

УДК 519.174.7

4-ИЗЯЩНЫЕ ДЕРЕВЬЯ

В. А. Баранский, И. А. Насыров, Т. А. Сеньчонок

Пусть f — раскраска вершин связного графа G в краски из множества красок $\{1, 2, \dots, k\}$. Раскраска f на множестве ребер графа G индуцирует функцию $f'(e) = |f(u) - f(v)|$, где $e = uv$ — произвольное ребро графа G . Число $f'(e)$ будем называть *цветом* ребра e , индуцированным раскраской f . Раскраска f называется *изящной k -раскраской* графа G , если f' является реберной раскраской этого графа. Граф будем называть *k -изящным* или, просто, *изящным*, если он обладает изящной k -раскраской. Основная цель нашей работы — дать два достаточных условия, каждое из которых гарантирует 4-изящность деревьев (см. теоремы 1 и 2). Кроме этого мы исследуем свойства 4-изящных графов для доказательства теорем 1 и 2. Найденные свойства мы также используем в следующих работах для изучения 4-изящных графов и 4-изящных деревьев в общем случае. Отметим, что 4-изящные деревья устроены достаточно сложно, а 3-изящные связные графы устроены очень просто. Они исчерпываются простыми цепями длины не более 3. Нетрудно установить, что любой 4-изящный граф не содержит вершин степени, большей 3. Поэтому мы рассматриваем деревья T , степени вершин которых не превосходят числа 3. Вершины степени 3 в дереве T мы будем называть *узлами*. Будем говорить, что для двух узлов u и v дерева T *узловое расстояние* между ними равно числу t , если существует простая цепь от u до v , число внутренних вершин в которой равно $t \geq 1$ и все эти внутренние вершины имеют степень 2 в дереве T . Конечно, узловое расстояние определено не для каждой пары узлов. Среди прочих свойств 4-изящных графов установлено, что такие графы не содержат простых цепей, состоящих из трех узлов. Указанные нами достаточные условия 4-изящности деревьев состоят в запрете появления в них пар узлов, узловое расстояние между которыми равно 1 или 2.

Ключевые слова: граф, дерево, изящная раскраска графа, изящные деревья.

V. A. Baransky, I. A. Nasyrov, T. A. Sen'chonok. 4-graceful trees.

Let f be a coloring of the vertices of a connected graph G into colors from a set $\{1, 2, \dots, k\}$. The coloring f induces on the set of edges of G a function $f'(e) = |f(u) - f(v)|$, where $e = uv$ is an arbitrary edge of G . The integer $f'(e)$ will be called the *color* of the edge e induced by the coloring f . The coloring f is called a *graceful k -coloring* of G if f' is an edge coloring of this graph. We will call a graph *k -graceful* or, simply, *graceful* if it has a graceful k -coloring. The main goal of our work is to give two sufficient conditions, each of which guarantees the 4-gracefulness of trees (see Theorems 1 and 2). In addition, we study the properties of 4-graceful graphs to prove these theorems. We also plan to use the found properties in the subsequent works on 4-graceful graphs and 4-graceful trees in the general case. Let us note that the 4-graceful trees are quite complex, while the 3-graceful connected graphs have a very simple structure. The latter are limited to simple chains of length at most 3. It is easy to establish that any 4-graceful graph does not contain vertices of degree greater than 3. Therefore, we consider trees T whose vertex degrees do not exceed 3. We will call vertices of degree 3 in a tree T *nodes*. For two nodes u and v of a tree T , we will say that the *nodal distance* between them is t if there is a simple chain from u to v such that the number of internal vertices of this chain is $t \geq 1$ and all these internal vertices have degree 2 in the tree T . Of course, the nodal distance is not always defined for a pair of nodes. Among other properties of 4-graceful graphs, it is established that such graphs do not contain simple chains consisting of three nodes. The sufficient conditions for 4-gracefulness formulated in the paper consist in prohibiting the appearance in trees of pairs of nodes whose nodal distances are equal to 1 or 2.

Keywords: graph, tree, graceful coloring of a graph, graceful trees.

MSC: 05C15

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-64-76

Введение

Далее под графом мы будем понимать конечный обыкновенный граф, т. е. граф без петель и кратных ребер, и будем использовать терминологию, принятую в [1; 2].

Пусть G — связный граф и f — его k -раскраска вершин, т. е. раскраска в краски (или цвета) из множества красок $\{1, 2, \dots, k\}$. Раскраска f индуцирует следующую функцию f' на множестве ребер этого графа:

$$f'(e) = |f(u) - f(v)|,$$

где $e = uv$ — произвольное ребро графа G , т. е. $f'(e)$ равно модулю разности цветов концевых вершин ребра e . Число $f'(e)$ будем называть *цветом* ребра e , индуцированным раскраской f .

Раскраска f называется *изящной k -раскраской* (graceful k -coloring) графа G , если f' является реберной раскраской этого графа (иными словами, является раскраской реберного графа для G). Граф будем называть *k -изящным* (k -graceful graph) или просто *изящным* (graceful graph), если он обладает изящной k -раскраской. Для изящного графа G наименьшее число k такое, при котором граф G является k -изящным, будем называть *изящным хроматическим числом* этого графа.

Понятие изящной k -раскраски графа ввел Г. Шартран в 2015 г. В динамическом обзоре [3] можно найти множество результатов, родственных результатам об изящных раскрасках графов. В последние годы были найдены изящные хроматические числа для многих классов графов (см., например, [4–6]). Большое внимание было уделено изучению изящных деревьев.

В общем случае 4-изящные деревья устроены достаточно сложно. Отметим, что 3-изящные связные графы устроены очень просто, они исчерпываются простыми цепями длины не более 3. В данной работе мы укажем два достаточных условия, при которых дерево является 4-изящным.

Нетрудно установить, что любой 4-изящный граф не содержит вершин степени, большей 3. Поэтому мы будем рассматривать деревья T , степени вершин которых не превосходят числа 3. Вершины степени 3 в дереве T мы будем называть *узлами* (nodes). Будем говорить, что для двух узлов u и v дерева T *узловое расстояние* между ними равно числу t , если существует простая цепь от u до v , число внутренних вершин в которой равно $t \geq 1$, и все эти внутренние вершины имеют степень 2 в дереве T (конечно, длина такой цепи равна $t + 1$, т. е. количеству ребер в цепи).

Изображая подграфы дерева T , мы часто будем выделять мелкими кругами некоторые узлы, а мелкими квадратами — некоторые вершины степени 2 в дереве T . На диаграмме ниже изображены пары узлов, узловые расстояния между которыми равны соответственно 1 и 2:



Основная цель нашей работы — дать два достаточных условия, каждое из которых гарантирует 4-изящность деревьев (теоремы 1 и 2), и исследовать свойства 4-изящных графов, включая деревья, которые мы используем для доказательства теорем, а также в следующих работах для изучения 4-изящных графов и 4-изящных деревьев в общем случае.

Теорема 1. Пусть T — дерево, степени вершин которого не превосходят 3, и которое не содержит простых цепей, состоящих из трех узлов. Если такое дерево T не имеет пар узлов, узловые расстояния между которыми равны 1 или 2, то оно является 4-изящным.

Заметим, что, как мы покажем далее, любой 4-изящный граф не содержит простых цепей, состоящих из трех узлов.

Теорема 2. Пусть T — дерево, степени вершин которого не превосходят 3 и которое не содержит пар смежных узлов. Если такое дерево T не имеет пар узлов, узловые расстояния между которыми равны 1, то оно является 4-изящным.

1. Свойства 4-изящных графов

Последовательность натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ называется *4-изящной*, если для любого $i = 1, \dots, s$ выполняется 1) $\lambda_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, 2) $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ при $i < s$, 3) $|\lambda_{i+1} - \lambda_i| \neq |\lambda_{i-1} - \lambda_i|$ при $1 < i < s$.

Заметим, что из 2 и 3 следует, что в 4-изящной последовательности любая тройка последовательных компонент $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}$ состоит из попарно различных чисел.

Легко проверить, что произвольная тройка (a, b, c) попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ является 4-изящной тогда и только тогда, когда она отлична от следующих четырех троек

$$(1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 3, 4), (4, 3, 2),$$

т. е. из 24 троек попарно различных чисел множества $\{1, 2, 3, 4\}$ изящными являются 20 троек, а 4 тройки не являются изящными.

Будем рассматривать полугруппу слов над алфавитом $\{1, 2, 3, 4\}$ и каждую последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ чисел 1, 2, 3 и 4 будем представлять также в виде слова $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s$ в этой полугруппе слов. Для удобства числа 1, 2, 3, 4 иногда будем называть *буквами*.

Буквы 2 и 3 будем называть *ординарными* (ordinary letters), а буквы 1 и 4 — *козырными* (trump letters).

Через ϕ обозначим подстановку на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$ такую, что

$$\phi(1) = 4, \quad \phi(4) = 1 \quad \text{и} \quad \phi(2) = 3, \quad \phi(3) = 2.$$

Ясно, что $\phi(x) = 5 - x$, откуда следует, что ϕ сохраняет модуль разности букв, т. е. $|\phi(a) - \phi(b)| = |a - b|$ для любых двух различных букв a и b .

Слово

$$\phi(\lambda) = \phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2)\dots\phi(\lambda_s)$$

будем называть *двойственным* для слова $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s$. Ясно, что слово $\phi(\lambda)$ является 4-изящным тогда и только тогда, когда 4-изящно слово λ .

Заметим, что если f — изящная 4-раскраска связного графа G , то суперпозиция $\phi \circ f$, состоящая в замене f -красок вершин в соответствии с подстановкой ϕ , снова будет изящной 4-раскраской. Раскраску $\phi \circ f$ будем называть *двойственной раскраской* к раскраске f .

Зафиксируем теперь связный граф G и его изящную 4-раскраску f .

Маршрут $v_1, v_2, \dots, v_s$ в графе G будем называть *безвозвратным*, если для любого $i = 2, \dots, s - 1$ выполняется $v_{i-1} \neq v_{i+1}$.

Нетрудно видеть, что последовательность цветов $f(v_1)f(v_2)\dots f(v_s)$, отвечающая безвозвратному маршруту $v_1, v_2, \dots, v_s$ в 4-изящном графе G , является 4-изящной последовательностью.

Лемма 1. Пусть $\deg v \geq 2$ и $f(v) = 2$. Тогда $\deg v = 2$ и вершина v смежна некоторой вершине цвета 4.

Доказательство. Рассмотрим два различных ребра $e_1 = vu_1$ и $e_2 = vu_2$. Ясно, что для изящной 4-раскраски f цвета ребер e_1 и e_2 положительны и различны, поэтому одно из ребер e_1 и e_2 имеет цвет не менее, чем 2. Пусть ребро e_1 имеет цвет не менее, чем 2. Тогда $f(u_1) \neq 2$, $f(u_1) \neq 1$ и $f(u_1) \neq 3$ (так как модуль разности каждого из чисел 1 и 3 с числом 2 меньше цвета ребра e_1). Следовательно, $f(u_1) = 4$.

Если $\deg v \geq 3$, то $\deg v = 3$ и вершина v (а она имеет цвет 2) смежна трем различным вершинам цветов 1, 3 и 4, поэтому есть два смежных с v ребра, цвет которых равен 1, что невозможно. $\square$

Лемма 2. Пусть $\deg v \geq 2$ и $f(v) = 3$. Тогда $\deg v = 2$ и вершина v смежна некоторой вершине цвета 1. $\square$

Доказательство. Рассмотрим два различных ребра $e_1 = vu_1$ и $e_2 = vu_2$. Ясно, что для изящной раскраски f цвета ребер e_1 и e_2 положительны и различны, поэтому одно из ребер e_1 и e_2 имеет цвет не менее, чем 2. Пусть без ограничения общности ребро e_1 имеет цвет, не менее чем 2. Тогда $f(u_1) \neq 3$, $f(u_1) \neq 2$ и $f(u_1) \neq 4$ (так как модуль разности каждого из чисел 1 и 3 с числом 2 меньше цвета ребра e_1). Следовательно, $f(u_1) = 1$.

Если $\deg v \geq 3$, то $\deg v = 3$ и вершина v (а она имеет цвет 3) смежна трем различным вершинам цветов 1, 2 и 4, поэтому есть два смежных ребра цвета 1, что невозможно. $\square$

В силу лемм 1 и 2 ординарными красками 2 и 3 нельзя раскрашивать в изящных 4-раскрасках вершины степени 3, т.е. узлы. Ими можно раскрашивать только вершины степени 1 и вершины степени 2. Козырные краски более универсальны — ими в принципе можно раскрашивать вершины любой степени — 1, 2 или 3.

Лемма 3. В 4-изящном графе G не существует простой цепи, состоящей из трех различных узлов.

Доказательство. Пусть три различные вершины v_1, v_2, v_3 , имеющие степень 3, образуют цепь, т.е. имеются ребра $e_1 = v_1v_2$ и $e_2 = v_2v_3$. В силу лемм 1 и 2 имеем $f(v_1), f(v_2), f(v_3) \notin \{2, 3\}$, поэтому $f(v_1), f(v_2), f(v_3) \in \{1, 4\}$. С другой стороны, поскольку последовательность $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ изящна, эти три числа должны быть различны, что противоречиво. $\square$

Лемма 4. Если в 4-изящном графе G имеется подграф вида, изображенного на рис. 1, то граф G совпадает с этим подграфом.

Доказательство. Поскольку $\deg_G v_1 = \deg_G v_4 = 3$, имеем $f(v_1), f(v_4) \in \{1, 4\}$. Без ограничения общности будем считать, что $f(v_1) = 1$ и $f(v_4) = 4$. Тогда, очевидно, имеем $f(v_2), f(v_3) \in \{2, 3\}$. Поэтому в силу лемм 1 и 2 выполняется $\deg_G v_2 = \deg_G v_3 = 2$, откуда следует заключение леммы, поскольку добавление любого нового ребра к указанному подграфу увеличивает степень его вершин. $\square$

Граф, изображенный на рис. 1, будем рассматривать вместе с раскраской f такой, что $f(v_i) = i$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Ясно, что такая раскраска является 4-изящной. Будем называть этот граф *первым 4-изящным графом* и обозначать его через GG_1 . Для этого графа уместно каждую вершину v_i отождествить с соответствующим числом i (см. рис. 2).

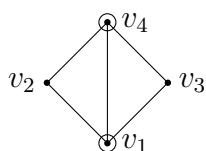
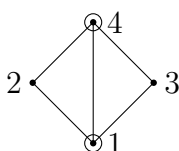
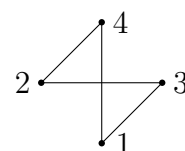


Рис. 1

Рис. 2. Граф GG_1 .Рис. 3. Граф GG_2 .

В дальнейшем нам понадобится еще один граф с фиксированной изящной 4-раскраской (см. рис. 3). Этот граф является циклом 1, 3, 2, 4, 1 длины 4. Будем называть его *вторым 4-изящным графом* и обозначать его через GG_2 .

Графы, изображенные на рис. 2 и 3, понадобятся нам для порождения различных изящных последовательностей чисел.

Вершины степени 3 мы называем узлами. В силу леммы 3 для узлов возможны две ситуации: либо в окрестности узла нет других узлов (*простой узел*, *simple node*), либо два узла образуют пару смежных узлов (*двойной узел*, *double node*).

2. Свойства 4-изящных деревьев

Далее будем считать, что граф T является неодноэлементным деревом.

Конечно, в дереве T существует вершина степени 1. Будем рассматривать T в виде корневого дерева с корнем степени 1. Будем также предполагать, что у каждой внутренней вершины дерева T (т.е. вершины, отличной от корня и не являющейся листом) имеется не более двух сыновей и один отец, иными словами T — бинарное дерево с корнем степени 1.

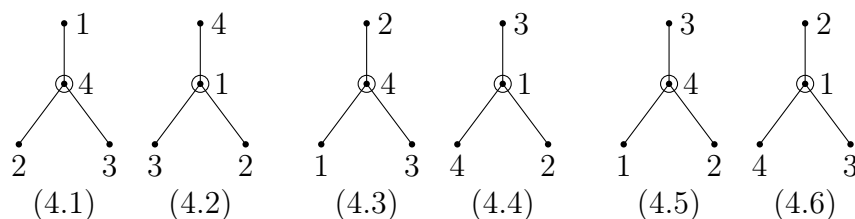


Рис. 4. Виды 4-изящных раскрасок простых узлов.

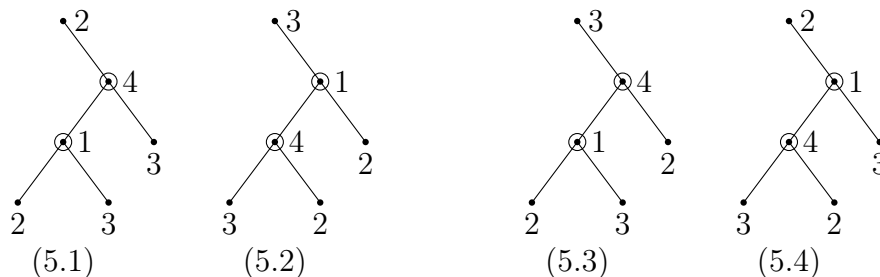
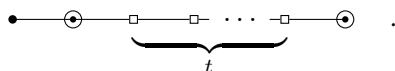


Рис. 5. Виды 4-изящных раскрасок двойных узлов.

В 4-изящной раскраске корневого дерева может иметься 6 типов раскрасок простых узлов и их окрестностей (три пары взаимно двойственных раскрасок узлов), как показано на рис. 4, и 4 типа раскрасок двойных узлов и их окрестностей (две пары взаимно двойственных раскрасок двойных узлов), как изображено на рис. 5.

Далее мы исследуем изящные последовательности чисел 1, 2, 3 и 4, которые можно использовать для изящной 4-раскраски простых цепей вида



Будем рассматривать цепи такого вида, для которых между выделенными узлами находится точно t вершин степени 2 и нет других узлов, где $t \geq 1$. Будем предполагать, что в качестве начал таких цепей могут служить вершины любых степеней 1, 2 или 3.

Начнем рассмотрение с 4-изящных последовательностей чисел с началами 142 и 143, которые соответствуют узлам вида (4.1).

Числа в последовательностях будем группировать слева направо по три для удобства восприятия. Рассмотрим процедуру добавления к 4-изящной последовательности новой краски (числа). Она должна быть отличной от двух последних чисел последовательности и после ее добавления не должно возникнуть запрещенных троек 123, 321, 234, 432. Такое добавление числа гарантирует, что полученная последовательность останется 4-изящной.

Отметим, что символ “//” мы будем использовать в роли разделителя между списками 4-изящных последовательностей с началами 142 и 143. Последние два числа в последовательности будем подчеркивать снизу, если последовательность заканчивается козырем и ординарным числом, стоящим перед ним (такие последовательности будем называть *ot*-последовательностями, они содержат суффикс типа *ot* длины 2), и будем подчеркивать двойной чертой, если последовательность заканчивается двумя козырями (будем называть их *tt*-последовательностями, они содержат суффикс типа *tt* длины 2). Такая служебная информация, выделенная подчеркиваниями, будет использоваться нами в данной работе и в ее продолжениях. Вычеркиваниями будут отмечаться получаемые последовательности, содержащие запрещенные тройки (конечно, они не будут 4-изящными).

Итак, начнем выписывать всевозможные 4-изящные последовательности чисел 1, 2, 3 и 4

с началами 142 и с началами 143:

$$\begin{aligned}
 t = 1 : & \quad 142 \underline{1}, \quad 142 \ 3 // \quad 143 \underline{1}, \quad \underline{143} \underline{2}. \\
 t = 2 : & \quad 142 \ 13, \quad 142 \underline{14}, \quad 142 \underline{31}, \quad \underline{142} \underline{34} // \quad 143 \ 12, \quad 143 \underline{14}. \\
 t = 3 : & \quad 142 \ 132, \quad 142 \underline{134}, \quad 142 \ 142, \quad 142 \ 143, \quad 142 \ 312, \quad 142 \underline{314} // \\
 & \quad \underline{143} \underline{123}, \quad 143 \underline{124}, \quad 143 \ 142, \quad 143 \ 143. \\
 t = 4 : & \quad \underline{142} \underline{132} \underline{1}, \quad 142 \ 132 \underline{4}, \quad 142 \underline{134} \underline{1}, \quad 142 \ 134 \ 2, \quad 142 \underline{142} \underline{1}, \quad 142 \ 142 \ 3, \\
 & \quad 142 \underline{143} \underline{1}, \quad \underline{142} \underline{143} \underline{2}, \quad \underline{142} \underline{312} \underline{3}, \quad 142 \underline{312} \underline{4}, \quad 142 \ 314 \ 2, \quad 142 \ 314 \ 3 // \\
 & \quad 143 \underline{124} \underline{1}, \quad 143 \ 124 \ 3, \quad 143 \underline{142} \underline{1}, \quad 143 \ 142 \ 3, \quad 143 \underline{143} \underline{1}, \quad \underline{143} \underline{143} \underline{2}.
 \end{aligned}$$

Мы ограничились нахождением 4-изящных последовательностей для малых значений t . Как будет видно из дальнейшего, этих последовательностей вполне достаточно для достижения наших целей.

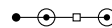
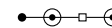
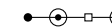
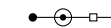
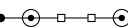
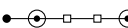
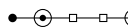
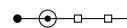
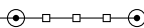
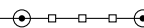
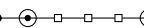
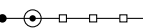
Результаты, вытекающие из наших вычислений, оформим в виде табл. 1, в которую поместим только необходимые нам последовательности.

Отметим, что последовательности с началом 413 двойственны последовательностям с началом 142, а последовательности с началом 412 двойственны последовательностям с началом 143, что облегчает построение табл. 1.

Последовательности, указанные в последних трех строках табл. 1 в виде слов в полугруппе слов над алфавитом $\{1, 2, 3, 4\}$, являются 4-изящными. Для доказательства этого нужно лишь заметить, что каждая из них задается некоторым безвозвратным маршрутом в графе GG_1 , иногда дополненным некоторым безвозвратным маршрутом в графе GG_2 .

Т а б л и ц а 1

Случай взаимно двойственных узлов (4.1) и (4.2)

Начало:	142	143	413	412
$t = 1$	 1 4 <u>2</u> 1	 1 4 <u>3</u> 1	 4 1 <u>3</u> 4	 4 1 <u>2</u> 4
$t = 2$	 1 4 2 <u>3</u> 1 1 4 2 <u>1</u> 4	 1 4 3 <u>1</u> 4	 4 1 3 <u>2</u> 4 4 1 3 <u>4</u> 1	 4 1 2 <u>4</u> 1
$t = 3$	 1 4 2 1 <u>3</u> 4 1 4 2 3 <u>1</u> 4	 1 4 3 1 <u>2</u> 4	 4 1 3 4 <u>2</u> 1 4 1 3 2 <u>4</u> 1	 4 1 2 4 <u>3</u> 1
$k \geq 1$ $t \equiv 1(3)$ $t = 4, 7, 10, \dots$	$(142)^k \underline{1}$ $(142)^k (13\underline{41})$	$(143)^k \underline{1}$ $(143)^k (124\underline{1})$	$(413)^k \underline{4}$ $(413)^k (42\underline{14})$	$(412)^k \underline{4}$ $(412)^k (43\underline{14})$
$k \geq 1$ $t \equiv 2(3)$ $t = 5, 8, 11, \dots$	$(142)^k (\underline{31})$ $(142)^k (\underline{14})$	$(143)^k (124\underline{31})$ $(143)^k (\underline{14})$	$(413)^k (\underline{24})$ $(413)^k (\underline{41})$	$(412)^k (431\underline{24})$ $(412)^k (\underline{41})$
$k \geq 1$ $t \equiv 0(3)$ $t = 6, 9, 12, \dots$	$(142)^k (13\underline{4})$ $(142)^k (3\underline{14})$	$(143)^k (124\underline{4})$ $(143)^k (142)(3\underline{14})$	$(413)^k (42\underline{1})$ $(413)^k (24\underline{1})$	$(412)^k (43\underline{1})$ $(412)^k (413)(24\underline{1})$

Покажем, что последовательность $(142)^k(1324)$, которая по определению умножения в полугруппе слов равна $142142 \dots 142(1324)$, где множитель 142 повторяется k раз, является 4-изящной. Действительно, сначала обегает k раз цикл 142 в графе GG_1 , а затем переходим в граф GG_2 , причем при таком переходе цвета последовательных ребер не совпадают.

Аналогично можно доказать 4-изящность всех последовательностей, указанных в табл. 1, а также указанных далее в табл. 2, 3.

Перейдем теперь к рассмотрению всевозможных 4-изящных последовательностей чисел с началами 241 и с началами 243, которые соответствуют узлам вида (4.3).

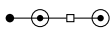
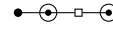
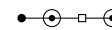
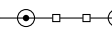
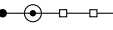
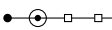
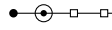
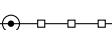
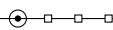
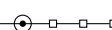
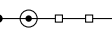
Итак, начнем выписывать 4-изящные последовательности чисел 1, 2, 3 и 4 с началами 241 и с началами 243:

$$\begin{aligned}
 t = 1: & \quad 241 \ 2, \quad 241 \ 3 // \quad 243 \ \underline{1}, \quad \underline{243} \ \underline{2}. \\
 t = 2: & \quad \underline{241} \ \underline{23}, \quad 241 \ \underline{24}, \quad 241 \ 32, \quad 241 \ \underline{34} // \quad 243 \ 12, \quad 243 \ \underline{14}. \\
 t = 3: & \quad 241 \ \underline{241}, \quad 241 \ 243, \quad \underline{241} \ \underline{321}, \quad 241 \ \underline{324}, \quad 241 \ \underline{341}, \quad 241 \ 342 // \\
 & \quad \underline{243} \ \underline{123}, \quad 243 \ \underline{124}, \quad 243 \ 142, \quad 243 \ 143. \\
 t = 4: & \quad 241 \ 241 \ 2, \quad 241 \ 241 \ 3, \quad 241 \ 243 \ \underline{1}, \quad \underline{241} \ \underline{243} \ \underline{2}, \quad 241 \ \underline{324} \ \underline{1}, \quad 241 \ 324 \ 3, \\
 & \quad 241 \ 341 \ 2, \quad 241 \ 341 \ 3, \quad 241 \ 342 \ \underline{1}, \quad 241 \ 342 \ 3 // \quad 243 \ \underline{124} \ \underline{1}, \quad 243 \ 124 \ 3, \\
 & \quad 243 \ 142 \ \underline{1}, \quad 243 \ 142 \ 3, \quad 243 \ 143 \ \underline{1}, \quad \underline{243} \ \underline{143} \ \underline{2}.
 \end{aligned}$$

Результаты, вытекающие из этих наших вычислений, оформим в виде табл. 2, в которую поместим только необходимые нам последовательности.

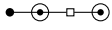
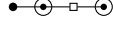
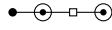
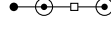
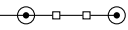
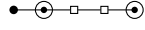
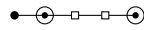
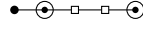
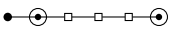
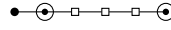
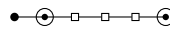
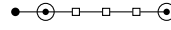
Т а б л и ц а 2

Случай взаимно двойственных узлов (4.3) и (4.4)

Начало:	241	243	314	312
$t = 1$	 2 4 1 ? Нет!	 2 4 <u>3</u> <u>1</u>	 3 1 4 ? Нет!	 3 1 <u>2</u> <u>4</u>
$t = 2$	 2 4 1 <u>2</u> <u>4</u> 2 4 1 <u>3</u> <u>4</u>	 2 4 3 <u>1</u> <u>4</u>	 3 1 4 <u>2</u> <u>1</u> 3 1 4 <u>3</u> <u>1</u>	 3 1 2 <u>4</u> <u>1</u>
$t = 3$	 2 4 1 3 <u>2</u> <u>4</u> 2 4 1 2 <u>4</u> <u>1</u> 2 4 1 3 <u>4</u> <u>1</u>	 2 4 3 1 <u>2</u> <u>4</u>	 3 1 4 2 <u>3</u> <u>1</u> 3 1 4 2 <u>1</u> <u>4</u> 3 1 4 3 <u>1</u> <u>4</u>	 3 1 2 4 <u>3</u> <u>1</u>
$k \geq 1$	$(241)^k(2431)$	$2(431)^k$	$(314)^k(3124)$	$3(124)^k$
$t \equiv 1(3)$	$(241)^k(3241)$	$(243)(124)^k \underline{1}$	$(314)^k(2314)$	$(312)(431)^k \underline{4}$
$t = 4, 7, 10, \dots$				
$k \geq 1$	$(241)^k(\underline{24})$	$2(431)^k(2431)$	$(314)^k(\underline{31})$	$3(124)^k(3124)$
$t \equiv 2(3)$	$(241)^k(24314)$	$(243)(142)^k(\underline{14})$	$(314)^k(31241)$	$(312)(413)^k(\underline{41})$
$t = 5, 8, 11, \dots$				
$k \geq 1$	$(241)^k(324)$	$2(431)^k(\underline{24})$	$(314)^k(\underline{231})$	$3(124)^k(\underline{31})$
$t \equiv 0(3)$	$(\underline{241})^{k+1}$	$(243)(142)^k(\underline{314})$	$(\underline{314})^{k+1}$	$(312)(413)^k(\underline{241})$
$t = 6, 9, 12, \dots$				

Т а б л и ц а 3

Случай взаимно двойственных узлов (4.5) и (4.6)

Начало:	341	342	214	213
$t = 1$	 3 4 1 ? Нет!	 3 4 <u>2</u> 1	 2 1 4 ? Нет!	 2 1 <u>3</u> 4
$t = 2$	 3 4 1 <u>2</u> 4 3 4 1 <u>3</u> 4	 3 4 2 <u>3</u> 1 3 4 2 <u>1</u> 4	 2 1 4 <u>2</u> 1 2 1 4 <u>3</u> 1	 2 1 3 <u>2</u> 4 2 1 3 <u>4</u> 1
$t = 3$	 3 4 1 3 <u>2</u> 4 3 4 1 2 <u>4</u> 1 3 4 1 3 <u>4</u> 1	 3 4 2 1 <u>3</u> 4 3 4 2 3 <u>1</u> 4	 2 1 4 2 <u>3</u> 1 2 1 4 2 <u>1</u> 4 2 1 4 3 <u>1</u> 4	 2 1 3 4 <u>2</u> 1 2 1 3 2 <u>4</u> 1
$k \geq 1$ $t \equiv 1(3)$ $t = 4, 7, 10, \dots$	$(341)^k(2431)$ $(341)^k(3241)$	$3(421)^k$ $(342)(134)^k1$	$(214)^k(3124)$ $(214)^k(2314)$	$2(134)^k$ $(213)(421)^k4$
$k \geq 1$ $t \equiv 2(3)$ $t = 5, 8, 11, \dots$	$(341)^k(24)$ $(341)^k(24314)$	$(342)(134)^k(21)$ $(342)(143)^k(14)$	$(214)^k(31)$ $(214)^k(31241)$	$(213)(421)^k(34)$ $(213)(412)^k(41)$
$k \geq 1$ $t \equiv 0(3)$ $t = 6, 9, 12, \dots$	$(341)^k(324)$ $(\underline{341})^{k+1}$	$3(421)^k(34)$ $(342)(134)^k(214)$	$(214)^k(231)$ $(\underline{214})^{k+1}$	$2(134)^k(21)$ $(213)(421)^k(\underline{341})$

Перейдем теперь к рассмотрению всевозможных 4-изящных последовательностей чисел с началами 341 и с началами 342, которые соответствуют узлам вида (4.5).

Итак, начнем выписывать изящные последовательности чисел 1, 2, 3 и 4 с началами 341 и с началами 342:

$t = 1$: 341 2, 341 3// 342 1, 342 3.

$t = 2$: ~~341 23~~, 341 24, 341 32, 341 34// 342 13, 342 14,
 342 31, ~~342 34~~.

$t = 3$: 341 241, 341 243, ~~341 321~~, 341 324, 341 341, 341 342//
 342 132, 342 134, 342 142, 342 143, 342 312, 342 314.

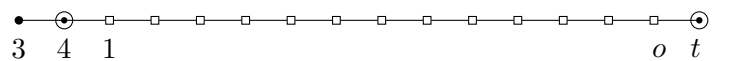
$t = 4$: 341 241 2, 341 241 3, 341 243 1, ~~341 243 2~~, 341 324 1, 341 324 3,
 341 341 2, 341 341 3, 341 342 1, 341 342 3// ~~342 132 1~~, 342 132 4,
 342 134 1, 342 134 2, 342 142 1, 342 142 3, 342 143 1, ~~342 143 2~~,
 ~~342 312 3~~, 342 312 4, 342 314 2, 342 314 3.

Результаты, вытекающие из этих наших вычислений, оформим в виде табл. 3, в которую поместим только необходимые нам последовательности.

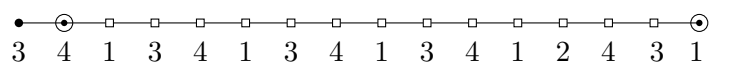
В табл. 1–3 показано, что при $t \geq 3$ для любого подграфа вида $\bullet \text{---} \ominus \text{---} \square \text{---} \square \dots \square \text{---} \ominus$ в дереве T , в котором 4-изящно раскрашены первые три вершины, всегда имеется 4-изящная последовательность, с помощью которой можно изящно раскрасить вершины этой конфигурации, сохранив раскраску первых трех вершин. Причем в качестве такой последовательности

всегда можно взять ot -последовательность, в которой предпоследнее число является ординарным, а последнее — козырным. В следующих работах нам пригодятся и tt -последовательности, которые заканчиваются двумя козырными числами.

Для примера рассмотрим ситуацию, когда в подграфе такого вида имеется $t = 13$ вершин степени 2 между узлами, а первые три вершины соответственно раскрашены в цвета 341:



Ясно, что сейчас $t \equiv 1(3)$. Так как начало последовательности имеет вид 341, искомую последовательность выбираем в табл. 3 из строки, отвечающей случаю $t \equiv 1(3)$. Она имеет вид $(341)^k(2431)$. Осталось найти значение k . Число вершин этой ot -последовательности равно $3k + 4$, поэтому $t = 3k + 1$, т. е. $13 = 3k + 1$ и $k = 4$. Ниже получаем 4-изящную раскраску:



Отметим, что при $t = 3$ искомую ot -последовательность нужно выбирать из строк таблиц, отвечающих случаю $t = 3$.

Нетрудно было бы создать общую таблицу формул для нахождения чисел вида k по числам вида t и дополнить такими формулами табл. 1–3. Мы не будем этого делать, чтобы не загромождать таблицы.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы нам дано неоднородное дерево T , все степени вершин которого лежат в множестве $\{1, 2, 3\}$ и которое не содержит подграфов, указанных на рис. 6. Иными словами, если для пары узлов определено узловое расстояние t , то выполняется $t \geq 3$.

Как хорошо известно, в неоднородном дереве T обязательно существует вершина степени 1. Обозначим ее через r и будем называть ее *корнем* дерева T . Дерево T будем считать корневым деревом с корнем r .

Узел v корневого поддерева T' с корнем r дерева T будем называть *зародышевым узлом* (germ node), если он имеет сына, который является листом в T' (т. е. имеет степень 1 в T') и имеет степень 2 в T . (Смысл таких узлов заключается в том, что поддерево T' может “расти” в T , “выпуская” в T новые ребра из таких листьев.)

Для доказательства теоремы достаточно по индукции построить последовательность

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_q = T \quad (1)$$

4-изящных корневых поддеревьев с корнем r в корневом дереве T , обладающих изящной 4-раскраской f , причем для каждого $1 \leq i < q$ раскраска f дерева T_{i+1} продолжает раскраску f дерева T_i .

Будем предполагать, что изначально имеется очередь, составленная из зародышевых узлов. В начале построения цепи (1) эта очередь пуста. Она будет пополняться и расходоваться в процессе построения поддеревьев T_i .

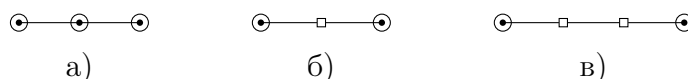


Рис. 6. Запрещенные конфигурации в условии теоремы 1.

База индукции. Возьмем максимальную простую цепь с началом r , не содержащую вершин степени 3.

Если эта цепь заканчивается листом, т. е. вершиной степени 1, то дерево T исчерпывается этой цепью и его можно изящно 4-раскрасить, например, с помощью 4-изящной последовательности, являющейся началом (префиксом) 4-изящной последовательности $(124)^k$ при достаточно большом k . В такой ситуации можно считать, что $q = 1$, т. е. $T_1 = T$, и теорема доказана.

Будем считать, что эта цепь заканчивается вершиной u , из которой выходит ребро e , не принадлежащее цепи (заметим, что вершина u может и совпасть с корнем r). Тогда $e = uv$ и $\deg_G v = 3$ в силу максимальности выбранной цепи. Возможны два случая.

1-й с л у ч а й БИ. Пусть v является простым узлом.

Построим корневое поддерево T_1 с корнем r , включая в него корень r и всю выбранную максимальную цепь от r до u , где каждая следующая вершина цепи является сыном предыдущей вершины. В T_1 помещаем также ребро e и вершину v , которая является сыном вершины u . Добавляем в T_1 еще вершины w_1 и w_2 , смежные с v и отличные от u , и добавляем ребра $e = vw_1$ и $e = vw_2$ (см. рис. 7). Будем считать w_1 левым сыном вершины v , а w_2 — ее правым сыном. Поскольку узел v простой, $\deg_G w_1 \neq 3$ и $\deg_G w_2 \neq 3$.

Таким образом, мы построили корневое поддерево T_1 с корнем r корневого дерева T .

Раскрасим цепь от r до v с помощью 4-изящной ot -последовательности. Такую ot -последовательность можно получить из достаточно длинной ot -последовательности любой из табл. 1–3, отбросив некоторую ее начальную подпоследовательность, т. е. взяв суффикс ot -последовательности. Затем раскрашиваем вершины w_1 и w_2 , выбрав с учетом цветов $f(u)$ и $f(v)$ вершин u и v подходящую раскраску простого узла среди шести раскрасок, указанных на рис. 4.

Очевидно, мы получим некоторую изящную 4-раскраску f корневого дерева T_1 .

Ясно, что w_1 и w_2 — это листья в дереве T_1 . Если хотя бы одна из вершин w_1 и w_2 имеет степень 2 в T , то узел v является зародышевым, и мы помещаем его в зародышевую очередь.

2-й с л у ч а й БИ. Пусть узел v входит в состав двойного узла, т. е. имеется еще одна вершина w степени 3, являющаяся сыном вершины v .

В этом случае построим корневое поддерево T_1 с корнем r дерева T аналогично предыдущему случаю (см. рис. 8). Без ограничения общности будем считать, что w — левый сын узла v , а v_1 — правый его сын. Будем называть v верхним узлом, а w — нижним узлом двойного узла. Строим изящную 4-раскраску f корневого дерева T_1 совершенно аналогично случаю 1. При этом раскрашиваем вершины v_1 , w , w_1 и w_2 , выбрав с учетом цветов $f(u)$ и $f(v)$ вершин u и v подходящую раскраску двойного узла среди четырех раскрасок, указанных на рис. 5. (Обратим внимание на особую важность использования в данном случае 4-изящной ot -последовательности, tt -последовательности здесь использовать нельзя.)

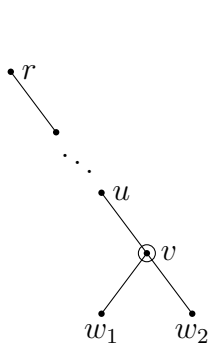


Рис. 7

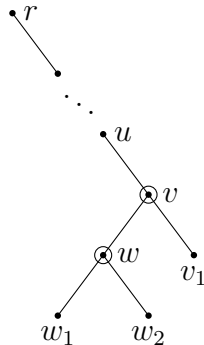


Рис. 8

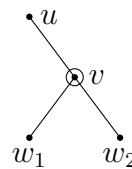


Рис. 9

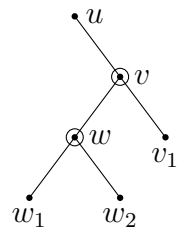


Рис. 10

Каждая из вершин v и w может оказаться зародышевым узлом, если у нее имеется хотя бы один сын степени 2 в дереве T . Помещаем те из узлов v и w , которые являются зародышевыми, в очередь зародышевых узлов.

Шаг индукции. Предположим, что уже построена цепь

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_p$$

4-изящных корневых деревьев с корнем r с изящной 4-раскраской f , причем для каждого $1 \leq i < p$ раскраска f дерева T_{i+1} продолжает раскраску f дерева T_i . Предположим также, что очередь зародышевых узлов еще не пуста.

Построим следующее корневое дерево T_{p+1} с корнем r , добавляя к T_p новые ребра и вершины из корневого дерева T и продолжая изящную 4-раскраску f .

Забираем первый узел из очереди зародышевых узлов. Возможны три случая.

1-й с л у ч а й ШИ. Пусть взятый из очереди зародышевый узел является простым узлом v (см. рис. 9).

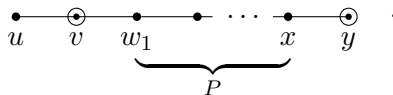
Пусть вершина w_1 имеет степень 2 в исходном дереве T . Тогда возьмем максимальную простую цепь P с началом w_1 , не содержащую вершин степени 3.

Если цепь P заканчивается вершиной степени 1, то добавляем эту цепь к дереву T_p и изящно 4-раскрашиваем цепь P с помощью некоторой достаточно длинной *ot*-последовательности из табл. 1–3, начинающейся с тройки цветов $f(u)f(v)f(w_1)$, причем раскраску цепи P производим, начиная с сына вершины w_1 (поскольку вершины u , v и w_1 уже были раскрашены, мы оставляем цвета этих вершин без изменения), находящегося в цепи P .

Будем считать, что эта цепь P заканчивается вершиной x , из которой выходит ребро e , не принадлежащее цепи P .

Отметим, что все вершины цепи P имеют степень 2 в дереве T .

Ясно, что $e = xy$ и $\deg_T y = 3$ в силу максимальной выбранной цепи. Поэтому в силу условия теоремы цепь P содержит $t \geq 3$ вершин:



Далее мы рассуждаем точно так же, как мы рассуждали при доказательстве базы индукции, строя дерево T_1 и его изящную 4-раскраску f . При этом для раскраски цепи P мы используем 4-изящную *ot*-последовательность с префиксом $f(u)f(v)f(w_1)$, причем раскраску цепи P производим, начиная с сына вершины w_1 , находящегося в цепи P (поскольку вершины u , v и w_1 уже были раскрашены, мы оставляем цвета этих вершин без изменения).

Таким образом мы расширим поддерево T_p .

Если вершина w_2 имеет степень 2 в исходном дереве, то мы продолжим расширение поддерева точно так же, как описано выше для вершины w_1 , при этом будет использована некоторая 4-изящная *ot*-последовательность из табл. 1–3 с префиксом $f(u)f(v)f(w_2)$.

Ясно, что в результате будут построены 4-изящное поддерево T_{p+1} и его изящная 4-раскраска f . Каждый добавленный к дереву T_p новый узел, который является зародышевым узлом в T_{p+1} , добавляем в очередь зародышевых узлов.

2-й с л у ч а й ШИ. Пусть взятый из очереди зародышевый узел является верхним узлом v двойного узла (см. рис. 10).

В этом случае расширение поддерева T_p для получения поддерева T_{p+1} и его изящной 4-раскраски f проводится с помощью простой цепи, исходящей из вершины v_1 , которая имеет степень 2 в исходном дереве T . Все рассуждения аналогичны тем, которые приведены в случае 1. При этом используется некоторая 4-изящная *ot*-последовательность с префиксом $f(u)f(v)f(v_1)$.

Если к дереву T_p добавляется новый узел, который является зародышевым узлом в T_{p+1} , то помещаем его в очередь зародышевых узлов.

3-й с л у ч а й ШИ. Пусть выбранный зародышевый узел является нижним узлом w двойного узла (см. рис. 10).

Этот случай рассматривается абсолютно аналогично случаю 1.

Процесс расширения поддеревьев будем продолжать до тех пор, пока не опустеет очередь зародышевых узлов. Последнее построенное поддерево T_q обязано совпадать с деревом T в силу связности T .

Таким образом, последовательность деревьев (1) будет построена.

Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 проводится совершенно аналогично. Нужно только заметить, что ввиду отсутствия двойных узлов допустимы оба типа 4-изящных последовательностей из табл. 1–3. Необходимые для изящных раскрасок 4-изящные ot -последовательности и tt -последовательности существуют в таблицах при $t \geq 2$.

В доказательстве теоремы 1 нами фактически приведен алгоритм получения изящной 4-раскраски для дерева, удовлетворяющего условию теоремы 1.

В заключение отметим, что пока остается открытым вопрос о характеристизации 4-изящных деревьев T в классе всех деревьев, не содержащих вершин степени, большей 3. Такую характеристику было бы естественно получить на языке запрещенных конфигураций (т. е. поддеревьев с отмеченными степенями в T некоторых из вершин).

Заметим, что 4-изящные деревья имеют много запрещенных конфигураций. Можно установить, что к таким запрещенным конфигурациям относятся конфигурации, изображенные на рис. 11.

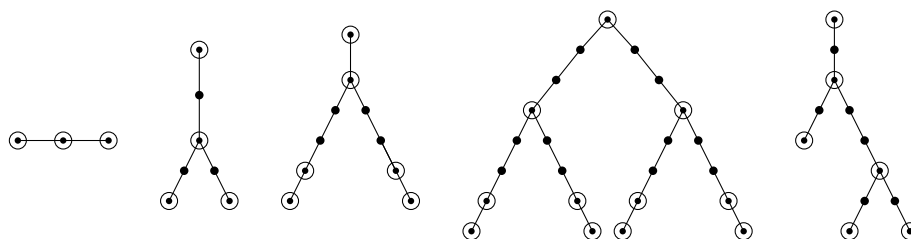


Рис. 11. Примеры запрещенных конфигураций для 4-изящных деревьев.

Отметим, что имеются и другие запрещенные конфигурации для 4-изящных деревьев.

Цель наших дальнейших исследований будет состоять в описании всех запрещенных конфигураций в 4-изящных деревьях для получения характеристики таких деревьев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Лань, 2010. 368 с.
2. Chartrand G., Zhang P. Chromatic graph theory. Discrete mathematics and its applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2009. 504 p.
3. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling // Electron. J. Comb. 1998. DS6. 43 p. doi: 10.37236/27
4. English E., Zhang P. On graceful colorings of trees // Mathematica Bohemica. 2016. Vol. 142, no. 1. P. 57–73. doi: 10.21136/MB.2017.0035-15
5. Byers A.D. Graceful colorings and connection in graphs: Diss. Doct. at Western Michigan University, 2018. Dissertations 3308. 102 p. URL: <https://scholarworks.wmich.edu/dissertations/3308>.
6. Suparta I.N., Venkathacalam M., Gunad I Gede A.I., Pratama Putu A.C. Graceful chromatic number of some Cartesian product graphs // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no. 2. P. 193–208. doi: 10.15826/umj.2023.2.016

Поступила 29.09.2024

После доработки 8.10.2024

Принята к публикации 14.10.2024

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Насыров Илья Александрович
ведущий инженер
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: ilia.nasyrov@urfu.ru

Сеньчонок Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru

REFERENCES

1. Asanov M.O., Baranskiy V.A., Rasin V.V. *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy* [Discrete mathematics: graphs, matroids, algorithms]. 2nd ed. St. Petersburg, Lan' Publ., 2010, 368 p. ISBN: 978-5-8114-1068-2.
2. Chartrand G., Zhang P. *Chromatic graph theory (Discrete mathematics and its applications)*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2009, 498 p. ISBN: 978-1584888000.
3. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling. *Electron. J. Comb.*, 1998, DS6, 43 p. doi: 10.37236/27
4. English E., Zhang P. On graceful colorings of trees. *Math. Bohemic*, 2017, vol. 142, no. 1, pp. 57–73. doi: 10.21136/MB.2017.0035-15
5. Byers A.D. *Graceful colorings and connection in graphs*: Diss. Doct. at Western Michigan University, 2018, Dissertations, 3308, 102 p. Available at: <https://scholarworks.wmich.edu/dissertations/3308>.
6. Suparta I.N., Venkathacalam M., Gunad I Gede A.I., Pratama Putu A.C. Graceful chromatic number of some Cartesian product graphs. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 2, pp. 193–208. doi: 10.15826/umj.2023.2.016

Received September 29, 2024

Revised October 8, 2024

Accepted October 14, 2024

Vitaly Anatol'evich Baransky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru.

Ilia Aleksandrovich Nasyrov, PhD student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: ilia.nasyrov@urfu.ru.

Tatiana Aleksandrovna Sen'chonok, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru.

Cite this article as: V. A. Baransky, I. A. Nasyrov, and T. A. Sen'chonok. 4-graceful trees. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 64–76.