

УДК 517.5

К-ФУНКЦИОНАЛЫ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ**М. Ш. Шабозов, Р. А. Каримзода**

В работе получены точные неравенства типа Джексона — Стечкина в пространстве Харди $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$), в которых величины наилучших полиномиальных приближений оцениваются сверху через $\mathcal{K}$ -функционалы r -х производных. Для классов функций, определённых посредством указанных характеристик, в пространстве $H_{q,\rho}$ вычислены точные значения бернштейновских и колмогоровских n -поперечников.

Ключевые слова: неравенство типа Джексона — Стечкина, наилучшее полиномиальное приближение, $\mathcal{K}$ -функционал, n -поперечники.

M. Sh. Shabozov, R. A. Karimzoda. $\mathcal{K}$ -Functionals and exact values of n -widths for some classes of functions in the Hardy space.

In this work, we obtain exact Jackson–Stechkin type inequalities in the Hardy space $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$), in which the values of the best polynomial approximations are estimated from above in terms of the $\mathcal{K}$ -functionals of the r th derivatives. For function classes defined by the mentioned characteristics, exact values of Bernstein and Kolmogorov n -widths in the space $H_{q,\rho}$ are calculated.

Keywords: Jackson–Stechkin type inequality, best polynomial approximation, $\mathcal{K}$ -functional, n -widths.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-301-308

*К 85-летию юбилею академика РАН
Виталия Ивановича Бердышева*

1. Введение

Экстремальные задачи, связанные с наилучшим полиномиальным приближением аналитических в единичном круге функций и вычислением точных значений различных n -поперечников, изучались, например, в работах К. И. Бабенко, В. М. Тихомирова, Л. В. Тайкова, М. З. Двейрина, С. Б. Вакарчука и многих других математиков (см., например, [1–3] и приведенную там литературу.)

В данной работе доказаны некоторые точные теоремы в более общем пространстве Харди $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$), в которых величины наилучших полиномиальных приближений функций, аналитических в круге $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, оцениваются сверху через $\mathcal{K}$ -функционалы r -х производных. Полученный результат позволяет найти точные значения бернштейновского и колмогоровского n -поперечников в $H_{q,\rho}$.

Введем необходимые для дальнейшего следующие понятия и обозначения:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, целых неотрицательных, вещественных и комплексных чисел;

$U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ — открытый круг радиуса ρ ($0 < \rho \leq R$) с центром в нуле;

$A(U_\rho)$ — множество функций, аналитических в круге U_ρ ;

$H_{q,R}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $R > 0$) — пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых

$$\|f\|_{q,R} := \|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_q(f, \rho) < \infty,$$

где

$$M_q(f, \rho) := \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty; \\ \operatorname{esssup} \{ |f(\rho e^{it})| : 0 \leq t < 2\pi \}, & q = \infty. \end{cases}$$

Известно [4, с. 279, 280], что величина $M_q(f, \rho)$ не убывает при возрастании $\rho \in (0, R)$ и почти всюду на окружности $|z| = R$ существуют угловые граничные значения $f(Re^{it})$,

$$\|f\|_{q,R} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty; \\ \operatorname{esssup} \{ |f(Re^{it})| : 0 \leq t < 2\pi \}, & q = \infty. \end{cases}$$

Для производной r -го порядка функции $f \in A(U_R)$ имеем

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad (f^{(0)} \equiv f),$$

где $\alpha_{k,r} := k(k-1)\dots(k-r+1)$, $k > r$, $k, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n,0} \equiv 1$, $\alpha_{n,1} \equiv n$; $c_k(f)$ — коэффициенты ряда Маклорена функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$.

Положим $H_{q,R} := \{f \in A(U_R) : \|f(\cdot)\|_{q,R} := \|f(R\cdot)\|_q < \infty\}$, и для $r \in \mathbb{Z}_+$

$$H_{q,R}^{(r)} := \{f \in A(U_R) : f^{(r)} \in H_{q,R}\}.$$

Равенством $E_{n-1}(f)_{q,\rho} := \inf \{\|f - p_{n-1}\|_{q,\rho} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$ определим наилучшее приближение функции $f \in H_{q,\rho}$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ полиномов $p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, степени не выше $n-1$.

Теорема 1. Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < \rho \leq R$, $1 \leq q \leq \infty$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R}, \quad (1.1)$$

и знак равенства в (1.1) достигается для функции $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Теорема 1 буквально повторяет схему доказательства аналогичного утверждения из работы первого автора [3, с. 285], доказанного в случае $\rho = R = 1$.

Теорема 2. Для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < \rho \leq R$, $1 \leq q \leq \infty$ справедливо неравенство

$$\|p_n^{(r)}\|_{q,\rho} \leq \frac{1}{\rho^r} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \|p_n\|_{q,R}, \quad (1.2)$$

которое обращается в равенство для полинома $q_n(z) = bz^n$, $b \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Непосредственной проверкой легко убедиться, что для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ справедливо равенство

$$p_n^{(r)}(\rho e^{it}) = \frac{\rho^{n-r} e^{i(n-r)t}}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} p_n(Re^{i\theta}) \mathcal{F}_{n,r}(\rho/R, \theta - t) d\theta, \quad (1.3)$$

где

$$\mathcal{F}_{n,r}(\rho/R, \tau) = \alpha_{n,r} + 2 \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \sum_{k=r}^{n-1} \alpha_{k,r} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos(n-k)\tau. \quad (1.4)$$

Дважды применяя преобразование Абеля к сумме в правой части функции (1.4), убедимся, что $\mathcal{F}_{n,r}(\rho/R, \tau)$ при всех $\rho \in (0, R]$ и $\tau \in [0, 2\pi]$ является неотрицательной и интегрируемой по t на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией, причем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{n,r}(\rho/R, \tau) d\tau = \alpha_{n,r}. \quad (1.5)$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (1.3) и применяя специальный случай неравенства Юнга для свертки двух функций (см., например, [5, с. 253]), с учетом (1.5) получаем

$$\begin{aligned} |p_n^{(r)}(\rho e^{it})| &\leq \frac{\rho^{n-r}}{R^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_n(Re^{i\theta})| |\mathcal{F}_{n,r}(\rho/R, \theta - t)| d\theta \\ &\leq \frac{1}{\rho^r} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_n(Re^{i\theta})|^q d\theta\right)^{1/q} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{n,r}(\rho/R, \theta)| d\theta\right) \leq \frac{1}{\rho^r} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \alpha_{n,r} \|p_n\|_{q,R}. \end{aligned}$$

Отсюда при любых $1 \leq q \leq \infty$ имеем

$$|p_n^{(r)}(\rho e^{it})|^q \leq \left(\frac{1}{\rho^r} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n\right)^q \alpha_{n,r}^q \|p_n\|_{q,R}^q.$$

Интегрируя обе части полученного неравенства по t в промежутке $[0, 2\pi]$ и возведя в степень $1/q$, получаем требуемое неравенство (1.2).

Теорема 2 доказана.

2. $\mathcal{K}$ -функционал и его применение

В теории аппроксимации функций, как правило, рассматривают задачу замены произвольной функции f некоторой достаточно гладкой функцией g . Одна из наиболее эффективных реализаций этой идеи основана на методе $\mathcal{K}$ -функционала Петре в теории интерполяционных пространств [6]. В последнее время $\mathcal{K}$ -функционалы нашли широкое применение при решении экстремальных задач теории приближения функций (см., например, [7–9]). В рассматриваемом нами случае $\mathcal{K}$ -функционал Петре построим по двум пространствам $H_{q,R}$ и $H_{q,R}^{(m)}$, положив

$$\mathcal{K}_m(f, t^m)_{q,R} := \mathcal{K}(f; t^m, H_{q,R}, H_{q,R}^{(m)}) = \inf \{ \|f - g\|_{q,R} + t^m \|g^{(m)}\|_{q,R} : g \in H_{q,R}^{(m)} \}. \quad (2.1)$$

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq m$, $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in H_{q,R}^{(r)}} \frac{(R^{n-r}/\rho^n) \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{q,\rho}}{\mathcal{K}_m(f^{(r)}, \alpha_{n,m}^{-1})_{q,R}} = 1. \quad (2.2)$$

Доказательство. Из неравенства (1.1) получаем

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \|f^{(r)} - S_{n-1}(g)\|_{q,R}, \quad (2.3)$$

где $S_{n-1}(g) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(g) z^k$ — частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Маклорена функции $g \in H_{q,R}^{(m)}$.

В работе [10] доказано, что для произвольной функции $g \in H_{q,R}^{(m)}$ имеет место неравенство

$$\|g - S_{n-1}(g)\|_{q,R} \leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} \|g^{(m)}\|_{q,R}. \quad (2.4)$$

Применяя неравенство треугольника к правой части соотношения (2.3) и используя результат (2.4), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{q,\rho} &\leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \{\|f^{(r)} - g\|_{q,R} + \|g - S_{n-1}(g)\|_{q,R}\} \\ &\leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \{\|f^{(r)} - g\|_{q,R} + \frac{1}{\alpha_{n,m}} \|g^{(m)}\|_{q,R}\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Очевидно, что левая часть неравенства (2.5) не зависит от функции $g \in H_{q,R}^{(m)}$, выбор которой ничем не ограничивался, а потому, переходя в правой части (2.5) к нижней грани по всем функциям $g \in H_{q,R}^{(m)}$ и используя определение $\mathcal{K}$ -функционала (2.1), имеем

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \mathcal{K}_m\left(f^{(r)}, \frac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{q,R}. \quad (2.6)$$

Последнее неравенство верно для любой функции $f \in H_{q,R}^{(r)}$, а потому из него вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части (2.2):

$$\sup_{f \in H_{q,R}^{(r)}} \frac{(R^{n-r}/\rho^n) \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{q,\rho}}{\mathcal{K}_m(f^{(r)}, \alpha_{n,m}^{-1})_{q,R}} \leq 1. \quad (2.7)$$

Для получения аналогичной оценки снизу указанной величины в формуле (2.5) полагаем $f := p_n \in \mathcal{P}_n$, $g = 0$, причем функцию $g = 0$ можно рассматривать как элемент $H_{q,R}^{(m)}$. Тогда из (2.5) выводим оценку сверху

$$\mathcal{K}_m(p_n; t^m)_{q,R} \leq \|p_n\|_{q,R}.$$

Очевидно, что и в случае $g := p_n$ функция g также принадлежит множеству $H_{q,R}^{(m)}$. Тогда из формулы (2.1) имеем

$$\mathcal{K}_m(p_n; t^m)_{q,R} \leq t^m \|p_n^{(m)}\|_{q,R}.$$

Из двух последних неравенств получаем оценку сверху $\mathcal{K}$ -функционала произвольного элемента $p_n \in \mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{K}_m(p_n; t^m)_{q,R} \leq \min \{\|p_n\|_{q,R}, t^m \|p_n^{(m)}\|_{q,R}\}. \quad (2.8)$$

Рассмотрим функцию $f_1(z) = z^n$ ($n \geq r + m$). Поскольку $f_1^{(r+m)}(z) = \alpha_{n,r+m} z^{n-(r+m)}$ и $\alpha_{n,r+m} := n(n-1) \dots (n-m+1) \cdot (n-m)(n-m-1) \dots [n-(r+m)+1] = \alpha_{n,m} \alpha_{n-m,r} \leq \alpha_{n,m} \alpha_{n,r}$, то в силу неравенств (2.8) и (1.2) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m\left(f_1^{(r)}; \frac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{q,R} &\leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} \|f_1^{(r+m)}\|_{q,R} = \frac{1}{\alpha_{n,m}} \alpha_{n,r+m} \|z^{n-(r+m)}\|_{q,R} \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,m}} \alpha_{n,m} \alpha_{n-m,r} R^{n-(r+m)} \leq \alpha_{n,r} R^{n-r}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используя (2.9) и равенство $E_{n-1}(f_1)_{q,\rho} = \rho^n$, получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} &\sup_{f \in H_{q,R}^{(r)}} \frac{(R^{n-r}/\rho^n) \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{q,\rho}}{\mathcal{K}_m(f^{(r)}; \alpha_{n,m}^{-1})_{q,R}} \\ &\geq \frac{(R^{n-r}/\rho^n) \alpha_{n,r} E_{n-1}(f_1)_{q,\rho}}{\mathcal{K}_m(f_1^{(r)}; \alpha_{n,m}^{-1})_{q,R}} \geq \frac{(R^{n-r}/\rho^n) \alpha_{n,r} \rho^n}{R^{n-r} \alpha_{n,r}} = 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как $f_1 \in H_{q,R}^{(r)}$ и $f_1 \notin \mathcal{P}_r$, то на основании неравенств (2.7) и (2.10) получаем требуемое равенство (2.2).

Теорема 3 доказана.

3. Точные значения бернштейновского и колмогоровского n -поперечников класса $W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ в пространстве $H_{q,\rho}$

Пусть S — единичный шар в пространстве $H_{q,\rho}$, $L_n \subset H_{q,\rho}$ — n -мерное подпространство, $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $H_{q,\rho}$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, H_{q,\rho}) := \sup\{\sup\{\varepsilon > 0; \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : L_{n+1} \subset H_{q,\rho}\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, H_{q,\rho}) := \inf\{\sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_{q,\rho} : \varphi \in L_n\} : f \in H_{q,\rho}\}\}$$

называют соответственно бернштейновскими и колмогоровскими n -поперечниками подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве $H_{q,\rho}$. Между этими n -поперечниками выполняется соотношение (см., например, [5; 11]):

$$b_n(\mathfrak{M}, H_{q,\rho}) \leq d_n(\mathfrak{M}, H_{q,\rho}). \quad (3.1)$$

Всюду далее для $\mathfrak{M} \subset H_{q,\rho}$ полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{q,\rho} = \sup\{E_{n-1}(f)_{q,\rho} : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Следуя [12, с. 25], неубывающую на $[0, \infty)$ функцию Φ назовем мажорантой, если $\Phi(t)/t$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Через $W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$) обозначим класс функций $f \in H_{q,R}^{(r)}$, у которых r -ые производные $f^{(r)}$ удовлетворяют ограничению

$$\mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m)_{q,R} \leq \Phi(t^m) \text{ для любого } t \in (0, 1].$$

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть Φ — мажоранта, определяющая класс функций $W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ такого, что $n \geq r + m$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} b_n(W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), H_{q,\rho}) &= d_n(W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), H_{q,\rho}) \\ &= E_{n-1}(W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi))_{q,\rho} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательство. Пользуясь неравенством (2.6), определением класса $W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, а также соотношением (3.1) запишем оценку сверху

$$\begin{aligned} b_n(W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), H_{q,\rho}) &\leq d_n(W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), H_{q,\rho}) \\ &\leq E_{n-1}(W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi))_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу, в силу (3.1) достаточно оценить снизу бернштейновский n -поперечник класса $W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ в пространстве $H_{q,\rho}$. С этой целью во множестве $\mathcal{P}_n \cap H_{q,\rho}$ рассмотрим шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) \right\}$$

и докажем включение $S_{n+1} \subset W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$. Заметим, что из результата теоремы 2 следует, что если $n \geq r + m$, то для любого полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ при любом $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$ выполняется неравенство

$$\|p^{(r+m)}\|_{q,\rho} \leq \rho^{n-(r+m)} R^{-n} \alpha_{n,r+m} \|p_n\|_{q,\rho},$$

и, в частности, при $\rho = R$

$$\|p_n^{(r+m)}\|_{q,R} \leq R^{-(r+m)} \alpha_{n,r+m} \|p_n\|_{q,R}. \quad (3.4)$$

Пользуясь тем, что $\alpha_{n,r+m} = \alpha_{n,r} \alpha_{n-r,m}$, неравенство (3.4) запишем в нужном нам виде:

$$\|p_n^{(r+m)}\|_{q,R} \leq R^{-(r+m)} \alpha_{n,r} \alpha_{n-r,m} \|p_n\|_{q,R}. \quad (3.5)$$

В силу определения мажоранты Φ при любых $0 < u_1 \leq u_2 \leq 1$ выполняется соотношение

$$u_2 \Phi(u_1) \geq u_1 \Phi(u_2). \quad (3.6)$$

Пользуясь неравенствами (3.5) и (3.6), покажем справедливость включения $S_{n+1} \subset W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$. Для этого требуется доказать, что для любого $p_n \in S_{n+1}$ при любом $t \in (0, 1]$ выполняется неравенство

$$\mathcal{K}_m(p_n^{(r)}, t^m)_{q,R} \leq \Phi(t^m). \quad (3.7)$$

Пусть сначала $0 < t \leq (1/\alpha_{n,m})$. Тогда, используя неравенства (2.8) и (3.5), для любого $p_n \in S_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(p_n^{(r)}, t^m)_{q,R} &\leq t^m \|p_n^{(r+m)}\|_{q,R} \leq t^m R^{-(r+m)} \alpha_{n,r} \alpha_{n-r,m} \|p_n\|_{q,R} \\ &\leq t^m R^{-(r+m)} \alpha_{n,r} \alpha_{n-r,m} R^r \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) \\ &= t^m R^{-m} \alpha_{n-r,m} \Phi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) \leq t^m \alpha_{n,m} \Phi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) \leq \Phi(t^m). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пусть теперь $(1/\alpha_{n,m}) \leq t \leq 1$. В этом случае, используя (2.8), неравенство типа Бернштейна

$$\|p_n^{(r)}\|_{q,R} \leq R^{-r} \alpha_{n,r} \|p_n\|_{q,R} \quad (1 \leq q \leq \infty, R \geq 1)$$

и учитывая, что функция Φ является неубывающей для произвольной $p_n \in S_{n+1}$, запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(p_n^{(r)}, t^m)_{q,R} &\leq \|p_n^{(r)}\|_{q,R} \leq R^{-r} \alpha_{n,r} \|p_n\|_{q,R} \\ &\leq R^{-r} \alpha_{n,r} R^r \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) \leq \Phi(t^m). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Требуемое неравенство (3.7) следует из (3.8) и (3.9), и таким образом включение $S_{n+1} \subset W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ установлено. Пользуясь определением бернштейновского n -поперечника, запишем оценку снизу

$$b_n(W_{q,R}^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), H_{q,\rho}) \geq b_n(S_{n+1}, H_{q,\rho}) \geq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right). \quad (3.10)$$

Равенство (3.2) получаем из сопоставления неравенств (3.3) и (3.10), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 // Мат. заметки. 2023. Т. 114, № 3. С. 435–446. doi: 10.4213/mzm13422
2. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 258–272. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-258-272
3. Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 283–291. doi: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-283-291

4. **Смирнов В.И., Лебедев Н.А.** Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Л.: Наука, 1964. 438 с.
5. **Pinkus A.** n -Widths by approximation theory. Berlin; Heidelberg: Springer, 1985. 294 p.
6. **Берг Й., Лефстрем Й.** Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980. 264 с.
7. **Вакарчук С.Б.** K -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов из L_2 // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 4. С. 494–499. doi: 10.4213/mzm1192
8. **Вакарчук С.Б.** Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева — Эрмита и поперечники функциональных классов // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 5. С. 666–684. doi: 10.4213/mzm9299
9. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж.** О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 27, № 4. С. 240–256. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-239-254
10. **Шабозов М.Ш., Шабозова А.А., Миркалонова М.М.** Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций суммами Тейлора в пространстве Харди // Докл. НАН Таджикистана. 2023. Т. 66, № 5-6. С. 274–282.
11. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
12. **Шевчук И.А.** Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка, 1992. 224 с.

Поступила 2.09.2024

После доработки 12.11.2024

Принята к публикации 18.11.2024

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Таджикский национальный университет
г. Душанбе, Таджикистан
e-mail: shabozov@mail.ru

Каримзода Равшан Аъзам
соискатель кафедры функционального
анализа и дифференциальных уравнений
Таджикский национальный университет
г. Душанбе, Таджикистан
e-mail: ravshan.karimov.93@mail.ru

REFERENCES

1. Shabozov M.Sh. On the best simultaneous approximation in the Bergman space B_2 . *Math. Notes*, 2023, vol. 114, iss. 3, pp. 377–386. doi: 10.1134/S0001434623090080
2. Shabozov M.Sh., Saidusainov M.S. Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 258–272 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-258-272
3. Shabozov M.Sh. On the best simultaneous approximation of functions in the Hardy space. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 283–291 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-283-291
4. Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Constructive function theory complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1964, 438 p.
5. Pinkus A. *n-widths by approximation theory*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1985, 294 p. doi: 10.1007/978-3-642-69894-1
6. Bergh I., Löfström I. *Interpolation spaces: an introduction*. Berlin, Springer, Softcover reprint of the original 1st ed. 1976 edition, 2011, 217 p. Translated to Russian under the title *Interpolyatsionnyye prostranstva: vvedeniye*, Moscow, Mir Publ., 1980, 264 p.
7. Vakarchuk S.B. K -functionals and exact values of n -widths for several classes from L_2 . *Math. Notes*, 1999, vol. 66, no. 4, pp. 404–408. doi: 10.1007/BF02679087
8. Vakarchuk S.B. Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev—Hermite weight and widths of function classes. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, no. 5, pp. 599–614. doi: 10.1134/S0001434614050046

9. Shabozov M.Sh., Usupov G.A., Zargarov J.J. On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 239–254 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-239-254
10. Shabozov M.Sh., Shabozova A.A., Mirkalonova M.M. Estimation of the remainder Taylor series for some classes of analytic functions with sums Taylor in Hardy space. *Dokl. NAN Tadjikistana*, 2023, vol. 66, no. 5–6, pp. 274–282 (in Russian).
11. Tikhomirov V.M. *Nekotoryye voprosy teorii priblizheniy* [Some questions of approximation theory]. Moscow, MGU Publ., 1976, 304 p.
12. Shevchuk I.A. *Priblizheniye mnogochlenami i sledy nepreryvnykh na otrezke funktsiy* [Approximation by polynomials and traces of continuous on a segment of functions]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1992, 224 p.

Received September 2, 2024

Revised November 12, 2024

Accepted November 18, 2024

Mirgand Shabozovich Shabozov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tajik National University, Dushanbe, 734025 Tajikistan, e-mail: shabozov@mail.ru.

Ravshan Azam Karimzoda, National University, Dushanbe, 734025 Tajikistan, e-mail: ravshan.karimov.93@mail.ru.

Cite this article as: M. Sh. Shabozov, R. A. Karimzoda. $\mathcal{K}$ -Functionals and exact values of n -widths for some classes of functions in the Hardy space. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 301–308.