

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ИЗ СИММЕТРИЧНОГО ПРОСТРАНСТВА СУММАМИ ФУРЬЕ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ¹

Г. Акишев

В статье рассматриваются симметричное пространство периодических функций многих переменных, в частности обобщенное пространство Лоренца — Зигмунда и класс Никольского — Бесова в этом пространстве. Установлены оценки приближения частными суммами по ступенчатым гиперболическим крестам Фурье функций из класса Никольского — Бесова в равномерной метрике. Доказан аналог неравенства Джексона — Никольского для кратного тригонометрического полинома в нормах обобщенного пространства Лоренца — Зигмунда и пространства непрерывных функций.

Ключевые слова: симметричное пространство, сумма Фурье, класс Никольского — Бесова, пространство Лоренца — Зигмунда.

G. Akishev. On estimates of the approximation of functions from a symmetric space by Fourier sums in the uniform metric.

The article discusses the symmetric space of periodic functions of several variables, specifically, the generalized Lorentz–Zygmund space and the Nikol’skii–Besov class within this space. Estimates for the approximation of functions from the Nikol’skii–Besov class by partial sums over step hyperbolic crosses of Fourier series are established in the uniform metric. An analog of the Jackson–Nikol’skii inequality for multiple trigonometric polynomials in the norms of the generalized Lorentz–Zygmund space and the space of continuous functions is proved.

Keywords: symmetric space, Fourier sum, Nikol’skii–Besov class, Lorentz–Zygmund space.

MSC: 42A10, 42B05, 46E35

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-9-26

Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}^m$ — m -мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m; 0 \leq x_j \leq 1; j = 1, \dots, m\}$ — m -мерный куб. Пусть $\mathbb{Z}^m$ и $\mathbb{Z}_+^m$ — m -кратные декартовы произведения множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_+$ соответственно.

О п р е д е л е н и е 1 (см. [1, гл. 2, разд. 2, с. 81]). Две неотрицательные измеримые по Лебегу функции f, g называются равноизмеримыми, если

$$\mu\{\bar{x} \in I^m: f(\bar{x}) > \lambda\} = \mu\{\bar{x} \in I^m: g(\bar{x}) > \lambda\}, \quad \lambda > 0,$$

где μ_e — мера Лебега множества $e \subset I^m$.

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на I^m функций называется симметричным или перестановочно-инвариантным,

1) если из того, что $|f(\bar{x})| \leq |g(\bar{x})|$ почти всюду на I^m и $g \in X$, следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X \leq \|g\|_X$;

2) если из того, что $f \in X$ и из равноизмеримости функций $|f(\bar{x})|$ и $|g(\bar{x})|$, следует, что $g \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$ (см. [1, гл. 2, разд. 4, с. 123], [2, гл. 2, разд. 4, с. 59]).

Здесь и в дальнейшем $\|f\|_X$ означает норму элемента $f \in X$.

¹Работа выполнена в рамках грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК (проект AP19677486).

Ассоциированное пространство X' к симметричному пространству X состоит из всех измеримых функций $g(\bar{x})$ на I^m , для которых [1, гл. 2, разд. 4, с. 140]

$$\|g\|_{X'} = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \int_{I^m} f(\bar{x})g(\bar{x})d\bar{x} < \infty,$$

и X' также является симметричным пространством [1, гл. 2, разд. 4, с. 141].

Пусть $\chi_e(\bar{t})$ — характеристическая функция множества $e \subset I^m$. Функция $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$ называется фундаментальной функцией пространства X , где μe — мера Лебега множества $e \subset I^m$. Таким образом, фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$, определенная на отрезке $[0, 1]$. Фундаментальную функцию $\varphi(t)$ симметричного пространства можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0, 1]$ функцией, причем $\varphi(0) = 0$ (см. [1, гл. 2, разд. 4, с. 137]). Такие функции называются Φ -функциями. Далее $X(\varphi)$ означает симметричное пространство с фундаментальной функцией φ и $\|f\|_{X(\varphi)}$ — норма $f \in X(\varphi)$.

Для данной функции $\varphi(t), t \in [0, 1]$, положим $\alpha_\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$, $\beta_\varphi = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$. Известно, что для любого симметричного пространства $X(\varphi)$ справедливы неравенства $1 \leq \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi \leq 2$ (см. [3]).

Далее рассматривается симметричное пространство $X(\varphi)$ действительных функций m -переменных с периодом 2π по каждой переменной. Ниже приведем известные примеры симметричных пространств.

◦ $L_p(\mathbb{T}^m)$ — пространство Лебега с нормой (см., например, [2], гл. 1, разд. , с. 3)

$$\|f\|_p = \left(\int_{I^m} |f(2\pi\bar{x})|^p d\bar{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty; \quad \text{для } p = \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\bar{x} \in I^m} |f(2\pi\bar{x})|.$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$, функции f — 2π -периодические по каждой переменной.

◦ Пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ с нормой (см. [4, гл. 5, разд. 3, с. 228] и [2, лемма 4.5, с. 219])

$$\|f\|_{p,\tau} = \left(\frac{\tau}{p} \int_0^1 \left(\int_0^t f^*(u) du \right)^\tau t^{\tau(\frac{1}{p}-1)-1} dt \right)^{1/\tau} < \infty,$$

где $f^*(u)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x} \in I^m$ (см. [1, гл. 2, разд. 2, с. 83]), $1 < p \leq \infty$, $1 \leq \tau \leq \infty$.

О п р е д е л е н и е 2 [5]. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $l_1(t) := 1 + |\log_2 t|$, $l_k(t) := 1 + \log_2 l_{k-1}(t)$ для $k > 1$ и $t \in (0, 1]$; кроме этого, $p, \tau \in (0, \infty]$ и $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$. Обобщенным пространством Лоренца — Зигмунда $L_{p,\tau,\alpha_1,\dots,\alpha_k}(\mathbb{T}^m)$ называется множество всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$ с периодом 2π по каждой переменной x_j , для которых

$$\|f\|_{p,\tau,\alpha_1,\dots,\alpha_k} := \left(\int_0^1 (f^*(t))^\tau \left(t^{1/p} \prod_{j=1}^m l_j^{\alpha_j}(t) \right)^\tau \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau} < +\infty,$$

В случае $k = 2$ обобщенное пространство Лоренца — Зигмунда $L_{p,\tau,\alpha_1,\alpha_2}(\mathbb{T}^m)$ определено и изучено в [6].

З а м е ч а н и е 1. Если $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, k$, то $L_{p,\tau,\alpha_1,\dots,\alpha_k}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$; если, кроме этого, $\tau = p$, то совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$. Если $k = 1$, то $L_{p,\tau,\alpha_1,\dots,\alpha_k}(\mathbb{T}^m)$ является известным пространством Лоренца — Зигмунда (см. [7]).

$C(\mathbb{T}^m)$ — пространство непрерывных действительныхзначных функций, имеющих 2π период по каждой переменной с нормой $\|f\|_\infty = \max_{\bar{x} \in \mathbb{T}^m} |f(\bar{x})|$. Известно, что $C(\mathbb{T}^m)$ — собственное подпространство в $L_\infty(\mathbb{T}^m)$.

Для заданного $p_j \in [1, \infty)$, $j = 1, \dots, m$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $l_{\bar{p}}$ — пространство числовых последовательностей $\{a_{\bar{n}}\}$ с нормой

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}\|_{l_{\bar{p}}} = \left(\sum_{n_m \in \mathbb{Z}} \left(\dots \left(\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} |a_{\bar{n}}|^{p_1} \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_m/p_{m-1}} \right)^{1/p_m},$$

и $\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}\|_{l_\infty} = \sup_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m} |a_{\bar{n}}| < \infty$ для $p_j = \infty$.

Через $C(p, q, r, y)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 A(y) \leq B(y) \leq C_2 A(y)$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B(y) \geq C_1 A(y)$ или $B(y) \leq C_2 A(y)$ часто будем писать $B(y) \gg A(y)$ или $B(y) \ll A(y)$ соответственно.

Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $V_l(t)$ — одномерное ядро Валле-Пуссена порядка $2l - 1$, т. е.

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt.$$

Каждому $\bar{s} = (s_1, \dots, m)$, $s_j \in \mathbb{N}$, сопоставим тригонометрический полином

$$A_{\bar{s}}(\bar{x}) = \prod_{j=1}^m (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)).$$

Для функции $f \in X(\varphi)$ рассмотрим свертку $A_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = (f * A_{\bar{s}})(\bar{x})$. Известно, что оператор свертки $A_{\bar{s}}$ ограничен в симметричном пространстве $X(\varphi)$ [2, лемма 6.1, с. 156].

Введем следующие обозначения: $[a]$ — целая часть числа a , $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$, $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}$, где $a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}$ и $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : [2^{s_j-1}] \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$, $\bar{s} = (s_1, \dots, s_m)$, $s_j = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $r_j > 0$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим аналог класса Никольского — Бесова

$$\mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B := \left\{ f \in X(\varphi) : \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 1 \right\}.$$

В случае $1 < \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi < 2$ в определении класса $\mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$ норму $\|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}$ можно заменить на $\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}$. Так как оператор $A_{\bar{s}}$ ограничен в пространстве $X(\varphi)$ (см. выше), то $\|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)} \asymp \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}$.

З а м е ч а н и е 2. При $X(\varphi) = L_{p, \tau, \alpha_1, \dots, \alpha_k}(\mathbb{T}^m)$ будем писать $\mathbb{S}_{p, \tau, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$ (вместо $\mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$). В случае $\tau = p$, $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, класс $\mathbb{S}_{p, \tau, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$ совпадает с хорошо известным классом Никольского — Бесова $\mathbb{S}_{p, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$ в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ (см., например, [8; 9]).

Постановка задачи. А. Лебег [10] установил, что для функции $f \in C(\mathbb{T})$ справедливо неравенство

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq (L_n + 1)E_n(f)_\infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $E_n(f)_\infty$ — наилучшее приближение функции $f \in C(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n , L_n — константа Лебега, $S_n(f, \bar{x})$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции f по тригонометрической системе. Отсюда следует, что $\|f - S_n(f)\|_\infty \leq E_n(f)_\infty \ln n$.

К. И. Осолков [11] доказал следующее усиление этой оценки:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq C \sum_{\nu=n}^{2n} \frac{E_\nu(f)_\infty}{\nu - n + 1}. \quad (0.1)$$

Многомерный аналог неравенства (0.1) для прямоугольных частных сумм Фурье доказал С. П. Байбородов [12] и О. В. Давыдов [13].

Приближение непрерывной функции средними Чезаро, Валле-Пуссена исследовали С. Б. Стечкин [14; 15], В. Дамен [16], В. Э. Гейт [17], Н. А. Ильясов [18] и другие (см. [19] и библиографию в [20]).

Для данного вектора $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ с положительными координатами γ_j положим $Q_n^{(\bar{\gamma})} = \cup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < n} \rho(\bar{s})$ — ступенчатый гиперболический крест и рассмотрим частную сумму ряда Фурье функции f по ступенчатому гиперболическому кресту

$$S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{(\bar{\gamma})}} a_{\bar{k}}(f) e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

Вопросы приближения функций $f \in \mathbb{S}_{p, \bar{\theta}}^\tau B$ частными суммами ряда Фурье по гиперболическим крестам в равномерной метрике исследовали И. Р. Лифлянд [21], В. Н. Темляков [22], А. С. Романюк [23] и другие. Оценки приближения суммами $S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f, \bar{x})$ функции $f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^\tau B$, когда $X(\varphi) \neq L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < \infty$, не изучены.

В этой статье мы рассматриваем следующую задачу: найти точный порядок величины

$$\sup_{f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^\tau B} \|f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f)\|_\infty.$$

1. Неравенство разных метрик для тригонометрического полинома

Докажем один аналог неравенства разных метрик Джексона — Никольского в обобщенном пространстве Лоренца — Зигмунда. Отметим, что пространство $L_{\infty, \tau, \beta_1, \dots, \beta_k}(\mathbb{T}^m)$ нетривиально при условии (см., например, [6, лемма 3.5])

$$\int_0^1 \left(\prod_{j=1}^k l_j^{\beta_j}(t) \right)^\tau \frac{dt}{t} < +\infty, \quad 0 < \tau < \infty, \quad \beta_j \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Теорема 1. Пусть $0 < p < \infty$, $0 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$.

Если $\beta_1 + \frac{1}{\tau_2} < 0$, то для тригонометрического полинома

$$T_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}, \quad n_j \in \mathbb{N},$$

выполняется неравенство

$$\|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau_2, \beta_1, \dots, \beta_k} \ll \left(\prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_\nu \left(\prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right) \right)^{\beta_\nu - \alpha_\nu} \left(1 + \log \prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \|T_{\bar{n}}\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}.$$

Доказательство. По свойству интеграла имеем

$$\|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau_2, \beta_1, \dots, \beta_k}^{\tau_2} = \int_0^{\prod_{j=1}^m (2n_j+1)^{-1}} (T_{\bar{n}}^*(t))^{\tau_2} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}\tau_2}(t) \frac{dt}{t} + \int_{\prod_{j=1}^m (2n_j+1)^{-1}}^1 (T_{\bar{n}}^*(t))^{\tau_2} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}\tau_2}(t) \frac{dt}{t} = I_1(\bar{n}) + I_2(\bar{n}). \quad (1.2)$$

Оценим $I_1(\bar{n})$. По свойству невозрастающей перестановки функции будем иметь

$$I_1(\bar{n}) \leq \max_{\bar{x} \in I^m} |T_{\bar{n}}(2\pi\bar{x})| \int_0^{\prod_{j=1}^m (2n_j+1)^{-1}} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}\tau_2}(t) \frac{dt}{t}. \quad (1.3)$$

Сделав замену переменной $y = 1/t$, нетрудно убедиться, что

$$\int_0^{\prod_{j=1}^m (2n_j+1)^{-1}} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}\tau_2}(t) \frac{dt}{t} = \int_{\prod_{j=1}^m (2n_j+1)}^{\infty} (1 + \log_2 y)^{(\beta_1+\varepsilon)\tau_2} \frac{\prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}\tau_2}(\frac{1}{y})}{(1 + \log_2 y)^{\varepsilon\tau_2}} \frac{dy}{y} \quad (1.4)$$

для числа $\varepsilon > 0$. Затем, выбирая $\varepsilon > 0$ такое, что $(\beta_1 + \varepsilon)\tau_2 + 1 < 0$, и учитывая, что $\frac{\prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}\tau_2}(1/y)}{(1 + \log_2 y)^{\varepsilon\tau_2}} \downarrow 0$, $y \rightarrow +\infty$, из формулы (1.4) получим

$$\int_0^{\prod_{j=1}^m (2n_j+1)^{-1}} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}\tau_2}(t) \frac{dt}{t} \leq \frac{\ln 2}{-((\beta_1 + \varepsilon)\tau_2 + 1)} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}\tau_2} \left(\prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right) \left(1 + \log_2 \prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right)^{\beta_1\tau_2+1}. \quad (1.5)$$

Теперь из неравенств (1.2) и (1.5) следует, что

$$I_1(\bar{n}) \leq \frac{\ln 2}{-((\beta_1 + \varepsilon)\tau_2 + 1)} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}\tau_2} \left(\prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right) \left(1 + \log_2 \prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right)^{\beta_1\tau_2+1} \|T_{\bar{n}}\|_{\infty}^{\tau_2}.$$

Так как $L_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}(\mathbb{T}^m)$ является симметричным пространством с фундаментальной функцией $\varphi(t) = t^{1/p} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu}}(t)$, $t \in (0, 1]$, то, пользуясь [24, лемма 5], отсюда получим

$$I_1(\bar{n}) \ll \left(\prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right)^{\frac{\tau_2}{p}} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu}-\alpha_{\nu})\tau_2} \left(\prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right) \left(1 + \log_2 \prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right) \|T_{\bar{n}}\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}^{\tau_2}. \quad (1.6)$$

Оценим $I_2(\bar{n})$. Положим $P_{\bar{n}} = \prod_{j=1}^m (2n_j + 1)^{-1}$. Тогда для $I_2(\bar{n})$ имеем

$$I_2(\bar{n}) \leq \left(\sup_{t \in (0, 1]} T_{\bar{n}}^*(t) t^{1/p} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\alpha_{\nu}}(t) \right)^{\tau_2} \int_{P_{\bar{n}}}^1 \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu}-\alpha_{\nu})\tau_2}(t) t^{-\frac{\tau_2}{p}-1} dt. \quad (1.7)$$

Снова делая замену переменной $y = 1/t$, выводим

$$\int_{P_{\bar{n}}}^1 \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu}-\alpha_{\nu})\tau_2}(t) t^{-\frac{\tau_2}{p}-1} dt = \int_1^{P_{\bar{n}}^{-1}} y^{\frac{\tau_2}{p}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu}-\alpha_{\nu})\tau_2} \left(\frac{1}{y} \right) \frac{(1 + \log_2 y)^{(\beta_1-\alpha_1)\tau_2+\varepsilon}}{(1 + \log_2 y)^{\varepsilon}} \frac{dy}{y}, \quad (1.8)$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Теперь, учитывая, что функция $y^{\frac{\tau_2}{p}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu}-\alpha_{\nu})\tau_2}(1/y) (1 + \log_2 y)^{(\beta_1-\alpha_1)\tau_2+\varepsilon}$ возрастает на $[1, \infty)$, из (1.8) получим

$$\int_{P_{\bar{n}}}^1 \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu}-\alpha_{\nu})\tau_2}(t) t^{-\frac{\tau_2}{p}-1} dt \leq P_{\bar{n}}^{-\frac{\tau_2}{p}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu}-\alpha_{\nu})\tau_2}(P_{\bar{n}}) (1 + \log_2 P_{\bar{n}}^{-1})^{(\beta_1-\alpha_1)\tau_2+\varepsilon}$$

$$\times \int_1^{P_{\bar{n}}^{-1}} (1 + \log_2 y)^{-\varepsilon} \frac{dy}{y} = \frac{\ln 2}{1 - \varepsilon} P_{\bar{n}}^{-\frac{\tau_2}{p}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu} - \alpha_{\nu})\tau_2} (P_{\bar{n}}) (1 + \log_2 P_{\bar{n}}^{-1})^{(\beta_1 - \alpha_1)\tau_2 + 1}. \quad (1.9)$$

Далее, из неравенств (1.7) и (1.9) выводим

$$I_2(\bar{n}) \ll \frac{\ln 2}{1 - \varepsilon} P_{\bar{n}}^{-\frac{\tau_2}{p}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu} - \alpha_{\nu})\tau_2} (P_{\bar{n}}) (1 + \log_2 P_{\bar{n}}^{-1})^{(\beta_1 - \alpha_1)\tau_2 + 1} \left(\sup_{t \in (0,1]} T_{\bar{n}}^*(t) t^{1/p} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\alpha_{\nu}}(t) \right)^{\tau_2}. \quad (1.10)$$

Здесь, если $(\beta_1 - \alpha_1)\tau_2 + 1 \geq 0$, то можно считать, что $\varepsilon = 0$, и если $(\beta_1 - \alpha_1)\tau_2 + 1 < 0$, то $\varepsilon = -\frac{(\beta_1 - \alpha_1)\tau_2 + 1}{2}$. Известно, что $\sup_{t \in (0,1]} \left(f^*(t) t^{1/p} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\alpha_{\nu}}(t) \right) \ll \|f\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}$, $f \in L_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}(\mathbb{T}^m)$.

Поэтому из неравенства (1.10) получим

$$I_2(\bar{n}) \ll P_{\bar{n}}^{-\frac{\tau_2}{p}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu}^{(\beta_{\nu} - \alpha_{\nu})\tau_2} (P_{\bar{n}}) (1 + \log_2 P_{\bar{n}}^{-1})^{(\beta_1 - \alpha_1)\tau_2 + 1} \|T_{\bar{n}}\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}^{\tau_2}. \quad (1.11)$$

Теперь из неравенств (1.2), (1.6) и (1.11) следует, что

$$\|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau_2, \beta_1, \dots, \beta_k} \ll \left(\prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{\nu=1}^k l_{\nu}^{\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}} \left(\prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right) \left(1 + \log_2 \prod_{j=1}^m (2n_j + 1) \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \|T_{\bar{n}}\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $0 < \tau < \infty$ и $\alpha_1 + 1/\tau, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо соотношение

$$J(\bar{n}, \tau, \alpha_1, \alpha_2) := \sup_{T_{\bar{n}} \neq 0} \frac{\|T_{\bar{n}}\|_{\infty}}{\|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2}} \asymp l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right) l_2^{-\alpha_2} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для кратного тригонометрического полинома $T_{\bar{n}}$ в [24] доказано, что

$$\|T_{\bar{n}}\|_{\infty} \leq \frac{2}{\mu \Delta} \int_{\Delta} |T_{\bar{n}}(\bar{x})| d\bar{x}; \quad (1.12)$$

здесь $\Delta = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{T}^m : \sum_{j=1}^m |n_j x_j| \leq 1/2\}$ и $\mu \Delta$ — мера Лебега множества Δ . Согласно неравенству Гельдера в функциональном банаховом пространстве справедливо неравенство

$$\int_{\Delta} |T_{\bar{n}}(\bar{x})| d\bar{x} \leq \|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2} \|\chi_{\Delta}\|_{(L_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2})'}, \quad (1.13)$$

где $(L_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2})'$ — ассоциированное пространство к пространству $L_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2}(\mathbb{T}^m)$. По [6, теорема 6.11] при $1 < \tau < \infty$ справедливо равенство $(L_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2})' = L_{1, \tau', -\alpha_1 - 1, -\alpha_2}(\mathbb{T}^m)$, где $\tau' = \frac{\tau}{\tau - 1}$, и в силу [6, лемма 3.14] фундаментальная функция $\varphi(t) = t l_1^{-\alpha_1 - 1 + \frac{1}{\tau}}(t) l_2^{-\alpha_2}(t)$, $t \in (0, 1]$, если $-\alpha_1 - 1 + \frac{1}{\tau} > 0$. Поэтому, учитывая, что $\mu \Delta = 1/(m! \prod_{j=1}^m n_j^{-1})$, из неравенств (1.12) и (1.13) получим

$$\begin{aligned} \|T_{\bar{n}}\|_{\infty} &\ll \frac{1}{\mu \Delta} \|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2} \|\chi_{\Delta}\|_{1, \tau', -\alpha_1 - 1, -\alpha_2} = C \frac{\varphi_{L_{1, \tau', -\alpha_1 - 1, -\alpha_2}}(\mu \Delta)}{\mu \Delta} \|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2} \\ &= C l_1^{-\alpha_1 - 1 + \frac{1}{\tau}} (\mu \Delta) l_2^{-\alpha_2} (\mu \Delta) \|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2} \ll l_1^{-\alpha_1 - \frac{1}{\tau}} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right) l_2^{-\alpha_2} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right) \|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

при $1 < \tau < \infty$. Пусть $p = \infty$, $0 < \tau \leq 1$. Тогда по [6, теорема 6.11] справедливо равенство $(L_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2}(\mathbb{T}^m))' = L_{1, \infty, -\alpha_1 - \frac{1}{\tau}, -\alpha_2}(\mathbb{T}^m)$ при $\alpha_1 + \frac{1}{\tau} < 0$, и согласно [6, лемма 3.14, п.(ii)] фундаментальная функция $\varphi_{L_{1, \infty, -\alpha_1 - \frac{1}{\tau}, -\alpha_2}} = t l_1^{-\alpha_1 - \frac{1}{\tau}}(t) l_2^{-\alpha_2}(t)$, $t \in (0, 1]$. Поэтому из формул (1.12) и (1.13) имеем

$$\|T_{\bar{n}}\|_{\infty} \ll l_1^{-\alpha_1 - \frac{1}{\tau}} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right) l_2^{-\alpha_2} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right) \|T_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2} \quad (1.15)$$

в случае $0 < \tau \leq 1$. Теперь из неравенств (1.14) и (1.15) следует оценка сверху величины $J(\bar{n}, \tau, \alpha_1, \alpha_2)$ при $0 < \tau < \infty$.

Оценка снизу. Для кратной суммы Валле-Пуссена $V_{\bar{n}}(\bar{n}) = \prod_{j=1}^m V_{n_j}(x_j)$, $n_j \in \mathbb{N}$, известны соотношения

$$\|V_{\bar{n}}\|_{\infty} \asymp \prod_{j=1}^m n_j, \quad \|V_{\bar{n}}\|_1 \asymp 1. \quad (1.16)$$

Из неравенств (1.14), (1.15), соотношения (1.16) и теоремы 1 при $\tau_1 = p = 1$, $\tau_2 = \tau$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$ вытекает, что

$$\|V_{\bar{n}}\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2} \asymp \left(\prod_{j=1}^m n_j \right) l_1^{\alpha_1 + \frac{1}{\tau}} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right) l_2^{\alpha_2} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right). \quad (1.17)$$

Из первого соотношения в (1.16) и (1.17) следует оценка снизу в теореме 2.

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Из [24, лемма 6] и второго соотношения в (1.16) следует, что

$$\|V_{\bar{n}}\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \alpha_2} \ll \prod_{j=1}^m n_j^{1 - \frac{1}{p}} l_1^{\alpha_1} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right) l_2^{\alpha_2} \left(\prod_{j=1}^m n_j^{-1} \right)$$

при $1 < p < \infty$, $0 < \tau_1 < \infty$. Теперь нетрудно убедиться, что из этого неравенства и соотношения (1.17) получим точность неравенства в теореме 1 при $k = 2$.

2. Основные результаты

Теорема 3 (о вложении). Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство с фундаментальной функцией φ и $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$, $r_{j_0} = \min\{r_j > 0 : j = 1, \dots, m\}$. Если $r_{j_0} > \log_2 \beta_{\varphi} \geq \log_2 \alpha_{\varphi} > 0$, то $\mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \subset C(\mathbb{T}^m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из свойства нормы пространства $C(\mathbb{T}^m)$ и применяя неравенство разных метрик Никольского для тригонометрического полинома в симметричном пространстве (см. [24, лемма 5]), получим

$$\|f\|_{\infty} \leq \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{\infty} \leq C \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{1}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}. \quad (2.1)$$

Пусть $f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$. Если $\theta_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$, то из неравенства (2.1) вытекает

$$\|f\|_{\infty} \ll \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle}}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} \sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)} \quad (2.2)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$. Введем обозначение $\Omega_l := \{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : l \leq \langle \bar{s}, \bar{r} \rangle < l + 1\}$, $l \in \mathbb{Z}_+$.

По условию теоремы $r_{j_0} > \log_2 \beta_\varphi \geq \log_2 \alpha_\varphi > 0$. Выберем число ε такое, что $0 < \varepsilon < \log_2 \alpha_\varphi$. Так как $\beta_\varphi \leq 2$, то $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим Φ -функцию $\psi(t) = t^\varepsilon$, $t \in [0, 1]$, и функцию $g(t) = \varphi(t)/\psi(t)$, $t \in (0, 1]$, $g(0) = 0$. В соответствии с выбором числа ε справедливо неравенство $\beta_\psi < \alpha_\varphi$. Поэтому по [25, лемма 4] (см. также [26, лемма 2]) существует Φ -функция g_1 такая, что $g_1(t) \asymp g(t)$, $t \in (0, 1]$, и $\alpha_{g_1} > 1$. Функция g_1 возрастает на $[0, 1]$, значит, $1/g_1$ убывает на $(0, 1]$. Следовательно, ввиду $\sum_{j=1}^m s_j < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle$ справедливо

$$\begin{aligned} \frac{2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle}}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} &= \frac{(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})^\varepsilon}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right)^{-\varepsilon} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \leq C \frac{1}{g_1(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \varepsilon)} \\ &\leq C \frac{1}{g_1(2^{-(\bar{s}, \bar{\gamma})})} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \varepsilon)} \leq C \frac{1}{g_1(2^{-(l+1)})} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \varepsilon)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

для $\bar{s} \in \Omega_l$. В силу оценки (2.3) и неравенства Гельдера при $\frac{1}{\theta_j} + \frac{1}{\theta'_j} = 1$, $j = 1, \dots, m$ (при $\theta_j = 1$ считается, что $\theta'_j = \infty$) выводим

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{s} \in \Omega_l} \frac{\|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} &\ll \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)} \right\}_{\bar{s} \in \Omega_l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \left\| \left\{ \frac{2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle}}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} \right\}_{\bar{s} \in \Omega_l} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}} \\ &\ll \frac{1}{g_1(2^{-(l+1)})} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \varepsilon)} \right\}_{\bar{s} \in \Omega_l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{\gamma}} B$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$, $\bar{\theta}' = (\theta'_1, \dots, \theta'_m)$. Положим $\delta_j = \frac{r_j - \varepsilon}{r_{j_0} - \varepsilon}$, $j = 1, \dots, m$, $\bar{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_m)$. Тогда $\delta_j = \gamma_j$ для $j \in A$ и $\gamma_j < \delta_j$, если $j \notin A$. Поэтому согласно [27, лемма 2] (см. также [28, лемма B]) из (2.4) будем иметь

$$\sum_{\bar{s} \in \Omega_l} \frac{\|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} \ll \frac{1}{g_1(2^{-(l+1)})} 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon)} (l+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j}} \quad (2.5)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{\gamma}} B$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$. Теперь выберем число μ такое, что $\log_2 \beta_{g_1} < \mu < \min\{1, r_{j_0} - \varepsilon\}$ и рассмотрим функцию $g_2(t) = t^\mu/g_1(t)$, $t \in (0, 1]$, $g_2(0) = 0$. Так как $\beta_{g_1} < \alpha_{t^\mu} = 2^\mu$, то снова по [25, лемма 4] (см. также [26, лемма 2]) существует Φ -функция g_3 такая, что $g_3(t) \asymp g_2(t)$, $t \in (0, 1]$, и $\alpha_{g_3} > 1$. Так как функция g_3 возрастает на $[0, 1]$, то из (2.5) следует, что

$$\sum_{\bar{s} \in \Omega_l} \frac{\|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} \ll g_3(2^{-(l+1)}) 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (l+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j}}. \quad (2.6)$$

Если $\theta_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$, то $\theta'_j = 1$, и из (2.2), (2.6) ввиду того, что функция g_3 возрастает на $[0, 1]$ и $r_{j_0} - \varepsilon - \mu > 0$, получим

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\ll \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\bar{s} \in \Omega_l} \frac{2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle}}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} \sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)} \\ &\ll \sum_{l=0}^{\infty} g_3(2^{-(l+1)}) 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (l+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j}} \ll g_3(2^{-1}) \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (l+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j}} < +\infty. \end{aligned}$$

Пусть $1 \leq \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Тогда из неравенств (2.1) и (2.6) следует, что

$$\|f\|_\infty \ll \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\bar{s} \in \Omega_l} \frac{\|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}}{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})} \ll \sum_{l=0}^{\infty} g_3(2^{-(l+1)}) 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (l+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j}} < \infty.$$

Следовательно, из этих неравенств вытекает, что $\mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \subset C(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$.

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим приближение функции суммами Фурье по ступенчатым гиперболическим крестам $S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f, \bar{x})$.

Теорема 4. Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство с фундаментальной функцией φ и $1 < \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi \leq 2$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$, $r_{j_0} = \min\{r_j > 0: j = 1, \dots, m\}$, $A = \{j = 1, \dots, m: r_j = r_{j_0}\}$. Если $r_{j_0} > \log_2 \beta_\varphi \geq \log_2 \alpha_\varphi > 0$, то

$$\sup_{f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B} \|f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f)\|_\infty \asymp \frac{2^{-nr_{j_0}}}{\varphi(2^{-n})} n^{j \in A \setminus \{j_1\} \sum (1 - \frac{1}{\theta_j})}, \quad \text{где } j_1 = \min\{j \in A\}.$$

Доказательство. Так как $r_{j_0} > \log_2 \beta_\varphi \geq \log_2 \alpha_\varphi > 0$, то по теореме 3 справедливо включение $\mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \subset C(\mathbb{T}^m)$. Пусть функция $f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$. Выберем число $q_0 > 1$ такое, что $0 < 1/q_0 < \log_2 \alpha_\varphi$. Тогда, пользуясь свойством нормы, неравенством разных метрик Джексона — Никольского для тригонометрического полинома (см., например, [29, гл. 3, подразд. 3.4.3]), известным соотношением $\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{q_0} \asymp \|A_{\bar{s}}(f)\|_{q_0}$ при $1 < q_0 < \infty$ и леммой 5 из [24], получим

$$\begin{aligned} \|f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f)\|_\infty &\leq \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_\infty \leq 2^m \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \prod_{j=1}^m 2^{\frac{s_j}{q_0}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{q_0} \\ &\ll \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \prod_{j=1}^m 2^{\frac{s_j}{q_0}} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{q_0} \ll \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \frac{1}{\varphi\left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j}\right)} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если $\theta_j = +\infty$, $j = 1, \dots, m$, то $\theta'_j = 1$, $j = 1, \dots, m$, и из неравенства (2.6) и (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \|f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f)\|_\infty &\ll \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{\bar{s} \in \Omega_l} \frac{\|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}}{\varphi\left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j}\right)} \ll \sum_{l=n}^{\infty} g_3(2^{-(l+1)}) 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (l+1)^{|A|-1} \\ &\ll g_3(2^{-(n+1)}) \sum_{l=n}^{\infty} 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (l+1)^{|A|-1} < +\infty \ll g_3(2^{-(n+1)}) 2^{-n(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (n+1)^{|A|-1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ввиду определения функций g , g_1 , g_2 , g_3 и возрастания $t/\varphi(t)$ на $(0, 1]$ нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} g_3(2^{-(n+1)}) 2^{-n(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} &\ll g_2(2^{-(n+1)}) 2^{-n(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} \ll \frac{2^{-(n+1)}}{g_1(2^{-(n+1)})} 2^{-n(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} \\ &\ll \frac{2^{-(n+1)\varepsilon}}{\varphi(2^{-(n+1)})} 2^{-n(r_{j_0} - \varepsilon)} \ll \frac{2^{-nr_{j_0}}}{\varphi(2^{-n})}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Теперь из неравенств (2.8) и (2.9) следует, что

$$\|f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f)\|_\infty \ll \frac{2^{-nr_{j_0}}}{\varphi(2^{-(n+1)})} (n+1)^{|A|-1} \quad (2.10)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$ в случае $\theta_j = +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть $1 \leq \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Тогда из оценок (2.6) и (2.7) получим

$$\|f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f)\|_\infty \ll \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{\bar{s} \in \Omega_l} \frac{\|A_{\bar{s}}(f)\|_{X(\varphi)}}{\varphi\left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j}\right)} \ll \sum_{l=n}^{\infty} g_3(2^{-(l+1)}) 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (l+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}} \quad (2.11)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$. В силу того, что функция g_3 возрастает на $[0, 1]$ и $r_{j_0} - \varepsilon - \mu > 0$, неравенств (2.9) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{l=n}^{\infty} g_3(2^{-(l+1)}) 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (l+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}} &\leq g_3(2^{-(n+1)}) \sum_{l=n}^{\infty} 2^{-l(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (l+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}} \\ &\ll g_3(2^{-(n+1)}) 2^{-n(r_{j_0} - \varepsilon - \mu)} (n+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}} \ll \frac{2^{-nr_{j_0}}}{\varphi(2^{-n})} (n+1)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Далее, из неравенств (2.11) и (2.12) следует, что

$$\|f - S_{Q_n^{(\bar{r})}}(f)\|_{\infty} \ll \frac{2^{-nr_{j_0}}}{\varphi(2^{-n})} n^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}} \quad (2.13)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$, $1 \leq \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Таким образом (см. (2.10) и (2.13)),

$$\mathfrak{S}_n := \sup_{f \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B} \|f - S_{Q_n^{(\bar{r})}}(f)\|_{\infty} \ll \frac{2^{-nr_{j_0}}}{\varphi(2^{-n})} n^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}}.$$

В теореме 4 оценка сверху доказана.

Оценку снизу $\mathfrak{S}_n$ в случае $\beta_{\varphi} < 2$ достаточно доказать для $r_1 = \dots = r_m$. Выберем число p_0 такое, что $\log_2 \beta_{\varphi} < 1/p_0 < 1$. Тогда согласно неравенству разных метрик Никольского в симметричном пространстве [24, лемма 6] и соотношению $\|A_{\bar{s}}\|_p \asymp \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{p})}$, $1 \leq p \leq \infty$ (см., например, [29, гл. 2, разд. 5]), имеем

$$\|A_{\bar{s}}\|_{X(\varphi)} \ll \frac{\varphi(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j})}{\prod_{j=1}^m 2^{-\frac{s_j}{p_0}}} \|A_{\bar{s}}\|_{p_0} \ll \prod_{j=1}^m 2^{s_j} \varphi\left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j}\right). \quad (2.14)$$

Пусть $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим функцию

$$f_1(\bar{x}) = 2^{-nr_1} \frac{2^{-n}}{\varphi(2^{-n})} n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n+1} A_{\bar{s}}(\bar{x}).$$

Нетрудно убедиться в том, что $S_{Q_n^{(\bar{r})}}(f_1, \bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \leq n} \delta_{\bar{s}}(f_1, \bar{x}) = 0$ для $\bar{x} \in \mathbb{T}^m$ (см. [23, с. 100]). Поэтому

$$\|f_1 - S_{Q_n^{(\bar{r})}}(f_1)\|_{\infty} = \|f_1\|_{\infty}. \quad (2.15)$$

Далее, пользуясь неравенством (2.14) и [27, лемма 3], получим

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|A_{\bar{s}}(f_1)\|_{X(\varphi)} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} &= \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|A_{\bar{s}}(f_1)\|_{X(\varphi)} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n+1} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \\ &\ll 2^{-nr_1} \frac{2^{-n}}{\varphi(2^{-n})} n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \prod_{j=1}^m 2^{s_j} \varphi\left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j}\right) \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n+1} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \\ &\ll 2^{-nr_1} \frac{2^{-n}}{\varphi(2^{-n})} n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} \varphi(2^{-(n+1)}) 2^{n+1} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n+1} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \ll C_1. \end{aligned}$$

Соответственно, функция $F_1 = C_1^{-1} f_1 \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$. Известно, что (см. [23, с. 100])

$$\left\| \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n+1} A_{\bar{s}} \right\|_{\infty} \asymp 2^n n^{m-1}. \quad (2.16)$$

Поэтому из равенства (2.15) следует, что

$$\|F_1 - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(F_1)\|_\infty = C_1^{-1} 2^{-nr_1} \frac{2^{-n}}{\varphi(2^{-n})} n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}} \left\| \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n+1} A_{\bar{s}} \right\|_\infty \gg \frac{2^{-nr_1}}{\varphi(2^{-n})} n^{\sum_{j=2}^m (1 - \frac{1}{\theta_j})}.$$

Значит,

$$\mathfrak{S}_n \gg \frac{2^{-nr_1}}{\varphi(2^{-n})} n^{\sum_{j=2}^m (1 - \frac{1}{\theta_j})}, \quad 1 \leq \theta_j < \infty, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если $\theta_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$, то рассмотрим функцию $f_2(\bar{x}) = 2^{-nr_1} \frac{2^{-n}}{\varphi(2^{-n})} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n+1} A_{\bar{s}}(\bar{x})$. Из неравенства (2.14) вытекает, что функция $F_2 = C_2 f_2 \in \mathbb{S}_{X(\varphi), \infty}^{\bar{\gamma}} B$. Далее, ввиду соотношения (2.16) выводим, что $\mathfrak{S}_n \gg 2^{-nr_1} (\varphi(2^{-n}))^{-1} n^{m-1}$. Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Частный случай теоремы 4 при $X(\varphi) = L_p(\mathbb{T}^m)$ и $\theta_j = \theta$, $j = 1, \dots, m$, установлен ранее А. С. Романоком [23, теорема 2.1].

Следствие 1. Пусть $X(\varphi) = L_{p, \tau}(\mathbb{T}^m)$ — пространство Лоренца и $1 \leq p < \infty$, $0 < \tau < \infty$, $r_{j_0} > 1/p$. Тогда

$$\sup_{f \in \mathbb{S}_{p, \tau, \bar{\theta}}^{\bar{\gamma}} B} \|f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_{j_0} - \frac{1}{p})} n^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (1 - \frac{1}{\theta_j})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как фундаментальной функцией пространства $L_{p, \tau}(\mathbb{T}^m)$ является $\varphi(t) = t^{1/p}$, $t \in [0, 1]$, то утверждение следует из теоремы 4.

Следствие 2. Пусть $X(\varphi) = L_{p, \tau, \alpha_1, \dots, \alpha_k}(\mathbb{T}^m)$ — обобщенное пространство Лоренца — Зигмунда и $1 \leq p < \infty$, $0 < \tau < \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sup_{f \in \mathbb{S}_{p, \tau, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \bar{\theta}}^{\bar{\gamma}} B} \|f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_{j_0} - \frac{1}{p})} \prod_{j=1}^k l_j^{-\alpha_j} (2^{-n}) n^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (1 - \frac{1}{\theta_j})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фундаментальной функцией пространства $L_{p, \tau, \alpha_1, \dots, \alpha_k}(\mathbb{T}^m)$ является $\varphi(t) = t^{1/p} \prod_{\nu=1}^k l_\nu^{\alpha_\nu}(t)$, $t \in [0, 1]$ (см. [5, гл. 3, разд. 3.4]). Поэтому утверждение следует из теоремы 4.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \tau < \infty$. Множество всех 2π -периодических функций f , для которых

$$\|f\|_{p, \tau} := \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon^\tau}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} |f(\bar{x})|^{p-\varepsilon} d\bar{x} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty,$$

называется нестандартным пространством Лебега и обозначается символом $L^{p), \tau}(\mathbb{T}^m)$ [30].

Известно, что $L^{p), \tau}(\mathbb{T}^m)$ является перестановочно-инвариантным пространством и его фундаментальная функция $\varphi_{L^{p), \tau}}(t) \asymp t^{1/p} (\log \frac{1}{t})^{-\frac{\tau}{p}}$ при $t \rightarrow +0$ [30, теорема 4.5].

Следствие 3. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \tau < \infty$. Если $r_{j_0} > 1/p$, то

$$\sup_{f \in \mathbb{S}_{p), \tau, \bar{\theta}}^{\bar{\gamma}} B} \|f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f)\|_\infty \asymp 2^{-(r_{j_0} - \frac{1}{p})} n^{\frac{\tau}{p} + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (1 - \frac{1}{\theta_j})}.$$

Теория нестандартного пространства Лебега изложена в монографии [31].

Теорема 5. Пусть $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ и $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$, $0 < p < \infty$, $0 < \tau_1 < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\theta' = \theta/(\theta - 1)$, $r_{j_0} = \min\{r_j > 0: j = 1, \dots, m\}$, $A = \{j = 1, \dots, m: r_j = r_{j_0}\}$ и выполнено условие (1.1). Если $r_{j_0} > 1/p$, то

$$\sup_{f \in \mathbb{S}_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \theta}^{\bar{r}} B} \|f - S_{Q_n^{\bar{r}}}(f)\|_{\infty, 1, \beta_1, \dots, \beta_k} \ll 2^{-n(r_{j_0} - \frac{1}{p})} (n+1)^{\beta_1 + 1 - \alpha_1} \prod_{j=2}^k l_{j-1}^{\beta_j - \alpha_j} (n+1)(n+1)^{\frac{|A|-1}{\theta'}}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{S}_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \theta}^{\bar{r}} B$. Выберем число $p_0 > \max\{p, 1\}$. Известно, что (см., например, доказательство теоремы 2.1 [23, с.99])

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0} \asymp \|A_{\bar{s}}(f)\|_{p_0}. \quad (2.17)$$

Теперь по свойству квази-нормы, ввиду теоремы 1, соотношения (2.17) и [24, лемма 6] будем иметь

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty, 1, \beta_1, \dots, \beta_k} &\ll \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\infty, 1, \beta_1, \dots, \beta_k} \ll \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{p_0}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_{\nu} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_{\nu}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0} \\ &\ll \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{p_0}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_{\nu} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_{\nu}} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{p_0} \\ &\ll \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{p}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_{\nu} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}} \sum_{j=1}^m (s_j + 1) \|A_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Пусть $1 \leq \theta < +\infty$. Тогда, применяя неравенство Гельдера при $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$, получим

$$\begin{aligned} I &:= \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{p}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_{\nu} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}} \sum_{j=1}^m (s_j + 1) \|A_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k} \\ &\leq \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\theta}} \left\| \left\{ 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{p}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_{\nu} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}} \sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\theta'}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Поскольку $r_{j_0} > 1/p$, то

$$\left\| \left\{ 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{p}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_{\nu} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}} \sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\theta'}} < +\infty. \quad (2.20)$$

Теперь из неравенств (2.18)–(2.20) следует, что $\mathbb{S}_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \theta}^{\bar{r}} B \subset L_{\infty, 1, \beta_1, \dots, \beta_k}$ при $r_{j_0} > 1/p$. Как в доказательстве неравенства (2.18), учитывая теорему 1, соотношения (2.17) и [24, лемма 6], получим

$$\begin{aligned} \|f - S_{Q_n^{\bar{r}}}(f)\|_{\infty, 1, \beta_1, \dots, \beta_k} &\ll \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\infty, 1, \beta_1, \dots, \beta_k} \\ &\ll \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{p}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_{\nu} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}} \sum_{j=1}^m (s_j + 1) \|A_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Далее, в соответствии с неравенством Гельдера при $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$ будем иметь

$$\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{p}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_{\nu} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}} \sum_{j=1}^m (s_j + 1) \|A_{\bar{s}}(f)\|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k}$$

$$\ll \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \| A_{\bar{s}}(f) \|_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\theta} \times \left\| \left\{ 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{p}} \prod_{\nu=1}^k \left(l_\nu \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_\nu - \alpha_\nu} \sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \right\|_{l_{\theta'}}. \quad (2.22)$$

Из неравенств (2.21) и (2.22) следует, что

$$\| f - S_{Q_n^{(\bar{\gamma})}}(f) \|_{\infty, 1, \beta_1, \dots, \beta_k} \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p})} \prod_{\nu=1}^k \left(l_\nu \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_\nu - \alpha_\nu} \sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \right\|_{l_{\theta'}}, \quad (2.23)$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \theta}^{\bar{r}} B$. Исходя из [32, лемма 2.1], получим

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p})} \prod_{\nu=1}^k \left(l_\nu \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j+1} \right) \right)^{\beta_\nu - \alpha_\nu} \sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \right\|_{l_{\theta'}} \\ & \asymp \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p})\theta'} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{(\beta_\nu - \alpha_\nu)\theta'} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right) \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{(\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'})\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \\ & = C \left(\sum_{l=n}^{\infty} \sum_{l < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq l+1} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p})\theta'} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{(\beta_\nu - \alpha_\nu)\theta'} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right) \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{(\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'})\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Выберем число $\varepsilon \in (0, 1/p)$. Учитывая, что функция $\psi(y) = 2^{y\varepsilon} y^{\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{(\beta_\nu - \alpha_\nu)}(y)$ возрастает на $[1, \infty)$, выводим

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^m 2^{\frac{s_j+1}{p}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{\beta_\nu - \alpha_\nu} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right) \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'}} \\ & = 2^{(\frac{1}{p} - \varepsilon) \sum_{j=1}^m (s_j + 1)} 2^{\varepsilon \sum_{j=1}^m (s_j + 1)} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{\beta_\nu - \alpha_\nu} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right) \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'}} \\ & \leq 2^{(\frac{1}{p} - \varepsilon) \sum_{j=1}^m (s_j + 1)} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \varepsilon} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{\beta_\nu - \alpha_\nu} \left(\sum_{j=1}^m (s_j \gamma_j + 1) \right) \left(\sum_{j=1}^m (\gamma_j s_j + 1) \right)^{\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'}} \\ & \ll 2^{(\frac{1}{p} - \varepsilon) \sum_{j=1}^m (s_j + 1)} 2^{(l+1)\varepsilon} (l + m + 1)^{\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{\beta_\nu - \alpha_\nu} (l + m + 1) \end{aligned}$$

для $\bar{s}$ таких, что $l < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq l + 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{l < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq l+1} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p})\theta'} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{(\beta_\nu - \alpha_\nu)\theta'} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right) \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{(\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'})\theta'} \\ & \ll \sum_{l=n}^{\infty} 2^{(l+1)\varepsilon\theta'} (l + m + 1)^{(\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'})\theta'} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{\beta_\nu - \alpha_\nu} (l + m + 1) \sum_{l < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq l+1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta'} 2^{(\frac{1}{p} - \varepsilon) \sum_{j=1}^m (s_j + 1)\theta'}. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Введем обозначения $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$, $\gamma'_m = \frac{r_j - \frac{1}{p} + \varepsilon}{r_{j_0} - \frac{1}{p} + \varepsilon}$. Тогда $\gamma'_j = \gamma_j$ для $j \in A$ и $\gamma_j < \gamma'_j$

для $j \notin A$. Согласно [28, лемма В] имеем

$$\sum_{l < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq l+1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta'} 2^{(\frac{1}{p} - \varepsilon) \sum_{j=1}^m (s_j + 1)\theta'} = \sum_{l < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq l+1} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle (r_{j_0} - \frac{1}{p} + \varepsilon)\theta'} \ll 2^{-l(r_{j_0} - \frac{1}{p} + \varepsilon)\theta'} l^{|A|-1}. \quad (2.26)$$

Из неравенств (2.25) и (2.26) ввиду $r_{j_0} - 1/p > 0$ следует, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{l < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq l+1} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p})\theta'} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{(\beta_{\nu} - \alpha_{\nu})\theta'} \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right) \left(\sum_{j=1}^m (s_j + 1) \right)^{(\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'})\theta'} \\
& \ll \sum_{l=n}^{\infty} 2^{(l+1)\varepsilon\theta'} (l+m+1)^{(\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'})\theta'} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{(\beta_{\nu} - \alpha_{\nu})\theta'} (l+m+1) 2^{-l(r_{j_0} - \frac{1}{p} + \varepsilon)\theta'} l^{|A|-1} \\
& \ll \sum_{l=n}^{\infty} 2^{-l(r_{j_0} - \frac{1}{p})\theta'} l^{|A|-1} (l+1)^{(\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'})\theta'} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{(\beta_{\nu} - \alpha_{\nu})\theta'} (l+1) \\
& \ll 2^{-n(r_{j_0} - \frac{1}{p})\theta'} n^{|A|-1} (n+1)^{(\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'})\theta'} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{(\beta_{\nu} - \alpha_{\nu})\theta'} (n+1). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Как итог, согласно неравенствам (2.23) и (2.27) имеем

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\infty, 1, \beta_1, \dots, \beta_k} \ll 2^{-n(r_{j_0} - \frac{1}{p})\theta'} n^{\frac{|A|-1}{\theta'}} (n+1)^{\beta_1 - \alpha_1 + \frac{1}{\theta'}} \prod_{\nu=2}^k l_{\nu-1}^{\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}} (n+1) \tag{2.28}$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{p, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \theta}^{\bar{\gamma}} B$.

Теорема 5 доказана.

В теореме 4 получена оценка приближения функций из симметричного пространства $X(\varphi)$ при $1 < \alpha_{\varphi}$.

Исследуем случай $\alpha_{\varphi} = 1$. В частности, для пространств $X(\varphi) = L_{\infty, \tau, \beta_1, \dots, \beta_k}(\mathbb{T}^m)$ и $C(\mathbb{T}^m)$ индекс $\alpha_{\varphi} = \beta_{\varphi} = 1$ (см., например, [5, гл. 3, разд. 3.3, с. 85]). Рассмотрим приближение функции суммами (см., например, [22]) $A_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f, \bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} A_{\bar{s}}(f, \bar{x})$, $n \in \mathbb{N}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $0 < \tau < \infty$, $\alpha_1 + 1/\tau < 0$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\theta' = \theta/(\theta - 1)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$\sup_{f \in \mathbb{S}_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2, \theta}^{\bar{\gamma}} B} \|f - A_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\infty} \asymp 2^{-nr_1} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})} (2^{-n}) l_2^{\alpha_2} (2^{-n}) n^{\frac{m-1}{\theta'}}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{S}_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2, \theta}^{\bar{\gamma}} B$. По свойству нормы и теореме 2 имеем

$$\|f\|_{\infty} \leq \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{\infty} \ll \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} l_1^{-\alpha_1 - \frac{1}{\tau}} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) l_2^{-\alpha_2} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) \|A_{\bar{s}}(f)\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2}. \tag{2.29}$$

Применяя неравенство Гельдера к сумме в правой части неравенства (2.29), при $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$ получим

$$\|f\|_{\infty} \ll \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \|A_{\bar{s}}(f)\|_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2} \right\} \right\|_{l_{\theta}} \left(\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \theta'} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})\theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) l_2^{-\alpha_2 \theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) \right)^{\frac{1}{\theta'}}. \tag{2.30}$$

Выбирая $\varepsilon \in (0, \min\{r_j : j = 1, \dots, m\})$ и учитывая, что последовательность

$$\left\{ \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j} \right)^{-\varepsilon \theta'} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})\theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) l_2^{-\alpha_2 \theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m}$$

убывает, выводим

$$\begin{aligned}
& \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta'} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})\theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) l_2^{-\alpha_2 \theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) \\
&= \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \varepsilon)\theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j} \right)^{-\varepsilon\theta'} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})\theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) l_2^{-\alpha_2 \theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) \\
&\ll \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \varepsilon)\theta'} < +\infty.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Из неравенств (2.30) и (2.31) следует, что $\mathbb{S}_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \subset C(\mathbb{T}^m)$. Далее, по (2.30) и (2.31) имеем

$$\|f - A_{Q_n^{\bar{r}}}(f)\|_{\infty} \ll \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle > n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta'} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})\theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) l_2^{-\alpha_2 \theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) \right)^{\frac{1}{\theta'}} \tag{2.32}$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$. Рассуждая, как в доказательстве (2.31), в соответствии с [28, лемма В] убеждаемся, что

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle > n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle \theta'} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})\theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) l_2^{-\alpha_2 \theta'} \left(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \right) \right)^{1/\theta'} \ll 2^{-n\varepsilon} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})} (2^{-n}) l_2^{-\alpha_2} (2^{-n}) \\
& \times \left(\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\delta} \rangle > n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\delta} \rangle (r_1 - \varepsilon)\theta'} \right)^{1/\theta'} \ll 2^{-nr_1} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})} (2^{-n}) l_2^{-\alpha_2} (2^{-n}) n^{\frac{\nu-1}{\theta'}},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

где $\bar{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_m)$, $\delta_j = \frac{r_j - \varepsilon}{r_1 - \varepsilon}$. Теперь из неравенств (2.32) и (2.33) получим

$$\sup_{f \in \mathbb{S}_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B} \|f - A_{Q_n^{\bar{r}}}(f)\|_{\infty} \ll 2^{-nr_1} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})} (2^{-n}) l_2^{-\alpha_2} (2^{-n}) n^{\frac{\nu-1}{\theta'}}.$$

Оценку снизу достаточно доказать в случае $r_1 = \dots = r_m$.

Рассмотрим функцию $f_3(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = n+1} A_{\bar{s}}(\bar{x})$.

Тогда $f_3 \in L_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2}(\mathbb{T}^m)$, и ввиду соотношения (1.17) можно показать, что существует $C_3 > 0$ такое, что функция $F_3 = C_3 2^{-n(r_1+1)} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})} (2^{-n}) l_2^{-\alpha_2} (2^{-n}) n^{-\frac{\nu-1}{\theta'}} f_3 \in \mathbb{S}_{\infty, \tau, \alpha_1, \alpha_2, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$. Известно, что (см., например, [23, с.100]) $\|f_3\|_{\infty} \asymp 2^n n^{m-1}$. Поэтому

$$\|F_1 - A_{Q_n^{\bar{r}}}(F_1)\|_{\infty} = \|F_1\|_{\infty} \gg 2^{-nr_1} l_1^{-(\alpha_1 + \frac{1}{\tau})} (2^{-n}) l_2^{-\alpha_2} (2^{-n}) n^{\frac{\nu-1}{\theta'}}.$$

Этим оценка снизу в теореме 6 доказана. Теорема 6 доказана.

Заключение

Оценки наилучшего приближения функции в равномерной метрике имеют важное значение в задачах оптимального восстановления дифференцируемых функций по заданным значениям в точках (см., например, [33; 34] и библиографию в них).

Результаты этой статьи могут быть применены в оценках наилучших M -членных приближений, поперечников функциональных классов в равномерной метрике.

Автор благодарен Рецензенту за замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Bennet C., Sharpley R. Interpolation of operators. NY: Acad. Press, 1988. 469 p.
3. Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 4. С. 746–749.
4. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 p.
5. Edmunds D., Gurka P. On embeddings of logarithmic Bessel potential spaces // J. Funct. Anal. 1997. Vol. 146. P. 116–150. Art. no. FU963037. doi: 10.1006/jfan.1996.3037
6. Opic B., Pick L. On generalized Lorentz–Zygmund spaces // Math. Inequal. Appl. 1999. Vol. 2, no. 3. P. 391–467. doi: 10.7153/mia-02-35
7. Bennet C., Rudnik K. On Lorentz–Zygmund spaces // Disser. Math. Vol. 175. 1979. 66 p.
8. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
9. Аманов Т.И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата : Наука, 1976. 224 с.
10. Lebesgue H., Sur la representation trigonometrique approchee des fonetions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France. 1910. Vol. 38. P. 184–210.
11. Осколков К.И. К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 515–526.
12. Байбородов С.П. Константы Лебега и приближение функций прямоугольными суммами Фурье в $L^p(T^m)$ // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 1. С. 77–90.
13. Давыдов О.В. О приближении индивидуальных функций прямоугольными суммами Фурье // Докл. АН СССР. 1992. Т. 327, № 3. С. 295–298.
14. Стечкин С.Б. О приближении периодических функций суммами Фейера // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 62. С. 48–60.
15. Stečkin S.B. On the approximation of periodic functions by de la Vallee Poussin sums // Anal. Math. 1978. Vol. 4, no. 1. P. 61–74. doi: 10.1007/BF01904859
16. Дамен В. О наилучшем приближении и суммах Валле-Пуссена // Мат. заметки. 1978. Т. 23, № 5. С. 671–683.
17. Гейт В.Э. О точности некоторых неравенств в теории приближений // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 5. С. 571–582.
18. Ильясов Н.А. О порядке приближения в равномерной метрике средними Фейера — Зигмунда на классах $E_p(\varepsilon)$ // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 5. С. 679–687.
19. Trigub R.M., Belinsky E.S. Fourier analysis and approximation of functions. Dordrecht: Springer Publ., 2004. 586 p. doi: 10.1007/978-1-4020-2876-2
20. Jia-Ding Cao Stečkin inequalities for summability methods // Int. J. Math. Math. Sci. 1997. Vol. 20, no. 1. P. 93–100. doi: 10.1155/S01611171297000136
21. Лифлянд И.Р. Точный порядок констант Лебега гиперболических частных сумм кратных рядов Фурье // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 674–683.
22. Темляков В.Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168.
23. Романюк А.С. Приближение классов $B_{p,\theta}^{\tau}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 2. С. 91–116.
24. Акишев Г. О порядках M -членных приближений классов функций симметричного пространства // Мат. журн. 2014. Т.14, № 4. С. 46–71.
25. Лапин С.В. Некоторые теоремы вложения для произведений функций. Деп. в ВИНТИ. 20 фев. 1985. № 1036–80Деп. 31 с.
26. Шерстнева Л.А. О свойствах наилучших приближений Лоренца и некоторые теоремы вложения // Изв. вузов. Математика. 1987. № 10. С. 48–58.
27. Бекмаганбетов К.А. О порядках приближения класса Бесова в метрике анизотропных пространств Лоренца // Уфим. мат. журн. 2009. Vol. 1, № 2. P. 9–16.
28. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН АН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.

29. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
30. **Capone Claudia, Fiorenza Alberto.** On small Lebesgue spaces // J. Func. Space Appl. 2005. Vol. 3, no. 1. P. 73–89. doi: 10.1155/2005/192538
31. **Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S.** Integral operators in non-standard function spaces. Vol. 1. Variable exponent Lebesgue and amalgam spaces. Cham: Birkhäuser, 2016. 567 p.
32. **Neves J.S.** Lorentz–Karamata spaces, Bessel and Riesz potential and embeddings // Disser. Math. Vol. 405. 2002. P.1–46. doi: 10.4064/dm405-0-1
33. **Temlyakov V.N.** On optimal recovery in L_2 // J. Complexity. 2021. Vol. 65. Art. no. 101545. doi: 10.1016/j.jco.2020.101545
34. **Krieg D., Pozharska K., Ullrich M., Ullrich T.** Sampling recovery in the uniform norm [e-resource]. 2023. 29 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.07539>

Поступила 16.08.2024

После доработки 29.10.2024

Принята к публикации 4.11.2024

Акишев Габдолла

д-р физ.-мат. наук, профессор

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Казахстанский филиал, г. Астана, Казахстан;

Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolation of linear operators*. Providence, R.I.: American Math. Soc., 1982, Ser. Translations of Mathematical Monographs, vol. 54, 375 p. ISBN: 978-0821831762. Original Russian text published in Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M. *Interpolyatsiya lineinykh operatorov*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 400 p.
2. Bennet C., Sharpley R. *Interpolation of operators*, NY, Acad. Press, 1988, vol. 129, 469 p. doi: 10.1016/s0079-8169(08)x6053-2
3. Semenov E.M. Interpolation of linear operators in symmetric spaces. *Sov. Math., Dokl.*, 1965, vol. 6, pp. 1294–1298.
4. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9780691080789. Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*, Moscow, Mir Publ., 1974, 333 p.
5. Edmunds D., Gurka P., Opic B. On embeddings of logarithmic Bessel potential spaces. *J. Funct. Anal.*, 1997, vol. 146, iss. 1, pp. 116–150. Art. no. FU963037. doi: 10.1006/jfan.1996.3037
6. Opic B., Pick L. On generalized Lorentz–Zygmund spaces. *Math. Inequal. Appl.*, 1999, vol. 2, no. 3, pp. 391–467. doi: 10.7153/mia-02-35
7. Bennet C., Rudnik K. *On Lorentz–Zygmund spaces*, Disser. Math., vol. 175, Warszawa, 1979, 66 p.
8. Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Spaces of functions of mixed smoothness from the decomposition point of view. *Proc. Stekov Inst. Math.*, 1990, vol. 187, iss. 3, pp. 163–184.
9. Amanov T.I. *Prostranstva differentsiruemykh funktsii s dominiruyushchei smeshannoi proizvodnoi* [Spaces of differentiable functions with dominant mixed derivative], Alma-ata, Nauka Publ., 1976, 224 p.
10. Lebesgue H. Sur la représentation trigonometrique approchée des fonetions satisfaisant à une condition de Lipschitz. *Bull. Soc. Math. France*, 1910, vol. 38, pp. 184–210.
11. Oskolkov K.I. Lebesgue's inequality in a uniform metric and on a set of full measure. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1975, vol. 18, pp. 895–902. doi: 10.1007/BF01153041
12. Baiborodov S.P. Lebesgue constants and approximation of functions by rectangular fourier sums in $L^p(T^m)$. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1983, vol. 34, pp. 522–529. doi: 10.1007/BF01160866
13. Davydov O.V. Sequences of rectangular Fourier sums of continuous functions with given majorants of the mixed moduli of smoothness. *Sb. Math.*, 1996, vol. 187, iss. 7, pp. 981–1004. doi: 10.1070/SM1996v187n07ABEH000143
14. Stechkin S.B. The approximation of periodic functions by Fejér sums. *Trudy Mat. Ins. Steklov*, 1961, vol. 62, pp. 522–524 (in Russian).

15. Stečkin S.B. On the approximation of periodic functions by de la Vallée Poussin sums. *Anal. Math.*, 1978, vol. 4, no. 1, pp. 61–74. doi: 10.1007/BF01904859
16. Dahmen W. Best approximation and de la Vallée-Poussin sums. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1978, vol. 23, pp. 369–376. doi: 10.1007/BF01789003
17. Geit V.É. On the exactness of certain inequalities in approximation theory. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1971, vol. 10, pp. 768–776. doi: 10.1007/BF01109042
18. Il'yasov N.A. On the order of approximation in the uniform metric by the Fejér–Zygmund means on the classes $E_p(\varepsilon)$. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 5, pp. 625–633. doi: 10.1023/A:1017372708394
19. Trigub R.M., Belinsky E.S. *Fourier analysis and approximation of functions*, Dordrecht, Springer Publ., 2004, 586 p. doi: 10.1007/978-1-4020-2876-2
20. Jia-Ding Cao. Stečkin inequalities for summability methods. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1997, vol. 20, no. 1, pp. 93–100. doi: 10.1155/S0161171297000136
21. Liflyand I.R. Exact order of the Lebesgue constants of hyperbolic partial sums of multiple fourier series. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1986, vol. 39, pp. 369–374. doi: 10.1007/BF01156675
22. Temlyakov V.N. Estimates for the asymptotic characteristics of classes of functions with bounded mixed derivative or difference. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 189, no. 4, pp. 161–197.
23. Romanyuk A.S. Approximability of the classes $B_{p,\theta}^r$ of periodic functions of several variables by linear methods and best approximations. *Sb. Math.*, 2004, vol. 195, iss. 2, pp. 237–261. doi: 10.1070/SM2004v195n02ABEH000801
24. Akishev G. On the orders of M -terms approximations of classes of functions of the symmetrical space. *Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 46–71 (in Russian).
25. Lapin S.V. *Some embedding theorems for products of functions*, Manuscript deposited in VINITI on February 20, 1985, no. 1036–80Dep., 31 p.
26. Sherstneva L.A. On the properties of best Lorentz approximations and certain embedding theorems. *Sov. Math. (Iz. VUZ)*, 1987, vol. 31, no. 10, pp. 62–73.
27. Bekmaganbetov K.A. On orders of approximation of the Besov class in the metric of anisotropic Lorentz spaces. *Ufim. math. J.*, 2009, vol. 1, no. 2, pp. 9–16 (in Russian).
28. Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 178, pp. 1–121.
29. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*, Berlin, Heidelberg, Springer, 1975, 420 p. doi: 10.1007/978-3-642-65711-5. Original Russian text published in Nikol'skii S.M., *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1969, 480 p.
30. Capone C., Fiorenza A. On small Lebesgue spaces. *J. Function Space Appl.*, 2005, vol. 3, no. 1, pp. 73–89. doi: 10.1155/2005/192538
31. Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S. *Integral operators in non-standard function spaces. Vol. 1 : Variable exponent Lebesgue and amalgam spaces*, Cham, Birkhäuser, 2016, 567 p. doi: 10.1007/978-3-319-21015-5
32. Neves J.S. Lorentz–Karamata spaces, Bessel and Riesz potential and embeddings. *Disser. Math.*, 2002, vol. 405, pp. 1–46. doi: 10.4064/dm405-0-1
33. Temlyakov V.N. On optimal recovery in L_2 . *J. Complexity*, 2021, vol. 65, art. no. 101545. doi: 10.1016/j.jco.2020.101545
34. Krieg D., Pozharska K., Ullrich M., Ullrich T. *Sampling recovery in the uniform norm* [e-resource]. 2023. 29 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.07539>

Received August 16, 2024

Revised October 29, 2024

Accepted November 4, 2024

Funding Agency: The work was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant AP19677486).

Gabdolla Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow University, Kazakhstan Branch, Astana, 010010 Republic of Kazakhstan; Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010 Republic of Kazakhstan, e-mail: akishev_g@mail.ru.

Cite this article as: G. Akishev. On estimates of the approximation of functions from a symmetric space by Fourier sums in the uniform metric. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 9–26.