ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 4 2024

УДК 512.5

ПОЛНЫЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЕТИ НАД ПОЛЕМ ЧАСТНЫХ КОЛЬЦА С QR-СВОЙСТВОМ[1]

Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев

Система $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} поля K называется сетью (ковром) над K порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью. По элементарной сети σ определяется элементарная сетевая подгруппа $E(\sigma)$, которая порождается элементарными трансвекциями $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$. Элементарная сеть σ называется замкнутой, если подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Пусть R — нетерова область с QR-свойством (то есть всякое промежуточное подкольцо, лежащее между R и его полем частных K, является кольцом частных кольца R относительно мультипликативной системы из R), $\sigma = (\sigma_{ij})$ — полная (элементарная) сеть порядка $n \geq 2$ (соответственно $n \geq 3$) над K, причем аддитивные подгруппы σ_{ij} — ненулевые R-модули. Доказано, что с точностью до сопряжения диагональной матрицей все σ_{ij} являются (дробными) идеалами фиксированного промежуточного подкольца P, $R \subseteq P \subseteq K$, причем для всех $i < j$ выполняются включения $\pi_{ij}\pi_{ji} \subseteq P$, $\pi_{ij} \subseteq P \subseteq \pi_{ji}$. В частности, элементарная сеть σ является замкнутой.

Ключевые слова: общая и специальная линейные группы, полная и элементарная сети (ковры) аддитивных подгрупп, сетевая подгруппа.

R. Yu. Dryaeva, V. A. Koibaev. Full and elementary nets over the field of fractions of a ring with the QR-property.

The set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, of additive subgroups σ_{ij} of a field K is called a net (carpet) over K of order n if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all values of the indices i, r, and j. A net considered without the diagonal is called an elementary net. Based on an elementary net σ, an elementary net subgroup $E(\sigma)$ is defined, which is generated by elementary transvections $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$. An elementary net σ is called closed if the subgroup $E(\sigma)$ does not contain new elementary transvections. Suppose that R is a Noetherian domain with the QR-property (i.e., any intermediate subring lying between R and its field of fractions K is a ring of fractions of the ring R with respect to a multiplicative system in R), $\sigma = (\sigma_{ij})$ is a complete (elementary) net of order $n \geq 2$ ($n \geq 3$, respectively) over K, and the additive subgroups σ_{ij} are nonzero R-modules. It is proved that, up to conjugation by a diagonal matrix, all σ_{ij} are (fractional) ideals of a fixed intermediate subring P, $R \subseteq P \subseteq K$, and the inclusions $\pi_{ij}\pi_{ji} \subseteq P$ and $\pi_{ij} \subseteq P \subseteq \pi_{ji}$ hold for all $i < j$. In particular, the elementary net σ is closed.

Keywords: general and special linear groups, full and elementary nets (carpets) of additive subgroups, net subgroup.

MSC: 20G15

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-77-83

Введение

В работе исследуется структура сети (ковра), элементарной сети (элементарного ковра) над полем частных кольца с QR-свойством (R. G. Gilmer, J. Ohm [1]).

Система $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} поля K называется *сетью* (*ковром*) над полем K порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j [2; 3]. Сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется *D-сетью*, если $1 \in \sigma_{ii}$, $1 \leq i \leq n$. Из сетевого условия следует, что все диагональные аддитивные подгруппы σ_{ii} полной сети являются кольцами, а для D-сети все σ_{ii} — кольца с единицей. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарным ковром*) [2; 3, вопрос 7.28 4]. Сеть (элементарная сеть) $\sigma = (\sigma_{ij})$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-02-2024-1447.

мы называем *неприводимой*, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. По элементарной сети σ определяется *элементарная сетевая* подгруппа $E(\sigma)$, которая порождается элементарными трансвекциями $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$, $\alpha \in \sigma_{ij}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ (e — единичная матрица, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули). Назовем элементарную сеть σ *замкнутой*, если подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций [4, вопрос 15.46; 5]. Замкнутыми являются элементарные сети, диагональ которых можно дополнить подгруппами, получив при этом полную сеть [5] (такие элементарные сети мы называем *дополняемыми*). Примеры незамкнутых неприводимых элементарных сетей любого порядка приводятся в [5; 6].

Через $D(n, K)$ обозначим группу обратимых диагональных $n \times n$ матриц над полем K. По сети σ и любой матрице $d = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ из $D(n, K)$ можно определить сопряженную сеть $\pi = d\sigma d^{-1}$, где $\pi_{ij} = \varepsilon_i \sigma_{ij} \varepsilon_j^{-1}$. Нетрудно увидеть, что замкнутость (дополняемость) элементарной сети равносильна замкнутости (дополняемости) сопряженной элементарной сети.

Пусть R — коммутативная область целостности и K — ее поле частных. Мы говорим, что кольцо R обладает *QR-свойством* (*QR-property*), если всякое промежуточное подкольцо, лежащее между R и K, является кольцом частных (*quotient ring*) кольца R относительно некоторой мультипликативной системы (не содержащей нуля) из R (см. [1]). Если кольцо R обладает QR-свойством, то мы называем его *QR-кольцом*. QR-кольцами являются, например, область главных идеалов или кольцо целых алгебраических чисел.

Теорема 1. *Пусть R — нетерово QR-кольцо, K — поле частных кольца R, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая D-сеть порядка $n \geq 2$ над K, причем для любых i, j подгруппы σ_{ij} являются R-модулями. Тогда для некоторого промежуточного подкольца P, $R \subseteq P \subseteq K$, сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n, K)$ с полной D-сетью $\pi = (\pi_{ij})$ дробных идеалов π_{ij} кольца P, причем $\pi_{ii} = P$, $1 \leq i \leq n$, и для любых $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ справедливы включения*

$$\pi_{ij}\pi_{ji} \subseteq P, \quad \pi_{ij} \subseteq P \subseteq \pi_{ji}, \quad \pi_{1k} \subseteq \pi_{2k} \subseteq \ldots \subseteq \pi_{nk} \tag{1}$$

(*каждый столбец дробных идеалов сети π упорядочен по включению*).

Теорема 2. *Пусть R — нетерово QR-кольцо, K — поле частных кольца R, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geq 3$ над K, причем для любых i, j подгруппы σ_{ij} являются R-модулями. Тогда для некоторого промежуточного подкольца P, $R \subseteq P \subseteq K$, элементарная сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n, K)$ с элементарной сетью $\pi = (\pi_{ij})$ дробных идеалов π_{ij} кольца P, для любых $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ справедливы включения* (1). *Элементарная сеть σ (как и π) является дополняемой и, в частности, замкнутой.*

Область главных идеалов является нетеровым QR-кольцом (в этом случае группа классов идеалов тривиальна) [1; 7]. Следовательно, если R — область главных идеалов, то мы получаем результаты работы [8], в которой получено описание полных и элементарных сетей над полем частных области главных идеалов. Далее, кольцо целых R в поле алгебраических чисел K (конечное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$) является нетеровым QR-кольцом (группа классов идеалов кольца R конечна) [1; 7]. Поэтому другим важным следствием сформулированных результатов является описание полных и элементарных сетей $\sigma = (\sigma_{ij})$ над полем алгебраических чисел K (когда подгруппы σ_{ij} являются R-модулями).

Доказанные теоремы обобщают результаты статьи Р. Ю. Дряевой, В. А. Койбаева и Я. Н. Нужина [8] и, можно сказать, являются предельными в данном направлении.

1. D-сети над QR-кольцами

Лемма 1 [1, следствие 2.6]. *Если R нетерова область, то следующие условия эквивалентны*:

(1) *R обладает QR-свойством;*

(2) *R — дедекиндова область, и группа классов идеалов кольца R периодическая (некоторая степень всякого идеала кольца R является главным идеалом).*

Непосредственно из леммы 1 и [7, гл. 9] следует, что область главных идеалов и кольцо целых чисел в поле алгебраических чисел являются нетеровыми QR-кольцами.

Следующее предложение является теоремой Крулля — Акидзуки.

Предложение 1 [9, гл. VII, § 2, no. 5]. *Пусть A — нетерово целостное кольцо, в котором всякий ненулевой простой идеал максимален, K — его поле частных. Пусть L — конечное расширение поля K и B — подкольцо поля L, содержащее кольцо A, $A \subseteq B \subseteq L$. Тогда B нетерово и любой ненулевой простой идеал в B максимален.*

Лемма 2 [1, предложение 1.3]. *Рассмотрим цепочку колец $D \subset D_1 \subset D_2$ и рассмотрим следующие условия:*

(a) *D_1 — кольцо частных кольца D;*

(b) *D_2 — кольцо частных кольца D_1;*

(c) *D_2 — кольцо частных кольца D.*

Тогда (a) *и* (b) *влечет* (c); (a) *и* (c) *влечет* (b); *но* (c) *и* (b) *не влечет* (a).

З а м е ч а н и е. Далее, если не оговорено противное, мы предполагаем, что R — нетерова область, обладающая QR-свойством (нетерово QR-кольцо), K — поле частных кольца R.

Предложение 2. *Всякое промежуточное кольцо L, $R \subseteq L \subseteq K$, является нетеровым QR-кольцом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что L является QR-кольцом. Пусть B — промежуточное подкольцо, $L \subset B \subset K$. Покажем, что кольцо B является кольцом частных кольца L. В лемме 2 положим $D = R$, $D_1 = L$, $D_2 = B$. Так как R является QR-кольцом, то D_1 — кольцо частных кольца D и D_2 — кольцо частных кольца D. Тогда из леммы 2 ((a) и (c) влечет (b)) следует, что D_2 — кольцо частных кольца D_1, а потому кольцо B является кольцом частных кольца L. Таким образом, L есть QR-кольцо.

Далее, согласно лемме 1 кольцо R (как дедекиндово кольцо) нетерово и одномерно, а потому согласно предложению 1 промежуточное кольцо L является нетеровым. Следовательно, L есть нетерово QR-кольцо. □

Лемма 3. *Пусть Q, L — промежуточные подкольца, причем $R \subseteq Q \subseteq L \subseteq K$. Предположим, что $\mathfrak{B} \subseteq K$ — ненулевой (дробный) идеал кольца L и $\mathfrak{B}$ — (дробный) идеал кольца Q. Тогда $L = Q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $\mathfrak{B}$ — ненулевой идеал поля K (относительно Q и L). Согласно лемме 2 кольца Q и L являются нетеровыми QR-кольцами, а потому по лемме 1 эти кольца дедекиндовы, причем группа классов идеалов кольца Q и группа классов идеалов кольца L являются периодическими группами. Тогда для некоторых степеней m и n и элементов $t_1, t_2, a, b \in K$ мы имеем

$$B^m = t_1 Q, \quad B^n = t_2 L \Longrightarrow B^{mn} = aQ = bL.$$

Отсюда $(a/b)Q = L$, $(b/a)L = Q$. Поэтому $a/b \in L$ и $b/a \in Q \subseteq L$. Таким образом, $a/b, b/a \in L$. Следовательно, b/a — обратимый элемент кольца L, отсюда $L = (b/a)L = Q$, а значит, $Q = L$.□

Предложение 3. *Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ — неприводимая D-сеть аддитивных подгрупп поля K, причем σ_{ij} являются R-модулями для всех $i, j = 1, 2$. Тогда $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, причем σ_{ii} — промежуточные подкольца, $R \subseteq \sigma_{ii} \subseteq K$, которые являются QR-кольцами, $i = 1, 2$; кроме того, $\sigma_{12}\sigma_{21}$ — целый идеал кольца $\sigma_{11} = \sigma_{22}$.*

Доказательство. По условию $\sigma_{ij} \neq 0$ (в силу невырожденности сети σ) для всех $i = 1, 2$. По определению D-сети σ подгруппы σ_{11} и σ_{22} являются кольцами, которые содержат единицу, $1 \in \sigma_{ii}$, $i = 1, 2$. Далее, так как σ_{ii} — R-модули и $1 \in \sigma_{ii}$, то $R \cdot 1 \subseteq \sigma_{ii}$, поэтому σ_{ii} — промежуточные подкольца, $R \subseteq \sigma_{ii} \subseteq K$, $i = 1, 2$. Согласно предложению 2 σ_{ii} являются QR-кольцами. Рассмотрим произведение $\mathfrak{B} = \sigma_{12}\sigma_{21}$. Подгруппа $\mathfrak{B}$ отлична от 0. По определению сети σ мы имеем $\sigma_{ij}\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ii}$, $i = 1, 2$. Поэтому $\mathfrak{B} \subseteq \sigma_{11}$ и $\mathfrak{B} \subseteq \sigma_{22}$, причем по определению сети подгруппа $\mathfrak{B}$ является σ_{11}-модулем и σ_{22}-модулем. Следовательно, $\mathfrak{B}$ — целый идеал кольца σ_{11} и $\mathfrak{B}$ — целый идеал кольца σ_{11}, причем $B \neq 0$. Положим

$$Q = \sigma_{11} \cap \sigma_{22}, \quad L = \sigma_{22} \Longrightarrow R \subseteq Q \subseteq L \subseteq K.$$

Тогда $\mathfrak{B}$ — идеал колец Q и L, $\mathfrak{B} \subseteq Q \subseteq L$. Согласно лемме 3 мы имеем равенство $Q = \sigma_{11} \cap \sigma_{22} = L = \sigma_{22}$. Аналогично $\sigma_{11} \cap \sigma_{22} = \sigma_{11}$. Следовательно, $\sigma_{22} = \sigma_{11}$. □

Предложение 4. *Пусть R — произвольная коммутативная область с 1, K — поле частных области R, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая сеть (элементарная сеть) порядка $n \geq 2$ над K. Тогда σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n, K)$ с сетью (элементарной сетью) $\pi = (\pi_{ij})$, у которой все π_{ij}, лежащие ниже главной диагонали, содержат* $1 : 1 \in \pi_{ij}$ *для всех $i > j$.*

Доказательство. В подгруппах σ_{ii-1} рассмотрим ненулевые элементы a_{ii-1}, $i = 2, 3, \ldots, n$. Положим

$$d = d_2(1/a_{21})d_3(1/a_{32}a_{21})d_4(1/a_{43}a_{32}a_{21})\ldots d_n(1/a_{nn-1}a_{n-1n-2}\ldots a_{21}),$$

где через $d_r(\theta)$ обозначается элементарная диагональная матрица $d_r(\theta) = e + (\theta - 1)e_{rr}$, $\theta \in K$, $1 \leq r \leq n$. Рассмотрим сеть

$$\pi = (\pi_{ij}) = d\sigma d^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что $1 \in \pi_{21}$, $1 \in \pi_{32}, \ldots$, $1 \in \pi_{nn-1}$, $1 \in \pi_{ii-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Пусть теперь $i > j$. Тогда $\pi_{ii-1}\pi_{i-1i-2}\ldots\pi_{j+1j} \subseteq \pi_{ij} \Longrightarrow 1 \in \pi_{ij}$. Таким образом, мы показали, что $1 \in \pi_{ij}$ для любого $i > j$. □

Предложение 5. *Пусть P — произвольная коммутативная область с 1, K — поле частных области P, $\tau = (\tau_{ij})$ — неприводимая (полная) сеть дробных идеалов кольца P порядка $n \geq 2$ ($\tau_{ij} \subseteq K$). Предположим, что $1 \in \tau_{ij}$ для всех $i > j$. Если $\tau_{11} = \tau_{22} = \ldots = \tau_{nn} = P$, то для $\tau = (\tau_{ij})$ выполняются включения* (1).

Доказательство. Пусть $i < j$. Покажем, что $\tau_{ij} \subseteq P \subseteq \tau_{ji}$. Так как $i < j$, то $1 \in \tau_{ji}$, а по сетевому условию $\tau_{jj}\tau_{ji} \subseteq \tau_{ji}$. Откуда $P\tau_{ji} \subseteq \tau_{ji}$, $P = P \cdot 1 \subseteq \tau_{ji}$. Далее, по сетевому условию $\tau_{ij}\tau_{ji} \subseteq \tau_{ii} = P$, откуда $\tau_{ij} \cdot 1 \subseteq P$.

Покажем, что $\tau_{1k} \subseteq \tau_{2k} \subseteq \ldots \subseteq \tau_{nk}$. Пусть $j > i$. Покажем, что $\tau_{ik} \subseteq \tau_{jk}$. По условию мы имеем $1 \in \tau_{ji}$. Откуда $\tau_{ji} = 1 \cdot \tau_{ji} \subseteq \tau_{ji}\tau_{ik} \subseteq \tau_{jk}$. □

Доказательство теоремы 1. Согласно предложению 3 для некоторого промежуточного кольца P, $R \subseteq P \subseteq K$, для сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы имеем $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \ldots = \sigma_{nn} = P$. Так как сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ неприводима, то аддитивные подгруппы σ_{ij} — ненулевые дробные идеалы кольца P, причем для любых i, j произведение $\sigma_{ij}\sigma_{ji}$ является целым идеалом кольца P. Согласно предложению 4 сеть σ сопряжена диагональной матрицей с сетью $\pi = (\pi_{ij})$, у которой все P-модули π_{ij}, лежащие ниже главной диагонали, содержат 1. Осталось воспользоваться предложением 5.

Теорема 1 доказана.

2. Вложение элементарной сети в промежуток сетей

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над полем K порядка $n \geq 3$. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} поля K, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом: $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, где, очевидно (так как σ — элементарная сеть), суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j мы имеем $\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} поля K является элементарной сетью, которую мы называем *элементарной производной сетью.* Элементарная сеть ω является дополняемой [5, предложение 1], а потому она дополняется до (полной) сети. Элементарную сеть ω можно дополнить до (полной) сети стандартным способом, пользуясь формулой $\omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \omega_{ki}\omega_{ik}$, где суммирование берется по всем k, отличным от i. Элементарная производная сеть ω, дополненная диагональю, называется *производной сетью* (*для* σ) [5].

Для произвольных $i \neq j$ положим $\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij}$, где $\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$. Таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является элементарной сетью, причем дополняемой, т.е. справедливы включения $\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$ для любых $i \neq j$ [5, предложение 2]. Дополним элементарную сеть Ω до (полной) сети стандартным способом [5], положив $\Omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki}$, где суммирование берется по k, $k \neq i$. Нетрудно видеть, что $\Omega_{ii} = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} \gamma_{ik}$. Сеть Ω называется *сетью, ассоциированной с элементарной группой* $E(\sigma)$ [5]. Из построения сетей очевидно, что $\omega \subseteq \Omega$, т.е. $\omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$.

В дальнейшем, R — нетерово QR-кольцо, K — поле частных области R, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть аддитивных подгрупп σ_{ij} порядка $n \geq 3$ над K, причем для любых i, j подгруппы σ_{ij} являются R-модулями.

При помощи сетей ω и Ω построим сети $\overline{\omega}$ и $\overline{\Omega}$, добавив к диагональным кольцам кольцо R: $\overline{\omega}_{ij} = \omega_{ij}$, $\overline{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij}$ для всех $i \neq j$,

$$(\overline{\omega})_{ii} = \omega_{ii} + R, \quad (\overline{\Omega})_{ii} = \Omega_{ii} + R, \quad i = 1, \dots, n.$$

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, если B и R — подкольца поля K, причем B является R-модулем, то подкольцо кольца K, порожденное кольцами R и B, совпадает с $B + R$: $\langle B,\ R \rangle_{\text{ring}} = B + R$. Следовательно, все $\omega_{ii} + R$ и $\Omega_{ii} + R$ являются промежуточными подкольцами с 1, лежащими между R и K. Во-вторых, очевидно, что построенные таблицы $\overline{\omega}$ и $\overline{\Omega}$ есть неприводимые D-сети над K, у которых все подгруппы $\overline{\omega}_{ij}$ и $\overline{\Omega}_{ij}$ являются R-модулями. Таким образом, построенные сети $\overline{\omega}$ и $\overline{\Omega}$ удовлетворяют условиям теоремы 1. В силу теоремы 1 тогда все диагональные кольца сети $\overline{\omega}$ совпадают между собой (аналогично и для сети $\overline{\Omega}$). Поэтому положим

$$\omega_{11} + R = \ldots = \omega_{nn} + R = L, \quad \Omega_{11} + R = \ldots = \Omega_{nn} + R = P. \tag{2}$$

Очевидно, что $R \subseteq L \subseteq P \subseteq K$.

Предложение 6. *Имеет место вложение* $\overline{\omega} \subseteq \sigma \subseteq \overline{\Omega}$, *причем для любых* $i \neq j$ *и произвольного* r *справедливы включения*

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}. \tag{3}$$

Далее, имеет место равенство колец $L = P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вложение $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ и формулы (3) вытекают из теоремы 1 [4]. Отсюда, в частности, $\overline{\omega} \subseteq \sigma \subseteq \overline{\Omega}$.

Включение $L \subseteq P$ очевидно из построения. Докажем обратное включение. Из (3) мы имеем $\omega_{21}\Omega_{11} \subseteq \omega_{21}$. Но так как ω_{21} — R-модуль, то $\omega_{21}R \subseteq \omega_{21}$. Следовательно, поскольку $\Omega_{11} + R = P$ (см. (2)), то

$$\omega_{21}(\Omega_{11} + R) \subseteq \omega_{21}\Omega_{11} + \omega_{21}R \subseteq \omega_{21} \Longrightarrow \omega_{21}P \subseteq \omega_{21}.$$

Положим $A = \omega_{21}$. Тогда $AP \subseteq A$.

Так как $L = \omega_{11} + R$, то из сетевого условия мы имеем $\omega_{12}A = \omega_{12}\omega_{21} \subseteq \omega_{11} \subseteq L$. Очевидно, что A является L-модулем. Поэтому подгруппа A является дробным идеалом кольца L. Согласно предложению 2 и лемме 1 группа классов идеалов кольца L является периодической. Следовательно, мы имеем $A^m = tL$, $t \in K^*$ для некоторого натурального m. Но так как $AP \subseteq A$, то $A^m P \subseteq A^m = tL$, откуда следует включение $tL \cdot P \subseteq tL \Longrightarrow P \subseteq L$. $\square$

3. Доказательство теоремы 2

Согласно предложению 6 для (полных) сетей $\overline{\varpi}$ и $\overline{\Omega}$ любых $i \neq j$ выполнено включение $\overline{\varpi} \subseteq \sigma \subseteq \overline{\Omega}$, причем имеют место формулы (2) и

$$P = \overline{\varpi}_{ii} = \omega_{ii} + R = \overline{\Omega}_{ii} = \Omega_{ii} + R, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Согласно предложению 4 рассмотрим сопряжение сетей $\overline{\varpi}, \sigma, \overline{\Omega}$ при помощи диагональной матрицы из $D(n, K)$ такое, что $1 \in \omega_{ij}$ для любых $i > j$. Тогда очевидно $1 \in \omega_{ij}, 1 \in \sigma_{ij}$ для всех $i > j$. Теперь сети $\overline{\varpi}, \overline{\Omega}$ удовлетворяют условиям предложения 5. Элементарную сеть, полученную при сопряжении сети σ, обозначим через π. Тогда $\overline{\varpi} \subseteq \pi \subseteq \overline{\Omega}$, откуда, в частности, $\omega_{ij} \subseteq \pi_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$ для всех $i \neq j$. Согласно предложению 5 (применяя его к сетям $\overline{\varpi}, \overline{\Omega}$) мы имеем (см. (1)) справедливость включений

$$\omega_{ij} \subseteq P \subseteq \omega_{ji}, \quad \Omega_{ij} \subseteq P \subseteq \Omega_{ji}$$

для любых $i < j$. Отсюда для любых $i < j$ мы имеем

$$\pi_{ij} \subseteq \Omega_{ij} \subseteq P \subseteq \omega_{ji} \subseteq \pi_{ji} \Longrightarrow \pi_{ij} \subseteq P \subseteq \pi_{ji}.$$

Из включений (3) и того, что π_{ij} являются R-модулями, следует, что π_{ij} являются P-модулями: $(P = \omega_{ii} + R)$

$$\omega_{ii}\pi_{ij} \subseteq \omega_{ii}\Omega_{ij} \subseteq \omega_{ij} \Longrightarrow \omega_{ii}\pi_{ij} \subseteq \pi_{ij} \Longrightarrow P\pi_{ij} \subseteq \pi_{ij}.$$

Для доказательства теоремы 2 осталось показать, что для любых $i \neq j$ произведение $\pi_{ij}\pi_{ji}$ есть целый идеал кольца P. Действительно, π_{ij} являются P-модулями и $\pi_{ij}\pi_{ji} \subseteq \Omega_{ij}\Omega_{ji} \subseteq \Omega_{ii} \subseteq P$. Мы показали, что элементарная сеть $\pi = (\pi_{ij})$ является дополняемой, причем элементарная сеть π, диагональ которой дополнена кольцом P, есть полная сеть. Поэтому включения $\pi_{1k} \subseteq \pi_{2k} \subseteq \ldots \subseteq \pi_{nk}$, указанные в теореме 2, доказываются (см. предложение 5) дословно, как и в теореме 1.

Теорема 2 доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gilmer R., Ohm J.** Integral domains with quatient overrings // Math. Ann. 1964 Bd. 153, no. 2. pp. 97–103.
2. **Боревич З. И.** О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1978. Т. 75. С. 22–31.
3. **Левчук В. М.** Замечание к теореме Л.Диксона // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 4. С. 421–434.
4. The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 20th ed. Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2022. 269 p. URL: https://kourovka-notebook.org/ .
5. **Койбаев В.А.** Элементарные сети в линейных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.
6. **Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н.** О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 192–196.
7. **Атья М., Макдональд И.** Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972. 160 с.

8. **Дряева Р.Ю., Койбаев В.А., Нужин Я.Н.** Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН. 2017. Т. 455. С. 42–51.
9. **Бурбаки Н.** Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971. 707 с.

Поступила 23.01.2024
После доработки 24.08.2024
Принята к публикации 2.09.2024

Дряева Роксана Юрьевна
старший преподаватель
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ
e-mail: dryaeva-roksana@mail.ru

Койбаев Владимир Амурханович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ;
ведущий науч. сотрудник
Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

REFERENCES

1. Gilmer R., Ohm J. Integral domains with quatient overrings. *Math. Ann.*, 1964, vol. 153, no. 2, pp. 97–103. doi: 10.1007/BF01361178
2. Borevich Z.I. Subgroups of linear groups rich in transvections. *J. Sov. Math.*, 1987, vol. 37, no. 2, pp. 928–934. doi: 10.1007/BF01089083
3. Levchuk V.M. Remark on a theorem of L. Dickson. *Algebra and Logic*, 1983, vol. 22, no. 4, pp. 306–316. doi: 10.1007/BF01979677
4. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory, 20th ed.*, eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro, Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2022, 269 p. Available at: https://kourovka-notebook.org/ .
5. Koibaev V.A. Elementary nets in linear groups. *Tr. Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 134–141 (in Russian).
6. Kuklina S.K., Likhacheva A.O., Nuzhin Ya.N. On closedness of carpets of Lie type over commutative rings. *Tr. Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 192–196 (in Russian).
7. Atiyah M.F., Macdonald I.G. *Introduction to commutative algebra.* Reading, Mass., Addison — Wesley Publ. Co, 1969, 128 p. Translated to Russian under the title *Vvedeniye v kommutativnuyu algebru.* Moscow, Mir Publ., 1972, 160 p.
8. Dryaeva R.Y., Koibaev V.A., Nuzhin Ya.N. Full and elementary nets over the quotient field of a principal ideal ring. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 234, no. 2, pp. 141–147. doi: 10.1007/s10958-018-3990-y
9. Bourbaki N. *Algèbre commutative.* Paris, Hermann, 1961, 212 p. Translated to Russian under the title *Kommutativnaya Algebra.* Moscow, Mir Publ., 1971, 707 p.

Received January 23, 2024
Revised August 24, 2024
Accepted September 2, 2024

Funding Agency: The work was performed with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1447).

Roksana Yurievna Dryaeva, North-Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, 362025 Russia, e-mail: dryaeva-roksana@mail.ru .

Vladimir Amurkhanovich Koibaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., North-Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, 362025 Russia; Southern Mathematical Institute VSC RAS, Vladikavkaz, 362025 Russia, e-mail: koibaev-K1@yandex.ru .

Cite this article as: R. Yu. Dryaeva, V. A. Koibaev. Full and elementary nets over the field of fractions of a ring with the QR-property. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 77–83 .