

УДК 517.518+517.983

ВАРИАНТ ЗАДАЧИ СТЕЧКИНА О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ
ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА ОСИ

В. В. Арестов

Дано решение задачи Стечкина о наилучшем приближении на числовой оси операторов дифференцирования дробного (а точнее, вещественного) порядка k в пространстве L_2 линейными ограниченными операторами из пространства L в пространство L_2 на классе функций, дробная производная порядка n , $0 \leq k < n$, которых ограничена в пространстве L_2 . Получена оценка сверху наилучшей константы в соответствующем неравенстве Колмогорова. Показано, что в данном случае известная оценка снизу Стечкина значения задачи приближения оператора дифференцирования через наилучшую константу в неравенстве Колмогорова является строгой; другими словами, задача Стечкина и неравенство Колмогорова не согласованы.

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирования, задача Стечкина, неравенство Колмогорова, неравенство Карлсона.

V.V. Arestov. A variant of Stechkin's problem on the best approximation of a fractional order differentiation operator on the axis.

A solution is given to Stechkin's problem on the best approximation on the real axis of differentiation operators of fractional (more precisely, real) order k in the space L_2 by bounded linear operators from the space L to the space L_2 on the class of functions whose fractional derivative of order n , $0 \leq k < n$, is bounded in the space L_2 . An upper estimate is obtained for the best constant in the corresponding Kolmogorov inequality. It is shown that the well-known Stechkin lower estimate for the value of the problem of approximating the differentiation operator via the best constant in the Kolmogorov inequality is strict in this case; in other words, Stechkin's problem and the Kolmogorov inequality are not consistent.

Keywords: fractional order differentiation operator, Stechkin's problem, Kolmogorov inequality, Carlson inequality.

MSC: 47B38, 47A58, 26D10

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-37-54

1. Введение

1.1. Обозначения

В данной статье используются следующие классические пространства комплекснозначных функций на числовой прямой: $L_\gamma = L_\gamma(-\infty, \infty)$ для вещественного γ , $1 \leq \gamma < \infty$, есть пространство Лебега измеримых функций f , у которых γ -степень модуля $|f|^\gamma$ суммируема на оси, наделенное нормой

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_{L_\gamma} = \left(\int |f(t)|^\gamma dt \right)^{1/\gamma}$$

(здесь и ниже в интегралах по оси множество интегрирования не указано); $L_\infty = L_\infty(-\infty, \infty)$ есть пространство измеримых существенно ограниченных функций на оси, наделенное нормой $\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty} = \text{ess sup}\{|f(t)| : t \in (-\infty, \infty)\}$; $C = C(-\infty, \infty)$ есть пространство непрерывных ограниченных функций на оси, наделенное равномерной нормой $\|f\|_C = \|f\|_{C(-\infty, \infty)} = \sup\{|f(t)| : t \in (-\infty, \infty)\}$; $C_0 = C_0(-\infty, \infty)$ есть подпространство пространства C функций, имеющих нулевой предел на $\pm\infty$.

Перечисленные пространства и их нормы инвариантны относительно группы сдвигов $\{\tau_\xi, \xi \in \mathbb{R}\}$, определенных формулой $(\tau_\xi f)(t) = f(t - \xi)$, $t \in \mathbb{R}$. Наряду с $\{\tau_\xi, \xi \in \mathbb{R}\}$ определим родственное семейство операторов $\{\sigma_\xi, \xi \in \mathbb{R}\}$, заданных формулой $(\sigma_\xi f)(t) = f(\xi - t)$,

$t \in \mathbb{R}$. Операторы этих двух семейств связаны соотношением $\sigma_\xi = \tau_\xi \sigma_0$, где σ_0 — оператор изменения знака аргумента функции: $(\sigma_0 f)(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Для пары функций f, g с суммируемым произведением fg и, чаще всего, для пары $f \in L_\gamma$, $g \in L_{\gamma'}$, $1 \leq \gamma \leq \infty$, $1/\gamma + 1/\gamma' = 1$, будет использоваться обозначение

$$\langle f, g \rangle = \int f(t)g(t)dt.$$

Прямое и обратное преобразования Фурье функций на оси определены соответственно формулами

$$\widehat{f}(t) = \int e^{-2\pi t \eta i} f(\eta) d\eta, \quad \check{g}(t) = \int e^{2\pi t \eta i} g(\eta) d\eta = \widehat{g}(-t). \quad (1.1)$$

В этих формулах интегралы в классическом смысле существуют лишь для суммируемых функций f, g . Оператор (преобразования) Фурье, определенный первой формулой (1.1), является естественным и особенно полезным в пространстве L_2 ; определение и его свойства можно найти, к примеру, в разд. 1 и 2 гл. 1 в [1]. В пространстве L_2 для преобразования Фурье выполняется равенство Парсеваля

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2, \quad f \in L_2. \quad (1.2)$$

В пространстве L_2 также имеет место равенство

$$\langle f, \widehat{g} \rangle = \langle \widehat{f}, g \rangle, \quad f, g \in L_2,$$

по сути эквивалентное равенству Парсеваля (1.2).

Далее, пусть $\mathcal{S}$ есть пространство бесконечно дифференцируемых функций на оси, быстро убывающих вместе с производными любого порядка, со стандартной топологией, а $\mathcal{S}'$ — соответствующее двойственное пространство обобщенных функций (см., например, [1; 2]). Значение функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ на функции $\phi \in \mathcal{S}$ будем обозначать через $\langle \theta, \phi \rangle$. Пространство $\mathcal{S}'$ содержит множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R})$ функций f , измеримых, локально суммируемых на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию $\int (1 + |t|)^d |f(t)| dt < \infty$ с некоторым показателем $d = d(f) \in \mathbb{R}$; функции $f \in \mathcal{L}$ называют медленно растущими (классическими) функциями. Функции $f \in \mathcal{L}$ сопоставляется функционал $f \in \mathcal{S}'$ по формуле

$$\langle f, \phi \rangle = \int f(t)\phi(t)dt, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Сверткой $\theta * \phi$ элемента $\theta \in \mathcal{S}'$ и функции $\phi \in \mathcal{S}$ называют функцию $y(\eta) = \langle \theta, \sigma_\eta \phi \rangle$, $\eta \in \mathbb{R}$. Если $\theta \in \mathcal{L}$ — классическая функция, то

$$(\theta * \phi)(\eta) = \int \theta(t)\phi(\eta - t) dt.$$

1.2. Постановка задач

В данной статье будут обсуждаться две экстремальные задачи на множестве

$$W_{1,2}^n = \{f \in L: f^{(n)} \in L_2\} \quad (1.3)$$

функций $f \in L$, у которых дробная производная $f^{(n)}$ порядка $n > 0$ (а точнее, производная вещественного положительного порядка n) принадлежит пространству L_2 . Определение производной $f^{(n)}$ в данном случае будем понимать в следующем смысле.

В комплексной плоскости $\mathbb{C}(\theta_0) = \mathbb{C} \setminus \ell(\theta_0)$ с разрезом по лучу $\ell(\theta_0) = \{re^{i\theta_0}: 0 \leq r < \infty\}$ при $-\pi < \theta_0 < -\pi/2$ определим для вещественного $\rho > 0$ аналитическую функцию

$$z^\rho = \exp(\rho \ln_0 z) = |z|^\rho \exp(i\nu \arg z), \quad z \in \mathbb{C}(\theta_0), \quad \theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi, \quad (1.4)$$

где $\ln_0$ есть ветвь логарифма

$$\ln_0 z = \ln |z| + i \arg z, \quad z \in \mathbb{C}(\theta_0), \quad \theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi.$$

Отметим два легко проверяемых свойства функции z^ρ :

- (1) $z^\rho \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$, $z \in \mathbb{C}(\theta_0)$; в связи с этим при необходимости будем считать, что $0^\rho = 0$;
- (2) для $\rho_1, \rho_2 > 0$ имеет место равенство $z^{\rho_1} z^{\rho_2} = z^{\rho_1 + \rho_2}$, $z \in \mathbb{C}(\theta_0)$, в частности $(z^\rho)^2 = z^{2\rho}$, $z \in \mathbb{C}(\theta_0)$.

Дадим теперь более точное определение пространства (1.3). Пространство $W_{1,2}^n$ состоит из функций $f \in L$, у которых функция

$$g_n(\eta) = (-2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta), \quad \eta \in (-\infty, \infty),$$

принадлежит пространству L_2 ; при этом считаем, что $f^{(n)} = \widetilde{g}_n$.

Для натурального параметра n пространство $W_{1,2}^n$ можно описать в несколько иных терминах. А именно, пространство $W_{1,2}^n$ состоит из функций $f \in L$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на оси, производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ которых локально абсолютно непрерывна, а $f^{(n)} \in L_2$.

В данной статье будут обсуждаться две родственные экстремальные задачи на множестве $W_{1,2}^n$.

(А) Мультипликативное неравенство Колмогорова

$$\|f^{(k)}\|_2 \leq G \|f\|_1^\alpha \|f^{(n)}\|_2^\beta, \quad f \in W_{1,2}^n, \quad \alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k+1}{2n+1}, \quad (1.5)$$

между L_2 -нормой “промежуточной” производной $f^{(k)}$, $0 \leq k < n$, L_1 -нормой функции и L_2 -нормой “старшей” производной $f^{(n)}$.

(В) Задача Стечкина о наилучшем приближении в пространстве L_2 оператора дробного дифференцирования $D^k f = f^{(k)}$ порядка k , $0 \leq k < n$, линейными ограниченными операторами из L_1 в L_2 на классе $Q_{1,2}^n = \{f \in W_{1,2}^n : \|f^{(n)}\|_2 \leq 1\}$.

2. Неравенство Колмогорова

Относительно неравенства (1.5) в данной работе будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Для любых вещественных $0 \leq k < n$ имеет место вложение $W_{1,2}^n \subset W_{1,2}^k$ и на множестве $W_{1,2}^n$ выполняется неравенство (1.5), для наилучшей константы $G = G(n, k)$ в котором справедлива оценка

$$G(n, k) \leq A(n, k), \quad A(n, k) = \pi^{-(n-k)/(2n+1)} \frac{(2n+1)^{(k+1/2)/(2n+1)}}{(2k+1)^{1/2}}. \quad (2.1)$$

Используя результат работы [3] и лемму 1, приведенную ниже, можно показать (по крайней мере, для целых $0 \leq k < n$), что неравенство (2.1) на самом деле строгое, однако в данной статье этот факт не понадобится и будет опущен. Неравенство (1.5) с точной константой известно лишь для $k = 0$, $n = 1$ [4]; этот результат будет обсуждаться ниже в разд. 4.2.

Доказательству теоремы 1 предпошлем вспомогательные построения и исследования.

2.1. Неравенство Карлсона

Как будет ясно в дальнейшем, доказательство теоремы 1 во многом сводится к исследованию родственного неравенству (1.5) неравенства Карлсона

$$\|a\phi\|_{L(-\infty, \infty)} \leq H \|\phi\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^\alpha \|b\phi\|_{L(-\infty, \infty)}^\beta, \quad \phi \in Y^\mu, \quad \alpha = \frac{\mu - \lambda}{\mu + 1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{\lambda + 1}{\mu + 1}, \quad (2.2)$$

с весами

$$a(\eta) = \eta^\lambda, \quad b(\eta) = \eta^\mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \lambda < \mu,$$

и наилучшей константой $H = H(\lambda, \mu)$ на множестве $Y^\mu = Y^\mu(-\infty, \infty)$ функций на оси $(-\infty, \infty)$, существенно ограниченных и суммируемых с весом η^μ , т. е.

$$\phi \in L_\infty(-\infty, \infty), \quad \eta^\mu \phi(\eta) \in L(-\infty, \infty);$$

используемая здесь функция z^μ , $z \in \mathbb{C}(\theta_0)$, определена формулой (1.4). Относительно неравенств типа Карлсона см. [5–7] и приведенную там библиографию.

Лемма 1. При $0 \leq \lambda < \mu$ наилучшая константа $H = H(\lambda, \mu)$ в неравенстве (2.2) имеет значение

$$H(\lambda, \mu) = 2^{(\mu - \lambda)/(\mu + 1)} \frac{(\mu + 1)^{(\lambda + 1)/(\mu + 1)}}{(\lambda + 1)}. \quad (2.3)$$

Функция $\phi^* \in Y^\mu$ является экстремальной в неравенстве (2.2) в том и только том случае, если почти всюду на оси

$$|\phi^*(\eta)| = c, \quad |\eta| < 1/h; \quad \phi^*(\eta) = 0, \quad |\eta| > 1/h, \quad (2.4)$$

для $c, h > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Получим вначале для константы H в неравенстве (2.2) оценку сверху. При значении параметра $h > 0$ рассмотрим на оси функцию

$$\vartheta_h(\eta) = \begin{cases} \eta^\lambda (1 - h^{\mu - \lambda} |\eta|^{\mu - \lambda}), & |\eta| \leq 1/h, \\ 0, & |\eta| > 1/h. \end{cases} \quad (2.5)$$

С помощью (2.5) определим функцию

$$\varrho_h(\eta) = \frac{a(\eta) - \vartheta_h(\eta)}{b(\eta)}.$$

Имеем

$$a(\eta) - \vartheta_h(\eta) = \begin{cases} h^{\mu - \lambda} \eta^\lambda |\eta|^{\mu - \lambda}, & |\eta| \leq 1/h, \\ \eta^\lambda, & |\eta| > 1/h, \end{cases}$$

а следовательно,

$$\varrho_h(\eta) = \begin{cases} h^{\mu - \lambda} \frac{|\eta|^{\mu - \lambda}}{\eta^{\mu - \lambda}}, & 0 < |\eta| \leq 1/h, \\ \frac{1}{\eta^{\mu - \lambda}}, & |\eta| > 1/h. \end{cases}$$

Последние соотношения влекут, что

$$\|\varrho_h\|_{L_\infty(-\infty, \infty)} = |\varrho_h(\eta)| = h^{\mu - \lambda}, \quad 0 < |\eta| \leq 1/h; \quad 0 < |\varrho_h(\eta)| < h^{\mu - \lambda}, \quad |\eta| > 1/h.$$

Имеет место равенство $a = \vartheta_h + \varrho_h b$. Умножив это равенство на произвольную функцию $\phi \in Y^\mu$, взяв норму в пространстве $L(-\infty, \infty)$ и применив неравенство треугольника, получаем

$$\|a\phi\|_{L(-\infty, \infty)} \leq \|\vartheta_h \phi\|_{L(-\infty, \infty)} + \|\varrho_h b \phi\|_{L(-\infty, \infty)}. \quad (2.6)$$

Слагаемые правой части (2.6) можно оценить следующим образом:

$$\|\vartheta_h \phi\|_{L(-\infty, \infty)} \leq \|\vartheta_h\|_{L(-\infty, \infty)} \|\phi\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}, \quad (2.7)$$

$$\|\varrho_h b\phi\|_{L(-\infty, \infty)} \leq \|\varrho_h\|_{L_\infty(-\infty, \infty)} \|b\phi\|_{L(-\infty, \infty)}. \quad (2.8)$$

Соотношения (2.6)–(2.8) приводят к неравенству

$$\|a\phi\|_{L(-\infty, \infty)} \leq \|\vartheta_h\|_{L(-\infty, \infty)} \|\phi\|_{L_\infty(-\infty, \infty)} + \|\varrho_h\|_{L_\infty(-\infty, \infty)} \|b\phi\|_{L(-\infty, \infty)}, \quad \phi \in Y^\mu. \quad (2.9)$$

Неравенство (2.8) на функции $\phi \in Y^\mu$ обращается в равенство в том и только том случае, если функция ϕ (почти всюду) вне интервала $(-1/h, 1/h)$ равна нулю. Неравенство (2.7) обращается в равенство в том и только том случае, если модуль функции ϕ (почти всюду) на интервале $(-1/h, 1/h)$ есть константа (равная L_∞ -норме функции ϕ). Таким образом, неравенство (2.9) может обратиться в равенство лишь на функциях ϕ^* , обладающих свойствами

$$|\phi^*(\eta)| = \text{const}, \quad |\eta| < 1/h; \quad \phi^*(\eta) = 0, \quad |\eta| > 1/h. \quad (2.10)$$

Легко проверить, что на такой функции ϕ^* неравенство (2.6) также обращается в равенство. Следовательно, условия (2.10) являются не только необходимыми, но и достаточными для экстремальности функций со свойствами (2.10) в неравенстве (2.9).

Проведем дальнейшее исследование неравенства (2.9). Имеем

$$\|\vartheta_h\|_{L(-\infty, \infty)} = \int_{-1/h}^{1/h} |\eta|^\lambda (1 - h^{\mu-\lambda} |\eta|^{\mu-\lambda}) d\eta = 2 \int_0^{1/h} \eta^\lambda (1 - h^{\mu-\lambda} \eta^{\mu-\lambda}) d\eta = \frac{2(\mu - \lambda)}{h^{\lambda+1}(\lambda + 1)(\mu + 1)}.$$

В результате неравенство (2.9) принимает вид

$$\|a\phi\|_{L(-\infty, \infty)} \leq h^{-(\lambda+1)} A + h^{\mu-\lambda} B, \quad \phi \in Y^\mu, \quad (2.11)$$

где

$$A = \frac{2(\mu - \lambda)}{(\lambda + 1)(\mu + 1)} \|\phi\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}, \quad B = \|b\phi\|_{L(-\infty, \infty)}. \quad (2.12)$$

Зафиксировав функцию $\phi \in Y^\mu$, $\phi \not\equiv 0$, найдем минимум правой части (2.11) по $h > 0$. Воспользуемся средствами классического математического анализа. Положим

$$\Upsilon(h) = h^{-(\lambda+1)} A + h^{\mu-\lambda} B, \quad h > 0. \quad (2.13)$$

Дифференцируя эту функцию, получаем $\Upsilon'(h) = -(\lambda + 1)h^{-(\lambda+2)} A + (\mu - \lambda)h^{\mu-\lambda-1} B$. На полуоси $h > 0$ производная зануляется в единственной точке

$$h^* = \left(\frac{(\lambda + 1)A}{(\mu - \lambda)B} \right)^{1/(\mu+1)}. \quad (2.14)$$

При $h \rightarrow +0$ и $h \rightarrow +\infty$ функция Υ стремится к $+\infty$. Поэтому h^* — (единственная) точка (глобального) минимума Υ на полуоси $(-\infty, \infty)$. В этой точке функция Υ имеет значение

$$\begin{aligned} \Upsilon(h^*) &= \left(\frac{(\mu - \lambda)B}{(\lambda + 1)A} \right)^{(\lambda+1)/(\mu+1)} A + \left(\frac{(\lambda + 1)A}{(\mu - \lambda)B} \right)^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} B \\ &= A^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} B^{(\lambda+1)/(\mu+1)} \left(\frac{\mu - \lambda}{\lambda + 1} \right)^{(\lambda+1)/(\mu+1)} \left(\frac{\mu + 1}{\mu - \lambda} \right) \\ &= 2^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} \frac{(\mu + 1)^{(\lambda+1)/(\mu+1)}}{\lambda + 1} \|\phi\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} \|b\phi\|_{L(-\infty, \infty)}^{(\lambda+1)/(\mu+1)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\min\{\Upsilon(h) : h > 0\} = \Upsilon(h^*) = 2^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} \frac{(\mu+1)^{(\lambda+1)/(\mu+1)}}{\lambda+1} \|\phi\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} \|b\phi\|_{L(-\infty, \infty)}^{(\lambda+1)/(\mu+1)}.$$

Приведенные рассуждения влекут неравенство

$$\|a\phi\|_{L(-\infty, \infty)} \leq \overline{H}(\lambda, \mu) \|\phi\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} \|b\phi\|_{L(-\infty, \infty)}^{(\lambda+1)/(\mu+1)}, \quad \phi \in Y^\mu,$$

с константой

$$\overline{H}(\lambda, \mu) = 2^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} \frac{(\mu+1)^{(\lambda+1)/(\mu+1)}}{\lambda+1}.$$

Отсюда следует, что для наилучшей константы H в неравенстве (2.2) выполняется оценка сверху $H \leq \overline{H}(\lambda, \mu)$.

2. Получим для H оценку снизу. Для этого воспользуемся функцией ϕ^* со свойствами (2.4):

$$\phi^*(\eta) = \begin{cases} c, & |\eta| \leq 1/h, \\ 0, & |\eta| > 1/h, \end{cases}$$

для $c, h > 0$. Подставив такую функцию в неравенство (2.2), получаем оценку

$$H \geq \underline{H} = \underline{H}(\lambda, \mu) = \frac{\|a\phi^*\|_{L(-\infty, \infty)}}{\|\phi^*\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} \|b\phi^*\|_{L(-\infty, \infty)}^{(\lambda+1)/(\mu+1)}}.$$

В данном случае

$$\|a\phi^*\|_{L(-\infty, \infty)} = 2c \int_0^{1/h} \eta^\lambda d\eta = \frac{2c}{h^{\lambda+1}(\lambda+1)}, \quad \|b\phi^*\|_{L(-\infty, \infty)} = \frac{2c}{h^{\mu+1}(\mu+1)}, \quad \|\phi^*\|_{L_\infty(-\infty, \infty)} = c.$$

В результате имеем

$$\underline{H} = 2^{(\mu-\lambda)/(\mu+1)} \frac{(\mu+1)^{(\lambda+1)/(\mu+1)}}{(\lambda+1)}.$$

Оценки сверху и снизу для константы H в неравенстве (2.2) совпали, а значит, $H = \overline{H} = \underline{H}$; утверждение (2.3) доказано. Одновременно доказано, что функции (2.4) являются экстремальными в неравенстве (2.2).

3. Осталось проверить, что любая экстремальная функция неравенства (2.2) имеет вид (2.4). Итак, пусть функция $\phi^* \in Y^\mu$ является экстремальной в неравенстве (2.2), т. е. обращает это неравенство в равенство:

$$\|a\phi^*\|_{L(-\infty, \infty)} = H \|\phi^*\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^\alpha \|b\phi^*\|_{L(-\infty, \infty)}^\beta. \quad (2.15)$$

Воспользуемся аддитивным неравенством (2.11)+(2.12). В данном случае имеем

$$\|ag\|_{L(-\infty, \infty)} \leq \Upsilon^*(h), \quad h > 0,$$

где

$$\Upsilon^*(h) = h^{-(\lambda+1)} A^* + h^{\mu-\lambda} B^*, \quad h > 0, \quad (2.16)$$

с коэффициентами

$$A^* = \frac{\mu-\lambda}{(\lambda+1)(\mu+1)} \|\phi^*\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}, \quad B^* = \|b\phi^*\|_{L(-\infty, \infty)}.$$

Согласно (2.14) функция (2.16) достигает наименьшего значения по $h > 0$ в точке

$$h^* = \left(\frac{(\lambda + 1)A^*}{(\mu - \lambda)B^*} \right)^{1/(\mu+1)},$$

и значение минимума

$$\Upsilon^*(h^*) = H \|\phi^*\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^\alpha \|b\phi^*\|_{L(-\infty, \infty)}^\beta. \quad (2.17)$$

Сравнивая правые части (2.17) и (2.15), заключаем, что

$$\|a\phi^*\|_{L(-\infty, \infty)} = \Upsilon^*(h^*) = (h^*)^{-(\lambda+1)} A^* + (h^*)^{\mu-\lambda} B^*.$$

Последний результат означает, что функция ϕ^* обращает неравенство (2.9) с $h = h^*$ в равенство, а это, как было показано выше, возможно лишь в случае, если функция ϕ^* удовлетворяет условиям (2.4) со значением $h = h^*$. Лемма 1 доказана полностью. $\square$

2.2. Доказательство теоремы 1

Возведя неравенство (1.5) в квадрат и применив равенство Парсеваля (1.2), неравенство (1.5) можно записать в следующей форме:

$$\int \mathbf{a}(\eta) |\widehat{f}(\eta)|^2 d\eta \leq G^2 \|f\|_1^{2\alpha} \left(\int \mathbf{b}(\eta) |\widehat{f}(\eta)|^2 d\eta \right)^\beta, \quad f \in W_{1,2}^k, \quad (2.18)$$

с весами

$$\mathbf{a}(\eta) = (2\pi\eta)^{2k}, \quad \mathbf{b}(\eta) = (2\pi\eta)^{2n}, \quad \eta \in (-\infty, \infty). \quad (2.19)$$

Для функции $f \in L_1(-\infty, \infty)$ ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ принадлежит пространству C_0 и справедливо неравенство

$$\|\widehat{f}\|_C \leq \|f\|_1, \quad f \in L_1(-\infty, \infty). \quad (2.20)$$

Рассмотрим неравенство

$$\int \mathbf{a}(\eta) |\widehat{f}(\eta)|^2 d\eta \leq \mathbf{H} \|\widehat{f}\|_C^{2\alpha} \left(\int \mathbf{b}(\eta) |\widehat{f}(\eta)|^2 d\eta \right)^\beta, \quad f \in W_{1,2}^u; \quad (2.21)$$

здесь $\mathbf{H} = \mathbf{H}(n, k)$ — константа (не зависящая от f), которую будем считать наилучшей (наименьшей возможной). В силу (2.20) неравенство (2.21) влечет неравенство (2.18), а следовательно, наилучшие константы в этих неравенствах связаны соотношением

$$G^2 \leq \mathbf{H}. \quad (2.22)$$

Если $f \in W_{1,2}^n$, то, как нетрудно видеть, $g = |\widehat{f}|^2$ принадлежит пространству Y^{2n} . Следовательно, неравенство (2.2) является расширением неравенства (2.21) с множества $\widehat{W}_{1,2}^n$ на более богатое множество Y^{2n} . Воспользуемся утверждениями леммы 1 для значений параметров $\mu = 2n$, $\lambda = 2k$. Неравенство (2.2) с использованием весов (2.19) принимает вид

$$\|\mathbf{a}g\|_{L(-\infty, \infty)} \leq \Lambda(2n, 2k) \|g\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^\alpha \|\mathbf{b}g\|_{L(-\infty, \infty)}^\beta, \quad g \in Y^{2n},$$

с параметрами

$$\alpha = \frac{2n - 2k}{2n + 1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k + 1}{2n + 1}$$

и константой

$$\begin{aligned} \Lambda(2n, 2k) &= (2\pi)^{2k-2n\beta} H(2n, 2k) \\ &= (2\pi)^{-(2(n-k))/(2n+1)} 2^{2(n-k)/(2n+1)} \frac{(2n+1)^{(2k+1)/(2n+1)}}{(2k+1)} \pi^{-(2(n-k))/(2n+1)} \frac{(2n+1)^{(2k+1)/(2n+1)}}{(2k+1)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\widehat{W}_{1,2}^n \subset Y^{2n}$, то $\mathbf{H} \leq \Lambda(2n, 2k)$. Последнее неравенство и неравенство (2.22) влекут оценку $G^2 \leq \Lambda(2n, 2k)$, которая эквивалентна неравенству $G \leq A(n, k)$, где

$$A(n, k) = \sqrt{\Lambda(2n, 2k)} = \pi^{-(n-k)/(2n+1)} \frac{(2n+1)^{(k+1/2)/(2n+1)}}{(2k+1)^{1/2}}.$$

Неравенство (2.1) проверено. Доказательство теоремы 1 завершено. $\square$

2.3. Библиографические замечания относительно неравенства Колмогорова

Пусть r, p, q — (вещественные) параметры пространств Лебега на оси $I = (-\infty, \infty)$ и полуоси $I = (0, \infty)$, удовлетворяющие ограничениям $1 \leq r, p, q \leq \infty$, а $0 \leq k < n$ — целые. Для $n \geq 1$ обозначим через $W_{r,p}^n = W_{r,p}^n(I)$ пространство функций $f \in L_r$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на I , производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ которых локально абсолютно непрерывна, а $f^{(n)} \in L_p$. Начиная с 1912 года [8], в течение более чем 110 лет проводились большие исследования неравенств

$$\|f^{(k)}\|_{L_q} \leq G \|f\|_{L_r}^\alpha \|f^{(n)}\|_{L_p}^\beta, \quad f \in W_{r,p}^n, \quad (2.23)$$

$$\alpha = (n - k - 1/p + 1/q)/(n - 1/p + 1/r), \quad \beta = 1 - \alpha.$$

на множестве $W_{r,p}^n$ с точными (не зависящими от функции) константами G . Такие неравенства изучали Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Е. Ландау, Ж. Адамар, Б. Сёкефальви-Надь, А. Н. Колмогоров, С. Б. Стечкин, В. В. Арестов, Л. В. Тайков, В. Н. Габушин, В. И. Бердышев, Н. П. Купцов, А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, В. М. Тихомиров, В. Ф. Бабенко и др. (см. [3; 9–12] и приведенную там библиографию). А. Н. Колмогоров [13] изучил неравенство (2.23) на оси в равномерной норме, а точнее при $p = q = r = \infty$. Его результат изящный и часто используемый. В связи с этим неравенства (2.23) и в общем случае часто называют неравенствами Колмогорова. В большинстве случаев неравенство (2.23) исследовалось для классических производных, т. е. целых $0 \leq k < n$. Однако имеется ряд результатов для дробных производных, см. работы [14–16] и приведенную там библиографию.

3. Задача Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования дробного порядка ограниченными операторами

Пусть $\mathfrak{B}(L_1, L_2)$ — множество всех линейных ограниченных операторов из L_1 в L_2 и $\mathfrak{B}(L_1, L_2; N)$ — шар радиуса $N > 0$ в $\mathfrak{B}(L_1, L_2)$ операторов с нормой $\|T\|_{L_1 \rightarrow L_2} \leq N$. Как и всюду в данной статье, $k, n \in \mathbb{R}$, $0 \leq k < n$. Для оператора $T \in \mathfrak{B}(L_1, L_2)$ величина

$$U(T) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|_2 : f \in Q_{1,2}^n\} \quad (3.1)$$

есть уклонение в пространстве L_2 оператора T от оператора дифференцирования D^k порядка k на классе $Q_{1,2}^n = \{f \in W_{1,2}^n : \|f^{(n)}\|_2 \leq 1\}$. Тогда при $N > 0$ величина

$$E(N) = E(n, k; N) = \inf\{U(T) : T \in \mathfrak{B}(L_1, L_2; N)\} \quad (3.2)$$

есть наилучшее приближение (в пространстве L_2) оператора дифференцирования D^k на классе $Q_{1,2}^n$ множеством (линейных ограниченных операторов) $\mathfrak{B}(L_1, L_2; N)$. Задача исследования величины (3.2), в частности, экстремального оператора, на котором в (3.2) достигается нижняя грань, является частным случаем задачи Стечкина о наилучшем приближении линейного неограниченного оператора линейными ограниченными операторами [17]. Задачу исследования величины (3.2) мы будем называть задачей Стечкина (3.2) или, коротко, задачей (3.2).

Заготовим на будущее функцию

$$\theta_h(t) = (2\pi\eta i)^k \max \{0, 1 - (2\pi h)^{n-k} |\eta|^{n-k}\}, \quad \eta \in (-\infty, \infty), \quad (3.3)$$

зависящую от параметра $h > 0$, и оператор свертки

$$(T_h f)(x) = (f * \widetilde{\theta}_h)(x) = \int f(x-t) \widetilde{\theta}_h(t) dt, \quad f \in L_2, \quad (3.4)$$

ядро которого есть обратное преобразование Фурье $\widetilde{\theta}_h$ функции θ_h . Относительно задачи Стечкина (3.2) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для задачи (3.2) при $0 \leq k < n$ и

$$N = N(h) = \left(\frac{2}{\pi h^{2k+1}} \right)^{1/2} \frac{(n-k)}{\{(2k+1)(2n+1)(n+k+1)\}^{1/2}}, \quad h > 0, \quad (3.5)$$

справедливы следующие утверждения:

(1) имеет место равенство

$$E(N(h)) = h^{n-k};$$

(2) оператор свертки T_h определенный формулой (3.4), является экстремальным в задаче (3.2) (при $N = N(h)$).

Утверждение теоремы 2 для классических производных целых порядков $0 \leq k < n$ доказано в [18] (см. в [18] формулу (4.29) и ее обоснование). Распространение этого результата на дробные производные $0 \leq k < n$ требует привлечения дополнительных рассуждений. В связи с этим здесь будет приведено полное доказательство теоремы 2. Доказательство будет проведено в несколько этапов.

3.1. Инвариантность относительно сдвига аппроксимирующих операторов в задаче (3.2)

На множестве $W_{1,2}^n$ оператор дробного дифференцирования $D^s f = f^{(s)}$, $0 \leq s \leq n$, инвариантен относительно сдвига, т. е.

$$\tau_\xi(f^{(s)}) = (\tau_\xi f)^{(s)}, \quad f \in W_{1,2}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

В самом деле, переходя к преобразованиям Фурье, имеем (см., например, [1], гл. 1, § 1, (1.5))

$$\widehat{\tau_\xi(f^{(s)})}(\eta) = (-2\pi\eta i)^s e^{-2\pi\xi\eta i} \widehat{f}(\eta) = (-2\pi\eta i)^s \widehat{\tau_\xi f}(\eta) = \widehat{(\tau_\xi f)^{(s)}}(\eta).$$

Отсюда следует равенство (3.6).

Равенство (3.6) влечет, что задача (3.2) инвариантна относительно сдвига, т. е. аппроксимируемый оператор D^k и класс $Q_{1,2}^n$ инвариантны относительно (любого) сдвига. В этой ситуации согласно теореме 1.1 из [18] в (3.2) можно ограничиться операторами $T \in \mathfrak{B}(L_1, L_2)$, инвариантными относительно сдвига на L . Обозначим через $\mathfrak{T}(L_1, L_2)$ множество инвариантных операторов $T \in \mathfrak{B}(L_1, L_2)$, и пусть $\mathfrak{T}(L_1, L_2; N) = \mathfrak{B}(L_1, L_2; N) \cap \mathfrak{T}(L_1, L_2)$. Итак,

$$E(N) = E(n, k; N) = \inf \{U(T) : T \in \mathfrak{T}(L_1, L_2; N)\}.$$

Свертка $\Theta * f$ функций $\Theta \in L_2$ и $f \in L$ принадлежит L_2 и имеет место неравенство $\|\Theta * f\|_2 \leq \|\Theta\|_2 \|f\|_1$ (см., например, [1], гл. 1, теорема 1.3). Следовательно, оператор свертки

$$Tf = T[\Theta]f = \Theta * f, \quad f \in L, \quad (3.7)$$

с ядром $\Theta \in L_2$ является линейным ограниченным оператором из L в L_2 . Он к тому же инвариантен относительно сдвига. Таким образом, $T[\Theta] \in \mathfrak{T}(L_1, L_2)$. Известно (см., например, [19], гл. 1, теорема 1.4), что на самом деле любой оператор $T \in \mathfrak{T}(L_1, L_2)$ имеет вид свертки (3.7) с некоторым ядром $\Theta \in L_2$ и при этом $\|T\|_{L \rightarrow L_2} = \|\Theta\|_2$. В этом смысле пространства $\mathfrak{T}(L_1, L_2)$ и L_2 изометричны.

Для $\theta \in L_2$ определим функцию

$$\rho(\eta) = \rho[\theta](\eta) = \frac{(-2\pi\eta i)^k - \theta(\eta)}{(-2\pi\eta i)^n}, \quad \eta \in (-\infty, \infty). \quad (3.8)$$

Лемма 2. Для любой функции $\Theta \in L_2$ для величины уклонения (3.1) оператора свертки (3.7) имеет место формула

$$U(T[\Theta]) = \|\rho[\theta]\|_\infty, \quad (3.9)$$

в которой $\theta = \widehat{\Theta}$.

Отметим, что равенство (3.9) имеет место как в случае $\rho[\theta] \in L_\infty$, так и в случае $\rho[\theta] \notin L_\infty$; в последнем случае обе величины в (3.9) равны $+\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции $f \in W_{1,2}^n$ найдем преобразование Фурье разности $R = R[f] = f^{(k)} - T[\Theta]f$. Согласно теореме 1 и определению производной $f^{(k)}$ имеем $f^{(k)} \in L_2$ и

$$\widehat{f^{(k)}}(\eta) = (-2\pi\eta i)^k \widehat{f}(\eta), \quad \eta \in (-\infty, \infty). \quad (3.10)$$

Преобразование Фурье свертки пары функций из L и L_2 есть произведение преобразований Фурье этих функций (см., например, [1], гл. 1, теорема 2.6). В частности, имеем

$$\widehat{T[\Theta]f} = \theta \widehat{f}. \quad (3.11)$$

Формулы (3.10) и (3.11) влекут представление

$$\widehat{R}(\eta) = \widehat{f^{(k)}}(\eta) - \widehat{T[\Theta]f}(\eta) = \rho[\theta](\eta)(-2\pi\eta i)^n \widehat{f}(\eta), \quad (3.12)$$

где функция $\rho[\theta]$ определена формулой (3.8).

Представление (3.12) можно переписать в виде

$$\widehat{R}(\eta) = \rho[\theta](\eta) \widehat{f^{(n)}}(\eta), \quad \eta \in (-\infty, \infty). \quad (3.13)$$

Убедимся, что величина

$$\nu_{1,2}^n(\theta) = \sup\{\|\rho[\theta](\eta) \widehat{f^{(n)}}(\eta)\|_2 : f \in Q_{1,2}^n\} \quad (3.14)$$

есть $\|\rho[\theta]\|_\infty$, если $\rho[\theta] \in L_\infty$, и $+\infty$, если $\rho[\theta] \notin L_\infty$, или, коротко,

$$\nu_{1,2}^n(\theta) = \|\rho[\theta]\|_\infty. \quad (3.15)$$

Обозначим через $\mathcal{S}_0$ множество функций из $\mathcal{S}$, которые зануляются в (каждая в своей) окрестности нуля. Нетрудно понять, что это множество плотно в пространстве L_2 . Очевидно, что если $\phi \in \mathcal{S}_0$, то функция $\psi(\eta) = \phi(\eta)/(-2\pi\eta i)^n$ также принадлежит пространству $\mathcal{S}_0$, а ее обратное преобразование Фурье $\check{\psi}$ принадлежит пространству $\mathcal{S}$, а следовательно, и пространству $W_{1,2}^n$. Приведенные рассуждения приводят к равенству

$$\nu_{1,2}^n(\theta) = \sup\{\|\rho[\theta]\phi\|_2 : \phi \in \mathcal{S}_0, \|\phi\|_2 \leq 1\}.$$

Отсюда следует (3.15).

Определение (3.1) и соотношения (3.13)–(3.15) влекут, что

$$U(T[\Theta]) = \sup \{ \|R[f]\|_2 : f \in Q_{1,2}^n \} = \sup \{ \|\widehat{R[f]}\|_2 : f \in Q_{1,2}^n \} = \nu_{1,2}^n(\theta) = \|\rho[\theta]\|_\infty.$$

Равенство (3.9) проверено. Доказательство леммы 2 завершено. $\square$

Рассмотрим экстремальную задачу об исследовании величины

$$\varepsilon(N) = \inf \left\{ \left\| \frac{(-2\pi\eta i)^k - \theta(\eta)}{(-2\pi\eta i)^n} \right\|_\infty : \theta \in L_2, \|\theta\|_2 \leq N \right\}, \quad N > 0; \quad (3.16)$$

функцию, на которой достигается здесь нижняя грань, назовем экстремальной функцией задачи (3.16). Как следствие леммы 2, справедливо такое утверждение.

Лемма 3. Для любых значений параметров $0 \leq k < n$, $N > 0$ имеет место равенство

$$E(N) = \varepsilon(N).$$

При этом функция θ^* является экстремальной в задаче (3.16) в том и только том случае, если оператор свертки $T[\Theta^*]$, определенный формулой (3.7) с ядром $\Theta^* = \widetilde{\theta^*}$, является экстремальным в задаче Стечкина (3.2).

3.2. Доказательство теоремы 2

3.2.1. Решение задачи (3.16).

Лемма 4. Для любых значений параметров $0 \leq k < n$, $n, k \in \mathbb{R}$, при

$$N = N(h) = \left(\frac{2}{\pi h^{2k+1}} \right)^{1/2} \frac{(n-k)}{\{(2k+1)(2n+1)(n+k+1)\}^{1/2}}, \quad h > 0, \quad (3.17)$$

для величины (3.16) имеет место равенство

$$\varepsilon(N(h)) = h^{n-k} \quad (3.18)$$

и функция θ_h , определенная формулой (3.3), является здесь экстремальной.

Доказательство. 1. Исходя из определения (3.3), находим

$$\|\theta_h\|_2^2 = 2 \int_0^{1/(2\pi h)} |\theta_h(\eta)|^2 d\eta = 2 \int_0^{1/(2\pi h)} (2\pi\eta)^{2k} (1 - (2\pi h\eta)^{n-k})^2 d\eta.$$

Сделав в последнем интеграле замену $2\pi\eta h = t$, получаем

$$\|\theta_h\|_2^2 = \frac{1}{\pi h^{2k+1}} \int_0^1 t^{2k} (1 - t^{n-k})^2 dt = \frac{2(n-k)^2}{\pi h^{2k+1} (2k+1)(2n+1)(n+k+1)}.$$

Сравнивая последнее выражение с (3.5), заключаем, что $\|\theta_h\|_2^2 = (N(h))^2$, и окончательно имеем

$$\|\theta_h\|_2 = N(h). \quad (3.19)$$

2. Вычислим L_∞ -норму функции

$$\rho[\theta_h](\eta) = \frac{(-2\pi\eta i)^k - \theta_h(\eta)}{(-2\pi\eta i)^n}, \quad \eta \in (-\infty, \infty).$$

Исходя из определения (3.3), находим при $0 < |\eta| \leq 1/(2\pi h)$

$$\rho[\theta_h](\eta) = \frac{(-2\pi\eta i)^k - \theta_h(\eta)}{(-2\pi\eta i)^n} = \frac{(h|\eta|)^{n-k}}{(-\eta i)^{n-k}},$$

а следовательно,

$$|\rho[\theta_h](\eta)| = h^{n-k}, \quad 0 < |\eta| \leq 1/(2\pi h). \quad (3.20)$$

Если же $|\eta| > 1/(2\pi h)$, то имеем $\rho[\theta_h](\eta) = \frac{1}{(-2\pi\eta i)^{n-k}}$, и потому

$$|\rho[\theta_h](\eta)| = \frac{1}{(2\pi|\eta|)^{n-k}} < h^{n-k}, \quad |\eta| > 1/(2\pi h). \quad (3.21)$$

Соотношения (3.20) и (3.21) влекут равенство

$$\|\rho[\theta_h]\|_\infty = h^{n-k}. \quad (3.22)$$

Равенства (3.19) и (3.22) дают оценку

$$\varepsilon(N(h)) \leq \|\rho[\theta_h]\|_\infty = h^{n-k}. \quad (3.23)$$

3. Обоснуем неравенство, обратное (3.23). Для этого нужно доказать, что

$$\{\theta \in L_2, \|\theta\|_2 \leq N(h)\} \Rightarrow \|\rho[\theta]\|_\infty \geq h^{n-k}. \quad (3.24)$$

Предположим, что для функции $\theta \in L_2$ выполняется свойство $\|\rho[\theta]\|_\infty \leq \varkappa$ с некоторой константой $0 < \varkappa < h^{n-k}$. Почти для всех $\eta \in (-\infty, \infty)$ имеем

$$\left| \frac{(-2\pi\eta i)^k - \theta(\eta)}{(-2\pi\eta i)^n} \right| \leq \varkappa.$$

Отсюда

$$|\theta(\eta)| \geq |(-2\pi\eta i)^k| (1 - \varkappa(2\pi|\eta|)^n),$$

а следовательно,

$$|\theta(\eta)| \geq |(-2\pi\eta i)^k| \max \{0, (1 - \varkappa(2\pi|\eta|)^n)\}. \quad (3.25)$$

Представим $\varkappa$ в виде $\varkappa = \delta^{n-k}$, $0 < \delta < h$. Сравнивая с (3.3), видим, что правая часть неравенства (3.25) есть $|\theta_\delta(\eta)|$. Итак, имеем $|\theta(\eta)| \geq |\theta_\delta(\eta)|$, $\eta \in (-\infty, \infty)$, а потому $\|\theta\|_2 \geq \|\theta_\delta\|_2$. Применяя теперь (3.19), получаем оценку $\|\theta\|_2 \geq N(\delta)$. Из равенства (3.17) видно, что функция $N(h)$ по $h \in (0, \infty)$ убывает, и, значит, $N(\delta) > N(h)$. Таким образом, доказано следующее утверждение:

$$\{\theta \in L_2, \|\rho[\theta]\|_\infty < h^{n-k}\} \Rightarrow \|\theta\|_2 > N(h).$$

Это утверждение влечет (3.24). Тем самым доказано неравенство $\varepsilon(N(h)) \geq h^{n-k}$. Все утверждения леммы 4 доказаны. $\square$

3.2.2. Завершение доказательства теоремы 2. Леммы 3 и 4 влекут все утверждения теоремы 2.

3.3. Библиографические замечания относительно задачи Стечкина

С. Б. Стечкин в работе [17] 1967 года поставил задачу о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными и получил в этой задаче принципиальные результаты. В дальнейшем эта тематика получила большое развитие. Наибольшее внимание было уделено приближению операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами в пространствах Лебега функций одного переменного на оси и полуоси. Опишем эту задачу.

В пространстве $W_{r,p}^n = W_{r,p}^n(I)$ при вещественных $1 \leq r, p, q \leq \infty$ и целых $0 \leq k < n$ на оси $I = (-\infty, \infty)$ и полуоси $I = [0, \infty)$, определенном выше в связи с обсуждением неравенства Колмогорова (2.23), выделим класс $Q_{r,p}^n = \{f \in W_{r,p}^n : \|f^{(n)}\|_p \leq 1\}$. Пусть, далее, $\mathfrak{B}(L_r, L_q)$ есть множество всех линейных ограниченных операторов из L_r в L_q . Для оператора $T \in \mathfrak{B}(L_r, L_q)$ положим

$$U(n, k; r, p, q; T) = \sup \{ \|f^{(k)} - Tf\|_q : f \in Q_{r,p}^n \};$$

и при $N > 0$ определим величину

$$E(n, k; r, p, q; N) = \inf \{ U(n, k; r, p, q; T) : T \in \mathfrak{B}(L_r, L_q), \|T\| \leq N \} \quad (3.26)$$

наилучшего приближения (в пространстве L_q) оператора дифференцирования D^k на классе $Q_{r,p}^n$ множеством линейных ограниченных операторов с нормой $\|T\| \leq N$. Задача Стечкина состоит в исследовании величины (3.26) и экстремального оператора, на котором в (3.26) достигается нижняя грань.

Эту задачу изучали С. Б. Стечкин, Л. В. Тайков, Ю. Н. Субботин, В. В. Арестов, В. Н. Габупшин, В. И. Бердышев, В. М. Тихомиров, А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, Р. Р. Акопян, М. А. Филатова, Е. Е. Бердышева и другие; см., в частности, работы [9; 10; 20–22], монографию [11] и библиографию в них.

С. Б. Стечкину принадлежит важное наблюдение о том, что величина (3.26) и наилучшая константа в (2.23) связаны неравенством

$$E(N) \geq \beta \alpha^{\alpha/\beta} G^{1/\beta} N^{-\alpha/\beta}, \quad N > 0, \quad (3.27)$$

$$\alpha = (n - k - 1/p + 1/q)/(n - 1/p + 1/r), \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Неравенство (3.27) есть конкретный вариант более общего утверждения С. Б. Стечкина, содержащегося в разд. 2 в [17]. Неравенство (3.27) является важным инструментом исследования и задачи Стечкина (3.26), и одновременно неравенства Колмогорова (2.23). В зависимости от значений параметров неравенство (3.27) может обратиться в равенство, но может быть и строгим. В соответствии с этим говорят, что задача Стечкина (3.26) и неравенство Колмогорова (2.23) согласованы или не согласованы. В следующей теореме, взятой из работы [23], приведены значения параметров, при которых задачи Стечкина и Колмогорова заведомо не согласованы.

Теорема 3. *В следующих трех случаях неравенство (3.27) является строгим:*

- (1) $q = r = 2$, $1 \leq p < 2$, $0 < k < n$;
- (2) $q = p = 2$, $1 \leq r < 2$, $0 \leq k < n$;
- (3) $r = 1$, $1 \leq q < \infty$, $1 < p \leq \infty$, $0 \leq k < n$.

Доказательство этой теоремы в [23] неконструктивное, без точного решения задач и даже без соответствующих оценок.

Помимо задачи (3.26) в работах А. П. Буслаева [24], О. А. Тимошина [25; 26], В. Г. Тимофеева [27], Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко [28], В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугова, О. Коваленко [15; 16] и др. исследованы приближения операторов дифференцирования и некоторых других операторов математической физики на классах функций многих переменных, см. процитированные работы и приведенную там библиографию.

В настоящее время имеется ряд результатов о наилучшем приближении операторов дробного дифференцирования, см. работы [14–16] и приведенную там библиографию.

4. Несогласованность задачи Стечкина (3.2) и неравенства Колмогорова (1.5)

Величина (3.2) и наилучшая константа в (1.5) связаны неравенством

$$E(N) \geq \beta \alpha^{\alpha/\beta} G^{1/\beta} N^{-\alpha/\beta}, \quad N > 0, \quad \alpha = \frac{2(n-k)}{2n+1}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{2k+1}{2n+1}. \quad (4.1)$$

Неравенство (4.1) есть аналог неравенства (3.27) и обосновывается тем же методом (см. [10;17]). Неравенство (4.1) можно переписать в виде

$$G(n, k) \leq B(n, k) = \alpha^{-\alpha} \beta^{-\beta} (E(n, k; N))^{\beta} N^{\alpha}, \quad N > 0. \quad (4.2)$$

4.1. Связь задачи Стечкина (3.2) и неравенства Колмогорова (1.5)

Следующее утверждение уточняет неравенство (4.2).

Теорема 4. Для любых (вещественных) $0 \leq k < n$ между наилучшей константой в неравенстве (1.5) и значением задачи Стечкина (3.2) выполняются следующие соотношения:

$$G(n, k) \leq A(n, k) < B(n, k), \quad (4.3)$$

здесь

$$A(n, k) = \pi^{-(n-k)/(2n+1)} \frac{(2n+1)^{(k+1/2)/(2n+1)}}{(2k+1)^{1/2}}, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} B(n, k) &= \alpha^{-\alpha} \beta^{-\beta} (E(n, k; N))^{\beta} N^{\alpha} \\ &= \pi^{-(n-k)/(2n+1)} \left(\frac{1}{2(n+k+1)} \right)^{(n-k)/(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2k+1} \right)^{(n+k+1)/(2n+1)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.3) следует, что неравенство (4.2) строгое; в этом смысле задача Стечкина (3.2) и неравенство Колмогорова (1.5) не согласованы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое неравенство в (4.3) доказано ранее в теореме 1. Поэтому доказать нужно лишь второе неравенство:

$$A(n, k) < B(n, k). \quad (4.6)$$

Подставив в выражение для $B(n, k) = \alpha^{-\alpha} \beta^{-\beta} (E(n, k; N))^{\beta} N^{\alpha}$ значение величины $E(n, k; N)$ из теоремы 2, получаем для $B(n, k)$ представление (4.5).

Неравенство (4.6) эквивалентно неравенству $B^2(n, k) > A^2(n, k)$. Таким образом, доказательство теоремы свелось к доказательству неравенства

$$\frac{B^2}{A^2} > 1; \quad (4.7)$$

здесь для сокращения записи приняты обозначения $B = B(n, k)$, $A = A(n, k)$. Воспользовавшись соотношениями (4.4) и (4.5), находим

$$\begin{aligned} \frac{B^2}{A^2} &= \left(\frac{1}{2\pi(n+k+1)} \right)^{(2(n-k))/(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2k+1} \right)^{2(n+k+1)/(2n+1)} \pi^{2(n-k)/(2n+1)} \frac{(2k+1)}{(2n+1)^{(2k+1)/(2n+1)}} \\ &= \left(\frac{2n+1}{2(n+k+1)} \right)^{(2(n-k))/(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{2k+1} \right)^{(2k+1)/(2n+1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(u) = \left(\frac{1}{1+u} \right)^{1-u} \frac{1}{u^u}, \quad u \in (0, 1].$$

Видно, что отношение B^2/A^2 есть значение функции φ в точке $u = (2k+1)/(2n+1) \in (0, 1)$:

$$\frac{B^2}{A^2} = \varphi\left(\frac{2k+1}{2n+1}\right). \quad (4.8)$$

Исследуем свойства функции φ . Имеем $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = 1$. При доопределении $\varphi(0) = 1$ функция φ будет определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$ со значениями в концах отрезка $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$. Для функции $\chi(u) = \ln \varphi(u)$ имеем

$$\chi(u) = \begin{cases} -(1-u) \ln(1+u) - u \ln u, & u \in (0, 1], \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

$$\chi'(u) = \ln(1+u) - \frac{1-u}{1+u} - \ln u - 1, \quad u \in (0, 1],$$

$$\chi''(u) = \frac{u-1}{u(1+u)^2}, \quad u \in (0, 1].$$

Поскольку $\chi''(u) < 0$, $u \in (0, 1)$, то функция φ строго выпуклая вверх на отрезке $[0, 1]$. В концах отрезка имеем $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = 0$. Следовательно, $\chi(u) > 0$, $u \in (0, 1)$.

Имеем $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$, а потому $\varphi(u) > 1$, $u \in (0, 1)$. В частности, этим же свойством обладает величина (4.8), т. е. выполняется свойство (4.7). Теорема 4 доказана. $\square$

4.2. Случай $n = 1$, $k = 0$

Точная константа в неравенстве (1.5) известна лишь для $n = 1$, $k = 0$; этот результат содержится в более общем утверждении Б. Сёкефальви-Надя [4]. В этом случае неравенство (1.5) имеет вид

$$\|f\|_2 \leq G(1, 0) \|f\|_1^{2/3} \|f'\|_2^{1/3}, \quad f \in W_{1,2}^1;$$

здесь наилучшая константа

$$G(1, 0) = \frac{3^{1/2}}{(4\pi)^{1/3}}$$

и единственная (в стандартном смысле) экстремальная функция

$$f_{1,0}(\eta) = \begin{cases} \cos^2(\eta/2), & |\eta| \leq \pi, \\ 0, & |\eta| \geq \pi. \end{cases}$$

Для сравнения приведем значения

$$G(1, 0) = \frac{3^{1/2}}{(4\pi)^{1/3}} = \frac{(27)^{1/6}}{(4\pi)^{1/3}} < A(1, 0) = \pi^{-1/3} 3^{1/6} = \frac{(48)^{1/6}}{(4\pi)^{1/3}} < B(1, 0) = \frac{3^{2/3}}{(4\pi)^{1/3}} = \frac{(81)^{1/6}}{(4\pi)^{1/3}}.$$

Заключение

Согласно теореме 4 при $r = 1$, $p = q = 2$, в частности для целых $0 \leq k < n$, задача Стечкина (3.26) и неравенство Колмогорова (2.23) не согласованы. Как следует из результатов работы Ю. Н. Субботина и Л. В. Тайкова [29], в казалось бы близком случае $r = 2$, $p = q = 2$ согласованность уже имеет место. От каких свойств пространств зависит согласованность/несогласованность задач, на данный момент ясности нет.

Благодарность. Автор выражает благодарность Р. Р. Акопяну за обстоятельное прочтение рукописи и ряд замечаний, которые привели к усилению результатов и улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
2. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
3. **Буслаев А.П., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** О существовании экстремальной функции в неравенстве для производных // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 6. С. 823–834.
4. **Szőkefalvi-Nagy B.** Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung // Acta Sci. Math. 1941. Vol. 10. P. 64–74.
5. **Левин В.И.** Точные константы в неравенствах типа Карлсона // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. С. 635–639.
6. **Арестов В.В.** Приближение линейных операторов и родственные задачи // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 29–42.
7. **Осипенко К.Ю.** Точные неравенства Карлсона со многими весами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 229–240. doi: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-229-240
8. **Hardy G.H., Littlewood J.E.** Contribution to the arithmetic theory of series // Proc. London Math. Soc. 2. 1912. Vol. 11. P. 411–478.
9. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–68.
10. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 89–124. doi: 10.4213/rm1019
11. **Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.** Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наук. думка, 2003. 591 с.
12. **Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.Г.** Неравенства для производных // А. Н. Колмогоров. Избранные тр. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 387–390.
13. **Колмогоров А.Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избранные тр. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 252–263. (Уч. зап. Моск. ун-та. Математика, кн. 3, 1939. Т. 30. С. 3–16.)
14. **Arestov V.V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approx. Theory. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ., 1979. С. 19–34.
15. **Бабенко В.Ф., Парфинович Н.В., Пичугов С.А.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 1. С. 3–17. doi: 10.4213/mzm10196
16. **Babenko V., Kovalenko O., Parfinovych N.** On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones // J. Math. Anal. Appl. 2022. Vol. 513. P. 1–21. doi: 10.1016/j.jmaa.2022.126215
17. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
18. **Арестов В.В.** Приближение операторов, инвариантных относительно сдвига // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 43–70.
19. **Хермандер Л.** Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 71 с.
20. **Арестов В.В., Акопян Р.Р.** Задача Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора ограниченными и родственные ей задачи // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 7–31. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-7-31
21. **Arestov V.V., Filatova M.A.** Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis // J. Approx. Theory. 2014. Vol. 187. P. 65–81. doi: 10.1016/j.jat.2014.08.001
22. **Arestov V.V.** Approximation of differentiation operators by bounded linear operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in the spaces of (p, q) -multipliers and their predual spaces // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no. 2. P. 4–27. doi: 10.15826/umj.2023.2.001
23. **Арестов В.В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 3–20.
24. **Буслаев А.П.** О приближении оператора дифференцирования // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 5. С. 731–742.
25. **Тимошин О.А.** Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 3. С. 369–375.
26. **Тимошин О.А.** Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядка // Докл. РАН. 1995. Т. 344, № 1. С. 20–22.

27. Тимофеев В.Г. Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676–689.
28. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю., Сивкова Е.О. Оптимальное восстановление температуры трубы по неточным измерениям // Тр. МИАН. 2021. Т. 312. С. 216–223. doi: 10.4213/tm4139
29. Субботин Ю.Н., Тайков Л.В. Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 2. С. 157–164.

Поступила 19.06.2024

После доработки 17.09.2024

Принята к публикации 23.09.2024

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

REFERENCES

1. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9780691080789. Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*, Moscow, Mir Publ., 1974, 333 p.
2. Shilov G.E. *Matematicheskii analiz. Vtoroi spetsial'nyi kurs* [Mathematical analysis. The second special course]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 328 p.
3. Buslaev A.P., Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. Existence of extremal functions in inequalities for derivatives. *Math. Notes*, 1982, vol. 32, pp. 898–904. doi: 10.1007/BF01145874
4. Szökefalvi-Nagy B. Über integralungleichungen zwischen einer funktion und ihrer ableitung. *Acta Sci. Math.*, 1941, vol. 10, pp. 64–74.
5. Levin V.I. Exact constants in inequalities of the Carlson type. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1948, vol. 59, no. 4, pp. 635–638 (in Russian).
6. Arestov V.V. Approximation of linear operators, and related extremal problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 31–44.
7. Osipenko K.Yu. Sharp Carlson type inequalities with many weights. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2023, vol. 323, suppl. 1, pp. S211–S221. doi: 10.1134/S0081543823060184
8. Hardy G.H., Littlewood J.E. Contribution to the arithmetic theory of series. *Proc. London Math. Soc.* 2, 1912, vol. 11, no. 1, p. 411–478.
9. Arestov V.V., Gabushin V.N. Best approximation of unbounded operators by bounded operators. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1995, vol. 39, no. 11, pp. 38–63.
10. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surveys*, 1996, vol. 51, iss. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001
11. Babenko V.F., Korneichuk N.P., Kofanov V.A., Pichugov S.A. *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya* [Inequalities for derivatives and their applications]. Kiev, Naukova Dumka, 2003, 590 p.
12. Tikhomirov V.M., Magaril-Il'yaev G.G. *Neravenstva dlya proizvodnykh* [Inequalities for derivatives]. In: *Izbrannye Trudy. Matematika i Mekhanika* [Selected Works. Mathematics and Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985, pp. 387–390.
13. Kolmogorov A.N. *O neravenstvakh mezhdru verkhnimi granyami posledovatel'nykh proizvodnykh proizvol'noy funktsii na beskonechnom intervale* [On inequalities between upper bounds of successive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval]. In: *Izbrannyye tr. Matematika, mekhanika* [Selected proceedings. Mathematics, mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985, pp. 252–263.
14. Arestov V.V. Inequalities for fractional derivatives on the half-line. *Approx. Theory*, Warszawa, Banach Cent. Publ., 1979, vol. 4, pp. 19–34. doi: 10.4064/-4-1-19-34
15. Babenko V.F., Parfinovich N.V., Pichugov S.A. Kolmogorov-type inequalities for norms of Riesz derivatives of functions of several variables with Laplacian bounded in L_∞ and related problems. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, no. 1, pp. 3–14. doi: 10.1134/S0001434614010015

16. Babenko V., Kovalenko O., Parfinovych N. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. *J. Math. Anal. Appl.*, 2022, vol. 513, iss. 2, art. 126215. doi: 10.1016/j.jmaa.2022.126215
17. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, iss. 2, pp. 91–99. doi: 10.1007/BF01268056
18. Arestov V.V. Approximation of operators invariant with respect to a shift. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 45–74.
19. Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L_p spaces. *Acta Math.*, 1960, vol. 104, nos. 1–2, pp. 93–140. doi: 10.1007/BF02547187
20. Arestov V.V., Akopyan R.R. Stechkin’s problem on the best approximation of an unbounded operator by bounded ones and related problems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 7–31 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-7-31
21. Arestov V.V., Filatova M.A. Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis. *J. Approx. Theory*, 2014, vol. 187, pp. 65–81. doi: 10.1016/j.jat.2014.08.001
22. Arestov V.V. Approximation of differentiation operators by bounded linear operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in the spaces of (p, q) -multipliers and their predual spaces. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 2, pp. 4–27. doi: 10.15826/umj.2023.2.001
23. Arestov V.V. Best approximation of translation invariant unbounded operators by bounded linear operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1994, vol. 198, pp. 1–16.
24. Buslaev A.P. Approximation of a differentiation operator. *Math. Notes*, 1981, vol. 29, no. 5, pp. 372–378. doi: 10.1007/BF01158361
25. Timoshin O.A. Best approximation of the operator of second mixed derivative in the metrics of L and C on the plane. *Math. Notes*, 1984, vol. 36, iss. 3, pp. 683–686. doi: 10.1007/BF01141940
26. Timoshin O.A. Sharp inequalities between norms of partial derivatives of second and third order. *Dokl. Akad. Nauk*, 1995, vol. 344, no. 1, pp. 20–22.
27. Timofeev V.G. Landau inequality for function of several variables. *Math. Notes*, 1985, vol. 37, iss. 5, pp. 369–377. doi: 10.1007/BF01157968
28. Magaril-Il’yaev G.G., Osipenko K.Yu., Sivkova E.O. Optimal recovery of pipe temperature from inaccurate measurements. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 312, iss. 1, pp. 207–214. doi: 10.1134/S0081543821010120
29. Subbotin Yu.N., Taikov L.V. Best approximation of a differentiation operator in L_2 -space. *Math. Notes*, 1968, vol. 3, no. 2, pp. 100–105. doi: 10.1007/BF01094328

Received June 19, 2024

Revised September 17, 2024

Accepted September 23, 2024

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru.

Cite this article as: V.V. Arestov. A variant of Stechkin’s problem on the best approximation of a fractional order differentiation operator on the axis. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 37–54.