T_4 = \langle z_1, z_2, a_1 b_1, a_1 a_2, a_1 b_2, t, u \rangle$, $T_4/\langle z_1 \rangle \cong$ $\cong D_8 \times D_8$; $\exp(S) = 8$.

9) Группа $O'N$ (см. [179]).

Силовская 2-подгруппа $O'N$ изоморфна группе S, заданной порождающими v_1, v_2, v_3, s, t и определяющими соотношениями:

$V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4$, $v_1^s = v_2$, $v_2^s = v_3$,

$v_3^s = v_1 v_2^{-1} v_3$, $v_1^t = v_3^{-1}$, $v_2^t = v_2^{-1}$, $v_3^t = v_1^{-1}$, $s^t = s^{-1}$,

$s^4 = v_1 v_3$, $t^2 = 1$.

$|S| = 2^9$, $Z(S) = \langle (v_1 v_3)^2 \rangle$, $J(S) = V$,

$S' = \Phi(S) = \langle v_1^a v_2^b v_3^c, s^2 \mid a+b+c \equiv 0 \pmod 2 \rangle$,

$exp(S) = 2^4$, S 2-ранга 3.

10) Группа Suz (см. [188], [236]).

Пусть S – 2 – группа типа Suz. Тогда S порождается инволюциями x_i, y_i $(0 \le i \le 4)$, t, z и v с определяющими соотношениями:

$[x_0, x_1] = x_2 x_3 x_4$, $[y_0, x_1] = y_2 x_3 y_3 x_4$,

$[x_0, y_1] = y_2 y_3 y_4$, $[y_0, y_1] = x_2 y_2 x_3 y_4$,

$[x_0, x_2] = [y_0, y_2] = x_4 z$; $[y_0, x_2] = x_4 y_4 t$,

$[x_0, y_2] = y_4 z t$, $[x_0, x_3] = x_4$, $[y_0, y_3] = x_4 y_4$,

$[x_0, y_3] = [y_0, x_3] = y_4$, $[v, y_4] = x_4 t$, $[v, x_2] =$
$= x_2 x_3 z$, $[x_1, x_4] = [x_2, x_3] = [v, x_1] = [v, x_4] =$
$= [v, t] = z$, $[x_1, y_4] = [y_1, x_4] = [x_2, y_3] =$
$= [y_2, x_3] = t$, $[v, y_1] = x_1 t$, $[y_1, y_4] = [y_2, y_3] =$
$= zt$, $[v, y_2] = y_2 x_3 y_3 z$;

все остальные коммутаторы пар порождающих тривиальны.

$|S| = 2^{13}$; $Z(S) = \langle z \rangle$; $Z_2(S) = \langle t, z \rangle = S'' = \Phi(S')$;

$S' = \langle x_i, y_j, t, z \mid 1 \le i \le 4, 2 \le j \le 4 \rangle$; $J(S) = \langle x_i, y_i, t, z \mid 0 \le i \le 4 \rangle$

типа $G_2(4)$; $|S : J(S)| = 2$; каждая элементарная абелева подгруппа S порядка 2^6 сопряжена в S с одной из групп

$\langle x_0, y_0, x_4, y_4, z, t \rangle$, $\langle x_1, y_1, x_2, y_2, z, t \rangle$, $\langle x_2, y_2, x_4, y_4, z, t \rangle$;

S содержит 4 нормальные экстраспециальные подгруппы B_i $(0 \le i \le 4)$ порядка 2^7, изоморфные $Q_3 \circ Q_3 \circ Q_3$, S/B_i $(0 \le i \le 4)$ типа $PSp(4,3)$; $exp(S) = 2^6$.

11) Группа Co_2 (см. [237]).

Пусть S – 2 – группа типа Co_2. Тогда S порождается 18 инволюциями a_i $(1 \le i \le 3)$, b_j $(1 \le j \le 6)$, c_k $(1 \le k \le 8)$, z с определяющими соотношениями:

$$[c_i, c_j] = \begin{cases} 1, & i+j \ne 9 \\ z, & i+j = 9 \end{cases}, \quad [b_i, b_j] = 1, \ [a_1, a_2] = a_3;$$

$b_j^{a_i}$, $c_k^{a_i}$, $c_k^{b_j}$ даны в следующей таблице:

	a_1	a_2	a_3
b_1	$b_1 b_2 b_3$	b_1	$b_1 b_4 b_5$
b_2	b_2	$b_2 b_4 b_5$	b_2
b_3	b_3	$b_3 b_5$	$b_3 b_6$
b_4	b_4	b_4	b_4
b_5	$b_5 b_6$	b_5	b_5
b_6	b_6	b_6	b_6

	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
c_1	c_1	c_1	c_1	c_1c_2z	c_1c_3z	c_1c_4	c_1c_5z	c_1c_6	c_1c_7
c_2	c_2c_3	c_2	c_2c_5	c_2	c_2c_4z	c_2	c_2c_6z	c_2	c_2c_8
c_3	c_3	c_3c_5	c_3	c_3c_4z	c_3	c_3	c_3c_7z	c_3c_8	c_3
c_4	c_4	c_4c_6	c_4c_5	c_4	c_4	c_4	c_4c_8z	c_4	c_4
c_5	c_5	c_5	c_5	c_5c_6z	c_5c_7z	c_5c_8	c_5	c_5	c_5
c_6	c_6c_7	c_6	c_6	c_6	c_6c_8z	c_6	c_6	c_6	c_6
c_7	c_7	c_7	c_7	c_7c_8z	c_7	c_7	c_7	c_7	c_7
c_8	c_8	c_8	c_8	c_8	c_8	c_8	c_8	c_8	c_8

$|S|=2^{10}$, $S=\langle a_1, a_2, b_1, b_3, c_i\rangle$, $Z(S)=\langle z\rangle$, $Z_2(S)=\langle z,c_8\rangle$,

$E=\langle c_k, z \mid 1\le k\le 8\rangle$ – единственная подгруппа S, изоморфная $D_8\circ D_8\circ D_8\circ D_8$, $J=\langle a_2, a_3, b_j, c_k, z \mid 4\le j\le 6, 5\le k\le 8\rangle$ – единственная элементарная абелева подгруппа S порядка 2^{10}, $B=\langle b_j, c_k, z \mid 1\le j\le 6, 1\le k\le 8\rangle$ – единственная подгруппа S, изоморфная B, $S=E\leftthreetimes S_1$, где S_1 – типа $Sp(6,2)$.

12) Группа Co_3 (см. [202]).

Пусть S – 2-группа типа Co_3. Тогда S задается порождающими $z, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_1', \pi_2', \pi_3', \mu, \mu', \tau$

и определяющими соотношениями:

$z^2=1$, $\pi_i^2=(\pi_i')^2=\mu^2=(\mu')^2=\tau^2=z$ для $i=1,2,3$;

$[\pi_i,\pi_i']=z$ для $i=1,2,3$; $[\pi_1,\mu]=[\pi_1,\mu']=[\pi_2,\mu]=$

$=[\pi_3,\mu']=[\pi_1',\pi_2']=[\pi_2',\pi_3']=[\mu,\mu']=[\mu,\tau]=$

$=[\pi_1',\pi_3']=z$; $[\pi_1,\tau]=[\pi_2,\tau]=\pi_1\pi_2 z$; $[\mu,\pi_1']=[\mu',\pi_1']=\pi_1$;

$[\mu,\pi_2']=\pi_2$; $[\mu',\pi_3']=\pi_3$; $[\tau,\pi_1']=[\pi_2',\tau]=\pi_1'\pi_2'$; $[\mu',\tau]=\mu$;

все остальные коммутаторы пар порождающих тривиальны.

$|S|=2^{10}$; $Z(S)=\langle z\rangle$; $S'=\langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_1', \pi_2', \mu\rangle$;

$\Phi(S')=\langle z, \pi_1\pi_2\rangle$; $\langle \pi_i, \pi_i' \mid 1\le i\le 3\rangle \cong D_8\circ D_8\circ D_8$;

$\langle z, \pi_1\pi_2, \pi_1\pi_3, \pi_1\pi_2\pi_3\pi_1'\pi_2'\pi_3'\rangle \in SCN_3(S)$;

S 2-ранга 4; $S/\langle z\rangle$ типа A_{12}; $exp(S)=8$.

13) Группа Ru (см. [59]).

Силовская 2-подгруппа Ru изоморфна группе T, заданной порождающими $z, t, v, w, w_1, x, x_1, a, b, c, d, u, y_1, y_2$ и определяющими соотношениями:

$z^2=t^2=v^2=w^2=w_1^2=a^2=b^2=c^2=d^2=y^2=y_1^2=u^2=1$,

$x^2=x_1^2=z$, $[w,y]=t$, $[w,y_1]=vt$, $[w,b]=z$,

$[w_1,y]=vt$, $[w_1,y_1]=vz$, $[w_1,a]=z$, $[u,w_1]=w$,

$[c,v]=z$, $[d,t]=z$, $[u,v]=t$, $[x,x_1]=z$,

$[x,y_1]=tz$, $[x,a]=t$, $[x,b]=v$, $[x,u]=z$,

$[x,c]=w$, $[x,d]=w_1$, $[x_1,y_1]=vtz$,

$[x_1, y] = z$, $[x_1, a] = vz$, $[x_1, b] = vt$,

$[x_1, c] = ztw_1w$, $[x_1, u] = xz$, $[x_1, d] = vw$,

$[a, b] = vt$, $[a, y_1] = t$, $[a, d] = w$, $[b, y] = vz$,

$[b, c] = w_1$, $[b, u] = axwv$, $[c, y] = a$, $[c, y_1] = wx_1xba$,

$[y, d] = abx_1vt$, $[y_1, d] = bv$, $[u, d] = c$, $[u, y_1] = y$;

все остальные коммутаторы пар порождающих тривиальны.

$|T| = 2^{14}$; $Z(T) = \langle z \rangle$; $\Phi(T) = \langle z, t, v, w, w_1, a, b, c, x, x_1, y \rangle$; из семи максимальных подгрупп T только подгруппа $\langle u, y_1, \Phi(T) \rangle = C_T(t)$ имеет нециклический центр, $Z(C_T(t)) = \langle z, t \rangle$;

если H - подгруппа T, $H = 2^{11}$ и $|Z(H)| = 2^3$, то $H \cong C_T(\langle v, t \rangle)$ и $Z(H) = \langle v, t, z \rangle$;

T не содержит подгрупп H с $|H| = 2^9$ и $|Z(H)| \geq 2^4$;

все T - сопряженные классы инволюций в T представлены элементами z, t, v, w, w_1, a, b, c, d, u, y, y_1, y_1abx, yx_1, yx_1y_1abx;

если S 2-группа типа ${}^2F_4(2)'$, заданная в 3.10), то S изоморфно вкладывается в T согласно следующему соответствию:

$d_{12} \to z$, $d_{11} \to t$, $d_{10}d_{12} \to v$, $d_9d_{10} \to w$,

$d_8 \to w_1$, $d_7 \to a$, $d_6 \to bxx_1w_1$, $d_5 \to x$,

$d_2 \to bcw_1$, $d_3 \to d$, $d_1 \to uy_1yax$.

14) Группа T (см. [170]).

Силовская 2-подгруппа T изоморфна группе S, заданной следующим образом:

$S = \langle v_i, t_{4,j}, t_{5,k}, t_{2,1}, t_{3,1}, t_{3,2} \mid 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq 4 \rangle$,

$t_{i,j}^2 = v_i^2 = 1$, $[v_i, v_j] = 1$, $[t_{i,j}, t_{k,j}] = 1$,

$[t_{i,j}, t_{i,k}] = v_jv_k$, $v_k^{t_{i,j}} = v_kv_j^{\delta_{i,k}}$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$,

$[t_{3,2}, t_{2,1}] = v_2v_3v_4v_5t_{3,1}$, $[t_{2,1}, t_{4,3}] = v_1v_5$,

$[t_{4,2}, t_{2,1}] = v_2v_4v_5t_{4,1}$, $[t_{2,1}, t_{5,3}] = v_1v_4$,

$[t_{5,2}, t_{2,1}] = v_2v_5t_{5,1}$, $[t_{2,1}, t_{5,4}] = v_1v_3v_4$,

$[t_{4,3}, t_{3,1}] = v_1v_3v_4t_{4,1}$, $[t_{3,1}, t_{5,2}] = v_1v_4$,

$[t_{5,3}, t_{3,1}] = v_1v_3v_4v_5t_{5,1}$, $[t_{3,1}, t_{5,4}] = v_1v_2v_4$,

$[t_{5,4}, t_{4,1}] = v_2v_3v_4v_5t_{5,1}$, $[t_{3,1}, t_{4,2}] = v_1v_5$,

$[t_{4,1}, t_{5,3}] = v_1v_2v_3$, $[t_{4,1}, t_{3,2}] = v_2v_5$,

$[t_{4,1}, t_{5,2}] = v_1v_3$, $[t_{5,1}, t_{3,2}] = v_2v_4$,

$[t_{5,1}, t_{4,3}] = v_2$, $[t_{5,1}, t_{4,2}] = v_2v_3$,

$[t_{4,3}, t_{3,2}] = v_3v_4t_{4,2}$, $[t_{3,2}, t_{5,4}] = v_1v_4$,

$[t_{5,3}, t_{3,2}] = v_3v_4v_5t_{5,2}$, $[t_{4,3}, t_{5,2}] = v_1v_2$,

$[t_{5,4}, t_{4,3}] = v_1v_2v_4v_5t_{5,3}$, $[t_{4,2}, t_{5,3}] = v_1v_3$,

$[t_{5,4}, t_{4,2}] = v_1v_3v_4v_5t_{5,2}$.

$|S| = 2^{15}$, $V = \langle v_i \mid 1 \leq i \leq 5 \rangle \cong E_{32}$, $Z(S) = \langle v_1 \rangle$,

$Z_i(S) = \langle v_k \mid 1 \leq k \leq i \rangle$ $(2 \leq i \leq 4)$, $Z_5(S) = V\langle t_{5,1} \rangle$,

$R = \langle V, t_{i,1} \mid 2 \leq i \leq 5 \rangle \cong D_8 \circ D_8 \circ D_8 \circ D_8$, $S/R \cong Z_2 \wr E_4$.

Глава 3. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ СЛИЯНИЯ 2-ЭЛЕМЕНТОВ В ГРУППЕ

В этой главе мы рассмотрим один из основных этапов изучения конечных групп в зависимости от свойств централизаторов их инволюций или силовских 2-подгрупп, а именно, рассмотрим некоторые методы изучения слияния (сопряженности) 2-элементов в конечной группе G, если задана ее силовская 2-подгруппа P.

§ 1. Слияния в p-группах.

Излагая этот параграф, мы следуем Брауэру [63].

Пусть P – данная p-группа. Под слиянием $\mathcal{F}$ в P мы понимаем множество упорядоченных пар (x, y) элементов P, которые удовлетворяют условиям (1), (2) и (3), приведенным ниже. Если G – группа и P – силовская p-подгруппа G, то множество $\mathcal{F}(G)$ всех G-сопряженных пар элементов P удовлетворяет нашим условиям.

(1). $\mathcal{F}$ определяет отношение эквивалентности на P.

(2) $\mathcal{F}(P) \subseteq \mathcal{F}$, т.е. если $x, y \in P$ сопряжены в P, то $(x, y) \in \mathcal{F}$.

Если $(x, y) \in \mathcal{F}$, мы назовем y $\mathcal{F}$-сопряженным x, и мы можем говорить о $\mathcal{F}$-классе K элемента x, состоящем из всех $\mathcal{F}$-сопряженных x. Если $y \in K$ выбран так, что $|C_p(y)| \geq |C_p(z)|$ для $z \in K$, то y называется экстремальным элементом (в P относительно $\mathcal{F}$).

Если G – группа, P – силовская p-подгруппа в G и $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$, то для экстремального элемента y,

$C_p(y)$ является силовской p-подгруппой в $C_G(y)$.

(3) Если $(x, y) \in \mathcal{F}$ и y – экстремальный элемент, то существует изоморфизм θ группы $C_p(x)$ в группу $C_p(y)$ такой, что $y = \theta(x)$ и $(z, \theta(z)) \in \mathcal{F}$ для всех $z \in C_p(x)$.

Из предыдущего замечания следует, что для группы G и силовской p-подгруппы P из G множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$ удовлетворяет (3).

Условия (1), (2), (3) влекут, что элементы одного $\mathcal{F}$-класса имеют один и тот же порядок. Если $(x, y) \in \mathcal{F}$, то $(x^n, y^n) \in \mathcal{F}$ для всех целых чисел n.

Если даны p-группа P и слияние $\mathcal{F}$ в P, мы можем попытаться изучать группы G с силовской p-подгруппой P такие, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$. Такая G не всегда существует, так как имеются другие условия, кроме (1), (2), (3), которым удовлетворяют все $\mathcal{F}(G)$. Никаких необходимых и достаточных условий для существования G для данного $\mathcal{F}$ не известно.

Если $\mathcal{F}$ – слияние в p-группе P, то фокальная подгруппа $P^*(\mathcal{F})$ определяется как $\langle x^{-1}y \mid (x, y) \in \mathcal{F} \rangle$. Тогда $P' \trianglelefteq P^*(\mathcal{F}) \trianglelefteq P$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только слияния $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$ в силовской p-подгруппе группы G и называть их слияниями p-элементов в G или просто p-слияниями в G.

Рассмотрим основные инструменты для изучения p-слияния в конечных группах.

§ 2. Лемма о сдвиге.

Если P – силовская p-подгруппа в группе G, то, как хорошо известно [115], $P^*(\mathcal{F}(G)) = P \cap G'$ и существует нормальная подгруппа H в G такая, что $P^*(\mathcal{F}(G))$ – силовская p – подгруппа в H и $P/P^*(\mathcal{F}(G)) \cong G/H$ – максимальный абелев p – фактор G.

Таким образом, имеется зависимость между условиями существования нетривиальных p – факторгрупп G и слиянием в силовской p – подгруппе P из G. Отражением этой зависимости являются следующие часто используемые результаты о слиянии, которые являются следствиями гомоморфизма сдвига.

Определение и основные факты о сдвиге см. в [115].

Предложение 1. (Чунихин [46], Томпсон [220]). Пусть G – группа без подгрупп индекса 2, T – силовская 2-подгруппа G и $T = T_1 \lambda \langle x \rangle$, $x \neq 1$. Тогда инволюция из $\langle x \rangle$ сопряжена в G с некоторой инволюцией из T_1.

Предложение 2. (лемма 16 из [131]). Пусть G – группа без подгрупп индекса 2, T – силовская 2-подгруппа G и T_0 – максимальная подгруппа в T. Предположим, что элемент x из T не сопряжен в G с элементом из T_0. Тогда элемент x^{2^n} сопряжен с некторым элементом из $T - T_0$ для некоторого $n \geqslant 1$.

Предложение 3. (Хигмэн, лемма 3.2 из [223]). Пусть G – группа без подгрупп индекса 2 и T – силовская 2-подгруппа G. Тогда для любой подгруппы T_0 и любого неединичного элемента x группы T таких, что $|x| = |T:T_0| = 2^m$, $m \geqslant 1$, элемент $x^{2^{m-1}}$ сопряжен в группе G с некоторым элементом из T_0.

Предложение 4. (Голдшмидт, лемма 3.4 из [165]). Пусть G – группа без подгрупп индекса 2, T – силовская 2-подгруппа G и T_0 – максимальная подгруппа в T. Если u – инволюция из $T - T_0$, то u сопряжена в G с некоторой инволюцией из T_0, экстремальной в T.

Шифельбуш в [192], обобщая некоторые неопубликованные результаты Голдшмидта, получил уточнение классического способа вычисления образа элемента при гомоморфизме сдвига. Мы не будем формулировать этот результат во всей общности, а приведем только два следствия этого результата, которые полезны при изучении слияния 2- элементов в простых группах.

Предложение 5. Пусть G – группа, T – силовская 2-подгруппа G, $\Phi(T) \leq Q < T$, V – сдвиг G в T/Q и $x \in T - Q$. Пусть для каждого неотрицательного целого i, T_i – силовская 2-подгруппа $C_G(x^{2^i})$, содержащая x, и J_i – подмножество $T - Q$ всех элементов t, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $t \in (x^{2^i})^G$,

2) $C_T(t)$ изоморфен подгруппе U из T_i такой, что $|T_i : U| = 2^i$ и $T_i = U\langle x \rangle$.

Тогда выполняются следующие утверждения:

а) Если $\bigcup_{i \geqslant 0} J_i = \emptyset$, то $V(x) = Q$.

б) Если $\bigcup_{i \geqslant 0} J_i \neq \emptyset$, то $\bigcup_{i \geqslant 0} J_i$ разбивается на T – классы элементов с представителями $t_1, \ldots, t_n$ и $V(x) = Q \prod_{i=1}^{n} t_i$.

в) Пусть $C_T(x)$ – силовская 2-подгруппа в $C_G(x)$. Тогда $t \in J_0$, если $t \in T - Q$, $t \in x^G$ и $C_T(t) \cong C_T(x)$. В частности, $x \in J_0$.

Предложение 5 может быть использовано для того, чтобы показывать, что некоторые 2-группы с заданным слиянием элементов не могут быть силовскими 2-подгруппами в простых группах. Для этого вычисляются множества J_i для подходящего x из $T - Q$. Это можно сделать, так как из знания строения T и слияния в T можно найти множества $(x^{2^i})^G \cap (P-Q)$, подгруппы $C_T(t)$ для всех $t \in (x^{2^i})^G \cap (P-Q)$ и подгрупп T_i для всех $i \geq 0$.

Предложение 6. Пусть G – группа, T – силовская 2-подгруппа G, Q – собственная нормальная подгруппа в T такая, что T/Q – циклическая группа, $m = \min\limits_{y \in P-Q}\{|y|\}$, x – любой элемент порядка m из T, $J = \{t \in T \mid C_T(t)$ изоморфна силовской 2-подгруппе из $C_G(x)\}$. Тогда $J \cap Q$ разбивается на T-классы элементов с представителями $t_1, \ldots, t_n$ и либо x сопряжен с нечетным числом элементов из $\{t_1, \ldots, t_n\}$, либо x лежит вне коммутанта группы G.

Заметим, что предложение 6 обобщает и уточняет предложение 4. См. по этому поводу также работы [135] и [242].

§3. Локальное слияние элементов

Теорема Алперина о слиянии утверждает, что сопряженность в группе G подмножеств силовской p-подгруппы P из G определяется очень точным образом подгруппами $N_G(T)$, где T пробегает неединичные подгруппы из P, для которых $N_P(T)$ является силовской p-подгруппой $N_G(T)$. В противоположность леммам о сдвиге теорема Алперина справедлива для всех простых p. Можно сформулировать его результат следующим образом:

Слияние p-элементов в группе G, которое является глобальным понятием, полностью определяется локальной p-структурой G.

Прежде, чем сформулировать строго теорему Алперина и ее уточнения, введем несколько определений.

Пусть G – группа, p – простой делитель порядка G и P – силовская p-подгруппа из G.

Семейством называется множество пар (H, T), где $H \leq P$ и T – подмножество из $N_G(H)$.

Семейство Σ называется сопрягающим семейством для P в G, если для любых непустых подмножеств A и B из P таких, что $A^g = B$ для $g \in G$, существуют элементы $(H_1, T_1), \ldots, (H_n, T_n)$ из Σ и элементы $x_1, \ldots, x_n$ из G такие, что

(а) $g = x_1 \cdots x_n y$,

(б) $x_i \in T_i$, $1 \leq i \leq n$, и $y \in N_G(P)$,

(в) $A \subseteq H_1$, $A^{x_1 \cdots x_i} \subseteq H_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$.

Семейство Σ называется слабо сопрягающим семейством, если для любых непустых подмножеств A и B из P таких, что $A^g = B$ для $g \in G$, существуют элементы (H_i, T_i), $1 \leq i \leq n$, из Σ и элементы $x_1, \ldots, x_n, y$ из G такие, что $B = A^{x_1 \cdots x_n y}$ и выполняются (б) и (в) из предыдущего определения.

Пересечение $P \cap Q$ силовских p-подгрупп P и Q из G называется правильным, если $N_P(P \cap Q)$ и $N_Q(P \cap Q)$ являются силовскими p-подгруппами в $N_G(P \cap Q)$.

Насыщенной подгруппой группы G называется каждая p-подгруппа D из G, которая является силовской

p - подгруппой в $O_{p',p}(N_G(D))$ и для которой $N_G(D)$ - p - скованная группа.

В работе Алперина [19] устанавливается, что сопрягающие семейства существуют и дается следующие примеры сопрягающих и слабо сопрягающих семейств для P в группе G.

1) $\mathcal{F}_t$ - множество всех пар (H, T), где H - правильное пересечение вида $P \cap Q$, Q - силовская p - подгруппа в G, и T - множество p - элементов из $N_G(H)$;

2) $\mathcal{F}_c$ - множество всех пар (H, T), где H - правильное пересечение вида $P \cap Q$, Q - силовская p - подгруппа в G и $T = C_G(H)$, если $C_P(H) \not\leq H$, и $T = N_G(H)$, если $C_P(H) \leq H$;

3) $\mathcal{F}'_c$ - множество всех пар $(H, N_G(H))$, где H - правильное пересечение вида $P \cap Q$, Q - силовская p - подгруппа в G, и $C_P(H) \leq H$;

4) $\mathcal{F}_p$ - множество всех пар $(H, N_G(H))$, где $H \leq P$ и $N_G(H)/C_G(H)$ не p - группа, либо $H = P$.

Здесь $\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_c$ - сопрягающие семейства, а $\mathcal{F}'_c, \mathcal{F}_p$ - слабо сопрягающие семейства.

Гольдшмидт [106] получил очень эффективное уточнение исходной теоремы Алперина, значительно ограничивающее множество подгрупп $N_G(T)$, которые должны определять слияние в G.

Т е о р е м а 7. Пусть G - группа, p - простое число и P - силовская p - подгруппа в G. Пусть Σ - множество всех пар $(H, N_G(H))$, где H - насыщенных подгрупп в G, являющихся правильным пересечением $P \cap Q$ для подходящей силовской p - подгруппы Q из G и при $p=2$ $N_G(H)/H$ обладает сильно вложенной

подгруппой (исключая случай, когда $H = P$). Тогда Σ - сопрягающее семейство для P в G.

Алперин [51] получил такое полезное уточнение своей исходной теоремы для слияния p - элементов.

Т е о р е м а 8. Пусть x и y - элементы силовской p - подгруппы P группы G и x, y сопряжены в G. Пусть Σ - сопрягающее семейство, содержащее $(P, N_G(P))$. Тогда существуют элементы $(H_1, T_1), \ldots, (H_n, T_n)$ в Σ, элементы $t_i \in T_i$, $1 \leq i \leq n$, и целое k, $1 \leq k \leq n+1$, такие, что полагая $x_1 = x, x_2 = x^{t_1}, \ldots, x_{n+1} = x^{t_1 \cdots t_n}$, получим

(1) $x_i \in H_i$, $1 \leq i \leq n$, $x_{n+1} = y$,

(2) $|C_P(x_1)| \leq \cdots \leq |C_P(x_k)| \geq \cdots \geq |C_P(x_{n+1})|$,

(3) $C_P(x_i) \leq H_i$, если $i < k$, и $C_P(x_{i+1}) \leq H_i$, если $k \leq i \leq n$.

Эта теорема упрощает обычные аргументы о слиянии 2-элементов в группе.

Бывает полезно такое следствие исходной теоремы Алперина (см. лемму 3.2 из [74]).

П р е д л о ж е н и е 9. Пусть P - силовская 2-подгруппа в группе G. Если $x \in Z(T)$ сопряжен с $y \in P - Z(P)$, то найдутся $x_1 \in Z(P)$, $x_1 \in x^G$, $y_1 \in P - Z(P)$, 2-силовское пересечение $P \cap Q = C_P(y_1)$ и 2-элемент $z \in N_G(P \cap Q)$ такие, что $y_1^z = x_1$. Кроме того, если $[x] = x^G \cap Z(P)$, то $y_1^z = x$.

При исследовании конкретных классов конечных групп часто приходится строить подходящие сопрягающие (или слабо сопрягающие) семейства для изучения 2- слияния. При этом естественно стараются выбирать такие семейства достаточно малой мощности. Поэтому очень важной является задача, записанная Голдшмидтом в "Коуровскую тетрадь" (задача 4.24 d) из [22], и которую можно сформулировать следующим образом.

З а д а ч а . Найти "малое число" подгрупп $T_1,\dots,T_n$ в неабелевой силовской 2-подгруппе T простой группы G, которое зависит только от класса изоморфизма T, такое, что $\{(T_1, N_G(T_1)),\dots,(T_n, N_G(T_n))\}$ является сопрягающим (или слабо сопрягающим) семейством для T в группе G.

Заметим, что если любые два элемента силовской 2-подгруппы T группы G, сопряженные в G, сопряжены уже в нормализаторе некоторой фиксированной подгруппы A из T, то $Z(A)$ – абелева подгруппа, сильно замкнутая в T относительно G, и поэтому в силу результата Голдшмидта [109] известно точное описание нормального замыкания $Z(A)$ в G. Смотри по этому поводу также заметку С.А.Сыскина [44].

Вообще, если P – силовская p – подгруппа в группе G, то нормализаторы подгрупп, слабо замкнутых в P относительно G, оказывают сильное влияние на p – слияние в G. Мы приведем некоторые результаты, подтверждающие этот тезис и весьма полезные для изучения 2-слияния в простых группах.

П р е д л о ж е н и е 10. (Глауберман, теорема 5.1 из [101]). Пусть P – силовская p – подгруппа в группе G и A – абелева сильно замкнутая подгруппа в P относительно G. Тогда $N_G(A)$ контролирует сильное слияние в P относительно G, т.е. если X, Y – подмножества из P, $g \in G$ и $Y = X^g$, то $g = g_1 g_2$, где $g_1 \in C_G(X)$ и $g_2 \in N_G(A)$.

П р е д л о ж е н и е II. (лемма 1.4.5 из [184]). Пусть P – силовская p – подгруппа в группе G и A –

подгруппа, слабо замкнутая в P относительно G. Тогда $N_G(A)$ контролирует слияние в $C_P(A)$, т.е. непустые подмножества из $C_P(A)$ сопряжены в G тогда и только тогда, когда они сопряжены в $N_G(A)$.

П р е д л о ж е н и е I2. (утверждение 9.I из [I09]) Пусть P – силовская p – подгруппа в группе G, $Z \leq Z(P)$, A – слабое замыкание Z в P относительно G и A абелево. Тогда множество $\{(Z, C_G(Z)), (A, N_G(A))\}$ является слабо сопрягающим семейством для P в G.

Подгруппой Томпсона $J(P)$ в p – группе P называют подгруппу, порожденную в P абелевыми подгруппами наибольшего порядка. Нормализатор подгруппы Томпсона силовской p – подгруппы группы G также сильно влияет на p –слияние в G. В связи с этим мы приведем только результат работы Глаубермана [I00], в которой он подробно изучил ситуацию, когда 2-элемент из $Z(N_G(J(S)))$, где S – силовская 2-подгруппа в группе G, не слабо замкнут в S относительно G.

П р е д л о ж е н и е I3. Пусть S – силовская 2-подгруппа группы G, x – 2 – элемент из $Z(N_G(J(S)))$ и x не слабо замкнут в S относительно G. Тогда S содержит подгруппу R, которая удовлетворяет одному из следующих условий:

(I) $|S:R|=2$, $x \in R$ и $x \notin Z(N_G(R))$;

(2) R изоморфна E_{16} и $N_G(R)/C_G(R)$ изоморфна либо Σ_5, либо расширению E_9 с помощью D_8;

(3) $O^2(C_G(R))$ имеет диэдральную или полудиэдральную силовскую 2-подгруппу порядка ≥ 8 и

$O^2(C_G(R)) \cap R = 1$.

Кроме того, во всех случаях найдется четверная подгруппа W такая, что при $T = C_S(W)$, $D = J(T)$ и $U = N_S(D)$ выполняются следующие утверждения:

(а) $W \trianglelefteq N_G(D)$,

(б) $|U : T| = 2$ и $d(U) = d(T)$, где $d(X)$ – максимум порядков абелевых подгрупп 2 – группы X.

(в) $x \in Z(T)$, $x \notin Z(N_G(T))$,

(г) U – силовская 2-подгруппа в $N_G(T)$ и в $N_G(W)$, T – силовская 2-подгруппа в $C_G(W)$.

Кроме вопроса об отыскании небольшого числа неединичных p – подгрупп группы G, нормализаторы которых осуществляют сопряжение подмножеств из силовской p – подгруппы P группы G в последовательности локальных сопрягающих шагов, представляет интерес гипотеза Алперина о том, что число локальных сопрягающих шагов для любого такого сопряжения ограничено функцией, которая зависит только от ступени нильпотентности P.

Пусть P – силовская p – подгруппа группы G и Σ – семейство для P в G, т.е. подмножество множества $\{(H, X_H) \mid H \leq P,\ X_H \subseteq N_G(H)\}$. Пусть A и B непустые подмножества в P и $A^g = B$ для некоторого $g \in G$. Мы скажем, что A Σ – сопряжено с B посредством g в n шагов, если найдутся $(H_i, X_i) \in \Sigma$ и $h_i \in X_i$ для $1 \leq i \leq n$, такие, что $g = h_1 \cdots h_n$, $A \subseteq H_1$ и $A^{h_1 \cdots h_i} \subseteq H_{i+1}$ для $1 \leq i \leq n-1$. Через $cl(P)$ обозначим ступень (класс) нильпотентности P.

В работе [86] Долана доказана следующая теорема.

Теорема 14. Пусть P – силовская p – подгруппа группы G, A и A^g – подмножества P для некоторого $g \in G$ и $\mathcal{F}_c = \{(H, N_G(H)) \mid H \leq P,\ N_P(H)$ – силовская p – подгруппа $N_G(H)\}$. Если $cl(P) = 1$, то A может быть $\mathcal{F}_c$ – сопряжено с A^g посредством g в 2 шага. Если $cl(P) \geq 2$, то A может быть $\mathcal{F}_c$ – сопряжено с A^g посредством g в

$$6\,(cl(P)-2)!\,\Big(\sum_{i=0}^{cl(P)-2} \Big(\frac{1}{i!}\Big)\Big) - 2$$

шагов.

Заметим, что для $cl(P) = 2$ граница 4 шагов достигается, как показывает пример Холта с $G \cong PSL(2,23) \wr Z_3$.

В совместной работе Алперина и Горенстейна [55] подводится общая основа под результаты о локальной сопряженности элементов в группах.

Пусть G – группа, p – простой делитель порядка G и $\mathcal{H}$ – множество всех неединичных p – подгрупп G.

Сопрягающим функтором (функтором сопряжения) W называется отображение $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, удовлетворяющее следующим двум условиям для всех H из $\mathcal{H}$:

(а) $W(H) \leq H$,

(б) $W(H^x) = W(H)^x$ для всех $x \in G$.

Если W – сопрягающий функтор на $\mathcal{H}$ и L – подгруппа G порядка, делящегося на p, то говорят, что W контролирует, соответственно,

(1) слияние в L,

(2) сильное слияние в L,

если существует силовская p – подгруппа P из L такая, что

(1) если подмножества X, Y из P сопряжены в L,

то они сопряжены в $N_L(W(P))$,

(2) если подмножества X, Y из P сопряжены в L и $X^a = Y$ для некоторого $a \in L$, то $a = cb$, где $c \in C_L(x)$ и $b \in N_L(W(P))$.

Нормализаторы подгрупп из $\mathcal{H}$ называются локальными (p - локальными) подгруппами G.

Основными результатами [55] являются следующие две теоремы

Т е о р е м а I5. Если W - сопрягающий функтор на $\mathcal{H}$, который контролирует слияние (сильное слияние) во всех локальных подгруппах G, то W контролирует слияние (сильное слияние) в G.

Т е о р е м а I6. Пусть W - сопрягающий функтор на $\mathcal{H}$ такой, что $W(H) \geqslant Z(H)$ для всех H из $\mathcal{H}$. Пусть P - фиксированная силовская p - подгруппа G и W контролирует слияние (сильное слияние) во всех локальных подгруппах L вида $L = N_G(H)$, где $Z(P) \leqslant H \leqslant P$. Тогда W контролирует слияние (сильное слияние) в G.

В работе [55] поставлен вопрос: можно ли, не изменив заключения теоремы I6, избавиться в ней от условия $W(H) \geqslant Z(H)$ для всех H из $\mathcal{H}$?

В качестве примеров сопрягающих функторов, нашедших применение в теории конечных групп, можно указать следующие: $W_1: H \to J(H)$ и $W_2: H \to Z(J(H))$, где $J(H)$ - подгруппа Томпсона в H, определенная как подгруппа, порожденная всеми абелевыми подгруппами максимального ранга (или порядка) в H.

Для доказательства теорем I5 и I6 Альперину и Горенстейну потребовалось построить некоторое сопрягающее семейство F,

которое мы сейчас и опишем.

Зафиксируем группу G, простое число p, силовскую p - подгруппу P из G и сопрягающий функтор W на множестве $\mathcal{H}$ всех неединичных p - подгрупп G. Расширим функцию W, полагая $W(1) = 1$.

Если $H \leqslant P$, то определим три последовательности подгрупп G следующим образом: $W_1(H) = H$, $P_1(H) = N_P(H)$, $N_1(H) = N_G(H)$ и для $i = 1, 2, \ldots,$ $W_{i+1}(H) = W(P_i(H))$, $P_{i+1}(H) = N_P(W_{i+1}(H))$, $N_{i+1}(H) = N_G(W_{i+1}(H))$. Последовательность $P_i(H)$ строго возрастающая и стабилизируется на P. Последовательность $W_i(H)$ не обязательно возрастающая, но стабилизируется на $W(P)$.

Подгруппу H из P назовем отмеченной в P (относительно W), если $P_i(H)$ - силовская p - подгруппа $N_i(H)$ для всех i. Тривиальными примерами отмеченных подгрупп в P являются I, $O_p(G)$ и P. Кроме того, известно, что для каждой подгруппы H из $\mathcal{H}$ найдется отмеченная в P подгруппа, сопряженная с H в G.

Сопрягающее семейство F определяется как множество всех пар (H, T), где существует силовская p - подгруппа S из G такая, что $H = P \cap S$ - правильное пересечение, отмеченное в P, и

(а) $T = C_G(H)$, если $C_P(H) \nleqslant H$,

(б) $T = N_G(H)$, если $C_P(H) \leqslant H$.

Понятие контроля слияния, а также теоремы I5 и I6 обобщаются Финкелем [92] на случай двух сопрягающих функторов и Шимомото [245] - на случай их конечного числа. Другие обобщения см. в лекциях Глаубермана из [184] и в [245].

§ 4. Сильно замкнутые 2-подгруппы

Подгруппа S группы G называется сильно замкнутой в G, если S сильно замкнута в $N_G(S)$ относительно G. Если S – p-группа, то S сильно замкнута в G тогда и только тогда, когда S сильно замкнута в P относительно G для некоторой силовской p-подгруппы P из G, содержащей S.

Одним из основных инструментов изучения слияния инволюций в простой группе является Z^*- теорема Глаубермана [99], которая утверждает, что подгруппа порядка 2, сильно замкнутая в группе G, лежит в $Z^*(G) = Z(G \bmod O(G))$.

Этот результат Глаубермана является очень частным случаем следующей теоремы Голдшмидта [109].

Теорема 17. Пусть G – конечная группа и A – абелева 2-подгруппа, сильно замкнутая в G. Положим $K = \langle A^G \rangle$ и $\bar{K} = K/O(K)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $\bar{K}$ – центральное произведение $O_2(\bar{K})$ и групп, каждая из которых изоморфна одной из групп следующего списка: 1; $PSL(2,2^n)$ при $n \geq 3$, $Sz(2^{2n+1})$ при $n \geq 2$; $PSU(3,2^{2n})$ при $n \geq 2$; совершенные центральные расширения $Sz(8)$; $PSL(2,q)$ при $q > 3$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$; J_1; группы типа Ри.

(2) $\bar{A} = O_2(\bar{K}) \Omega_1(\bar{T})$ для некоторой силовской 2-подгруппы T из K, содержащей A.

Значение теоремы 17, в том что она дает сильный новый инструмент изучения слияния 2-элементов в простой группе. Она используется тем же образом, как и Z^* - теорема Глаубермана, но теперь мы можем вывести заключение о произвольной абелевой 2-подгруппе, а не только об одной инволюции.

В работе [110] Голдшмидт продолжил изучение сильно замкнутых

2-подгрупп в конечных группах и получил следующие результаты:

Теорема 18. Пусть группа G содержит прямое произведение двух сильно замкнутых подгрупп $S_1 \times S_2$. Тогда $[\langle S_1^G \rangle, \langle S_2^G \rangle] \leq O(G)$.

Из теоремы 18 извлекаются два следствия.

Следствие 19. Если силовская 2-подгруппа группы G является прямым произведением двух сильно замкнутых подгрупп $S_1 \times S_2$, то $\langle S_1^G \rangle \cap \langle S_2^G \rangle \leq O(G)$.

Следствие 20. Если S_1, S_2 – сильно замкнутые 2-подгруппы группы G и $[S_1, S_2] = 1$, то $[\langle S_1^G \rangle, \langle S_2^G \rangle] \leq \langle (S_1 \cap S_2)^G \rangle O(G)$.

Теорема 21. Предположим, что p - произвольное простое число, S – сильно замкнутая p - подгруппа группы G и P – силовская p - подгруппа G, содержащая S. Тогда:

(1) Если U_1 и U_2 – подмножества из P, сопряженные в G, то SU_1 и SU_2 сопряжены в $N_G(S)$.

(2) $(G' \cap P)S = (N_G(S))' \cap P)S$.

(3) $C_G(S)' \cap P$ сильно замкнута в G.

Теорема 21 доказывается построением подходящего сопрягающего семейства. Когда $p = 2$, то применение утверждения 3 теоремы 21 вместе со следствием 20 приводит к различным результатам, из которых Голдшмидтом отмечаются следующие.

Следствие 22. Если S – сильно замкнутая 2-подгруппа группы G, то $C_G(S)^{\infty} O(G) \trianglelefteq G$. Через X^{∞} обозначается последний член ряда коммутантов группы X.

Следствие 23. Пусть M – нормальная подгруппа группы G, S – силовская 2-подгруппа M и R – силовская 2-подгруппа $C_G(S)$. Тогда $[M, R] \le O(M)$.

С л е д с т в и е 24. Если S – сильно замкнутая 2-подгруппа группы G и $N_G(S)/C_G(S)$ – 2 – группа, то S – силовская 2-подгруппа $\langle S^G \rangle$.

Частный случай следствия 24, когда S – диэдральная группа, был получен Холлом в [I29]. В этой же статье Холл доказал следующую теорему.

Т е о р е м а 25. Пусть D – нетривиальная диэдральная 2-подгруппа, сильно замкнутая по инволюциям в группе G, т.е. никакая инволюция из $N_G(D) - D$ не сопряжена в G с инволюцией из D. Тогда G содержит сильно замкнутую подгруппу Q такую, что $D \le Q$ и $|Q : D| \le 2$. Если $Q \ne D$, то Q – полудиэдральная группа и все элементы Q порядка 4 сопряжены в G.

Исходя из теоремы 25, Холл высказал гипотезу о том, что если в теореме 25 $|Q : D| = 2$, то Q – силовская 2-подгруппа в $\langle Q^G \rangle$. Справедливость этой гипотезы устанавливается применением следствия 24 (см. следствие Н4 в [II0]).

Отметим еще три теоремы Холла, полученных им в работе [I29] в качестве следствий основного результата.

Т е о р е м а 26. Пусть S – силовская 2-подгруппа группы G и V – четверная подгруппа, слабо замкнутая в S относительно G. Положим $V = \langle a, b \rangle$, где $a \in Z(S)$ и $W = \langle a^G \cap S \rangle$. Тогда W сильно замкнута в S относительно G и выполняется одно из следующих утверждений:

(I) $W = \langle a \rangle$ и $V O(G) \trianglelefteq G$;

(2) $W = V$ и все инволюции из W сопряжены в G;

(3) W – четверная группа и $WV \cong D_8$;

(4) $V \le W$ и $W \cong D_8$.

Т е о р е м а 27. Пусть группа G содержит сильно замкнутую экстраспециальную подгруппу E и $\langle E^G \rangle = G$. Тогда либо $Z(E) \le Z^*(G) \cap G'$, либо $E \cong D_8$.

Т е о р е м а 28. Пусть S – силовская 2-подгруппа группы G, a – инволюция из S, $\langle a^G \rangle = G$ и $|a^G \cap S| = 3$. Положим $\bar G = G/O(G)$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

(I) $\bar G \cong Z \times L$, где $|Z| \le 2$ и $L \cong PSU(3,q^2)$ или $PSL(2,q)$ для $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $q \ne 3$. Если $|Z| = 2$, то $a \notin O^2(G)$ и $a \notin Z^*(G)$.

(2) $\bar G$ – расширение группы $PSL(2,q^2)$, $q^2 \equiv 9 \pmod{16}$, с помощью группы порядка 2, индуцирующей на $PSL(2,q^2)$ полевой автоморфизм. Здесь a может принадлежать одному из двух классов нецентральных инволюций G.

(3) $\bar G \cong \Sigma_7$. Здесь a может принадлежать одному из двух классов нецентральных инволюций G.

В связи с теоремой 26 отметим еще результаты Шабо [76], [243] и Фукушимы [246].

Т е о р е м а 29. (см. [243]). Пусть G – группа с силовской 2-подгруппой T. Предположим, что для любой инволюции t из G, $F^*(C_G(t)) = O_2(C_G(t))$ и W – элементарная подгруппа порядка 8, слабо замкнутая в T относительно G. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(I) $|W : W \cap O_2(G)| \le 2$,

(2) $W \not\le O^2(G)$,

(3) $F^*(G) = \langle W^G \rangle \cong PSL(2,8), PSU(3,8^2), Sz(8), J_1$.

Здесь $F^*(X)$ обозначает обобщенную подгруппу Фиттинга группы X.

Т е о р е м а 30. (см. теорему I из [246]). Пусть G – группа, S – силовская 2-подгруппа G, S_0 – подгруппа индекса 2 в S, $\langle x\rangle \triangleleft S$, $z = x^2$ – инволюция и $z^G \cap S_0 = \{z\}$. Тогда $Z^*(G) \neq 1$ или силовская 2-подгруппа из $\langle z^G\rangle$ максимального класса.

Т е о р е м а 31. (см. следствие I из [246]). Если X – циклическая подгруппа, слабо замкнутая в силовской 2-подгруппе S группы G, то либо $Z^*(G) \neq 1$, либо силовская 2-подгруппа из $\langle \Omega_1(X)^G\rangle$ максимального класса.

Т е о р е м а 32. (см. теорему 2 из [246]). Пусть G – группа, S – силовская 2-подгруппа G, S_0 – подгруппа индекса 2 в S и каждая инволюция из S_0 слабо замкнута в S_0 относительно G. Тогда либо $Z^*(G) \neq 1$, либо S_0 содержит такую инволюцию z, что силовская 2-подгруппа из $\langle z^G\rangle$ максимального класса.

Хорошо известно (см. [115]), что 2-группы максимального класса (нильпотентности) исчерпываются диэдральными и полудиэдральными группами, следовательно, простые группы из заключений теорем 30, 31, 32 известны.

В заключение этой главы мы приведем один результат, принадлежащий Гольдшмидту (см. [109] , следствие 4). Через $m(X)$ обозначается 2-ранг группы X.

П р е д л о ж е н и е 33. Пусть

(I) T – силовская 2-подгруппа группы G,

(2) W – подгруппа, слабо замкнутая в T относительно G,

(3) A – абелева нормальная подгруппа в $N_G(W)$ и $A \leq C_T(W)$.

(4) $\mathcal{F} = \{ B \leq T \mid B \nleq A$, B сопряжена в G с подгруппой из $A \}$.

(5) $r = \max\{ m(B/C_B(W)) \mid B \in \mathcal{F} \}$.

Тогда либо $\Omega_1(A)$ сильно замкнута в T относительно G, либо выполняется следующее:

(а) Существует $B \in \mathcal{F}$ такое, что $m(B)+r \geq m(A)$,

(б) Пусть t – инволюция в T, сопряженная с инволюцией из A. Тогда $m([A,t]) \leq 2r$ и, если $B/C_B(W)$ – элементарная для всех $B \in \mathcal{F}$, которые удовлетворяют (а), то $m([A,t]) \leq r$.

На практике в качестве A берется обычно характеристическая подгруппа из $Z(W)$. Если A удовлетворяет условиям (I)–(5), то и $\Omega_1(A)$ им удовлетворяет. Для $\Omega_1(A)$ все элементы $\mathcal{F}$ элементарны, поэтому мы всегда получим $m([\Omega_1(A),t]) \leq r$. Предложение 33 имеет силу в основном тогда, когда $m(T/C_T(W))$ мало по сравнению с $m(A)$, так как $r \leq m(T/C_T(W))$.

Оказывается, что предложение 33 на самом деле можно использовать во многих случаях как результат о сопряженности подгрупп и элементов. Для этого достаточно формализовать то, что содержится в доказательстве этого предложения. Кроме того на практике исследовать множество $\mathcal{F}$ и находить r чаще всего неудобно. Поэтому можно опустить условие (4) и заменить условие (5) на условие $r = m(T/C_T(W))$.

Учитывая эти замечания, мы сформулируем новое предложение, которое было нами часто использовано в работах [16], [13], [19].

П р е д л о ж е н и е 34. Предположим, что выполняется следующее условие:

(I) T – силовская 2-подгруппа конечной группы G.

(2) W – подгруппа, слабо замкнутая в T относительно G.

(3) A – абелева нормальная подгруппа в $N_G(W)$ и $A \leq C_T(W)$.

(4) $r = m(T / C_T(W))$.

(5) t – инволюция из $T - A$, сопряженная с некоторой инволюцией из A.

Тогда существует элемент g из G такой, что $t^g \in A$ и при $B = C_A(t)$, $B_1 = A \cap A^{g^{-1}}$, $B_2 = N_A(\langle B_1, t\rangle)$, $C = \{x \in A \mid [x,t] \in B\}$ справедливы следующие утверждения:

(а) $B_1 \leq B \leq B_2 \leq C$;

(б) $B_2^g \leq T$, $B_2^g \not\leq A$, $B_2^g \cap A = B_1^g = A \cap A^g = C_{B_2^g}(W)$;

(в) $m(B_2/B_1) \leq r$, $m(B_2) + r \geq m(A)$;

(г) отображение $x \to [x,t]$ индуцирует изоморфизм C/B на $\Omega_1([A,t])$, $m(C/B_2) \leq m(B/B_1)$ и $C/B_2 \cong$ $\cong \Omega_1([A,t])/\Omega_1([A,t]) \cap B_1$;

(д) $m([A,t]) \leq 2r$ и, если B_2/B_1 элементарна, $m([A,t]) \leq r$

Глава 4. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ.

В 1964 году вышла статья Судзуки [illegible], в которой были исследованы конечные группы с единичными пересечениями силовских 2-подгрупп (TI – группы). Этот результат положил начало исследованиям конечных групп по свойствам пересечений их силовских 2-подгрупп и имеет такое же значение для всех результатов настоящей главы, как теорема Фейта и Томпсона о разрешимости групп нечетного порядка для всей теории конечных групп.

Теорема I. Пусть G – конечная группа, в которой различные силовские 2-подгруппы пересекаются только по единице, тогда верно одно из следующих утверждений:

I) группа G имеет только одну силовскую 2-подгруппу;

2) силовская 2-подгруппа P из G имеет только одну инволюцию;

3) фактор-группа $G/O(G)$ содержит нормальную подгруппу нечетного индекса, изоморфную одной из следующих групп: $PSL(2,2^n)$, $n>1$; $Sz(2^{2n+1})$, $n \geq 1$; $PSU(3,2^{2n})$, $n \geq 2$.

Развитие этого направления сначала напоминает развитие теории, связанной со строением силовских 2-подгрупп. Исследуются конечные группы с пересечениями силовских 2-подгрупп малого ранга и малого класса. Единственное отличие здесь в том, что теория пересечений опиралась на большой запас, накопленный к этому времени, характеризаций конечных групп свойствами строения их силовских 2-подгрупп.

В настоящий момент разделу теории конечных групп, связанному с пересечениями силовских 2-подгрупп, посвящено уже более 40 статей. Появились задачи и результаты, не имеющие аналогии с характеризациями конечных групп их силовскими 2-подгруппами, и даже характеризация конечных групп с силовскими 2-подгруппами 2-ранга 3 появилась как следствие описания конечных групп с пересечениями силовских 2-подгрупп 2-ранга не более 3. Понятие пересечения силовских p - подгрупп связано со многими разделами теории конечных групп. В главе 3 показана роль силовских p - пересечений при изучении слияний p - элементов. Существует связь пересечений силовских p - подгрупп с теорией представлений. В частности, Грин[*)] показал, что дефектная группа p - блока конечной группы является пересечением двух ее (не обязательно различных) силовских p - подгрупп. Сведения о других связях можно найти в § 5,10 и 12.

Всюду далее, кроме § 11, под пересечением силовских p - подгрупп или силовским p - пересечением мы понимаем пересечение двух различных силовских p - подгрупп.

§ 1. Ранги пересечений.

В этом параграфе мы приведем сводку результатов, характеризующих конечные группы по 2-рангам пересечений их силовских 2-подгрупп. Результаты, относящиеся к простым группам, содержатся в следующей таблице. Так как каждый последующий класс включает предыдущий, то в каждом случае, кроме первого, перечисляется только добавка.

*) GREEN J. A. Blocks of modular representations.-Math. Z., 1962, vol.79, № 7, p.100-115.

№	Условие на пересечения силовских 2-подгрупп	Конечные простые группы с таким условием	Авторы результата
0	TI - группы	$PSL(2,2^n)$, $PSU(3,2^{2n})$, $n \geq 2$; [illegible](2^{2n+1}), $n \geq 1$	Судзуки [215]
1	Цикличность	$PSL(2,q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$; J_1	В.Д.Мазуров [28]
2	Ранг ≤ 1	—	Ашбахер [56] Ландрок [164]
3	Ранг ≤ 2	$PSL(2,q)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q)$, q - нечетно; группы типа Ри.	В.Д.Мазуров, С.А.Сыскин [35] Строт [206]
4	Ранг ≤ 3	$G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, q - нечетно; M_{12}, $O'N$	Строт [207]

В статье [35] отмечается, что непростая конечная группа с циклическими пересечениями силовских 2-подгрупп имеет 2-ранг не более 2. Три последующие теоремы описывают конечные группы 2-ранга I, 2 и 3, соответственно.

Описание групп с пересечениями ранга I получили независимо Ашбахер [36] и Ландрок [164]. Мы приводим более подробное описание Ландрока.

Т е о р е м а 2. Пусть G – конечная группа, в которой пересечение любых двух различных силовских 2-подгрупп имеет 2-ранг не более I. Тогда G одного из следующих типов:

1) G – разрешима, $G/O(G)$ является 2-замкнутой группой, $GL(2,3)$ или расширением Σ_4, в котором силовская 2-подгруппа является группой кватернионов порядка 16;

2) силовская 2-подгруппа из G является группой кватернионов, а G содержит подгруппу H индекса не более 2, для которой либо $O^{2'}(H/O(H)) \cong SL(2,q)$, q – нечетное число больше 3, либо $H/O(H)$ – совершенное расширение группы порядка 2 при помощи A_7;

3) G содержит нормальные подгруппы G_1 и G_2 такие, что $G \geq G_1 \geq G_2 \geq 1$, где G/G_1 имеет нечетный порядок и

а) $G_2 = O(G) \times O_2(G)$, а фактор-группа G_1/G_2 изоморфна $PSL(2,2^n), n>1$; $Sz(2^{2n+1}), n \geq 1$; $PSU(3,2^{2n}), n \geq 2$; более того, если $O_2(G)$ – циклическая и $G_1 = O^{2'}(G)$, то $G_2 = Z(G_1)$,

б) $G_2 = O(G)$ и G_1/G_2 изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,q), q \equiv \pm 3 \pmod 8, q>5$; J_1.

4) G содержит нормальную подгруппу G_1, $O(G) \leq G_1$, такую, что $G_1/O(G) \cong SL(2,5) \circ SL(2,5)$ или $SL(2,5) \wr Z_2$.

О п р е д е л е н и е. Конечную группу G назовем kI- группой, если пересечение любых двух различных силовских 2-подгрупп из G имеет 2-ранг не более k и существует пересечение 2-ранга k.

Конечные $2I$ и $3I$ – группы исследовал Г.Строт в [206], [207].

Т е о р е м а 3. Пусть группа G является $2I$ - группой. Тогда одно из следующих утверждений верно:

I) если G разрешима, то порядок $G/O_{2',2}(G)$ делит 400, I20 или 36, либо этот порядок нечетен;

2) если G неразрешимая группа, то $G_1 = O^{2'}(G/O(G))$ изоморфна одной из групп: а) $PSL(2,q)$, q - нечетно, $q \not\equiv \pm 3 \pmod 8$; б) $PSL(3,q), PSU(3,q^2)$, q нечетно; в) ${}^2G_2(q)$, $q=3^{2n+1}$, A_7, M_{11}; г) $A_5 \times A_5$, $PSU(3,4^2) \times PSU(3,4^2)$, $A_5 \times PSU(3,4^2)$; д) $PSL(3,q) < G_1 \leq Aut(PSL(3,q))$, q - нечетно; е) $PSU(3,4^2) \leq G \leq Aut(PSU(3,4^2))$; ж) расщепляемому расширению разрешимой группы при помощи J_1, $PSL(2,q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$; з) нерасщепляемому расширению разрешимой группы при помощи A_7, Σ_7, $Sz(8)$; и) нерасщепляемому расширению разрешимой группы при помощи подгрупп из $P\Gamma L(2,q)$, $Aut(Sp(4,q))$, $Aut(PSL(4,q))$, $Aut(PSU(4,q^2))$, q - нечетно; к) нерасщепляемому расширению разрешимой группы при помощи подгрупп из $Aut(PSL(2,q_1)) \times PSL(2,q^2)$, $q_1, q_2 \equiv \pm 3 \pmod 8$.

Выделение типов групп здесь соответствует плану доказательства теоремы.

Т е о р е м а 4. Пусть G – квазипростая $3I$ - группа с $O(G)=1$. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:

1) $SL(2,q)$, $SL(4,q)$, $SU(4,q^2)$, $Sp(4,q)$, $Sp(6,q)$, q нечетно;

2) совершенному центральному расширению для J_2 или A_7 с центром порядка 2.

3) совершенному центральному расширению для $PSL(3,4)$ с центром, изоморфным Z_4 ;

4) совершенному центральному расширению для $Sz(8)$ с центром, изоморфным E_4 ;

5) $PSL(2,q)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q^2)$, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, q нечетно;

6) $Sz(q)$, $PSL(2,q)$, $PSU(3,q^2)$, q четно;

7) группе типа Ru;

8) A_7, M_{11}, M_{12}, J_1, $O'N$.

Как мы уже отметили, в качестве следствия этой теоремы получается описание простых групп 2-ранга 3.

В работе [141] М.Герцог назвал пересечение двух силовских 2-подгрупп центральным, если это пересечение содержит инволюцию из центра некоторой силовской 2-подгруппы или является единичным.

В следующих результатах, полученных М.Герцогом [141, 142] и М.Герцогом и Е.Шультом в [146] , накладываются ограничения на ранг уже не всех пересечений, а только центральных.

Т е о р е м а 5. Пусть G – простая группа, в которой все центральные пересечения силовских 2-подгрупп циклические. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:

1) $PSL(2,q)$, $q=2^n>2$;

2) $Sz(q)$, $q=2^{2n+1}\geqslant 8$;

3) $PSU(3,q^2)$, $q=2^n>2$;

4) $PSL(2,q)$, $q\equiv\pm 3 \pmod 8$, $q>5$;

5) J_1.

Т е о р е м а 6. Если G – простая группа, в которой все центральные пересечения силовских 2-подгрупп имеют 2-ранг не более 1, то либо G является TI – группой, либо G изоморфна J_1 или $PSL(2,q)$, $q\equiv\pm 3 \pmod 8$, $q>5$.

§ 2. Н а с ы щ е н н ы е   п е р е с е ч е н и я .

Если G – группа и p – простое число, то насыщенной подгруппой в G называется p – подгруппа D из G , которая является силовской p – подгруппой в $O_{p',p}(N_G(D))$ и для которой $N_G(D)$ – p-скованная группа [35] .

Роль насыщенных p – подгрупп при изучении конечной группы с помощью ее p – локальных подгрупп показывает теорема Альперина-Голдшмидта (см. теорему 7, главы 3).

В.Д.Мазуров и С.А.Сыскин в [35] указывают другой аспект этой связи.

П р е д л о ж е н и е 7. Если G – конечная группа, а p – простое число, то либо p – длина каждой разрешимой подгруппы из G не превосходит единицы, либо в G найдется такая разрешимая подгруппа R 2-длины 2, что $O_2(R)$ является насыщенной в G подгруппой.

Примерами насыщенных p – подгрупп в конечной группе G являются ее силовские p – подгруппы, а также силовские p – подгруппы из $O_{p',p}(G)$. Отсюда ясно, что разрешимая группа, в которой нет насыщенных p – подгрупп, кроме силовских p – подгрупп, имеет p – длину равную единице. В.Д.Ма-

Фурер дал полную классификацию конечных групп с разрешимыми подгруппами единичной 2-длины [29]. Таким образом, при $p=2$ мы можем получать с помощью этого результата и предложения 7 дополнительную информацию о группе.

Основной результат, полученный в [35], следующий.

Т е о р е м а 8. Пусть G – конечная простая группа, в которой каждое насыщенное пересечение двух различных силовских 2-подгрупп имеет 2-ранг не более 2. Тогда либо вся группа G имеет 2-ранг не более 2, либо все разрешимые подгруппы из G имеют единичную 2-длину.

С.А.Сыскин [240] получил следующий результат.

Т е о р е м а 9. Если простая группа G содержит насыщенную 2-подгруппу 2-ранга не более 2, то нормальный 2-ранг G не превосходит 2.

Некоторое обобщение понятия насыщенного пересечения рассматривает Э.М. Пальчик в [37]. Громоздкость определений мешает нам привести его результаты.

§ 3. Максимальные пересечения

Максимальным называется пересечение силовских p – подгрупп конечной группы G, не вкладывающееся ни в какое другое пересечение силовских p – подгрупп группы G. Легко понять, что фактор-группа нормализатора в G максимального пересечения D по D является TI – группой.

Интересна постановка задачи в работах [143, 144] Герцога. Он восстанавливает строение всей группы только по одному максимальному пересечению силовских 2-подгрупп.

Т е о р е м а 10. Пусть G – конечная простая группа

и D – максимальное силовское 2-пересечение такое, что индекс нормализатора D в G нечетен. Тогда, если D – циклическая группа, то G изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,q), q>3$ и $q \neq 2^n \pm 1$, где $n>2$; $PSL(3,q), q \equiv -1 \pmod 4$ и $q \neq 2^n - 1$, где $n \geq 2$; $PSU(3,q), q \equiv 0,1 \pmod 4$ и $q \neq 2^n + 1$, где $n \geq 2$; $Sz(q), J_1$. Если D – (обобщенная) группа кватернионов, то силовская 2-подгруппа из G полудиэдральная или изоморфна $Z_{2^n} \wr Z_2$. Строт в работе [208] продолжил исследования Герцога.

Т е о р е м а II. Конечная простая группа G имеет максимальное пересечение D 2-ранга 2, индекс нормализатора которого в G нечетен, тогда и только тогда, когда G изоморфна J_2, J_3 или $PSp(6,6)$.

§ 4. Абелевы пересечения.

Гоми в [III] вводит и изучает класс (CI) – групп, т.е. конечных групп, в которых пересечение любых двух различных силовских 2-подгрупп содержится в центре некоторой силовской 2-подгруппы. Им доказана следующая теорема.

Т е о р е м а I2. Пусть G – (CI) – группа. Тогда одно из следующих утверждений верно:

I) G – разрешимая группа 2-длины I;

2) силовская 2-подгруппа из G – абелева;

3) G имеет нормальный ряд $1 \leq N < M \leq G$, где N и G/N – нечетного порядка, а M/N является центральным произведением абелевой 2-группы и группы, изоморфной $SL(2,5)$;

4) G содержит нормальную подгруппу M нечетного

индекса в G, удовлетворяющую одному из следующих условий: а) M есть прямое произведение абелевой 2-группы и группы, изоморфной $Sz(q)$, $PSU(3,q^2)$ или $SU(3,q^2)$, где q – степень числа 2, большая 2; б) M есть центральное произведение абелевой 2-группы и нетривиального совершенного центрального расширения $Sz(8)$.

Интересен также и следующий факт (см. [III]), проясняющий строение разрешимых (CI) – групп.

Теорема I3. Пусть G – $2'_2$-замкнутая, но не 2-замкнутая группа и P – силовская 2-подгруппа из G. Положим $H = O(G)$ и $C = C_P(H)$. Если G – (CI) – группа, то одно из следующих утверждений верно:

I) P – абелева группа;

2) C содержится в $Z(P)$, $Z(P)/C$ – элементарная абелева группа. P имеет подгруппу Q со следующими свойствами: $C \leq Q$, Q/C – обобщенная группа кватернионов и $P = QZ(P)$. Более того, каждый композиционный P – фактор для H или централизуется P или инвертируется элементом из $Z(Q) - C$ (легко видеть, что $|Z(Q):C| = 2$).

Обратно, если G удовлетворяет условиям I) и 2), то она (CI) – группа.

Заметим, что если G – (CI) – группа, то все разрешимые подгруппы из G имеют единичную 2-длину и, следовательно, теорема I2 является следствием результата В.Д.Мазурова [29].

Следующий важный результат [209] принадлежит Г.Строту.

Теорема I4. Пусть G – конечная простая группа, в которой пересечение любых двух различных силовских 2-подгрупп абелево. Тогда силовская 2-подгруппа из G является диэдральной группой или имеет класс нильпотентности не более 2.

§5. Теоремы Бендера и Ашбахера

В I97I году появилась статья Бендера [64], содержащая обобщение теоремы Судзуки о TI – группах.

Собственная подгруппа H конечной группы G называется сильно вложенной в G, если H – четного порядка и для любого элемента $g \in G - H$ подгруппа $H \cap H^g$ имеет нечетный порядок.

Теорема I5. Пусть конечная группа G обладает сильно вложенной подгруппой. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

I) силовская 2-подгруппа из G циклическая или группа кватернионов; 2) $O^{2'}(G/O(G))$ изоморфна простой TI – группе.

Свойство конечной группы иметь сильно вложенную подгруппу эквивалентно следующему условию:

Существует собственное подмножество $\mathfrak{M}$ множества силовских 2-подгрупп из G такое, что каждая силовская 2-подгруппа из $\mathfrak{M}$ имеет с любой не содержащейся в $\mathfrak{M}$ силовской 2-подгруппой единичное пересечение.

Докажем, что эти условия эквивалентны.

Возьмем в G наименьшее множество $\mathfrak{M}$ силовских 2-подгрупп с таким свойством и рассмотрим подгруппу H элементов из G, оставляющих $\mathfrak{M}$ инвариантным. Если P – силовская 2-подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{M}$, а $g \in P$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^g \neq \emptyset$ и минимальность $\mathfrak{M}$ влечет $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^g = \mathfrak{M}$, откуда $q \in H$. Теперь, очевидно, что $\mathfrak{M}$ – это множество силовских 2-подгрупп из H и поэтому H сильно вложена в G.

Обратное утверждение является непосредственным следствием определения сильно вложенной подгруппы.

Теперь обратим внимание на то, что собственная подгруппа H четного порядка тогда и только тогда сильно вложена в G, когда она содержит нормализатор каждой своей нетривиальной 2-подгруппы. В связи с этим Ашбахер [57] вводит следующее определение. k – порожденным ядром, содержащим силовскую 2-подгруппу P из G, называется подгруппа

$$\Gamma_{P,k}(G) = \langle N_G(X) \mid X \leq P,\ m(X) \geq k \rangle .$$

Т е о р е м а I6. Пусть $\Gamma_{P,2}(G) \leq H < G$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

I) $m(G) \leq 1$;

2) $m(G) = 2$ и $G = H\,O(G)$;

3) $\bar{G} = G/O(G) \cong GL(2,3)$ или совершенному центральному расширению Z_2 при помощи Σ_4 или A_9;

4) $\bar{G}$ содержит нормальную подгруппу L, изоморфную $PSL(2,q)$, $Sz(q)$, $PSU(3,q^2)$, q – четно, совершенному центральному расширению Z_2 при помощи $Sz(8)$, $SL(2,5)$ или $SL(2,5) \circ SL(2,5)$. $K = C_{\bar{G}}(L)$ имеет 2-ранг не более I и если $m(K) = 1$, то LK содержит все инволюции из $\bar{G}$.

Так же, как и в случае Бендера, условие теоремы Ашбахера имеет такой эквивалент:

Существует собственное подмножество $\mathfrak{M}$ множества силовских 2-подгрупп из G такое, что каждая силовская 2-подгруппа из $\mathfrak{M}$ имеет с любой не содержащейся в $\mathfrak{M}$ силовской 2-подгруппой пересечение ранга не более I.

Доказательство этой эквивалентности ничем не отличается от доказательства предыдущей.

§ 6. Нормальные пересечения

Конечную группу, в которой пересечение любых двух силовских 2-подгрупп нормально по крайней мере в одной из них, будем называть $H\Pi^*$ – группой. Группу, в которой пересечение любых двух силовских 2-подгрупп нормально в каждой из них, назовем $H\Pi$ – группой. В работе трех авторов [I5] получен следующий результат.

Т е о р е м а I7. Всякая $H\Pi^*$– группа является и $H\Pi$– группой. Если P – силовская 2-подгруппа $H\Pi$-группы G и $O_2(G) = 1$, то $\Omega_1(P)$ содержится в $Z(P)$.

Из этой теоремы и результата Гольдшмидта [I09] мы получаем полную классификацию простых $H\Pi^*$– групп. Простые конечные $H\Pi^*$– группы являются либо TI – группами, либо имеют абелеву силовскую 2-подгруппу.

Естественно в обобщении рассмотренной задачи ввести следующие классы групп.

ΠH – группой будем называть группу, в которой нормализатор пересечения любых двух ее силовских 2-подгрупп имеет нечетный индекс.

ΠH^* – группой будем называть группу, в которой для любых двух ее силовских 2-подгрупп P и Q пересечение $P \cap Q$ нормально в некоторой силовской 2-подгруппе из $\langle P, Q \rangle$.

Ясно, что всякая ΠH^*-группа является и ΠH - группой. Простые группы с силовской 2-подгруппой ступени нильпотентности 2 показывают, что класс ΠH^*- групп шире класса $H\Pi$--групп. Простейший пример - $PSL(2,7)$. Докажем, что класс ΠH^*-групп шире класса ΠH -групп. Для этого предварительно установим справедливость следующего утверждения.

Разрешимая ΠH^* -группа является $H\Pi$ -группой.

Пусть G - минимальный контрпример к утверждению, а P и Q - такие ее силовские 2-подгруппы, что $N_G(P\cap Q)$ не содержит по крайней мере одну из них, скажем P. Легко понять, что свойство ΠH^* наследственно для подгрупп нечетного индекса. Тогда, в силу выбора G, $G = \langle P, Q\rangle$.

Легко показывается, что свойство ΠH^* наследственно для фактор-групп. Поэтому, если бы $O_2(G) \neq 1$, то, в силу выбора G, $G/O_2(G)$ была бы $H\Pi$ -группой. Получили противоречие.

Покажем теперь, что G -2'- замкнута. Допустим, противное, т.е. подгруппа $U = O(G)P$ отлична от G. Тогда $O_2(U) = 1$ в силу выбора G и 2-скованности U, U есть $H\Pi$-группа. Тогда по теореме I7 $\Omega_1(P) \leq Z(P)$. Из $G = \langle P, Q\rangle$ теперь следует, что $\Omega_1(P\cap Q) \leq Z(P)$. Мы получили противоречие с тем, что $O_2(G)=1$.

Теперь доказываемое вытекает из следующего утверждения:

2'-замкнутая ΠH^*-группа является $H\Pi$ -группой.

Пусть $G = K \leftthreetimes P$, P и Q - силовские 2-подгруппы из G. Так как $N_G(P\cap Q)$ содержит некоторую силовскую 2-подгруппу из G, то $K(P\cap Q) \lhd G$. Отсюда, $K(P\cap Q)\cap P = P\cap Q$ нормально в P.

Пример ΠH, но не ΠH^*-группы. Исходя из некоторого представления группы $PSL(2,7)$, построим группу $G=V\leftthreetimes H$, где V - элементарная абелева p - группа, $P\in Syl_p(G)$, $H \cong PSL(2,7)$, причем $C_G(V)=V$. Группа G является ΠH -группой, так как порядок ее силовской 2-подгруппы равен 8, и все инволюции в $PSL(2,7)$ центральны.

Если бы G была ΠH^* -группой, то ΠH^*-группой была бы и ее подгруппа VP нечетного индекса. Из вышедоказанного утверждения следует тогда, что VP - даже $H\Pi$ -группа. Вследствие $C_G(V)=V$ справедливо $O_2(VP) = 1$, поэтому, в силу теоремы , $\Omega_1(P) \leq Z(P)$. Но P - группа диэдра 8-го порядка. Противоречие.

Этот пример показывает также, что свойство ΠH не наследственно для подгрупп нечетного индекса.

Отметим еще один примыкающий сюда вопрос:

"Каковы группы, в которых индексы всех 2-локальных подгрупп нечетны?"

§ 7. Минимальные пересечения

Гипотеза. Пусть G конечная группа, а P - ее силовская p -подгруппа. Предположим, что $O_p(G)=1$. Тогда в G существует силовская p -подгруппа Q, такая, что $P\cap Q = 1$.

Первый результат в этом направлении был получен Бродкеем [69].

Теорема I8. Пусть G - конечная группа, p - простое число и силовская p - подгруппа P из G абелева. Тогда, если $O_p(G) = 1$, то существует силовская p-подгруппа Q из G такая, что $P \cap Q = 1$.

Далее этот результат обобщил М.Герцог [138] при условии $P \cap Q \trianglelefteq P$ для любой силовской p-подгруппы Q из G, а затем и в следующей теореме.

Т е о р е м а 18'([140]). Пусть i – целое число. Тогда гипотеза верна, если $\Omega_i(P) \cap \Omega_i(Q) \trianglelefteq \Omega_i(P)$ для любой силовской p-подгруппы Q из G.

Следующий результат принадлежит Лаффею [162].

Т е о р е м а 19. Пусть G – конечная группа и p – простое число такое, что $O_p(G) = 1$. Пусть P и Q силовские p-подгруппы из G такие, что $|P \cap Q|$ минимален. Тогда $Z(P) \cap Z(Q) = 1$.

Приведем доказательство этой теоремы.

Положим $D = P \cap Q$. Пусть $z \in Z(P) \cap Z(Q)$ и $z \neq 1$. Тогда $C_G(z) \geq X = \langle P, Q \rangle$. Теперь $D_0 = O_p(X)$ содержится в D. Так как $O_p(G) = 1$, то существует силовская p-подгруппа R такая, что $D_0 \not\leq R \cap X$. Выберем силовскую p-подгруппу S из X так, что $S \geq R \cap X$. Так как S сопряжена с P в X, то существует силовская p-подгруппа T из X такая, что $|S \cap T| = D$. Однако $R \cap T = R \cap X \cap T \leq S \cap T$ и в силу минимальности $|D|$, $R \cap T = S \cap T$. Ввиду того, что $D_0 \not\leq R$, мы получили противоречие.

Доказательство этой теоремы дословно можно применить для доказательства следующего полезного факта.

Т е о р е м а 20. Пусть G – конечная группа и $O_p(G) = 1$. Пусть P и Q такие силовские p-подгруппы из G, что $|P \cap Q|$ минимален. Тогда $O_p(\langle P, Q \rangle) = 1$.

Пусть $\mathcal{H}$ – множество всех неединичных p-подгрупп конечной группы G. В статье [140] Герцог определил Ω-функтор W как отображение $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $W(P) \leq P$ для всех $P \in \mathcal{H}$;

2) $W(P^g) = W(P)^g$ для всех $P \in \mathcal{H}$, $g \in G$;

3) $W(P_1) \leq W(P_2)$ для всех P_1, P_2 из $\mathcal{H}$ таких, что $W(P_1) \leq P_2$.

Очевидным примером Ω-функтора является функтор Ω_i, определяемый следующим образом: $\Omega_i(P) = \langle x \in P \mid x^{p^i} = 1 \rangle$. Другой пример Ω-функтора приводит Лаффей в [163].

Пусть S – силовская p-подгруппа группы G, $k \geq 1$ и $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$ – последовательность целых чисел. Для $P \in \mathcal{H}$ определим $W(P) = \Omega_{n_i}(P)$, где i – наименьшее целое число $(1 \leq i < k)$, для которого $|\Omega_{n_i}(P)| < |\Omega_{n_i}(S)|$; если такого числа i не существует, то положим $W(P) = \Omega_{n_k}(P)$. Ясно, что это определение дает новый Ω-функтор только при $k > 1$. Очень интересно было бы расширить запас Ω-функторов.

В статье [140] Герцог доказал следующую теорему.

Т е о р е м а 21. Пусть G – конечная группа и $O_p(G) = 1$. Если $W(S) \cap W(T) \trianglelefteq \langle W(S), W(T) \rangle$ для любых силовских p-подгрупп S, T из G, то существуют силовские p-подгруппы P и Q в G такие, что $P \cap Q = 1$.

Этот результат обобщил Лаффей [163].

Т е о р е м а 22. Пусть G – конечная группа, $O_p(G) = 1$, а P и Q – силовские p-подгруппы из G такие, что $|W(W(P) \cap W(Q))|$ – минимален, тогда $O_p(\langle W(P), W(Q) \rangle) = 1$.

Для разрешимых групп гипотезу рассматривал Ито [153].

Т е о р е м а 23. Пусть G – конечная разрешимая группа. Тогда в G найдутся такие силовские p-подгруппы P и Q, что $P \cap Q = O_p(G)$, если выполнено одно из следующих условий:

1) p – нечетное простое число, отличное от числа Мерсенна;

2) порядок группы G нечетен;

3) $p=2$ и $|G|$ не делится на простое число Ферма и на простое число, сравнимое с 3 по модулю 4;

4) $p=2$, порядок G не делится на простое число Ферма и ее силовская 2-подгруппа P в каждой нециклической секции имеет нормальную элементарную абелеву подгруппу порядка 4;

5) нижний слой фактор-группы $P/O_p(G)$ имеет экспоненту p.

При $p=2$ А.Манн [169] ослабил условие 3).

Т е о р е м а 24. Если порядок конечной разрешимой группы не делится на простые числа Ферма и Мерсенна, то в G найдутся силовские 2-подгруппы, пересекающиеся по $O_2(G)$.

Существуют примеры, показывающие, что гипотеза неверна для разрешимых групп. На самый простой указал авторам А.И.Старостин. Это группа, изоморфная $E_9 \leftthreetimes D_8$, где D_8 действует точно на E_9. Однако не известны примеры конечных простых групп, опровергающих гипотезу.

§ 8. Группы с большими пересечениями силовских 2-подгрупп

Г и п о т е з а. Пусть G – конечная группа и

$O_{2',2}(G)=1$. Если в G существуют две различные силовские 2-подгруппы имеющие неединичное пересечение, и если для любых таких силовских 2-подгрупп P и Q из G индекс $P \cap Q$ в P не превосходит 2^n, то порядок P не больше чем 2^{2n}.

Благодаря теореме Бендера [64] эта гипотеза верна, если в группе G существуют силовские 2-подгруппы, пересекающиеся по единице. В самом деле, пусть $|P|>2^{2n}$ и S – силовская 2-подгруппа из G такая, что $P \cap S = 1$. Введем отношение ρ на множестве силовских 2-подгрупп группы G, положив $P \rho Q$ тогда и только тогда, когда $P \cap Q \neq 1$. Очевидно, это отношение рефлексивно и симметрично. Покажем, что оно транзитивно. Пусть $P \rho Q$ и $Q \rho R$. Тогда по условию мы имеем $|P : P \cap Q| \leq 2^n$ и $|P \cap Q : P \cap Q \cap R| \leq 2^n$. Поскольку $|P| > 2^{2n}$, то $P \cap Q \cap R \neq 1$. Таким образом, $P \cap R \neq 1$. Следовательно, ρ является отношением эквивалентности, а P и S принадлежит разным классам этого отношения. По теореме Бендера любые две силовские 2-подгруппы из G имеют единичное пересечение, так как $O_{2',2}(G)=1$. Это противоречит условиям гипотезы.

Используя теорему Алперина о четверных группах [[illegible]], легко показать, что гипотеза верна при $n=1$. В заметке [11] автором доказано, что гипотеза верна при $n=2$. Здесь мы рассмотрим случай $n=3$. Этот результат анонсирован в [12].

Т е о р е м а 25. Пусть G – конечная группа и $O_{2',2}(G)=1$. Пусть P – силовская 2-подгруппа из G, а $\mathfrak{M}$ – множество силовских 2-подгрупп из G, [illegible] с P неединичное пересечение. Если $|\mathfrak{M}|>1$ и $|P:P\cap Q|\leq 2^3$ для любой Q из $\mathfrak{M}$, то $|P|\leq 2^6$.

Приведем схему доказательства этой теоремы. Из-за приведенного выше замечания мы можем считать, что $\mathfrak{M}$ содержит все силовские 2-подгруппы из G, т.е. P имеет неединичные пересечения с P^g для любого g из G. Далее доказательство разбивается на два случая.

1. $Z(P)$ – нециклическая группа.

Пусть V_i – произвольная четверная подгруппа из $Z(P)$. По теореме Алперина [50] в G есть силовская 2-подгруппа S_i такая, что $S_i\cap V_i=1$. Пусть $H_i=V_i\times(P\cap S_i)$. Так как $|P:P\cap S_i|\leq 8$, то $|P:H_i|\leq 2$ и $\Phi(H_i)=\Phi(P\cap S_i)$. Ясно, что $\Phi(P\cap S_i)$ нормальная подгруппа в P. Таким образом, факторгруппа $P/\Phi(P\cap S_i)$ имеет элементарную абелеву подгруппу индекса не более 2. Следовательно, класс нильпотентности $P/\Phi(P\cap S_i)$ не превосходит 2. По теореме Ремака факторгруппа $P/\bigcap_i\Phi(P\cap S_i)$ изоморфна подгруппе из прямого произведения групп класса не более 2 и, таким образом, сама имеет класс не более 2. Но $\bigcap_i\Phi(P\cap S_i)$ нормальная подгруппа в P и, если $\bigcap_i\Phi(P\cap S_i)\neq 1$, то существует $V_k\leq Z(P)$ такая, что $\bigcap_i\Phi(P\cap S_i)\cap V_k\neq 1$. Это невозможно, так как $S_k\cap V_k=1$. Значит, $\bigcap_i\Phi(P\cap S_i)=1$ и, следовательно, класс нильпотентности P не превосходит 2. Пусть теперь $\Phi(P\cap S_i)\neq 1$ для всех i. Поскольку P класса не более 2, то $\Phi(P\cap S_i)$ принадлежит $Z(P)\cap Z(S_i)$. По теореме 19 $P\cap S_i$ не является пересечением минимального порядка. Но тогда $P=V_i\times(P\cap S_i)$ для любого i и, значит, любая четверная подгруппа из $Z(P)$ выделяется в P прямым множителем. Ясно, что в этом случае P – элементарная абелева группа, что

противоречит предположению $\Phi(P\cap S_i)\neq 1$. Значит, найдется такое число j, что $\Phi(P\cap S_j)=1$. В этом случае положим $H=V_j\times(P\cap S_j)$. Подгруппа H – элементарная абелева и индекса не больше 2 в P. Из теоремы Харады [131] вытекает, что либо H является силовской 2-подгруппой в группе G_1 и $|G:G_1|\leq 2$, либо P есть прямое произведение элементарной абелевой группы и группы диэдра порядка 8. Если H – силовская 2-подгруппа в G_1, то по результату [69] в G найдутся две силовские 2-подгруппы, пересекающиеся по 1, и значит, $|P|\leq 2^4$. Если P – прямое произведение элементарной абелевой группы и D_8, то $|P:Z(P)|=4$. Поскольку $|P\cap S_j:S_j\cap Z(P)|=2$ и $|P\cap S_j:P\cap Z(S_j)|\leq 4$, а по теореме [illegible] $Z(P)\cap Z(S_j)=1$, то $|P\cap S_j|\leq 8$. Следовательно, $|P|\leq 2^6$. Таким образом, первый случай рассмотрен.

2. $Z(P)$ – циклическая группа.

Так как $O_{2',2}(G)=1$, то существует g из G такой, что $Z(P)\cap P^g=1$. Поскольку индекс $P\cap P^g$ в P не превосходит 8 и $P\cap P^g$ не пересекается с $Z(P)$, то P изоморфно вкладывается в симметрическую группу подстановок степени 8. Отсюда, $|P|\leq 2^7$. Так как случай $|P|\leq 2^6$ не противоречит заключению теоремы, то мы можем считать, что $|P|=2^7$, $|P\cap P^g|=16$ и P является сплетением группы диэдра порядка 8 при помощи группы порядка 2. Выясняя теперь строение $P\cap P^g$ и используя характеризационные результаты о группах с силовской 2-подгруппой порядка не более 2^7 мы приходим к противоречию. Теорема доказана.

§ 9. Подгруппа, порожденная пересечениями силовской 2-подгрупп

В "Коуровской тетради" [22] под номером 2.30 П.Г.Конторович и А.И.Старостин сформулировали такую задачу:

Задача. Существуют ли конечные группы, в которых некоторая силовская p - подгруппа покрывается отличными от нее силовскими p -подгруппами?

В работе [27] В.Д.Мазуров назвал конечную группу, в которой любой элемент из силовской p -подгруппы P принадлежит некоторой другой силовской p -подгруппе из G, K_p-группой.

Теорема 26. (см. [27]). Конечная p -группа P тогда и только тогда вкладывается в некоторую K_p-группу в качестве силовской p -подгруппы, когда P - нециклическая группа.

В работе [13] рассматривается для $p=2$ ситуация в некотором смысле противоположная. Пусть P -силовская 2-подгруппа группы G. Через $D(P)$ мы обозначим подгруппу из P, порожденную всеми пересечениями P с другими силовскими 2-подгруппами, то есть $D(P) = < P \cap P^g \mid g \in G - N_G(P) >$.

Теорема 27. Если конечная группа G четного порядка имеет имеет силовскую 2-подгруппу P такую, что разность $P - D(P)$ содержит инволюцию , то группа G является расширением 2-группы при помощи TI - группы.

Интересно было бы исследовать конечные группы, содержащие инволюцию, которая не принадлежит ни одному пересечению силовских 2-подгрупп. Очевидно, что доказанная теорема была бы частным случаем этого описания.

В связи с этим приведем результат, принадлежащий Горди-гу [138] .

Теорема 28. Пусть G - конечная простая группа и i центральная инволюция из G . Если i принадлежит единственной силовской 2-подгруппе из G , то G является TI -группой.

§ 10. Силовские пересечения и BN- пара

В этом параграфе мы расскажем о результатах Гоми из [113] Говорят, что группа G имеет BN -пару, если G имеет подгруппы B и N , удовлетворяющие условиям:

1) $K = B \cap N$ - нормальная подгруппа из N ;
2) $W = N/K$ порождается множеством инволюций S ;
3) $sBw \subseteq BswB \cup BwB$ для каждого $s \in S$ и $w \in W$;
4) $sBs \neq B$ для каждого $s \in S$;
5) G порождается B и N .

Порождающее множество S для группы Вейля W единственным образом определяется этими условиями и число элементов из S называется рангом BN -пары.

Цель Гоми - показать, что если конечная группа G удовлетворяет определенным условиям на пересечения силовских 2-подгрупп, то G имеет BN -пару ранга 2 такую, что B есть нормализатор силовской 2-подгруппы P из G и $B \cap N$ есть дополнение для P в B .

Пусть G - конечная группа. Определим $\mathcal{H}_0$ как множестю неединичных 2-подгрупп H из G таких, что $N_G(H)/H$ имеет сильно вложенную подгруппу. Прямо из определения следует, что $H = O_2(N_G(H))$ и H есть правильное пересечение силовских 2-подгрупп из G.

Пусть $(P_i)_{i=0,1,\dots,n}$ есть семейство силовских 2-подгрупп из G и $(H_j)_{j=1,\dots,n}$ – семейство элементов из $\mathcal{H}_0$ и выполнены следующие условия:

1) $P_{i-1} \neq P_i$, $1 \le i \le n$;

2) $H_i \not\leq H_{i+1}$, $H_{i+1} \not\leq H_i$, $1 \le i \le n-1$;

3) $H_i \leq P_{i-1} \cap P_i$, $1 \le i \le n$.

Тогда пару этих двух семейств $(P_i, H_j)_n$ будем называть путем длины n. Более того, этот путь назовем собственным, если $\bigcap_{j=1}^{n} H_j \neq 1$, и соединяющим P с Q, если $P_n = Q$ и $P_0 = P$.

Приведем некоторые свойства собственных путей.

I. Если P и Q различные силовские 2-подгруппы группы G и $P \cap Q \neq 1$, то существуют силовские 2-подгруппы $P_0 = P, P_1, \dots, P_n = Q$ со следующими свойствами: 1) $H_i = P_{i-1} \cap P_i$ является правильным пересечением для всех i $(1 \le i \le n)$;

2) $H_i \in \mathcal{H}_0$, $1 \le i \le n$;

3) $P \cap Q = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$;

4) P_{i-1} и P_i сопряжены элементом из $N_G(H_i)$, $1 \le i \le n$.

Из этого факта очевидным образом вытекает, что различные силовские 2-подгруппы P и Q из группы G, имеющие неединичное пересечение, соединяются путем $(P_i, H_j)_n$ и таким, что $P \cap Q = \bigcap_{j=1}^{n} H_j$. Это важное свойство и послу-

жило оправданием для определения и изучения собственных путей. Все эти определения и свойства легко переносятся на силовские p-подгруппы для любого простого числа p.

Интересное свойство путей вытекает из теоремы Бендера [64].

II. Пусть G – группа с силовской 2-подгруппой P. Если $\mathcal{H}_0(P)$ содержит единственный минимальный элемент H относительно включения, то или $H \triangleleft G$, или 2-ранг G равен I. Через $\mathcal{H}_0(P)$ обозначается $\{H \in \mathcal{H}_0 \mid H \le P\}$.

Сформулируем теперь основные результаты статьи [113].

Т е о р е м а 29. Пусть G – конечная группа, удовлетворяющая следующим условиям:

1) силовская 2-подгруппа из G содержит точно два элемента множества $\mathcal{H}_0$;

2) если $H \in \mathcal{H}_0$, то 2-ранг $N_G(H)/H$ не менее 2;

3) если $(P_i, H_j)_n$ – собственный путь и H_1 – элемент $\mathcal{H}_0$, отличный от H и содержащийся в P_0, то $P_0 = H \bigcap_{j=1}^{n} H_j$.

Тогда G имеет BN-пару ранга 2 такую, что B – нормализатор в G силовской 2-подгруппы P из G и N – нормализатор в G дополнения K для P в B. Более того, $B \cap N = K$ и группа Вейля этой BN-пары имеет порядок $2(d+1)$, где d – максимум длин собственных путей в G.

Фонг и Зейц [*] определили все конечные группы с BN-парой ранга 2, у которой $B = F(B)(B \cap N)$, где $F(B)$ – подгруппа Фиттинга группы B. Поскольку в заключении теоремы 29 все условия теоремы Фонга и Зейца выполнены, то можно

[*] FONG P., SEITZ G. Groups with a (B,N)-pair of rank 2, I, II. Inventiones Math., 1973, vol.21, № 1-2, p.1-57; 1974, vol.24, № 3, p.191-240.

явно описать строение группы G из заключения теоремы 29. А именно, если $d=1$, то $O^{2'}(G)$ является центральным произведением двух групп, каждая из которых изоморфна одной из групп $PSL(2,2^n)$, $Sz(2^n)$, $PSU(3,2^{2n})$, $SU(3,2^{2n})$, $n\geq 2$; если $d>1$, то $O^{2'}(G)$ есть накрывающая группа для $PSL(3,2^n)$, $PSp(4,2^n)$, $PSU(4,2^{2n})$, $PSU(5,2^{2n})$, $G_2(2^n)$, ${}^3D_4(2^n)$ или ${}^2F_4(2^n)$. Обратно, все указанные группы удовлетворяют условиям 1) и 3), а если $n>1$, то и условию 2).

Т е о р е м а 30. Пусть G – конечная группа, удовлетворяющая условиям 1) и 3) теоремы 29 и условию

(2′) если $H \in \mathcal{H}_0$, то $N_G(H)$ имеет точно $|N_G(H)/H|_2+1$ силовских 2-подгрупп. Если максимум длин собственных путей d в группе G нечетен, то G имеет BN-пару ранга 2, где $B=N_G(P)=P\leftthreetimes K$, $P\in Syl_2(G)$, $N=N_G(K)$ и группа Вейля этой BN-пары имеет порядок $2(d+1)$.

Автор статьи [113] считает неинтересным соответствующее утверждение для четного d, хотя и умеет его доказывать.

Теорема 30 на самом деле представляет собой небольшое улучшение теоремы 29.

В качестве следствия этих теорем автор [113] получает описание простых групп с силовской 2-подгруппой класса 2 при условии, что все 2-локальные подгруппы 2-скованы и не имеют нееденичных нормальных подгрупп нечетного порядка.

В заключении параграфа заметим, что исходя из наличия BN-пары в простой группе лиевского типа над полем характеристики p, мы можем находить в ней все p-силовские пересечения. Они получаются следующим образом. Пусть $G=G(q)$ – простая группа лиевского типа, определенная над полем $GF(q)$ характеристики p. Зафиксируем BN-пару для G. Тогда $B=U\leftthreetimes H=N_G(U)$ для силовской p-подгруппы U из G, H – абелева p'-группа, нормальная в N, и $W=N/H=\langle \bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_n\rangle$ – группа Вейля, порожденная фундаментальными отражениями $\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_n$. С W ассоциируется система корней Δ в вещественном n-мерном евклидовом пространстве с множеством положительных корней Δ^+ и фундаментальной системой $\{r_1,\ldots,r_n\}$ (см. [6]). Каждому корню $r\in\Delta$ соответствует "корневая" подгруппа U_r из G такая, что $G=\langle U_r \mid r\in\Delta\rangle$ и $U=\prod_{r\in\Delta^+}U_r$ при некотором фиксированном упорядочении Δ^+. Тогда H нормализует каждую подгруппу U_r и подстановочные представления W на Δ и на $\{U_r \mid r\in\Delta\}$ эквивалентны при соответствии $r \leftrightarrow U_r$. Так как $G=BNU$, то пересечение $U\cap U^g$ для любого $g\in G$ равно $U\cap U^{g_1}$, где $g_1=wu$, $w\in N$, $u\in U$. Если $\bar{w}=wH$ – соответствующий w элемент группы W, то $U\cap U^w=\prod_{r\in\bar{w}(\Delta^+)\cap\Delta^+}U_r$ и, следовательно, $U\cap U^{g_1}=\prod_{r\in\bar{w}(\Delta^+)\cap\Delta^+}U_r^u$. Зная действие W на Δ и коммутаторные соотношения в U, мы найдем $U\cap U^g$ для любого g из G.

§ 11. Пересечения нескольких силовских 2-подгрупп

В этом параграфе в отличии от других пересечение силовских p-подгрупп не означает пересечение двух силовских p-подгрупп. Сначала мы отметим формулу для подсчета числа силовских p-подгрупп в конечной группе, содержащих заданную p-подгруппу T. На эту формулу иное внимание обратил А.Н.Фомин.

Предложение 31. Пусть $\sigma(T)$ — это число силовских p-подгрупп конечной группы G, содержащих p-подгруппу T, а силовская p-подгруппа P одна из них. Обозначим через k — число подгрупп, сопряженных с T в G, принадлежащих P. Тогда

$$\sigma(T) = k\,\frac{|N_G(T)|}{|N_G(P)|}.$$

Для доказательства этой формулы достаточно двумя различными способами подсчитать число подгрупп сопряженных с T в G. А именно, $|G:N_G(P)|\cdot k = |G:N_G(T)|\,\sigma(T)$.

Эта формула очень полезна для вычислений в конкретных группах.

Иш-Шалом в работе [149] показал, что пересечение любых $2n+1$ силовских 2-подгрупп в конечной группе равно пересечению некоторых $2n$ из них $(n \geq 1)$.

Назовем группу, в которой любые n различных силовских 2-подгрупп пересекаются по единице, $I(n)$ - группой (это обозначение отличается от принятого в [149]).

Из предыдущего замечания следует, что конечные $I(3)$ - группы это в точности TI - группы.

В работе [149] описаны конечные $I(5)$ - группы.

Теорема 32. Если G — конечная $I(5)$-группа, содержащая более трех силовских 2-подгрупп, то $O^{2'}(G/O(G))$ изоморфна одной из следующих групп:

а) силовской 2-подгруппе из G'; б) $GL(2,3)$, $SL(2,3)$, $PSL(2,3)$ или расширению таких групп при помощи группы ранга 1; в) расширению 2-группы при помощи $PSL(2,q)$, $Sz(q)$, $PSU(3,q^2)$, где q степень числа 2; г) $PGL(2,3)$, $PGL(2,5)$, $PSL(2,11)$, $PSL(2,13)$.

В настоящее время описаны конечные простые $I(n)$-группы для $n \leq 17$. Мы приведем эти описания в виде таблицы давая в каждой последующей строке только прибавку.

n	Конечные простые $I(n)$ -группы	Авторы результата
3	Ti -группы	Судзуки [215]
5	$PSL(2,q)$, $q=11,13$	Иш-Шалом [149]
7	$PSL(2,q)$, $q=7,9,19$; J_1	Иш-Шалом [149]
9	$PSL(2,q)$, $q=27,29$	В.И.Зенков [238]
$11 \leq n \leq 17$	$PSL(2,q)$, $q \leq 61$, $q \neq 47,49$, q нечетно; $PSL(3,4)$; $PSL(3,3)$; M_{11}; A_7	В.И.Зенков (не опубликовано)

Как заметил В.И.Зенков, в заключении теоремы, описывающей $I(7)$-группы, [149] содержатся группы $PSL(3,3)$ и M_{11}, которые являются на самом деле $I(17)$-группами.

В следующих трех теоремах Иш-Шалом (см. [152]) под центральным p-силовским пересечением в группе G понимается пересечение нескольких силовских p-подгрупп из G, содержащее центр некоторой силовской p-подгруппы G.

Теорема 33. Пусть для каждого центрального p-силовского пересечения T в группе G, $\sigma(T) \leq 2p$. Тогда в G существует абелева сильно замкнутая p-подгруппа.

Теорема 34. Пусть для каждого центрального p-силовского пересечения T в группе G, имеющего p-ранг более 2, $\sigma(T) \leq p$. Тогда для силовской p-подгруппы

P из G справедливо одно из следующих утверждений:

1) $\Omega_1(Z(P))$ сильно замкнута в P относительно G;

2) p-ранг P равен 2;

3) существует x из P такой, что $C_P(x) \cong Z_p \times Z_p$.

Т е о р е м а 35. Пусть для каждого центрального p-силовского пересечения T в группе G, имеющего p-ранг более 2, $\mathfrak{S}(T) \leq 2p$. Тогда либо в G существует абелева сильно замкнутая p-подгруппа, либо в силовской p-подгруппе P из G найдется такой элемент x, что $C_P(x) \cong Z_p \times Z_p$.

§ 12. Пересечения силовских p-подгрупп и p-длина p-разрешимых групп

Холлом и Хигменом доказано, что p-длина конечной p-разрешимой группы ограничена некоторыми инвариантами ее силовской p-подгруппы. В статье [4] А.Г.Аниценко и В.С.Монахов изучают влияние p-силовских пересечений p-разрешимой группы G на p-длину $\ell_p(G)$ группы G. Здесь мы назовем пересечение двух силовских p-подгрупп группы G центральным, если оно содержит центр одной из них. Легко увидеть, что если в G нет центральных пересечений, то $\ell_p(G) \leq 1$.

Т е о р е м а 36. $\ell_p(G)$ не превосходит числа образующих некоторого центрального пересечения двух силовских p-подгрупп G.

Т е о р е м а 37. Если $\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1$, то $\ell_p(G)$ не превосходит ранга некоторого центрального пересечения

двух силовских p-подгрупп G.

Существуют примеры, показывающие, что оценки в теоремах точные и ограничение $\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1$ существенно.

§ 13. Группы с максимальной силовской 2-подгруппой и некоторые обобщения

Задача описания конечных групп с максимальной силовской 2-подгруппой известна уже давно. Многие математики решали эту задачу при дополнительных ограничениях. Впервые Бауман [60] получил следующую классификацию неразрешимых групп с максимальной силовской 2-подгруппой.

Т е о р е м а 38. Пусть G - конечная неразрешимая группа с максимальной силовской 2-подгруппой. Тогда $O^2(G/F(G))$ - прямое произведение простых групп с диэдральными силовскими 2-подгруппами.

Используя идеи [30], Бауман в [61] исследует более общую ситуацию.

Т е о р е м а 39. Пусть G - конечная группа, которая порождается любыми двумя различными своими силовскими 2-подгруппами и $H = G/O_2(G)$. Тогда выполняется одно из следующих условий:

1) $O(H)$ - минимальный нормальный делитель в H и $H/O(H)$ - 2-группа;

2) $H/Z(H)$ изоморфна $PSL(2,q)$, $Sz(q)$ или $PSU(3,q^2)$, где q - степень числа 2, большая 2;

3) $O^2(H/Z(H))$ - прямое произведение групп, сопряженных в $H/Z(H)$ и изоморфных $PSL(2,q)$

при $q = 2^n \pm 1 > 5$;

4) H изоморфна расширению $PSL(3,4)$ с помощью группы порядка 2, централизующей в $PSL(3,4)$ подгруппу, изоморфную $PSL(2,4)$.

Самый общий результат, полученный Бауманом в этом направлении - это описание конечных групп с 2-замкнутым централизатором центральной инволюции [241].

Т е о р е м а 40. Пусть G - конечная группа без нетривиальных разрешимых нормальных подгрупп и центр некоторой силовской 2-подгруппы из G содержит инволюцию, централизатор которой в G 2-замкнут. Тогда $O^{2',2}(G)$ -прямое произведение простых групп, каждая из которых изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,q)$, $Sz(q)$, $PSU(3,q^2)$, $PSL(3,q)$, $PSp(4,q)$, $q = 2^n > 2$; $PSL(2,q)$, $q = 2^n \pm 1 > 3$.

Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

1. АЛЕЕВ Р.Ж. Конечные группы с циклическими коммутантами силовских 2-подгрупп.- Мат. сб., 1975, т.97, № 3, с.323-340.
2. АЛЕЕВ Р.Ж. О сопряжённости инволюций в конечных группах с разложимыми силовскими 2-подгруппами.- Алгебра и логика, 1975, т.14, № 5, с.491-522.
3. АЛЕЕВ Р.Ж. О конечных группах с разложимыми силовскими 2-подгруппами.- Алгебра и логика, 1975, т.14, № 6, с.611-646.
4. АНИЩЕНКО А.Г., МОНАХОВ В.С. Центральные пересечения и φ - длина φ - разрешимых групп.- Докл. АН БССР, 1977, т.21, № 11, с.968-971.
5. БРАУЭР Р.Б. О строении групп конечного порядка.- В кн.: Междунар. мат. конгресс в Амстердаме, 1954. Обзор. докл. М., Физматгиз, 1961, с.23-25.
6. БУРБАКИ Н. Группы и алгебры Ли. М., Мир, 1972.
7. ИВАХОРИ Н. Централизаторы инволюций в конечных группах Шевалле.- В кн.: Семинар по алгебраическим группам. М., Мир, 1973, с.463-487.
8. ИЛЬИНЫХ А.П. О конечных группах, силовская 2-подгруппа которых является расширением метациклической группы с помощью подгруппы из группы диэдра порядка 8. Свердловск, Свердл. гос. пед. ин-т, 1973. 73 с. Библиогр.: 32 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 26 нояб. 1973 г. ; № 7423-73 Деп.).
9. ИЛЬИНЫХ А.П. Характеризация групп $L_3(2^n)$.- Мат. заметки, 1975, т.18, № 6, с.861-868.
10. ИЛЬИНЫХ А.П. О конечных группах, силовская 2-подгруппа которых имеет самоцентрализующуюся элементарную абелеву подгруппу.- В кн.: Пятый Всесоюз. симпоз. по теор. групп. Новосибирск, 1976, с.31.
11. КАБАНОВ В.В. Конечные группы с большими пересечениями силовских 2-подгрупп.- Сиб. мат. журн., 1976, т.17, № 5, с.1188-1189.
12. КАБАНОВ В.В. Конечные группы с большими пересечениями силовских 2-подгрупп.- В кн.: Пятый Всесоюз. симпоз. по теор. групп. Новосибирск, 1976, с.32.

13. КАБАНОВ В.В. О пересечениях силовских 2-подгрупп в конечных группах.- Мат. заметки, 1978, т.24, № 5, с.615-619.

14. КАБАНОВ В.В., МАЗУРОВ В.Д., СЫСКИН С.А. Конечные простые группы, силовские 2-подгруппы которых обладают экстраспециальной подгруппой индекса 2.- Мат. заметки, 1973, т.14, № 1, с.127-132.

15. КАБАНОВ В.В., МАХНЁВ А.А., СТАРОСТИН А.И. Конечные группы с нормальными пересечениями силовских 2-подгрупп.- Алгебра и логика, 1976, т.15, № 6, с.655-659.

16. КОНДРАТЬЕВ А.С. Конечные простые группы, силовская 2-подгруппа которых есть расширение абелевой группы посредством группы ранга 1.- Алгебра и логика, 1975, т.14, № 3, с.288-303.

17. КОНДРАТЬЕВ А.С. Конечные простые группы, силовские 2-подгруппы которых имеют циклический коммутант.- Сиб. мат. журн., 1976, т.17, № 1, с.85-90.

18. КОНДРАТЬЕВ А.С. Конечные простые группы с силовскими 2-подгруппами порядка 2^7.- Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, т.41, № 4, с.752-767.

19. КОНДРАТЬЕВ А.С. Конечные группы, силовская 2-подгруппа которых содержит элементарную абелеву подгруппу индекса 4.- Алгебра и логика, 1977, т.16, № 5, с.557-576.

20. КОНДРАТЬЕВ А.С. Некоторые замечания о конечных группах с разложимой силовской 2-подгруппой.- Сиб. мат. журн., (в печати).

21. КОСТРИКИН А.И. Конечные группы.- В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия. М., ВИНИТИ, 1966, с.7-46. (Итоги науки).

22. КОУРОВСКАЯ тетрадь (нерешённые задачи теории групп). Новосибирск, Ин-т мат. СО АН СССР, 1976.

23. МАЗУРОВ В.Д. О конечных группах с циклическими силовскими подгруппами для всех нечётных простых чисел.- В кн.: Тр. междунар. конгресса математиков, Москва, 1966. Тез. кратких науч. сообщ., секция 2. М., 1966, с.48.

24. МАЗУРОВ В.Д. О конечных группах с данной силовской 2-подгруппой.- Докл. АН СССР, 1966, т.168, № 3, с.519-521.

25. МАЗУРОВ В.Д. Конечные группы, силовская 2-подгруппа которых - прямое произведение кватернионов.- Алгебра и логика, 1966, т.5, № 5, с.55-57.

26. МАЗУРОВ В.Д. О конечных группах с метациклическими силовскими 2-подгруппами.- Сиб. мат. журн., 1967, т.8, № 5, с.966-982.

27. МАЗУРОВ В.Д. О покрытиях силовских подгрупп в конечных группах.- Мат. зап. УрГУ, 1970, т.7, № 3, с.128-132.

28. МАЗУРОВ В.Д. Конечные группы с циклическими пересечениями силовских 2-подгрупп.- Алгебра и логика, 1971, т.10, № 2, с.188-198.

29. МАЗУРОВ В.Д. Конечные группы с единичной 2-длиной разрешимых подгрупп.- Алгебра и логика, 1972, т.11, № 4, с.438-469.

30. МАЗУРОВ В.Д. О разрешимых подгруппах конечных простых групп.- В кн.: Proc. Int. Congr. of Maths. Vancouver, Canada, Aug. 21-29 1974. Vol.1. Vancouver, Canada, 1975, p.321-323.

31. МАЗУРОВ В.Д. О конечных группах 2-периода 4.- В кн.: Всесоюз. алгебр. симпоз. Тез. докл. Ч.1. Гомель, 1975, с.37.

32. МАЗУРОВ В.Д. Конечные группы.- В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия. Т.14. М., ВИНИТИ, 1976, с.5-56. (Итоги науки и техники).

33. МАЗУРОВ В.Д., СЫСКИН С.А. О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами.- Мат. заметки, 1973, т.14, № 2, с.217-222.

34. МАЗУРОВ В.Д., СЫСКИН С.А. Характеризация $L_3(2^4)$ силовскими 2-подгруппами.- Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, т.38, № 3, с.513-517.

35. МАЗУРОВ В.Д., СЫСКИН С.А. Конечные группы с 2-силовскими пересечениями ранга ≤ 2.- Мат. заметки, 1974, т.16, № 1, с.129-134.

36. ПАЛЬЧИК Э.М. О конечных простых группах с максимальной силовской 2-подгруппой.- Докл. АН БССР, 1975, т.17, № 7, с.595-596.

37. ПАЛЬЧИК Э.М. Об одном классе конечных групп.- Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1975, № 5, с.46-52.

38. НАЛЬЧИК Э.М. О конечных S^4 – свободных группах.– Докл. АН БССР, 1976, т.20, № 12, с.1061–1065.

39. СИТНИКОВ В.М. Конечные группы с силовской 2-подгруппой, содержащей самоцентрализующую элементарную абелеву подгруппу порядка 8.– Мат. заметки, 1974, т.16, № 6, с.899–906.

40. СИТНИКОВ В.М. Конечные группы с самоцентрализующейся подгруппой порядка 8.– В кн.: Алгебраические исследования. Свердловск, УПИ, 1976, с.40–52.

41. СЫСКИН С.А. О конечных группах с разрешимыми централизаторами инволюций.– Алгебра и логика, 1971, т.10, № 3, с.329–347.

42. СЫСКИН С.А. Простые конечные группы 2-ранга 3 с разрешимыми централизаторами инволюций.– Алгебра и логика, 1971, т.10, № 6, с.668–700.

43. СЫСКИН С.А. О конечных группах 2-ранга 3.– Докл. АН СССР, 1973, т.208, № 4, с.782–784.

44. СЫСКИН С.А. Замечание о слиянии 2-элементов в конечной группе.– Алгебра и логика, 1973, т.12, № 3, с.349–350.

45. УСТЮЖАНИНОВ А.Д. Конечные 2-группы, в которых множество самоцентрализующихся абелевых инвариантных подгрупп с числом образующих $\geqslant 3$ пусто ($SCN_3(2)=\emptyset$).– Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, т.37, № 2, с.251–283.

46. ЧУНИХИН С.А. О существовании подгрупп у конечной группы.– В кн.: Тр. семинара по теории групп, ГОНТИ. М.–Л., 1938, с.106–125.

47. ЧУНИХИН С.А., ШЕМЕТКОВ Л.А. Конечные группы.– В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия. М., ВИНИТИ, 1971, с.7–70. (Итоги науки).

48. ШЕВАЛЛЕ К. О некоторых простых группах.– Математика. Сб. пер., 1958, т.2, № 1, с.3–53.

49. ALPERIN J.L. Sylow intersections and fusion.– J. Algebra, 1967, vol.6, № 2, p.222–241.

50. ALPERIN J.L. On fours groups.– Ill. J. Math., 1972, vol.16, № 2, p.349–351.

51. ALPERIN J.L. Up and down fusion.– J. Algebra, 1974, vol. 28, № 1, p.206–209.

52. ALPERIN J.L., BRAUER R., GORENSTEIN D. Finite groups with quasidihedral and wreathed Sylow 2-subgroups.– Trans. Amer. Math. Soc., 1970, vol.151, № 1, p.1–261.

53. ALPERIN J.L., BRAUER R., GORENSTEIN D. Finite simple groups of 2-rank two.– Scr. Math., 1973, vol.29, № 3-4, p.191–214.

54. ALPERIN J.L., BRAUER R., GORENSTEIN D. The extended ZJ – theorem.– In: Proc. Gainesville Conf., 1972. Amsterdam e.a., 1973, p.6–7.

55. ALPERIN J.L., GORENSTEIN D. Transfer and fusion in finite groups.– J. Algebra, 1967, vol.6, № 2, p.242–255.

56. ASCHBACHER M. A class of generalized TI – groups.– Ill. J. Math., 1972, vol.16, № 3, p.529–532.

57. ASCHBACHER M. Finite groups with a proper 2-generated core.– Trans. Amer. Math. Soc., 1974, vol.197, p.87–112.

58. ASCHBACHER M., SEITZ G.M. Involutions in Chevalley groups over fields of even order.– Nagoya Math. J., 1976, vol.63, p.1–91.

59. ASSA S.B. A characterization of ${}^2F_4(2)'$ and the Rudvalis group.– J. Algebra, 1976, vol.41, № 2, p.473–495.

60. BAUMANN B. Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppen.– J. Algebra, 1975, vol.38, № 1, p.119–135.

61. BAUMANN B. Endliche Gruppen, die von je zwei verschiedenen ihrer 2-Sylowgruppen erzeugt werden.– Arch. Math., 1977, vol.28, № 1, p.34–40.

62. BEISIEGEL B. Über einfache endliche Gruppen mit Sylow-2-Gruppen der Ordnung höchstens 2^{10} .– Communs Algebra, 1977, vol.5, № 2, p.113–170.

63. BENDER H. On groups with abelian Sylow 2-subgroups.– Math. Z., 1970, vol.117, № 1-4, p.164–176.

64. BENDER H. Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festlässt.– J. Algebra, 1971, vol.17, № 4, p.527–554.

65. BRAUER R. On groups of even order with an abelian 2-Sylow subgroup.– Arch. Math., 1962, vol.13, № 1-3, p.55–60.

66. BRAUER R. Some applications of the theory of blocks of character of finite groups, II.- J. Algebra, 1964, vol.1, № 4, p.307-334.

67. BRAUER R., FONG P. A characterization of the Mathieu group M_{12}.- Trans. Amer. Math. Soc., 1966, vol.122, p.18-47.

68. BRAUER R., SUZUKI M. On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group.- Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1959, vol.45, № 12, p.1757-1759.

69. BRODKEY J.S. A note on finite groups with an abelian Sylow group.- Proc. Amer. Math. Soc., 1963, vol.14, № 1, p.132-133.

70. BURNSIDE W. Theory of groups of finite order. 2nd ed. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1911.

71. CAMINA A.R., GAGEN T.M. Groups with metacyclic Sylow 2-subgroups.- Can. J. Math., 1969, vol.21, № 5, p.1234-1237.

72. CARTER R.W. Simple groups of Lie type. London a.o., 1972, VIII, 331 pp.

73. CARTER R.W., FONG P. The Sylow 2-subgroups of the finite classical groups.- J. Algebra, 1964, vol.1, № 2, p.139-151.

74. CHABOT P. Groups whose Sylow 2-groups have cyclic commutator groups.- J. Algebra, 1971, vol.19, № 1, p.21-30; II- 1972, vol.21, № 2, p.312-320; III- 1974, vol.29, № 3, p.455-458.

75. CHABOT P. Some Sylow 2-groups of type $A \times B$, A abelian.- J. Algebra, 1975, vol.33, № 2, p.200-205.

76. CHABOT P. Weakly closed elementary eight-groups.- J. London Math. Soc., 1978, vol.17, № 1, p.47-57.

77. COLLINS M.J. The characterization of the Suzuki groups by their Sylow 2-subgroups.- Math. Z., 1971, vol.123, № 1, p.32-48.

78. COLLINS M.J. The characterization of the unitary groups $U_3(2^n)$ by their Sylow 2-subgroups.- Bull. London Math. Soc., 1972, vol.4, № 1, p.49-53.

79. COLLINS M.J. The characterization of finite groups whose Sylow 2-subgroups are of type $L_3(q)$, q even.- J. Algebra, 1973, vol.25, № 3, p.490-512.

80. COLLINS M.J. The characterization of finite groups whose Sylow 2-subgroups are of type $L_3(q)$, q even, Erratum.- J. Algebra, 1973, vol.27, № 1, p.199-200.

81. COLLINS M.J., SOLOMON R.M. The identification of finite groups of $PSL(5,q)$-type and $PSU(5,q)$-type.- Bull. London Math. Soc., 1975, vol.7, № 2, p.113-123.

82. COLLINS M.J. A note on Alperin's fusion theorem.- J. London Math. Soc., 1975, vol.10, № 2, p.222-224.

83. CURRAN M.J. Centralizers involving Mathieu groups.- Bull. Austral. Math. Soc., 1975, vol.13, № 3, p.321-323.

84. CURRAN M.J. Groups with decomposable involution centralizers.- Osaka J. Math., 1976, 13, № 2, p.385-398.

85. CURRAN M.J. Decomposable involution centralizers involving exceptional Lie type simple groups.- J. Austral. Math. Soc., 1977, vol.23, № 1, p.59-66.

86. DOLAN S.W. Local conjugation in finite groups.- J. Algebra, 1976, vol.43, № 2, p.506-516.

87. DONLEY J.L. A characterization of the groups $E_6^1(2^{2n})$, $n \geq 2$.- J. Algebra, 1976, vol.40, № 2, p.466-498.

88. DCRO S. Counterexamples on the fusion of involution in finite groups.- Proc. Amer. Math. Soc., 1976, vol.59, № 1, p.23-24.

89. FEIT W. A characterization of the simple groups $SL(2,2^n)$.- Amer. J. Math., 1960, vol.82, p.281-300; Correction - 1962, vol.84, p.201-204.

90. FEIT W. The current situation in the theory of finite simple groups.- In: Actes, Congr. int. math., 1970. T.1. Paris, 1971, p.55-93.

91. FEIT W., THOMPSON J.G. Solvability of groups of odd order.- Pacif. J. Math., 1963, vol.13, № 3, p.775-1029.

92. FINKEL D. Local control and factorization of the focal subgroup.- Pacif. J. Math., 1973, vol.45, № 1, p.113-128.

93. FONG P. Some Sylow subgroups of order 32 and a characterization of $U_3(3)$.- J. Algebra, 1967, vol.6, № 1, p.65-76.

94. FONG P. Some decomposable Sylow 2-subgroups and a non-simplicity condition.-In: Proc. Symp. Pure Math. Vol.21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R.I., 1971, p.47-48.

95. FRITZ F.J. On centralizers of involutions with components of 2-rank two I, II.- J. Algebra, 1977, vol.47, № 2, p.323-374; p.375-399.

96. GAGEN T.M. On groups with abelian Sylow 2-groups.- Math. Z., 1965, vol.90, № 4, p.268-272.

97. GAGEN T.M. A characterization of Janko's simple group.- Proc. A.M.S., 1968, vol.19, № 6, p.1393-1395.

98. GILMAN R., GORENSTEIN D. Finite groups with Sylow 2-subgroups of class two, I, II.- Trans. Amer. Math. Soc., 1975, vol.207, p.1-101; p.103-126.

99. GLAUBERMAN G. Central elements in core-free groups.- J. Algebra, 1966, vol.4, № 3, p.403-420.

100. GLAUBERMAN G. Weakly closed elements of Sylow subgroups, II.- Math. Z., 1969, vol.112, № 2, p.89-100.

101. GLAUBERMAN G. A sufficient condition for p-stability.- Proc. London Math. Soc., 1972, vol.25, № 2, p.253-287.

102. GLAUBERMAN G. Direct factors of Sylow 2-subgroups, I, II.- J. Algebra, 1974, vol.28, № 1, p.133-161; p.162-173.

103. GLAUBERMAN G. On groups with a quaternion Sylow 2-subgroup.- Ill. J. Math., 1974, vol.18, № 1, p.60-65.

104. GLAUBERMAN G., THOMPSON J.G. Weakly closed direct factors of Sylow subgroups.- Pacif. J. Math., 1968, vol.26, № 1, p.73-83.

105. GOLDSCHMIDT D.M. A conjugation family for finite groups.- J. Algebra, 1970, vol.16, № 1, p.138-142.

106. GOLDSCHMIDT D.M. Sylow 2-subgroups with non-elementary centers.- In: Proc. Symp. Pure Math., vol.21, Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R.I., 1971, p.53-55.

107. GOLDSCHMIDT D.M. An application of Brauer's second main theorem.- J. Algebra, 1972, vol.20, № 1, p.72-77.

108. GOLDSCHMIDT D.M. Weakly embedded 2-local subgroups of finite groups.- J. Algebra, 1972, vol.21, № 2, p.341-351.

109. GOLDSCHMIDT D.M. 2-fusion in finite groups.- Ann. Math., 1974, vol.99, № 1, p.70-117.

110. GOLDSCHMIDT D.M. Strongly closed 2-subgroups of finite groups.- Ann. Math., 1975, vol.102, № 3, p.475-489.

111. GOMI K. Finite groups with central Sylow 2-intersections.- J. Math. Soc. Japan, 1973, vol.25, № 2, p.342-355.

112. GOMI K. Finite groups all of whose non-2-closed 2-local subgroups have Sylow 2-subgroups of class 2.- J. Algebra, 1975, vol.35, № 1-3, p.214-223.

113. GOMI K. Sylow 2-intersections and split BN-pairs of rank two.- J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1976, vol.[illegible], № 1, p.1-22.

114. GORENSTEIN D. Finite groups in which Sylow 2-subgroups are abelian and centralizers of involutions are solvable.- Can. J. Math., 1965, vol.17, № 6, p.860-906.

115. GORENSTEIN D. Finite groups. New York a.o., 1968. XV+527 p.

116. GORENSTEIN D. Finite simple groups and their classification.- Isr. J. Math., 1974, vol.19, № 1-2, p.5-66.

117. GORENSTEIN D., HARADA K. A characterization of Janko's two new simple groups.- J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.1, 1970, vol.16, № 3, p.331-406.

118. GORENSTEIN D., HARADA K. On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n = 8, 9, 10, 11$.- Math. Z., 1970, vol.117, № 1-4, p.207-238.

119. GORENSTEIN D., HARADA K. On finite groups with Sylow 2-subgroups of type $\widehat{A}_n$, $n = 8, 9, 10$ and 11.- J. Algebra, 1971, vol.19, № 2, p.185-227.

120. GORENSTEIN D., HARADA K. Finite simple groups of low 2-rank and the families $G_2(q)$, $D_4^2(q)$, q odd.- Bull. Amer. Math. Soc., 1971, vol.77, № 6, p.829-862.

121. GORENSTEIN D., HARADA K. Finite groups whose Sylow 2-subgroups are the direct products of two dihedral groups.- Ann. Math., 1972, vol.95, № 1, p.1-54.

122. GORENSTEIN D., HARADA K. Finite groups with Sylow 2-subgroups of type $PSp(4,q)$, q odd.- J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.IA, 1973, vol.20, № 3, p.341-372.

123. GORENSTEIN D., HARADA K. Finite groups whose 2-subgroups are generated by at most 4 elements.- Mem. AMS, 1974, № 147. VIII + 464 pp.

124. GORENSTEIN D., HARRIS M.E. A characterization of the Higman-Sims simple gr up.- J. Algebra, 1973, vol.24, № 3, p.565-590.

125. GORENSTEIN D., HARRIS M.E. Finite groups with product fusion.- Ann. Math., 1975, vol.101, № 1, p.45-87.

126. GORENSTEIN D., WALTER J.H. On finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups.- Ill. J. Math., 1962, vol.6, № 4, p.553-593.

127. GORENSTEIN D., WALTER J.H. The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, I, II, III, Errata.- J. Algebra, 1965, vol.2, № 1, p.85-151; 1965, vol.2, № 2, p.218-270; 1965, vol.2, № 3, p.354-393; 1969, vol.11, № 2, p.315-318.

128. GUTERMAN M.M. A characterization of the groups $F_4(2^n)$.- J. Algebra, 1972, vol.20, № 1, p.1-23.

129. HALL J.I. Fusion and dihedral 2-subgroups.- J. Algebra, 1976, vol.40, № 1, p.203-228.

130. HARADA K. Groups with a certain type of Sylow 2-subgroups.- J. Math. Soc. Japan, 1967, vol.19, № 3, p.303-307.

131. HARADA K. Finite simple groups with short chains of subgroups.- J. Math. Soc. Japan, 1968, vol.20, № 4, p.655-672.

132. HARADA K. Finite simple groups whose Sylow 2-subgroups are of order 2^7.- J. Algebra, 1970, vol.14, № 3, p.386-404.

133. HARADA K. On some 2-groups of normal 2-rank 2.- J. Algebra, 1972, vol.20, № 1, p.90-93.

134. HARADA K. On finite groups having self-centralizing 2-subgroups of small order.- J. Algebra, 1975, vol.33, № 1, p.144-160.

135. HARRIS M.E. Finite groups with Sylow 2-subgroups of type $PSp(6,q)$, q odd.-Communs Algebra, 1974, vol.2, № 2,

p.181-232.

136. HARRIS M.E. Finite groups with given Sylow 2-subgroups and product fusion.- Communs Algebra, 1974, vol.2, № 2, p.143-179.

137. HAYDEN J.L., WINTER D.L. Finite groups admitting an automorphism trivial on a Sylow 2-subgroup.- Can. J. Math., 1977, vol.28, № 4, p.889-896.

138. HERZOG M. On 2-Sylow intersections.- Isr. J. Math., 1972, vol.11, № 3, p.326-327.

139. HERZOG M. The influence of 2-Sylow intersections on the structure of finite simple groups.- In: Proc. Second Int. Conf. Theory Groups. Canberra, 1973, p.361-365.

140. HERZOG M. On Sylow intersections.- Proc. Amer. Math. Soc., 1973, vol.37, № 2, p.352-354.

141. HERZOG M. Simple groups with a cyclic central 2-Sylow intersection.- J. Algebra, 1973, vol.25, № 2, p.307-312.

142. HERZOG M. Central 2-Sylow intersections.- Pacif. J. Math., 1973, vol.45, № 2, p.535-538.

143. HERZOG M. On simple groups with cyclic maximal 2-Sylow intersection.- Isr. J. Math., 1973, vol.15, № 4, p.350-355.

144. HERZOG M. On simple groups with a quaternion maximal 2-Sylow intersections.- Isr. J. Math., 1974, vol.19, № 3, p.225-227.

145. HERZOG M. The influence of 2-Sylow intersections on the structure of finite simple groups.- Lect. Notes Math., 1974, vol.372, p.361-365.

146. HERZOG M., SHULT E. Groups with central 2-Sylow intersections of rank at most one.- Proc. Amer. Math. Soc., 1973, vol.38, № 3, p.465-470.

147. HUGHES A. Characterization of ${}^3D_4(q^3)$, $q=2^n$ by its Sylow 2-subgroup.- In: Proc. Conf. on finite groups (Univ. Utah., Park City, Utah, 1975). New York, Acad. Press, 1976, p.103-105.

148. HUPPERT B. Endliche Gruppen I. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.

149. ISH-SHALOM A. On 2-Sylow intersections.- Isr. J. Math., 1974, vol.18, № 3, p.235-242.

150. ISH-SHALOM A. A note on Sylow intersections.- Proc. Amer. Math. Soc., 1977, vol.66, № 2, p.227-230.

151. ISH-SHALOM A. On central 2-Sylow intersections.- Isr. J. Math., 1977, vol.27, № 3-4, p.339-347.

152. ISH-SHALOM A. On Sylow intersections.- Bull. Austral Math. Soc., 1977, vol.16, № 2, p.237-246.

153. ITO N. Über den kleinsten $\mathfrak{p}$ -Durchschnitt auflösbarer Gruppen.- Arch. Math., 1958, vol.9, № 1-2, p.27-32.

154. JANKO Z. A new finite simple group with abelian 2-Sylow subgroup.- Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1965, vol.53, № 3, p.657.

155. JANKO Z. A new finite simple group with abelian 2-Sylow subgroups and its characterization.- J. Algebra, 1966, vol.3, № 2, p.147-186.

156. JANKO Z. A characterization of the smallest group of Ree associated with the simple Lie-algebra of type (G_2) .- J. Algebra, 1966, vol.4, № 2, p.293-299.

157. JANKO Z. Some new simple groups of finite order, I.- In: Simpos. Math., 1967-1968. Vol.1. Gubbio, 1969, p.25-64.

158. JANKO Z., THOMPSON J.G. On a class of finite simple groups of Ree.- J. Algebra, 1966, vol.4, № 2, p.274-292.

159. JANKO Z., THOMPSON J.G. On finite simple groups whose Sylow 2-subgroups have no normal elementary subgroups of order 8.- Math. Z., 1970, vol.113, № 5, p.385-397.

160. KANTOR W.M., SEITZ G.M. Step-by-step conjugation of $\mathfrak{p}$ - subgroups of a group.- J. Algebra, 1970, vol.16, № 2, p. 298-310.

161. KONDO T. On finite groups with a 2-Sylow subgroup isomorphic to that of the symmetric group of degree $4n$.- J. Math. Soc. Japan, 1968, vol.20, № 4, p.695-713.

162. LAFFEY T.J. A remark on minimal Sylow intersection.- Bull. London Math. Soc., 1972, vol.4, p.3, № 12, p.377.

163. LAFFEY T.J. On minimal Sylow intersections.- J. London Math. Soc., 1976, vol.12, № 3, p.383-384.

164. LANDROCK P. Finite groups with Sylow 2-intersection of rank ≤ 1.- Math. Scand., 1973, vol.32, № 1, p.31-45.

165. LANDROCK P. Finite groups with a quasisimple component of type $PSU(3,2^n)$ on elementary abelian form.- Ill. J. Math., 1975, vol.19, № 2, p.198-230.

166. LYONS R. A characterization of the group $U_3(4)$.- Trans. Amer. Math. Soc., 1972, vol.164, p.371-387.

167. LYONS R. Evidence for a new finite simple group.- J. Algebra, 1972, vol.20, № 3, p.540-569.

168. MACWILLIAMS A.R. On 2-groups with no normal abelian subgroups of rank 3, and their occurence as Sylow 2-subgroups of finite simple groups.- Trans. Amer. Math. Soc., 1970, vol. 150, № 2, p.345-408.

169. MANN A. The intersection of Sylow subgroups.- Proc. Amer. Math. Soc., 1975, vol.53, № 2, p.262-264.

170. MARKOT R. A 2-local characterization of the simple group E .- J. Algebra, 1976, vol.40, № 2, p.585-595.

171. MASON D.R. Finite simple groups with Sylow 2-subgroup dihedral wreath Z_2 .- J. Algebra, 1973, vol.26, № 1, p.10-68.

172. MASON D.R. Finite simple groups with Sylow 2-subgroups of type $PSL(4,q)$, q odd.- J. Algebra, 1973, vol.26, № 1, p.75-97.

173. MASON D.R. Finite groups with Sylow 2-subgroup the direct product of a dihedral and wreathed group, and related problems.- Proc. London Math. Soc., 1976, vol.33, № 3, p.401-443.

174. MASON D.R. Finite simple groups with Sylow 2-subgroups of type $PSL(5,q)$, q odd.- Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1976, vol.79, № 2, p.251-269.

175. MASON G. Characterizing Chevalley groups of rank two and characteristic two by their Sylow 2-subgroups, I.- J. Algebra, 1975, vol.36, № 3, p.364-394.

176. MCBRIDE P.P. A classification of groups of type $A_n(q)$ for $n \geq 3$ and $q = 2^n \geq 4$.- J. Algebra, 1977, vol.46, № 1, p. 220-267.

177. MIYAMOTO M. On conjugation families.- Hokkaido Math. J., 1977, vol.6, № 1, p.46-51.

178. MIYAMOTO M. Fusion and groups admitting an automorphism of prime order fixing a solvable subgroups.- Hokkaido Math. J., 1977, vol.6, № 2, p.296-301.

179. O'NAN M.E. Some evidence for the existence of a new simple group.- Proc. London Math. Soc., 1976, vol.32, № 3, p.421-479.

180. O'NAN M.E. Finite simple groups of 2-rank 3 with all 2-local subgroups 2-constrained- Ill. J. Math., 1976, vol.20, № 1, p.155-170.

181. PARROT D. A characterization of the Ree groups $^2F_4(q)$.- J. Algebra, 1973, vol.27, № 2, p.341-357.

182. PATTERSON A.R. On Sylow 2-subgroups with no normal abelian subgroups of rank 3 in finite fusion-simple groups.-Trans. Amer. Math. Soc., 1974, vol.187, p.1-67.

183. PHAN K.-W. On characteriving finite Chevalley groups of type and their twisted analogs.- J. Algebra, 1974, vol.32, № 1, p.141-152.

184. POWELL M.B., HIGMAN G., Eds. Finite simple groups. London-New York, Acad. Press, 1971.

185. PUIG L. Sur un théorème d'Alperin.- C.R. Acad. Sci, 1974, t.A278, № 16, p.1013-1016.

186. REE R. A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type (F_4).- Amer. J. Math., 1961, vol.83, № 3, p.401-420.

187. REE R. A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type (G_2).- Amer. J. Math., 1961, vol.83, № 3, p.432-462.

188. REIFART A. A characterization of Sz by the Sylow 2-subgroup.- J. Algebra, 1975, vol.36, № 3, p.348-363.

189. REIFART A. A characterization of Thompson's sporadic simple group.- J. Algebra, 1976, vol.38, № 1, p.192-200.

190. SAH C.-H. A class of finite groups with abelian 2-Sylow subgroups.- Math. Z., 1963, vol.82, № 4, p.335-346.

191. SCHIEFELBUSCH L. Sylow 2-subgroups of simple groups.- J. Algebra, 1974, vol.31, № 1, p.131-153.

192. SCHIEFELBUSCH L. On the transfer homomorphism.- Communs Algebra, 1975, vol.3, № 4, p.295-317.

193. SCHOENWAELDER U. Finite groups with a Sylow 2-subgroup of type M_{24} , I, II.- J. Algebra, 1974, vol.28, № 1, p.20-45; p.46-56.

194. SCHOENWAELDER U. Finite groups with Sylow 2-subgroups isomorphic to $T/Z(T)$, where T is of type M_{24} .- J. Algebra, 1975, vol.36, № 3, p.395-407.

195. SHULT E. On fusion in 2-Sylow intersections.- In: Finite groups'72. Proc. Gainesville Conf., 1972. Amsterdam a.o., 1973, p.131-137.

196. SEHGAL S. A generalization of a theorem of Z.Janko and J.G. Thompson.- J. Algebra, 1973, vol.25, № 2, p.222-225.

197. SHAW D.L. The Sylow 2-subgroups of finite soluble groups with a single class of involutions.- J. Algebra, 1970, vol.16, № 1, p.14-26.

198. SMITH F.L. Finite groups whose Sylow 2-subgroups are the direct product of a dihedral and a semidihedral group.- Ill. J. Math., 1973, vol.17, № 3, p.352-386.

199. SMITH F.L. Groups whose Sylow 2-subgroups are the direct product of two semidihedral groups.- Ill. J. Math., 1973, vol.17, № 3, p.387-396.

200. SOLOMON R. Finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_{12} .- J. Algebra, 1974, vol.24, № 2, p.346-378.

201. SOLOMON R. Finite groups with Sylow 2-subgroups of type $\Omega(7,q)$, $q \equiv \pm 3 (mod 8)$.- J. Algebra, 1974, vol.28, № 1, p.174-181.

202. SOLOMON R. Finite groups with Sylow 2-subgroups of type .3.- J. Algebra, 1974, vol.28, № 1, p.182-198.

203. STEINBERG R. Variations on a theme of Chevalley.- Pacif. J. Math., 1959, vol.9, № 3, p.875-891.

204. STROTH G. Gruppen mit abelschen 2-Sylow Durchschnitten.- J. Algebra, 1974, vol.30, № 1-3, p.436-443.

205. STROTH G. Eine Kennzeichnung der Gruppe $^2E_6(2^n)$.- J. Algebra, 1975, vol.35, № 1-3, p.534-547.

206. STROTH G. Eine Kennzeichnung der $2I$ - Gruppen.- J. Algebra, 1975, vol.37, № 1, p.111-120.

207. STROTH G. Über Gruppen mit 2-Sylow-Durchschnitten vom Rang ≤ 3, I, II.- J. Algebra, 1976, vol.43, № 2, p.398-456; p.457-505.

208. STROTH G. Gruppen mit einem 2-Sylow-Durchschnitten vom Rang zwei.- J. Algebra, 1977, vol.44, № 2, p.488-491.

209. STROTH G. Endliche einfache Gruppen mit einer zentralizatorgleichen elementar abelschen Untergruppe von der Ordnung 16.- J. Algebra, 1977, vol.47, № 2, p.480-523.

210. STROTH G. Einige einfache Gruppen, die keine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 32 enthalten.- J. Algebra, 1977, vol.48, № 1, p.197-213.

211. SUZUKI M. A characterisation of the simple groups $LF(2,p)$.- J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.I, 1951, vol.6, p.259-293.

212. SUZUKI M. On finite groups containing an element of order 4 with commutes only with its own power.- Ill. J. Math., 1959, vol.3, p.255-271.

213. SUZUKI M. On characterization of linear groups I, II.- Trans. Amer. Math. Soc., 1959, vol.92, p.191-204; p.205-219.

214. SUZUKI M. A new type of simple groups of finite order.- Proc. Nat. Acad. Sci., 1960, vol.46, p.868-870.

215. SUZUKI M. Finite groups even order in which Sylow 2-groups are independent.- Ann. Math., 1964, vol.80, p.58-77.

216. THOMAS G. A characterization of the groups $G_2(2^n)$.- J. Algebra, 1969, vol.13, № 1, p.87-118.

217. THOMAS G. A characterization of the Steinberg groups $D_4^2(q^3)$, $q=2^n$.- J. Algebra, 1970, vol.14, № 3, p.373-385.

218. THOMPSON J.G. A special class of non-solvable groups.- Math. Z., 1960, vol.72, № 5, p.458-462.

219. THOMPSON J.G. Toward a characterization of $E_2^*(q)$.- J. Algebra, 1967, vol.7, № 3, p.406-414.

220. THOMPSON J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable.- Bull. Amer. Math. Soc., 1968, vol.74, № 3, p.383-437.

221. THOMPSON J.G. Toward a characterization of $E_2^*(q)$, II.- J. Algebra, 1972, vol.20, № 3, p.610-621.

222. THOMPSON T.G. Toward a characterization of $E_2^*(q)$, III.- J. Algebra, 1977, vol.49, № 1, p.162-166.

223. THWAITES G.N. A characterization of M_{12} by centralizer of involution.- Quart. J. Math., 1973, vol.24, № 96, p.537-557.

224. WALDMÜLLER B. The nonexistence of finite simple groups with S_2-subgroups of type $\widehat{A}_{12}$.- Notic Amer. Math. Soc., 1975, vol.22, № 7, p.A-705-A-705, ref. 75T-A262.

225. WARD H.N. On Ree's series of simple groups.- Trans. Amer. Math. Soc., 1966, vol.121, p.62-89.

226. WALTER J.H. Finite groups with abelian Sylow 2-subgroups of order 8.- Invent. Math., 1967, vol.2, № 5, p.332-376.

227. WALTER J.H. The characterizations of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups.- Ann. Math., 1969, vol.89, № 3, p.405-514.

228. WIELANDT H. p-Sylowgruppen und p-Faktorgruppen.- J. reine angew. Math., 1940, vol.182, p.180-193.

229. WONG W.J. On finite simple groups whose 2-Sylow subgroups have cyclic subgroups of index 2.- J. Austral. Math. Soc., 1964, vol.4, № 1, p.90-112.

230. WONG W.J. On finite groups with semi-dihedral Sylow 2-subgroups.- J. Algebra, 1966, vol.4, № 1, p.52-63.

231. WONG W.J. Finite groups with a self-centralizing subgroup of order 4.- J. Austral. Math. Soc., 1967, vol.7, № 4, p.570-576.

232. WONG W.J. Twisted wreath products and Sylow 2-subgroups of classical simple groups.- Math. Z., 1967, vol.97, № 5, p.406-424.

233. WRIGHT D. A note on centralizers of involutions involving simple group.- Bull. Austral. Math. Soc., 1976, vol.14, № 3, p.[illegible].

234. YAMAKI H. On the Janko's simple group of order 175,560.- Osaka J. Math., 1972, vol.9, № 1, p.111-112.

235. YAMAKI H. Finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_8.- J. Algebra, 1975, vol.33, № 3, p.523-566.

236. YAMAKI H. A characterization of the Suzuki simple group of order 448, 345, 497, 600.- J. Algebra, 1976, vol.40, № 1, p.229-244.

237. YOSHIDA T. A characterization of the .2 Conway simple group.- J. Algebra, 1977, vol.46, № 2, p.405-414.

238. ЗЕНКОВ В.И. О 2-силовских пересечениях в конечных группах.- В кн.: Сб. исслед. по современной алгебре. Свердловск, 1978, (в печати).

239. КОНДРАТЬЕВ А.С. Конечные группы с силовской 2-подгруппой, имеющей элементарный коммутант порядка 8.- Мат. заметки, (в печати).

240. СЫСКИН С.А. Конечные группы с примарными централизаторами четверных подгрупп.- Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, т.42, № 5, с.1092-1150.

241. BAUMANN B. Endliche Gruppen mit einer 2-zentralen Involution, deren Zentralisator 2-abgeschlossen ist.- Ill. J. Math., 1978, vol.22, № 2, p.240-261.

242. BERGER T.R., HERZOG M. Criteria for nonperfectness.-Communs Algebra, 1978, vol.6, № 9, p.959-968.

243. CHABOT P. Weakly closed eights - groups in characteristic 2-type groups.- J. Algebra, 1978, vol.51, № 2, p.562-572.

244. FUKUSHIMA H. Weakly closed cyclic 2-groups in finite groups.- J. Math. Soc. Japan, 1978, vol.30, № 1, p.133-137.

245. GLAUBERMAN G. Factorizations in local subgroups of finite groups.- Regional conference series in mathematics, 1977, № 33, p.I-IX, 1-74.

246. HARADA K. On Yoshida's transfer.- Osaka J. Math., 1978, vol.15, № 3, p.637-655.

247. OKUYAMA T., YOSHIDA T. A characterizations of the Rudvalis group.- J. Math. Soc. Japan, 1978, vol.30, № 3, p.463-474.

248. PUIG L. Sous-groupes de controle et criteres de non-simplicite.- J. Algebra, 1978, vol.52, № 2, p.504-525.

249. SUZUKI M. A transfer theorem.- J. Algebra, 1978, vol.51, № 2, p.608-618.

250. YOSHIDA T. Character-theoretic transfer.- J. Algebra, 1978, vol.52, № 1, p.1-33.

[illegible]созанов, А.С.Кондратьев

(Обзор)

Ответственный за выпуск А.А.Махнев

РИСО УНЦ № 22(79) С 19100
Подписано к печати 14.05.79 Усл.-печ.л. 9,0
Уч.-изд.л. 6,5 Формат 60х90 1/16 Тираж 200
Бесплатно Заказ № 31

Ротапринт Института математики и механики УНЦ АН СССР
Свердловск, ГСП-384, С.Ковалевской, 16