

УДК 512.542

О ВЛИЯНИИ  $\mathfrak{F}$ -ГИПЕРЦЕНТРА НА СТРУКТУРУ КОНЕЧНЫХ  
МУЛЬТИФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУПП<sup>1</sup>

С. В. Балычев, В. И. Мурашко

Установлена структура конечной группы, имеющей  $t$  (нормальных, абнормальных) подгрупп с попарно взаимно простыми индексами и ограничениями  $\mathfrak{F}$ -гиперцентральности на попарные пересечения данных подгрупп, где  $\mathfrak{F}$  — насыщенная формация. Получены новые характеристики  $\Sigma_t$ -замкнутых, слабо  $R_t$ -замкнутых и  $N_0$ -замкнутых формаций конечных групп. Результаты работы вносят существенный вклад в решение вопроса В. Го и А. Н. Скибы, поставленного в 2011 году.

Ключевые слова: конечная группа, произведения групп, насыщенная формация,  $\mathfrak{F}$ -гиперцентр,  $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор.

**S. V. Balychev, V. I. Murashka. On the influence of the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter on the structure of finite multifactorized groups.**

The structure of a finite group having  $t$  (normal, abnormal) subgroups with pairwise mutually coprime indices and  $\mathfrak{F}$ -hypercentrality constraints on pairwise intersections of these subgroups, where  $\mathfrak{F}$  is a saturated formation, is described. As a consequence, new characterizations of  $\Sigma_t$ -closed, weakly  $R_t$ -closed, and  $N_0$ -closed formations of finite groups are established. The obtained results make a significant contribution to the solution of the question posed by W. Guo and A.N. Skiba in 2011.

Keywords: finite group, product of groups, saturated formation,  $\mathfrak{F}$ -hypercenter,  $\mathfrak{F}$ -central chief factor.

MSC: 20D40, 20F17

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-55-63

## Введение

На протяжении этой статьи все группы конечны, а  $G$  обозначает конечную группу. Виландт доказал, что группа, содержащая три разрешимых подгруппы попарно взаимно простых индексов, разрешима [1]. Кегель получил аналогичный результат для нильпотентных групп [2]. Дерк установил сверхразрешимость группы, содержащей четыре сверхразрешимые подгруппы попарно взаимно простых индексов [3].

**О п р е д е л е н и е 1** [4, определение 4.2.]. Пусть  $t > 1$  — натуральное число. Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется  $\Sigma_t$ -замкнутым, если он содержит всякую группу, имеющую  $t$   $\mathfrak{F}$ -подгрупп с попарно взаимно простыми индексами.

Систематическое изучение  $\Sigma_t$ -замкнутых классов групп было начато в работе Крамера [5]. В работе [6] Го и Скиба получили результаты, аналогичные результатам Виландта, Кегеля и Дерка, заменив условие принадлежности подгрупп данному классу  $\mathfrak{F}$  ( $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{N}, \mathfrak{U}\}$ ) условием содержания пересечения любой пары подгрупп в пересечении их  $\mathfrak{F}$ -гиперцентров.

Целью данной работы является доказательство эквивалентности условия, предложенного Го и Скибой, условию  $\Sigma_t$ -замкнутости для насыщенных формаций разрешимых групп. В частности, будет получено продвижение по следующей проблеме, поставленной в [6]:

**П р о б л е м а 1.** Пусть  $G = AB$  — произведение двух подгрупп  $A$  и  $B$  из  $G$ . Что мы можем сказать о структуре  $G$ , если  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(A) \cap Z_{\mathfrak{F}}(B)$  для некоторого класса группы  $\mathfrak{F}$ ?

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ-РНФ М, проект Ф23РНФМ-63).

## 1. Основные результаты

Напомним [7, с. 6], что главный фактор  $H/K$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -центральным, если  $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$ . Произведение всех таких нормальных подгрупп  $G$ , чьи  $G$ -главные факторы являются  $\mathfrak{F}$ -центральными в  $G$ , называется  $\mathfrak{F}$ -гиперцентром  $G$  и обозначается через  $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ . Подгрупповым функтором [8] называется отображение  $\theta$ , ставящее в соответствие каждой группе  $G$  некоторую непустую систему подгрупп  $\theta(G)$ , такую что  $\theta(G)^\varphi = \theta(G^\varphi)$  для любого изоморфизма  $\varphi$ . Основным результатом работы является следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — насыщенная формация разрешимых групп,  $t \geq 3$  и  $\tau$  — подгрупповой функтор такой, что  $\tau(G)$  содержит все абнормальные максимальные подгруппы и  $\tau(G)N/N \subseteq \tau(G/N)$  для любых  $N \trianglelefteq G$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1)  $\mathfrak{F}$  содержит каждую группу  $G$  такую, что  $\tau(G)$  содержит  $t$   $\mathfrak{F}$ -подгрупп с попарно взаимно простыми индексами.

(2)  $\mathfrak{F}$  содержит каждую группу  $G$  такую, что  $\tau(G)$  содержит  $t$  подгрупп  $A_1, \dots, A_t$  с попарно взаимно простыми индексами в  $G$  такие, что  $A_i \cap A_j \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$  для всех  $i \neq j$ .

**З а м е ч а н и е.** Если  $\tau(G) = s(G)$  — множество всех подгрупп группы  $G$ , то условие (1) эквивалентно  $\Sigma_t$ -замкнутости формации  $\mathfrak{F}$ . Таким образом, теорема 1 дает новый критерий  $\Sigma_t$ -замкнутости насыщенной формации разрешимых групп. В следующих трех следствиях мы покажем, как использовать теорему 1.

Как уже отмечалось ранее, класс  $\mathfrak{U}$  всех сверхразрешимых групп  $\Sigma_4$ -замкнут по теореме Дерка [3]. То есть для него при  $\tau(G) = s(G)$  и  $t = 4$  выполняется утверждение (1) теоремы 1. Значит, для него верно и утверждение (2) этой теоремы. Соответственно справедливо

**Следствие 1** [6, теорема 3.11]. Предположим, что  $G$  имеет четыре подгруппы  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , индексы которых  $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|, |G : A_4|$  попарно взаимно просты. Если

$$A_i \cap A_j \leq Z_{\mathfrak{U}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{U}}(A_j)$$

для всех  $i \neq j$ , то  $G$  сверхразрешима.

Известно [2, предложение 1], что классы всех  $p$ -замкнутых групп и всех  $p$ -разложимых групп являются  $\Sigma_3$ -замкнутыми. Тогда при  $\tau(G) = s(G)$  и  $t = 3$  из теоремы 1 напрямую вытекает

**Следствие 2** [6, теорема 3.7]. Допустим, что  $G$  имеет три подгруппы  $A_1, A_2$  и  $A_3$ , индексы которых  $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|$  попарно взаимно просты. Пусть  $p$  — простое число. Тогда

1. Если  $A_i \cap A_j \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$  для всех  $i \neq j$ , где  $\mathfrak{F}$  — класс всех  $p$ -замкнутых групп, то  $G$  является  $p$ -замкнутой.

2. Если  $A_i \cap A_j \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$  для всех  $i \neq j$ , где  $\mathfrak{F}$  — класс всех  $p$ -разложимых групп, то  $G$  является  $p$ -разложимой.

Напомним [4, определение 17.1], что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется абнормальной, если  $x \in \langle H, H^x \rangle$  для любого  $x \in G$ . Отметим, что подгрупповой функтор  $\tau(G) = s_{ab}(G)$ , ставящий в соответствие каждой группе  $G$  множество всех ее абнормальных подгрупп, подпадает под ограничение теоремы 1. По [9, теорема 2.10] группа, содержащая три абнормальные сверхразрешимые подгруппы попарно взаимно простых индексов, сверхразрешима. Таким образом, для класса  $\mathfrak{U}$  выполняется утверждение (1) теоремы 1 при  $\tau(G) = s_{ab}(G)$  и  $t = 3$ . Тогда для него верно и второе утверждение этой теоремы при таких же  $t$  и  $\tau$ . Из теоремы 1 вытекает

**Следствие 3** [6, теорема 3.13(2)]. *Предположим, что  $G$  имеет три абнормальные подгруппы  $A_1, A_2, A_3$ , индексы которых  $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|$  попарно взаимно просты. Если  $A_i \cap A_j \leq Z_{\mathfrak{U}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{U}}(A_j)$  для всех  $i \neq j$ , то  $G$  сверхразрешима.*

С теорией  $\Sigma_t$ -замкнутых формаций тесно связана теория слабо  $R_t$ -замкнутых формаций.

**О п р е д е л е н и е 2** [4, определение 4.1]. Класс групп  $\mathfrak{X}$  называется слабо  $R_t$ -замкнутым,  $t \geq 2$ , если  $\mathfrak{X}$  содержит всякую группу  $G$ , имеющую  $t$  нормальных  $\mathfrak{X}$ -подгрупп с попарно взаимно простыми индексами.

Отметим, что слабо  $R_t$ -замкнутая формация является и слабо  $R_k$ -замкнутой для любого  $k \geq t$ . Нами получена следующая характеристика  $R_t$ -замкнутых формаций при  $t \geq 3$ .

**Теорема 2.** *Пусть  $\mathfrak{F}$  — насыщенная формация и  $t \geq 3$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (1)  $\mathfrak{F}$  — слабо  $R_t$ -замкнутая формация.
- (2)  $\mathfrak{F}$  содержит каждую группу  $G$ , содержащую нормальные подгруппы  $A_1, \dots, A_t$  с попарно взаимно простыми индексами в  $G$  такие, что  $A_i \cap A_j \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$  для всех  $i \neq j$ .

Фрисен [10] установил слабую  $R_2$ -замкнутость класса всех сверхразрешимых групп. Нами доказана новая характеристика  $R_2$ -замкнутых формаций.

**Теорема 3.** *Пусть  $\mathfrak{F}$  — насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (1)  $\mathfrak{F}$  — слабо  $R_2$ -замкнутая формация.
- (2) Если  $A$  и  $B$  — нормальные подгруппы группы  $G$  с взаимно простыми индексами такие, что  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(A) \cap Z_{\mathfrak{F}}(B)$ , то  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ .

Напомним, что класс групп  $\mathfrak{F}$  называется  $N_0$ -замкнутым ( $R$ -замкнутым в терминологии [4]), если он содержит всякую группу, представленную в произведение своих нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Бэр [11] установил, что класс всех сверхразрешимых групп не является  $N_0$ -замкнутым в общем случае. Тем не менее он является  $N_0$ -замкнутым в классе всех групп с нильпотентным коммутантом. В работе [12] было установлено, что всякая наследственная насыщенная формация является  $N_0$ -замкнутой в классе всех групп с нильпотентным коммутантом. Следующая полученная нами теорема дает новую характеристику  $N_0$ -замкнутых в данном классе формаций. В частности, она дает новую характеристику  $N_0$ -замкнутых формаций, когда  $\mathfrak{X}$  совпадает с классом всех групп.

**Теорема 4.** *Пусть  $\mathfrak{F}$  — насыщенная формация и  $\mathfrak{X}$  — формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (1)  $\mathfrak{F}$  содержит всякую  $\mathfrak{X}$ -группу  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  — нормальные  $\mathfrak{F}$ -подгруппы группы  $G$ .
- (2) Для любой  $\mathfrak{X}$ -группы  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  — нормальные подгруппы группы  $G$  такие, что  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(A) \cap Z_{\mathfrak{F}}(B)$ , верно  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ .

Известно (см., например, [13, следствия 1.1 и 1.2]), что произведение нормальных  $p$ -сверхразрешимых подгрупп  $p$ -сверхразрешимо, если или их индексы взаимно просты, или коммутант  $p$ -нильпотентен. Согласно [4, теорема 1.1] класс всех групп с  $p$ -нильпотентным коммутантом является формацией, т. е. для класса всех  $p$ -сверхразрешимых групп выполняются первые утверждения теорем 3 и 4. Значит, для него выполняются и вторые утверждения данных теорем. Соответственно справедливо

**Следствие 4** [6, теорема 3.1]. *Пусть  $p$  — простое число,  $\mathfrak{F}$  — формация всех  $p$ -сверхразрешимых групп. Пусть  $A, B, E$  — нормальные подгруппы группы  $G$ . Предположим, что*

$$G = AB \text{ и } E = A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(A) \cap Z_{\mathfrak{F}}(B).$$

*Если  $(|G : A|, |G : B|) = 1$  или  $G' \leq O_{p',p}(G)$ , то  $E \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ .*

## 2. Предварительные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в [4; 7; 14]. Отметим некоторые из них. Через  $\mathbb{P}$  обозначается множество простых чисел;  $|G|$  обозначает порядок  $G$ ;  $\pi(G)$  — множество всех различных простых делителей  $|G|$ ;  $\mathfrak{N}_p, \mathfrak{S}, \mathfrak{N}, \mathfrak{U}$  — классы всех  $p$ -групп, разрешимых, нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно.

Напомним, что формация — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация  $\mathfrak{F}$  называется *насыщенной*, если группа  $G \in \mathfrak{F}$  всякий раз, когда  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ .

О п р е д е л е н и е 3 [14, IV, определение 3.1]. Функция вида

$$f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$$

называется локальным экраном. Формация  $\mathfrak{F}$  называется локальной, если

$$\mathfrak{F} = (G \mid G/C_G(H/K) \in f(p) \text{ для любых } p \in \pi(H/K) \text{ и главного фактора } H/K \text{ группы } G),$$

где  $f$  — некоторый локальный экран.

Напомним [6, IV, предложение 3.8], что для всякой локальной формации  $\mathfrak{F}$  существует единственный локальный экран  $F$  такой, что он является *полным*:  $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$  для любого  $p \in \mathbb{P}$  и *внутренним*:  $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$  для любого  $p \in \mathbb{P}$ . В этом случае  $F$  называется *максимальным внутренним локальным экраном*  $\mathfrak{F}$ .

Следующий результат хорошо известен (см., например, [15, лемма 3]).

**Лемма 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — формация,  $p$  — простое число и  $N/K$  — нормальная  $p$ -секция группы  $G$ . Если  $G/C_G(U/V) \in \mathfrak{F}$  для любого главного фактора  $U/V$  группы  $G$  между  $N$  и  $K$ , то  $G/C_G(N/K) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $F$  — максимальный внутренний локальный экран локальной формации  $\mathfrak{F}$ . Если  $H/K$  — нормальная секция группы  $G$ , являющаяся прямым произведением изоморфных простых групп, и  $H \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ , то  $G/C_G(H/K) \in F(p)$  для любого  $p \in \pi(H/K)$ , в частности,  $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что  $H/K$  —  $p$ -группа. Так как  $H \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ , то  $G/C_G(U/V) \in F(p)$  по [7, предложение 1.15(1)] для любого главного фактора  $U/V$  группы  $G$  ( $K \leq V \leq U \leq H$ ). Значит,  $G/C_G(H/K) \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$  по лемме 1. Тогда

$$H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Предположим, что  $H/K$  не является  $p$ -группой ни для какого простого числа  $p$ . Тогда  $H/K$  — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Поэтому по [14, А, лемма 4.14]  $H/K$  — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп  $H_i/K$  группы  $G$ ,  $1 \leq i \leq t$ . По [7, предложение 1.15(1)]  $G/C_G(H_i/K) \in F(p)$  для всех  $p \in \pi(H_i/K) = \pi(H/K)$ , но тогда  $G/\cap_{i=1}^t C_G(H_i/K) = G/C_G(H/K) \in F(p) \subseteq \mathfrak{F}$  для любого  $p \in \pi(H/K)$ . Заметим, что  $\overline{G} = G/C_G(H/K)$  имеет подгруппу  $\overline{H}$ ,  $G$ -изоморфную  $H/K$ . По теореме Барнса — Кегеля [14, IV, предложение 1.5]  $\overline{H} \rtimes \overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{H}) \cong (H/K) \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ .

## 3. Доказательство основных результатов

### 3.1. Доказательство теоремы 1

Докажем, что из утверждения (1) следует утверждение (2). Пусть группа  $G$  — контрпример наименьшего порядка к утверждению (2) теоремы. Тогда группа  $G \notin \mathfrak{F}$ , но  $\tau(G)$  содержит

$t \geq 3$  подгруппы  $A_1, \dots, A_t$  с попарно взаимно простыми индексами в  $G$  такие, что  $A_i \cap A_j \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$  выполняется для всех  $i \neq j$ . По [6, теорема 3.5] группа  $G$  разрешима, так как формация  $\mathfrak{F}$  состоит из разрешимых групп.

Пусть  $N$  — минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Тогда  $N$  —  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ . Заметим, что индексы как минимум  $t - 1$  подгрупп из  $A_1, \dots, A_t$  не делятся на  $p$ , т. е. эти подгруппы содержат  $N$ . Не теряя общности рассуждений, примем  $N \leq A_1, \dots, A_{t-1}$ .

Значит, если выбрать две подгруппы  $A_i, A_j$  из  $A_1, \dots, A_t$ , то одна, как минимум, будет содержать  $N$ . Пусть это будет  $A_i$ , тогда

$$A_i N / N \cap A_j N / N = (A_i N \cap A_j N) / N = (A_i \cap A_j N) / N = (A_i \cap A_j) N / N.$$

Отметим, что  $Z_{\mathfrak{F}}(A_i) N / N \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i / N)$  и  $Z_{\mathfrak{F}}(A_j) N / N \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_j N / N)$  по [6, лемма 2.2]. По условию  $A_i \cap A_j \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$ . Следовательно,  $A_i N / N \cap A_j N / N \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i / N) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j N / N)$ .

Заметим, что индексы подгрупп  $A_1 / N, \dots, A_{t-1} / N, A_t N / N$  в группе  $G / N$  попарно взаимно просты и  $A_1 / N, \dots, A_{t-1} / N, A_t N / N \in \tau(G / N)$ . Тогда по нашему предположению  $G / N \in \mathfrak{F}$ . Если в  $G$  найдутся две минимальные нормальные подгруппы  $N_1, N_2$ , то из  $G / N_1 \in \mathfrak{F}$ ,  $G / N_2 \in \mathfrak{F}$  и замкнутости  $\mathfrak{F}$  относительно взятия подпрямых произведений будет вытекать, что  $G \cong G / (N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$ ; противоречие с нашим предположением.

Осталось рассмотреть случай, когда в  $G$  имеется единственная минимальная нормальная подгруппа  $N$ . Если  $N \leq \Phi(G)$ , то из  $G / N \in \mathfrak{F}$  и насыщенности формации  $\mathfrak{F}$  будет следовать, что  $G \in \mathfrak{F}$ ; противоречие. Поэтому  $\Phi(G) = 1$ . Значит, найдется максимальная подгруппа  $M$  группы  $G$ , не содержащая  $N$ . Из  $M < MN$  следует, что  $MN = G$ . Заметим, что  $M \cap N \trianglelefteq M$ . Поскольку  $N$  — абелева группа,  $M \cap N \trianglelefteq N$ . Поэтому  $M \cap N \trianglelefteq G$ . Из  $M \cap N < N$  следует, что  $M \cap N = 1$ , т. е.  $G = N \rtimes M$  и  $|G : M| = p^\alpha$ . Тогда  $M \cong G / N \in \mathfrak{F}$ . В силу того что  $G$  разрешима и  $N$  — ее единственная минимальная нормальная подгруппа,  $G$  — примитивная группа 1-го типа, т. е.  $C_G(N) = N$ . В частности,  $M \not\trianglelefteq G$ . Значит,  $M$  — абнормальная максимальная подгруппа  $G$ . Итак,  $M \in \tau(G)$ .

Так как  $G / N \in \mathfrak{F}$ , то  $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ . Тогда по теореме Гашюца — Любедезера — Шмида [14, IV, теорема 4.6] формация  $\mathfrak{F}$  локальна. По [14, IV, теорема 3.7] найдется максимальный внутренний локальный экран  $F$  формации  $\mathfrak{F}$ . Ввиду того, что  $N$  содержится в каждой из подгрупп  $A_1, \dots, A_{t-1}$ , и с учетом нашего предположения, следует, что  $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i)$  для любого  $1 \leq i \leq t - 1$ . Тогда  $A_i / C_{A_i}(N) \in F(p)$  по лемме 2. Из  $N = C_G(N) = C_{A_i}(N)$  и  $A_i = N(A_i \cap M)$  вытекает, что  $A_i / C_{A_i}(N) \cong A_i \cap M$ . Так как  $F(p)$  замкнут относительно расширений  $p$ -группами, то  $A_i = N(A_i \cap M) \in F(p) \subseteq \mathfrak{F}$  для любого  $1 \leq i \leq t - 1$ .

В силу выбора подгрупп  $A_1, \dots, A_{t-1}$  их индексы взаимно просты с  $p$ . Тогда они и взаимно просты с  $|G : M| = p^\alpha$ . Итак,  $\tau(G)$  содержит  $t$   $\mathfrak{F}$ -подгрупп  $A_1, \dots, A_{t-1}, M$  с попарно взаимно простыми индексами. Тогда группа  $G \in \mathfrak{F}$  по утверждению (1); заключительное противоречие.

Теперь докажем, что из утверждения (2) следует утверждение (1). Пусть  $\tau(G)$  содержит  $t$   $\mathfrak{F}$ -подгрупп  $A_1, \dots, A_t$  с попарно взаимно простыми индексами. Поскольку формация  $\mathfrak{F}$  насыщена,  $A_i = Z_{\mathfrak{F}}(A_i)$  для любого  $i$  по [7, 1, теорема 2.7(b)]. Тогда  $A_i \cap A_j = Z_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$  для любых  $i, j$ . Таким образом, группа  $G \in \mathfrak{F}$  по утверждению (2), что и требовалось доказать.

### 3.2. Доказательство теоремы 2

Докажем, что из утверждения (1) теоремы следует утверждение (2). Предположим, что выполняется утверждение (1), но неверно утверждение (2). Пусть группа  $G$  — контрпример наименьшего порядка к (2). Тогда группа  $G \notin \mathfrak{F}$ , но содержит  $t \geq 3$  нормальные подгруппы  $A_1, \dots, A_t$  с попарно взаимно простыми индексами в  $G$  такие, что  $A_i \cap A_j \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$  выполняется для всех  $i \neq j$ .

Пусть  $N$  — минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Тогда, если  $N$  —  $p$ -группа, то индексы  $t - 1$  подгрупп из  $A_1, \dots, A_t$  не делятся на  $p$ . Значит, эти подгруппы содержат  $N$ . До-

кажем аналогичное утверждение и для случая, когда  $N$  не является  $p$ -группой. В этом случае  $N$  неразрешима. Так как  $N$  — минимальная нормальная подгруппа и подгруппы  $A_1, \dots, A_t$  нормальны, то  $N \cap A_i \in \{1, N\}$  для любого  $i$ . Заметим, что если  $N \cap A_i = 1$  для некоторого  $i$ , то  $NA_i = N \times A_i$ . В этом случае  $A_i \leq C_G(N)$ . Предположим, что  $N \cap A_i = 1$  и  $N \cap A_j = 1$  для некоторых  $i \neq j$ . Тогда  $N \leq G = A_i A_j \leq C_G(N)$ . Следовательно,  $N$  абелева. Получили противоречие. Итак,  $N \cap A_i = 1$  верно не более чем для одного  $i$ . Значит,  $N$  содержится как минимум в  $t - 1$  подгруппе из  $A_1, \dots, A_t$ .

Не теряя общности рассуждений, предполагаем  $N \leq A_1, \dots, A_{t-1}$ . Заметим, что если выбрать две подгруппы  $A_i, A_j$  из  $A_1, \dots, A_t$ , одна как минимум будет содержать  $N$ . Пусть это будет  $A_i$ , тогда по аналогии с доказательством теоремы 1

$$A_i N / N \cap A_j N / N \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i / N) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j N / N),$$

и индексы подгрупп  $A_1 / N, \dots, A_{t-1} / N, A_t N / N$  в группе  $G / N$  попарно взаимно просты. Отметим, что эти подгруппы нормальны в  $G / N$ . Следовательно, по нашему предположению  $G / N \in \mathfrak{F}$ .

Итак, в  $G$  имеется единственная минимальная нормальная подгруппа  $N$ . Предположим, что  $N \cap A_i = 1$  для некоторого  $i$ . Выберем  $i \neq j$ . Тогда  $G = A_j A_i = A_j C_G(N)$ . Следовательно,  $N$  — минимальная нормальная подгруппа  $A_j$ . Поскольку  $t \geq 3$ , найдется  $k \notin \{i, j\}$ . Заметим, что  $N \leq A_j \cap A_k \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$ . Тогда

$$N \rtimes (G / C_G(N)) \cong N \rtimes (A_j / C_{A_j}(N)) \in \mathfrak{F}.$$

Значит,  $N$  —  $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор группы  $G$ . Из  $G / N \in \mathfrak{F}$  следует, что  $G = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ . Так как  $\mathfrak{F}$  — насыщенная формация, то  $G \in \mathfrak{F}$ ; противоречие.

Следовательно,  $N$  содержится в каждой из подгрупп  $A_1, \dots, A_t$ . Тогда  $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(A_i)$  для любого  $i$ . Пусть  $F$  — максимальный внутренний локальный экран формации  $\mathfrak{F}$ . Таким образом,  $A_i / C_{A_i}(H / K) \in F(p)$  для любого  $p \in \pi(N)$  и любого главного фактора  $H / K$  группы  $A_i$ , лежащего ниже  $N$ . Кроме того, по лемме 2  $A_i / C_{A_i}(N) \in F(p)$  для любого  $p \in \pi(N)$ . Заметим, что  $A_i / C_{A_i}(N) \cong A_i C_G(N) / C_G(N)$ . Следовательно, группа  $G / C_G(N)$  содержит  $t$  нормальных подгрупп

$$A_1 C_G(N) / C_G(N), \dots, A_t C_G(N) / C_G(N)$$

с попарно взаимно простыми индексами, принадлежащими  $F(p)$ . Тогда по [4, теорема 4.10]  $G / C_G(N) \in F(p)$ . Значит,  $N$  —  $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор группы  $G$ . Итак,  $Z_{\mathfrak{F}}(G) = G \in \mathfrak{F}$ . Следовательно,  $G \in \mathfrak{F}$  по [7, 1, теорема 2.7(b)]; противоречие.

Теперь докажем, что из утверждения (2) теоремы следует утверждение (1). Пусть  $G$  содержит  $t$  нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп  $A_1, \dots, A_t$  с попарно взаимно простыми индексами. Поскольку формация  $\mathfrak{F}$  насыщена,  $A_i = Z_{\mathfrak{F}}(A_i)$  для любого  $i$  по [7, 1, теорема 2.7(b)]. Тогда  $A_i \cap A_j = Z_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap Z_{\mathfrak{F}}(A_j)$  для любых  $i, j$ . Таким образом, группа  $G \in \mathfrak{F}$  по утверждению (2), что и требовалось доказать.

### 3.3. Доказательство теоремы 3

Утверждение теоремы очевидно для пустой формации  $\mathfrak{F} = \emptyset$ , далее считаем, что  $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ .

Докажем, что из утверждения (1) теоремы следует утверждение (2). Пусть  $\mathfrak{F}$  — слабо  $R_2$ -замкнутая насыщенная формация,  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  — нормальные подгруппы группы  $G$  с взаимно простыми индексами такие, что  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(A) \cap Z_{\mathfrak{F}}(B)$ , и пусть  $H / K$  — главный фактор группы  $G$ , лежащий ниже  $A \cap B$ . Так как формация  $\mathfrak{F}$  насыщена, то по теореме Гашюца — Любедезера — Шмида [14, IV, теорема 4.6]  $\mathfrak{F}$  локальна.

По лемме 2  $H / K \rtimes A / C_A(H / K) \simeq \overline{A} = H / K \rtimes AC_G(H / K) / C_G(H / K) \in \mathfrak{F}$  и  $H / K \rtimes B / C_B(H / K) \simeq \overline{B} = H / K \rtimes BC_G(H / K) / C_G(H / K) \in \mathfrak{F}$ . Заметим, что  $AC_G(H / K) / C_G(H / K) \trianglelefteq G / C_G(H / K)$ . Аналогично  $BC_G(H / K) / C_G(H / K) \trianglelefteq G / C_G(H / K)$ . Отметим, что  $|G / C_G(H / K)| :$

$|AC_G(H/K)/C_G(H/K)|$  делит  $|G : A|$  и  $|G/C_G(H/K) : BC_G(H/K)/C_G(H/K)|$  делит  $|G : B|$ . Пусть  $\overline{G} = (H/K) \rtimes G/C_G(H/K)$ .

Из вышеизложенного следует, что  $\overline{G} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ , где  $\overline{A}, \overline{B} \trianglelefteq \overline{G}$  и имеют взаимно простые индексы. В силу слабой  $R_2$ -замкнутости  $\mathfrak{F}$ ,  $\overline{G} \in \mathfrak{F}$ . Следовательно,  $H/K$  —  $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор.

Итак, мы доказали, что любой главный фактор группы  $G$ , лежащий ниже  $A \cap B$ , является  $\mathfrak{F}$ -центральной. Значит,  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ .

Теперь докажем, что из утверждения (2) теоремы следует утверждение (1). Пусть  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  — нормальные  $\mathfrak{F}$ -подгруппы группы  $G$  взаимно простых индексов. Поскольку формация  $\mathfrak{F}$  насыщена,  $A = Z_{\mathfrak{F}}(A)$  и  $B = Z_{\mathfrak{F}}(B)$ . Значит,  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(A) \cap Z_{\mathfrak{F}}(B)$ , в этом случае  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$  по (2). Заметим, что  $G/(A \cap B) = A/(A \cap B) \times B/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$  как прямое произведение  $\mathfrak{F}$ -групп, т. е.  $G/(A \cap B) = Z_{\mathfrak{F}}(G/(A \cap B))$ . Следовательно,  $G = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ . Поэтому  $G \in \mathfrak{F}$ .

### 3.4. Доказательство теоремы 4

Если  $\mathfrak{F} = \emptyset$ , то утверждение очевидно. Далее считаем, что  $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ .

Докажем, что из утверждения (1) теоремы следует утверждение (2). Предположим, что формация  $\mathfrak{F}$  содержит всякую  $\mathfrak{X}$ -группу  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  — нормальные  $\mathfrak{F}$ -подгруппы группы  $G$ . Пусть  $\mathfrak{X}$ -группа  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  — нормальные подгруппы группы  $G$  такие, что  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(A) \cap Z_{\mathfrak{F}}(B)$  и  $H/K$  — главный фактор группы  $G$ , лежащий ниже  $A \cap B$ . Тогда по лемме 2 имеем  $H/K \rtimes A/C_A(H/K) \simeq \overline{A} = H/K \rtimes AC_G(H/K)/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$  и  $H/K \rtimes B/C_B(H/K) \simeq \overline{B} = H/K \rtimes BC_G(H/K)/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ . Так как  $\mathfrak{X}$  — формация, то по теореме Барнса — Кегеля [14, IV, предложение 1.5]  $\overline{G} = H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$ . Значит,  $\mathfrak{X}$ -группа  $\overline{G}$  — произведение нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп  $\overline{A}$  и  $\overline{B}$ . По условию (1)  $\overline{G} \in \mathfrak{F}$ . Следовательно,  $H/K$  —  $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор  $G$ . Поэтому  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ .

Теперь докажем, что из утверждения (2) теоремы следует утверждение (1). Пусть  $\mathfrak{X}$ -группа  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  — нормальные  $\mathfrak{F}$ -подгруппы. Тогда  $A = Z_{\mathfrak{F}}(A)$  и  $B = Z_{\mathfrak{F}}(B)$  в силу насыщенности формации  $\mathfrak{F}$ . Значит,  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(A) \cap Z_{\mathfrak{F}}(B)$ . Тогда  $A \cap B \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$  по (2). Заметим, что  $G/(A \cap B) = A/(A \cap B) \times B/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$  как прямое произведение  $\mathfrak{F}$ -групп, т. е.  $G/(A \cap B) = Z_{\mathfrak{F}}(G/(A \cap B))$ . Следовательно,  $G = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ . Поэтому  $G \in \mathfrak{F}$ .

Авторы благодарят рецензента и редакцию журнала за предоставленные полезные замечания по данной работе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wielandt H.** Über die Normalstrukturen von mehrfach faktorisierbaren Gruppen // B. Austral Math. Soc. 1960. Vol. 1, no. 2. P. 143–146. doi: 10.1017/S1446788700025520
2. **Kegel O.H.** Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. Vol. 87. P. 409–434. doi: 10.1007/BF01109929
3. **Doerk K.** Minimal nicht auflösbar, endlicher Gruppen // Math. Z. 1966. Vol. 91. P. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426
4. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 271 с.
5. **Kramer O.U.** Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes // Math. Z. 1974. Vol. 139. P. 63–68. doi: 10.1007/BF01194145
6. **Guo W., Skiba A.N.** On factorizations of finite groups with  $\mathfrak{F}$ -hypercentral intersections of the factors // J. Group Theory. 2011. Vol. 14. P. 695–708
7. **Guo W.** Structure theory for canonical classes of finite groups. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2015. 359 p. doi: 10.1007/978-3-662-45747-4
8. **Каморников С.Ф., Селькин М.В.** Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 2003. 254 р.
9. **Васильев А.Ф.** Формации и их распознавание // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2007. № 2(41). С. 23–29.

10. **Friesen D.** Products of normal supersoluble subgroups // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1971. Vol. 30, no. 1. P. 46–48.
11. **Baer R.** Classes of finite groups and their properties // *Illinois J. Math.* 1957. Vol. 1. P. 115–187. doi: 10.1215/IJM/1255379396
12. **Васильев А.Ф., Симоненко Д.Н.** Относительно радикальные локальные формации // *Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины.* 2006. No 5(38). С. 19–25.
13. **Монахов В.С., Чирик И.К.** О  $p$ -сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с нормальными сомножителями // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2015. Т. 21, № 3. С. 256–267.
14. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992. 893 p.
15. **Мурашко В.И.** О произведениях  $F^*(G)$ -субнормальных подгрупп конечных групп // *Мат. заметки.* 2022. Т. 111, № 2. С. 277–286. doi: 10.4213/mzm13213

Поступила 2.05.2024

После доработки 4.06.2024

Принята к публикации 10.06.2024

Балычев Сергей Владимирович

инженер-программист

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

г. Гомель, Беларусь

e-mail: sergej.balychhev@gmail.com

Мурашко Вячеслав Игоревич

канд. физ.-мат. наук, доцент

доцент кафедры алгебры и геометрии

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

г. Гомель, Беларусь

e-mail: mvimath@yandex.ru

## REFERENCES

1. Wielandt H. Über die normalstrukture von mehrfach faktorisiertbaren Gruppen. *J. Australian Math. Soc.*, 1960, vol. 1, no. 2, pp. 143–146. doi: 10.1017/S1446788700025520
2. Kegel O.H. Zur Struktur mehrfach faktorisiertbarer endlicher Gruppen. *Math. Z.*, 1965, vol. 87, pp. 42–48. doi: 10.1007/BF01109929
3. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endlicher Gruppen. *Math. Z.*, 1966, vol. 91, pp. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426
4. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 271 p.
5. Kramer O.U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes. *Math. Z.*, 1974, vol. 139, pp. 63–68. doi: 10.1007/BF01194145
6. Guo W., Skiba A.N. On factorizations of finite groups with  $\mathfrak{F}$ -hypercentral intersections of the factors. *J. Group Theory*, 2011, vol. 14, pp. 695–708.
7. Guo W. *Structure theory for canonical classes of finite groups*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2015, 359 p. doi: 10.1007/978-3-662-45747-4
8. Kamornikov S.F., Sel'kin M.V. *Podgruppovyye funktory i klassy konechnykh grupp* [Subgroup functors and classes of finite groups]. Minsk, Belaruskaya Navuka, 2003, 254 p.
9. Vasil'ev A.F. Formations and their recognition. *Izv. Gomel'skogo gos. univ. im. F. Skoriny*, 2007, vol. 2, no. 41, pp. 23–29.
10. Friesen D. Products of normal supersoluble subgroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 30, no. 1, pp. 46–48.
11. Baer R. Classes of finite groups and their properties. *Illinois J. Math.*, 1957, vol. 1, pp. 115–187. doi: 10.1215/IJM/1255379396
12. Vasiliev A.F., Simonenko D.N. Relatively radical local formations. *Iz. Gomel'skogo gos. universiteta im. F. Skoriny*, 2006, no. 5(38), pp. 19–25 (in Russia).



13. Monakhov V.S., Chirik I.K. On the  $p$ -supersolvability of a finite factorizable group with normal factors. *Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 256–267 (in Russian).
14. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Ser. De Gruyter expositions in mathematics, vol. 4, Berlin, NY, Walter de Gruyter Publ., 1992, 893 p.
15. Murashka V.I. On products of  $F^*(G)$ -subnormal subgroups of finite groups. *Math. Notes*, 2022, vol. 111, no. 1–2, pp. 273–280. doi: 10.1134/S0001434622010308

Received May 2, 2024

Revised June 4, 2024

Accepted June 10, 2024

**Funding Agency:** This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (BRFFR- $\Phi 23PH\Phi M$ , project no.  $\Phi 23PH\Phi M-63$ ).

*Sergej Vladimirovich Balychev*, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019 Belarus, e-mail: sergej.balychev@gmail.com .

*Viachaslau Igaravich Murashka*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019 Belarus, e-mail: mvimath@yandex.ru .

Cite this article as: S.V. Balychev, V.I. Murashka. On the influence of the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter on the structure of finite multifactorized groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 55–63 .