

УДК 517.51

**ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРОСТРАНСТВ НЕСУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ТИПА ФУРЬЕ
ПО СИСТЕМАМ ИЗ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ**

В. И. Филиппов

В работе представлены исследования разложения элементов пространств $L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, по системам функций, полученным из сжатий и сдвигов одной функции. Разработаны новые алгоритмы разложения по этим системам в ряды типа Фурье с целыми коэффициентами. Разложения элементов указанных пространств предложенными методами обладают свойством сжатия образов, что выражается в обращении в нуль большого числа коэффициентов разложения. Эти результаты могут вызвать интерес у специалистов по передаче и обработке цифровой информации, у исследователей, у которых возникает потребность в разложении несуммируемых функций в ряды по системам из сжатий и сдвигов одной функции.

Ключевые слова: функциональные системы из сжатий и сдвигов одной функции пространства $L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, ряды типа Фурье с целыми коэффициентами, цифровая обработка, передача информации.

V. I. Filippov. Integer expansion of elements from spaces of nonintegrable functions into Fourier-type series in systems of contractions and shifts of one function.

We present results on the expansion of elements of the spaces $L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, into systems of functions that are contractions and shifts of one function. New algorithms are designed for the expansion of functions into Fourier-type series in these systems with integer coefficients. The expansions produced by the proposed methods have the property of image compression, i.e., a large number of expansion coefficients are zeros. The results may be of interest to specialists in the transmission and processing of digital information and to other researchers who have a need to expand nonintegrable functions into series in systems of contractions and shifts of one function.

Keywords: functional systems of contractions and shifts of one function of the space $L_p(0, 1)$ with $0 < p < 1$, Fourier-type series with integer coefficients, digital processing, information transmission.

MSC: 42A16; 42C40, 41A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-286-300

Введение

Рассматриваемые в статье ряды представляют интерес с точки зрения построения алгоритмов для приближений *несуммируемых функций* суммами, элементами которых являются сжатия и сдвиги одной функции, умноженные на целые числа. Такие приближения ранее не исследовались. В частности, не было конкретных алгоритмов приближения несуммируемых функций линейными комбинациями какой-либо системы функций так, чтобы при более точном приближении предыдущие линейные комбинации использовались. В предлагаемых результатах даются алгоритмы, где применяются предыдущие вычисления и всего лишь добавляются новые (добавочные линейные комбинации с последующими элементами используемой системы функций).

В пространствах L_p , $0 < p < 1$, обычная теория рядов Фурье не работает, поскольку в этих пространствах нет даже понятия коэффициентов ряда Фурье. Мы предлагаем математикам, занимающимся в том числе приложениями, результаты целочисленного разложения несуммируемых функций в ряды по системам функций, полученным из сжатий и сдвигов одной функции. При таком разложении коэффициенты возможно вычислить по рекуррентным формулам. Эти алгоритмы можно реализовать на персональных компьютерах.

Данные исследования в какой-то мере являются продолжением работ автора, опубликованных в [1–4]. В статье автора [5] приводится конкретный пример целочисленного разложения функции $f(t) = 1/t$ на интервале $(0, 1)$.

Интерес к системам, состоящим из сжатий и сдвигов одной функции, в пространствах суммируемых функций возник в связи с результатами по всплескам (wavelets) и фреймам. В силу природы пространств L_p , $0 < p < 1$, рассмотренные системы, конечно, переполненные [1], но предложенный алгоритм позволяет получить разложения с большим числом нулевых коэффициентов. Поэтому полученное разложение является в какой-то мере оптимальным при приближении с фиксированной точностью, поскольку малые промежуточные коэффициенты в предложенном методе зануляются. При этом допускается значительная неточность вычисления промежуточных коэффициентов. Предложенный алгоритм корректирует погрешности вычисления коэффициентов.

Возможность равномерного приближения непрерывных функций с любой точностью многочленами с целыми коэффициентами на сегменте вещественной оси изучалась, начиная с 1914 г. В работе [6], в частности, исследовалась аппроксимация нуля тригонометрическими полиномами с целыми коэффициентами на заданном множестве точек. Автор статьи [7] продолжил эти исследования, привел некоторые результаты, полученные ранее различными исследователями (см. список литературы в [7]). В [8], в частности, приводится обзор результатов о приближении суммами сдвигов одной функции, а также о плотности многочленов с целыми коэффициентами в банаховых функциональных пространствах.

Результаты авторов [9; 10] связаны с восстановлением сигналов и приложениями вейвлетов Хаара, в частности и в пространствах L_p , $0 < p < 1$. Для этих приложений важны разреженность и сжатие.

Наилучшая константа в неравенстве Бернштейна для тригонометрических полиномов в пространствах L_p , $0 < p < 1$, получена в работе [11], а неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома исследовалось в [12].

В работе [13] доказано, что в однородном бесконечномерном пространстве функций на аддитивной компактной топологической группе не существует базиса из сдвигов конечного множества функций.

1. Основные результаты

В данной работе будем рассматривать функциональные системы вида

$$\begin{aligned} \{\psi_{k,j}\} &= \frac{1}{2^k} \{\psi(2^k t - j)\} = \{\psi_l\}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad l = 2^k + j, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\psi(t)$ — произвольная ненулевая функция из $L_p(0, 1)$, $2 \leq p < \infty$, продолженная значением “нуль” вне $(0, 1]$.

Основными результатами исследования являются теоремы 1 и 2, сформулированные ниже. Для теоремы 1 зададим функцию ψ в виде

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } t \notin (0, 1]. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $f \in L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, и N — достаточно большое целое положительное, фиксированное число. Достаточно большое мы берем, чтобы оптимизировать вычисления при выполнении конкретной прикладной задачи, т.е. выбор N зависит от потребностей исследователя. Заметим, что всюду ниже (см. [14, с. 45; 15, с. 52–53])

$$\|f\|_p = \int_0^1 |f(t)|^p dt, \quad 0 < p < 1.$$

Представим функцию f в виде $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^N$, где

$$f_k^{N+}(t) = \begin{cases} f(t) - Nk, & \text{если } Nk \leq f(t) < N(k+1), \\ N, & \text{если } f(t) \geq N(k+1), \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (3)$$

и

$$f_k^{N-}(t) = \begin{cases} f(t) + Nk, & \text{если } -N(k+1) \leq f(t) < -Nk, \\ -N, & \text{если } f(t) < -N(k+1), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4)$$

при этом $f_k^N = f_k^{N+} + f_k^{N-}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Заметим, что $\|f - \sum_{k=0}^n f_k^N\|_p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Очевидно, что существует последовательность неотрицательных целых чисел $\{n_r\}$ такая, что

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N \right\|_p &< \frac{1}{2^{r+1}}, \\ \left\| \sum_{i=n_r+1}^{n_{r+1}} f_i^N \right\|_p &= \left\| f - f + \sum_{i=0}^{n_{r+1}} f_i^N - \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N \right\|_p < \frac{1}{2^{r+2}} + \frac{1}{2^{r+1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Построим ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l^* \psi_l = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} g_{k+1,r} &= \left(\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j} \right) - \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j}^* \psi_{k,j}, \quad k \geq 1, \\ g_{0,0} &= \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N, \quad g_{1,0} = g_{0,0} - a_{0,0}^* \psi_{0,0}, \end{aligned}$$

$$a_l^* = a_{2^k+j}^* = a_{k,j}^* = \begin{cases} \left[\frac{2^k}{|\Delta_{k,j}|} \int_{\Delta_{k,j}} g_{k,r} dt \right], & \text{если } \int_{\Delta_{k,j}} g_{k,r} dt \geq 0, \\ \left[\frac{2^k}{|\Delta_{k,j}|} \int_{\Delta_{k,j}} g_{k,r} dt \right] + 1, & \text{если } \int_{\Delta_{k,j}} g_{k,r} dt < 0, \end{cases}$$

$\Delta_{k,j} = (\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k})$, $|\Delta_{k,j}| = \frac{1}{2^k}$, $k \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, и $[a]$ — целая часть числа a .

Заметим, что $g_{k,r} \in L_1(0,1)$ при рассматриваемых k и r . В п. 1 доказательства теоремы 1 будет показано, что при r фиксированном $\|g_{k,r}\|_p \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Индекс r — это счетчик, который показывает нам, когда необходимо добавить новую “порцию” функций f_i^N . В целом же, индекс r зависит от индекса k . Для индекса $k = 0$ возьмем индекс $r = 0$, для индекса $k = 1$ возьмем индекс $r = 0$.

Далее, для каждого последующего $k+1$, $k = 1, 2, \dots$, индекс r остается прежним, если $\|g_{k,r}\|_p \geq \frac{1}{2^{r+1}}$, $r \geq 0$, и индекс r увеличится на 1, если $\|g_{k,r}\|_p < \frac{1}{2^{r+1}}$.

Обозначим через k_{r+1} , $r \geq 0$, первый номер, при котором выполняется неравенство $\|g_{k,r}\|_p < \frac{1}{2^{r+1}}$, а $k_0 = 0$. Обращаем внимание, что $g_{k_{r+1},r+1}$ и $g_{k_{r+1},r}$ при одном и том же k_{r+1} разные и $g_{k_{r+1},r+1} = g_{k_{r+1},r} + \sum_{i=n_r+1}^{n_{r+1}} f_i^N$. Таким образом, $r(k) = r$ при $k_r \leq k \leq k_{r+1} - 1$, если $\|g_{k,r}\|_p \geq \frac{1}{2^{r+1}}$ и $\|g_{k_{r+1},r}\|_p < \frac{1}{2^{r+1}}$. Далее берем $k = k_{r+1} + 1$ и продолжаем вычисления, даже если $\|g_{k_{r+1},r+1}\|_p < \frac{1}{2^{(r+1)+1}}$. Но если $\|g_{k_{r+1},r+1}\|_p < \frac{1}{2^{(r+1)+1}}$, то также можно

взять $k_{r+1} = k_{r+2} = \dots = k_{r+1+m}$, т.е. r будет увеличиваться до тех пор, пока не получим $\|g_{k_{r+m}, r+m}\|_p \geq \frac{1}{2^{(r+1)+m}}$. Здесь получились два алгоритма разложения. *Первый алгоритм* проще для написания компьютерных программ, а *второй* может оказаться в некоторой степени более оптимальным для вычислений, но усложняет написание компьютерной программы. Далее мы продолжим доказательство для *первого алгоритма*.

Объясним детально схему построения ряда (6).

- Берем сумму $\sum_{i=0}^{n_0} f_i^N$.
- Приближаем ее до заданной точности суммой $\sum_{i=0}^{k_1-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}$ и тем самым имеем $\|g_{k_1,0}\|_p < \frac{1}{2}$; здесь $r = 0$.

Чтобы знать, что такие неравенства возможны, мы в общем случае для произвольного фиксированного r доказываем в п. 1 теоремы 1, что $\|g_{k,r}\|_p \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ (это соотношение в п. 2 теоремы 2 доказывается другим способом).

Итак,

$$g_{k_1,0} = \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N - \sum_{i=0}^{k_1-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j},$$

- при $1 \leq k \leq k_1 - 1$ коэффициенты ряда (6) $a_{k,j}^* = a_{k,j}^*(g_{k,0})$, $r = 0$, вычисляются от функции $g_{k,0}$, например,
- если $k_1 \geq 3$, то $\|g_{k_1-1,0}\|_p \geq \frac{1}{2}$ и $\|g_{k_1,0}\|_p < \frac{1}{2}$;
- при $k_1 \leq k \leq k_2 - 1$ коэффициенты ряда (6) $a_{k,j}^* = a_{k,j}^*(g_{k,1})$, $r = 1$, вычисляются от функции $g_{k,1}$ и т.д.;

... коэффициенты ряда (6) $a_{k,j}^* = a_{k,j}^*(g_{k,r})$ вычисляются от функции $g_{k,r}$,

$$g_{k_1,1} = \left(\sum_{i=0}^{n_0} f_i^N + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} f_i^N \right) - \sum_{i=0}^{k_1-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j},$$

$$g_{k_2,1} = \left(\sum_{i=0}^{n_0} f_i^N + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} f_i^N \right) - \sum_{i=0}^{k_2-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}, \quad \|g_{k_2,1}\|_p < \frac{1}{2^2},$$

$$g_{k_2,2} = \left(\sum_{i=0}^{n_1} f_i^N + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} f_i^N \right) - \sum_{i=0}^{k_2-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}$$

и т.д.

В доказательстве теоремы 1 предложены конкретные алгоритмы разложения несуммируемой функции в ряд с целыми коэффициентами по системе из сжатий и сдвигов одной функции.

Теорема 1. Пусть задана произвольная функция $f \in L_p(0,1)$, $0 < p < 1$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) ряд (6) по системе (1) с образующей функцией ψ , как в (2), сходится по квазинорме пространства $L_p(0,1)$, $0 < p < 1$, к $f(x)$ по некоторой (конструктивно определяемой) подпоследовательности частичных сумм;

2) существует ряд (рекуррентно конструируемый) $\sum_{l=1}^{\infty} c_l^* \psi_l$, где $c_l^* \in \mathbb{Z}$, по системе (1) с образующей функцией ψ , как в (2), который сходится по квазинорме пространства $L_p(0,1)$, $0 < p < 1$, к $f(x)$, т.е. $\|f - \sum_{l=1}^m c_l^* \psi_l\|_p \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Выражение “ряд сходится ... к $f(x)$ по некоторой подпоследовательности частичных сумм” означает, что существует некоторая подпоследовательность последовательности частичных сумм данного ряда, которая сходится ... к $f(x)$.

Пусть $\chi_\Delta(t)$ — характеристическая функция множества Δ .

Лемма 1. Для любой ступенчатой функции вида

$$R(t) = \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j} \chi_{\Delta_{k,j}}(t),$$

где $a_{k,j} \in \mathbb{R}$, $\Delta_{k,j} = (\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, и суммы вида

$$P(t) = \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j}^* \psi_{k,j},$$

где ψ , как в (2), и

$$a_{k,j}^* = \begin{cases} [2^k a_{k,j}], & \text{если } a_{k,j} \geq 0, \\ [2^k a_{k,j}] + 1, & \text{если } a_{k,j} < 0, \end{cases}$$

выполняются неравенства

$$\|R(t) - P(t)\|_p \leq \frac{1}{2^{kp}}, \quad 0 < p < 1,$$

$$\left\| \sum_{j=0}^m a_{k,j}^* \psi_{k,j}(t) \right\|_p \leq \|R(t)\|_p + \frac{1}{2^{kp}}, \quad 0 \leq m \leq 2^k - 1.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j} \chi_{\Delta_{k,j}}(t) - \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j}^* \psi_{k,j}(t) \right\|_p &= \left\| \sum_{j=0}^{2^k-1} \left(a_{k,j} - \frac{1}{2^k} a_{k,j}^* \right) \chi_{\Delta_{k,j}}(t) \right\|_p \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^k} (2^k a_{k,j} - a_{k,j}^*) \chi_{\Delta_{k,j}}(t) \right\|_p \leq \frac{1}{2^{kp}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^m a_{k,j}^* \psi_{k,j}(t) \right\|_p &\leq \left\| \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j}^* \psi_{k,j}(t) \right\|_p \\ &\leq \|R(t) - P(t)\|_p + \|R(t)\|_p \leq \|R(t)\|_p + \frac{1}{2^{kp}}, \quad 0 \leq m \leq 2^k - 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Построим рекуррентно: последовательность функций $g_{k,r}$, $k \geq 0$, где r зависит от k ; последовательность ступенчатых функций $S_k(g_{k,r}, t)$, $k \geq 0$, определение оператора S_k будет дано ниже; последовательность линейных комбинаций $\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j}^* \psi_{k,j}(t)$, $k \geq 0$, так, что справедливы соотношения

$$g_{k+1,r} = \left(\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j} \right) - \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j}^* \psi_{k,j}, \quad k \geq 1. \quad (7)$$

Здесь $g_{0,0} = \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N$, $g_{1,0} = g_{0,0} - a_{0,0}^* \psi_{0,0}$; далее коэффициенты $a_{k,j}^*$ определяются, как в (6). Пусть теперь

$$S_k(\xi) = S_k(\xi, t) = \sum_{l=0}^{2^k-1} p_{k,l} \chi_{\Delta_{k,l}}(t), \quad p_{k,l} = \frac{1}{|\Delta_{k,l}|} \int_{\Delta_{k,l}} \xi(t) dt,$$

$$\xi(t) \in L_q(0, 1), \quad 1 \leq q < \infty, \quad k \geq 0, \quad l = 0, 1, \dots, 2^k - 1.$$

1. Зафиксируем индекс r (в данной ситуации к функциям $g_{k,r}$ не будут добавляться функции f_i^N , а приближается с требуемой точностью только функция $\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N$).

Пусть $r = 0$, тогда $g_0 = g_{0,0} = \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N$; очевидно, что $g_0 \in L_1(0, 1)$. В этом случае соотношение (7) будет иметь вид

$$g_{k+1} = g_k - \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j}^* \psi_{k,j}, \quad k \geq 0,$$

где g_{k+1} , $k \geq 0$, не зависят от r , $a_{k,j}^*$ вычисляются, как для ряда (6), но от функции g_k . Из сходимости $\|g_{k+1}\|_p \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ (доказательство см. ниже) следует, что найдется k_1 такое, что $\|g_{k_1,0}\|_p < \frac{1}{2}$.

Пусть $r \geq 1$, тогда $g_{k_r} = g_{k_r,r} = (\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \sum_{i=0}^{k_r-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j})$ и, следовательно, $g_{k_r} \in L_1(0, 1)$. Тогда соотношение (7) будет иметь вид

$$g_{k+1} = g_k - \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{k,j}^* \psi_{k,j}, \quad k \geq k_r,$$

где g_{k+1} , $k \geq k_r$, не зависят от r , коэффициенты $a_{k,j}^*$, $k \geq k_r$, вычисляются, как для ряда (6), но от функции g_k .

В статье [4] (формула (6)) доказано, что $\|g_{k+1}\|_q \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, но для $q \geq 1$. Докажем нужные нам неравенства для пространств L_p , $0 < p < 1$, используя идеи работы [4].

Покажем, что $\|g_{k+1}\|_p \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и тем самым найдется k_{r+1} такое, что $\|g_{k_{r+1}}\|_p < \frac{1}{2^{r+1}}$. Для функции $\xi(t) = g_{k,r}(t)$ имеем

$$S_k(g_{k,r}, t) = \sum_{l=0}^{2^k-1} a_{k,l} \chi_{\Delta_{k,l}}(t) = \sum_{l=0}^{2^k-1} 2^k a_{k,l} \psi_{k,l}(t).$$

Пусть

$$S_k^*(g_{k,r}) = S_k^*(g_{k,r}, t) = \sum_{l=0}^{2^k-1} a_{k,l}^* \psi_{k,l}(t).$$

Из леммы 1 получим

$$\left\| S_k(g_{k,r}) - S_k^*(g_{k,r}) \right\|_p = \left\| \sum_{l=0}^{2^k-1} (2^k a_{k,l} - a_{k,l}^*) \psi_{k,l}(t) \right\|_p \leq \frac{1}{2^{kp}}.$$

Следовательно,

$$\left\| g_{k+1,r} \right\|_p \leq \left\| g_{k,r} - S_k(g_{k,r}) \right\|_p + \left\| S_k(g_{k,r}, t) - \sum_{l=0}^{2^k-1} a_{k,l}^* \psi_{k,l}(t) \right\|_p \leq \left\| g_{k,r} - S_k(g_{k,r}) \right\|_p + \frac{1}{2^{kp}}, \quad (8)$$

$$S_k(g_{k,r}, t) = S_k\left(\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}, t\right) = S_k\left(\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N, t\right) - S_k\left(\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}, t\right).$$

Так как в равенстве, приведенном ниже, справа и слева ступенчатые функции, то существуют такие $c_{k,l}$, что

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}(t) = \sum_{l=0}^{2^k-1} c_{k,l} \psi_{k,l}(t).$$

Поэтому

$$S_k\left(\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}, t\right) = S_k\left(\sum_{l=0}^{2^k-1} c_{k,l} \psi_{k,l}, t\right) = \sum_{l=0}^{2^k-1} c_{k,l} \psi_{k,l}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}(t).$$

Следовательно, используя (8), ([16], теорема 11, с. 384) и неравенство Гельдера, получим (при $k-1 > k_r$)

$$\begin{aligned} \|g_{k-1,r} - S_{k-1}(g_{k-1,r}, t)\|_p &= \left\| \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}(t) - S_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}, t\right) \right\|_p \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - S_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N, t\right) + S_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}, t\right) - \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}(t) \right\|_p \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - S_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N, t\right) \right\|_p \leq \left\| \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - S_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N, t\right) \right\|_1^p \leq (c_1)^p \omega_1^p\left(\frac{1}{2^{k-1}}, \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N\right), \quad (9) \end{aligned}$$

где $\omega_1\left(\frac{1}{2^k}, f\right)$ — интегральный модуль непрерывности функции $f \in L_1(0,1)$ с шагом $\frac{1}{2^k}$, а c_1 — некоторая фиксированная константа.

Таким образом, из (8) и (9) (при фиксированном r) получим

$$\|g_{k,r}\|_p \leq \frac{1}{2^{p(k-1)}} + (c_1)^p \omega_1^p\left(\frac{1}{2^{k-1}}, \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N\right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Напомним, что k_{r+1} — это первый номер, при котором выполняется неравенство $\|g_{k,r}\|_p < \frac{1}{2^{r+1}}$ (при фиксированном r), что следует из (10).

2. Покажем, что построенный ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l^* \psi_l(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}(t)$$

сходится к f в L_p , $0 < p < 1$, по подпоследовательности частичных сумм

$$S_{m_r}(t) = \sum_{l=1}^{m_r} a_l^* \psi_l(t) = \sum_{i=0}^{k_{r+1}-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j}(t)$$

данного ряда. Воспользовавшись соотношениями (5) и (10), получим

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N + \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \left(\sum_{i=0}^{k_{r+1}-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j} \right) \right\|_p \leq \frac{1}{2^{r+1}} + \|g_{k_{r+1},r}\|_p \leq \frac{1}{2^r} \rightarrow 0, \quad k_{r+1} \rightarrow \infty.$$

Итак, утверждение 1 теоремы 1 доказано.

3. Докажем теперь утверждение 2 теоремы 1. Пусть для простоты записи $P1 = k_{r+1} - 1$. Если $a_{i,j}^*$ — коэффициенты ряда (6), то из определения системы функций (1) и (2) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=(k_r-1)+1}^{k_{r+1}-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j} &= \sum_{i=k_r}^{P1} \sum_{j=0}^{2^i-1} 2^{-i} a_{i,j}^* \chi_{\Delta_{i,j}} \\ &= \sum_{j=0}^{2^{P1}-1} c_{P1,j}^* \psi_{P1,j} = \sum_{j=0}^{2^{P1}-1} 2^{-P1} c_{P1,j}^* \chi_{\Delta_{P1,j}}, \quad r \geq 0, \quad c_{0,0}^* = a_{0,0}^*. \end{aligned}$$

Сравнивая правые части равенств выше, для $t \in \Delta_{P1,j}$ получим, что

$$\begin{aligned} 2^{-P1} c_{P1,j}^* \chi_{\Delta_{P1,j}}(t) &= 2^{-P1} a_{P1,j}^* \chi_{\Delta_{P1,j}}(t) + 2^{-P1} 2 a_{P1-1, [\frac{j}{2}]}^* \chi_{\Delta_{P1-1, [\frac{j}{2}]}}(t) \\ &+ \dots + 2^{-P1} 2^{(k_{r+1}-k_r)} a_{k_r, [\frac{j}{2^{(k_{r+1}-k_r)}}]}^* \chi_{\Delta_{k_r, [\frac{j}{2^{(k_{r+1}-k_r)}}]}}(t), \quad t \in \Delta_{P1,j}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$c_{P1,j}^* = a_{P1,j}^* + 2 a_{P1-1, [\frac{j}{2}]}^* + \dots + 2^{(k_{r+1}-k_r)} a_{k_r, [\frac{j}{2^{(k_{r+1}-k_r)}}]}^*, \quad j = 0, 1, \dots, 2^{P1} - 1.$$

Очевидно, что $c_{P1,j}^* \in \mathbb{Z}$. Покажем, что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{k_r-1}-1} c_{k_r-1,j}^* \psi_{k_r-1,j}, \quad k_0 - 1 = 0,$$

сходится к той же функции f , к которой сходится подпоследовательность частичных сумм ряда (6). Пусть $n > 0$ — какой-либо большой номер; определим индекс $k_r - 1 \geq 2$ так, что $0 \leq j_0 \leq 2^{k_r-1} - 1$, этому номеру k_r соответствует индекс $r - 1$ и

$$\sum_{l=1}^n c_l^* \psi_l(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{2^{k_i-1}-1} c_{k_i-1,j}^* \psi_{k_i-1,j}(t) + \sum_{j=0}^{j_0} c_{k_r-1,j}^* \psi_{k_r-1,j}(t).$$

Воспользовавшись соотношениями (5), (10) и тем, что

$$\|g_{k_r, r-1}\|_p < \frac{1}{2^r}, \quad \|g_{k_r, r}\|_p < \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^{r-1}} < \frac{1}{2^{r-2}},$$

$$\sum_{i=0}^{k_{r-1}-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j} = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{2^{k_i-1}-1} c_{k_i-1,j}^* \psi_{k_i-1,j},$$

$$g_{k_r, r} - g_{k_{r-1}, r-1} = - \sum_{i=k_{r-1}-1}^{k_r-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} a_{i,j}^* \psi_{i,j} + \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} f_i^N = - \sum_{j=0}^{2^{k_r-1}-1} c_{k_r-1,j}^* \psi_{k_r-1,j} + \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} f_i^N,$$

получим

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N + \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \left(\sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{2^{k_i-1}-1} c_{k_i-1,j}^* \psi_{k_i-1,j} + \sum_{j=0}^{j_0} c_{k_r-1,j}^* \psi_{k_r-1,j} \right) \right\|_p \\ \leq \frac{1}{2^{r+1}} + \|g_{k_{r-1}, r-1}\|_p + \left\| \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} f_i^N \right\|_p + \left\| \sum_{j=0}^{j_0} c_{k_r-1,j}^* \psi_{k_r-1,j} \right\|_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2^{r+1}} + \|g_{k_{r-1}, r-1}\|_p + \frac{1}{2^{r-1}} + \left\| \sum_{j=0}^{2^{k_r-1}-1} c_{k_r-1, j}^* \psi_{k_r-1, j} - \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} f_i^N + \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} f_i^N \right\|_p \\
&\leq \frac{1}{2^{r-2}} + \|g_{k_{r-1}, r-1}\|_p + \|g_{k_r, r} - g_{k_{r-1}, r-1}\|_p + \left\| \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} f_i^N \right\|_p \\
&\leq \frac{1}{2^{r-2}} + \frac{1}{2^{r-3}} + \frac{1}{2^{r-2}} + \frac{1}{2^{r-1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Теорема 1 полностью доказана. $\square$

Может быть, также интересно следующее разложение не интегрируемой в смысле Лебега функции на интегрируемые в смысле Лебега функции. Пусть $f \in L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$. Пусть $E \subset [0, 1]$ — множество таких точек, что если $x_0 \in E$, то $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$ и в любой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ не интегрируема. Будем говорить, что функция $f(x)$ обладает свойством J, если множество E можно покрыть конечным числом непересекающихся интервалов, общая сумма длин которых будет сколь угодно малой. В этой связи разобьем отрезок $[0, 1]$ двоично рациональными точками сначала на две части $[0, \frac{1}{2})$ и $[\frac{1}{2}, 1]$, затем на четыре $[0, \frac{1}{4}), \dots, [\frac{3}{4}, 1]$ и т. д. Легко проверить, на каком из этих сегментов функция $f(x)$ интегрируема.

Если, например, на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$ она интегрируема, а на сегменте $(\frac{1}{2}, 1]$ функция $f(x)$ не интегрируема, то определим функцию $f_1(x)$ равной функции $f(x)$ на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$ и равной нулю на остальном множестве. Поступаем таким же образом для следующей пачки сегментов и т. д. Если каждому индексу i функции f_i поставим в соответствие длину сегмента, на котором f_i берется равной f , то сумма длин этих непересекающихся сегментов до номера i будет стремиться к 1 при $i \rightarrow \infty$. Получаем, что $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ почти всюду и $\|f\|_p = \|\sum_{i=1}^{\infty} f_i\|_p = \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_p$, $0 < p < 1$. Следовательно, существует последовательность номеров $n_r \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, такая, что

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^{n_r} f_i(x) \right\|_p < \frac{1}{2^{r+1}}. \quad (11)$$

При этом каждая из функций f_i суммируема. Применительно к такому разложению несуммируемой функции получаем следствие 1.

Так же, как в доказательстве теоремы 1, для следствия 1 предложены конкретные алгоритмы разложения несуммируемой функции в ряд с целыми коэффициентами по системе из сжатий и сдвигов одной функции.

Следствие 1. Пусть задана произвольная функция $f \in L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, которая обладает свойством J. Тогда ряд (6) (где вместо ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^N$ используется ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$) по системе (1) с образующей функцией ψ , как в (2), сходится по квазинорме пространства $L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, к $f(x)$ по некоторой (конструктивно определяемой) подпоследовательности частичных сумм, и существует ряд (рекуррентно конструируемый) $\sum_{l=1}^{\infty} c_l^* \psi_l$, где $c_l^* \in \mathbb{Z}$, по системе (1) с образующей функцией ψ , как в (2), который сходится по квазинорме пространства $L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, к $f(x)$, т. е. $\|f - \sum_{l=1}^m c_l^* \psi_l\|_p \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Доказательство этого следствия полностью повторяет доказательство теоремы 1, где вместо сумм $\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N$ рассматриваются суммы $\sum_{i=1}^{n_r} f_i$, а $g_{0,0} = \sum_{i=1}^{n_0} f_i$, $g_{1,0} = g_{0,0} - a_{0,0}^* \psi_{0,0}$ и вместо (5) используется (11). $\square$

Рассмотрим более общий случай для функции ψ . Приведем леммы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 2 [1, лемма 1 при условии (b) теоремы 1]. Пусть $0 < p < 1$ и $0 \neq \psi \in L_2(0, 1)$. Тогда существует константа $\lambda_0 \neq 0$ такая, что

$$\|1 - \lambda_0 \psi(t)\|_p = \sigma_0 < 1. \quad (12)$$

Лемма 3 [1, лемма 2]. Пусть $0 < p < 1$, функция $0 \neq \psi \in L_2(0, 1)$ и $\psi(t) = 0$ при $t \notin (0, 1]$. Зафиксируем число $\sigma \in (\max\{\frac{1}{2^p}, \sigma_0\}; 1)$. Тогда для любой ступенчатой функции $S(t) = \sum_{l=0}^{2^k-1} d_{k,l} \chi_{\Delta_{k,l}}(t)$ существует конечная сумма $h(t) = \sum_{l=0}^{2^k-1} d_{k,l} 2^k \lambda_0 \psi_{k,l}(t)$ (заметим, что $\psi_{k,l}(t)$, как в (1)) такая, что выполняются неравенства

$$\|S(t) - h(t)\|_p \leq \sigma \|S(t)\|_p \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{l=0}^m d_{k,l} 2^k \lambda_0 \psi_{k,l}(t) \right\|_p \leq (1 + \sigma) \|S(t)\|_p, \quad 0 \leq m \leq 2^k - 1.$$

Пусть теперь $0 \neq \psi \in L_2(0, 1)$ и $\psi(t) = 0$, $t \notin (0, 1]$,

$$\{\psi_{n,k}\} = \frac{\lambda_0}{2^n} \{\psi(2^n t - k)\} = \{\psi_l\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad l = 2^n + k, \quad (13)$$

где λ_0 удовлетворяет условию (12).

В доказательстве теоремы 2 дан алгоритм построения ряда по системе (13), который можно реализовать на компьютере; этот алгоритм отличается от алгоритмов, представленных в теореме 1.

Теорема 2. Для любой функции $f \in L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, существует ряд (конструктивно определяемый) $\sum_{l=1}^{\infty} a_l^* \psi_l(t)$ по системе (13), где $a_l^* \in \mathbb{Z}$, который сходится по квазинорме пространства $L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, к $f(t)$, т. е. $\|f - \sum_{l=1}^m a_l^* \psi_l(t)\|_p \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Доказательство. 1. Пусть $f \in L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$. Представим функцию f в виде $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^N$, где f_k^N определяются соотношениями (3) и (4). Построим рекуррентно последовательность ступенчатых функций $R_k(t)$, $k \geq 1$, номеров $p_k \geq k + 1$, $p_1 \geq 4$, функций $g_{k,r}$, $k \geq 1$, где r зависит от k , и линейных комбинаций $\sum_{j=0}^{2^{p_k}-1} a_{p_k,j}^* \psi_{p_k,j}(t)$, $k \geq 1$, так, что справедливы соотношения

$$g_{k,r} = \left(\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j} \right) - \sum_{j=0}^{2^{p_k}-1} a_{p_k,j}^* \psi_{p_k,j}, \quad k \geq 2,$$

$$g_{0,0} = \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N, \quad \text{где } n_0 \geq 0, \quad g_{1,0} = \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N - \sum_{j=0}^{2^{p_1}-1} a_{p_1,j}^* \psi_{p_1,j},$$

$$R_k(t) = \sum_{l=0}^{2^{p_k}-1} a_{p_k,l} \chi_{\Delta_{p_k,l}}(t), \quad \Delta_{p_k,l} = \left(\frac{l}{2^{p_k}}, \frac{l+1}{2^{p_k}} \right), \quad k \geq 1,$$

$$a_{p_k,l} = \frac{1}{|\Delta_{p_k,l}|} \int_{\Delta_{p_k,l}} g_{k-1,r} dt, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{p_k} - 1,$$

$$a_{p_k,l}^* = \begin{cases} [2^{p_k} a_{p_k,l}], & \text{если } a_{p_k,l} \geq 0, \\ [2^{p_k} a_{p_k,l}] + 1, & \text{если } a_{p_k,l} < 0, \end{cases}$$

$$\|g_{k-1,r} - R_k(t)\|_p < \frac{1}{2^{k+2}}. \quad (14)$$

Заметим, что $g_{k-1,r} \in L_1(0, 1)$, и будем определять p_k так, чтобы выполнялось соотношение (14). Ниже, в п. 2, мы покажем, что при фиксированном r выражение $\|g_{k,r}\|_p \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Как и в теореме 1, индекс r — это счетчик, который показывает, когда необходимо добавить новую “порцию” функций f_i^N . Индекс r зависит от индекса k . Для индекса $k = 0$

возьмем индекс $r = 0$, для индекса $k = 1$ возьмем индекс $r = 0$. Далее, для каждого последующего $k + 1$, $k = 1, 2, \dots$, индекс r остается прежним, если $\|g_{k,r}\|_p \geq \frac{1}{2^{r+1}}$, $r \geq 0$, и индекс r увеличится на 1, если $\|g_{k,r}\|_p < \frac{1}{2^{r+1}}$. Обозначим через k_{r+1} первый номер, при котором выполняется неравенство $\|g_{k,r}\|_p < \frac{1}{2^{r+1}}$. Обращаем внимание, что $g_{k_{r+1},r+1}$ и $g_{k_{r+1},r}$ при одном и том же k_{r+1} разные и $g_{k_{r+1},r+1} = g_{k_{r+1},r} + \sum_{i=n_r+1}^{n_{r+1}} f_i^N$. Таким образом, $r(k) = r$ при $k_r + 1 \leq k \leq k_{r+1}$, если $\|g_{k,r}\|_p \geq \frac{1}{2^{r+1}}$ и $\|g_{k_{r+1},r}\|_p < \frac{1}{2^{r+1}}$. Далее, берем $k = k_{r+1} + 1$ и продолжаем вычисления, даже если $\|g_{k_{r+1},r+1}\|_p < \frac{1}{2^{(r+1)+1}}$. Функцию $R_k(t)$ мы строим для $g_{k-1,r}$, но не для возможного $g_{k-1,r-1}$.

Пусть теперь

$$S_k(\xi, t) = \sum_{l=0}^{2^{p_k}-1} d_{p_k,l} \chi_{\Delta_{p_k,l}}(t), \quad d_{p_k,l} = \frac{1}{|\Delta_{p_k,l}|} \int_{\Delta_{p_k,l}} \xi(t) dt,$$

$$\xi(t) \in L_q(0, 1), \quad 1 \leq q < \infty, \quad k \geq 0, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{p_k} - 1.$$

Заметим, что при $k - 1 = k_r$ ступенчатую функцию $S_k(g_{k-1,r}, t)$ мы строим для $g_{k_r,r}$, но не для $g_{k_r,r-1}$. Следовательно,

$$S_k(g_{k-1,r}, t) = R_k(t) = \sum_{l=0}^{2^{p_k}-1} a_{p_k,l} \chi_{\Delta_{p_k,l}}(t).$$

Пусть

$$S_k^*(g_{k-1,r}, t) = \sum_{l=0}^{2^{p_k}-1} a_{p_k,l}^* \psi_{p_k,l}(t), \quad R_k^*(t) = \sum_{l=0}^{2^{p_k}-1} \frac{1}{2^{p_k}} a_{p_k,l}^* \chi_{\Delta_{p_k,l}}(t).$$

Из леммы 3 получим

$$\|R_k^*(t) - S_k^*(g_{k-1,r}, t)\|_p < \sigma \|R_k^*(t)\|_p \quad (15)$$

и

$$\left\| \sum_{l=0}^m a_{p_k,l}^* \psi_{p_k,l}(t) \right\|_p \leq (1 + \sigma) \|R_k^*(t)\|_p, \quad 0 \leq m \leq 2^{p_k} - 1.$$

Объясним детально схему построения ряда

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l^* \psi_l(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j}(t). \quad (16)$$

- Возьмем сумму $g_{0,0} = \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N$.
- Для $k = 1$ находим такое p_1 , чтобы для $R_1(t) = S_1(g_{0,0}, t)$ выполнялось неравенство (14).
- Строим сумму $\sum_{l=0}^{2^{p_1}-1} a_{p_1,l}^* \psi_{p_1,l}(t)$ и проверяем выполнение неравенства $\|g_{1,0}\|_p < \frac{1}{2^{0+1}}$.
- Продолжаем этот процесс, находим k_1 такое, чтобы $\|g_{k_1,0}\|_p < \frac{1}{2^{0+1}}$; здесь $r = 0$.

Чтобы знать, что такие неравенства возможны, мы в общем случае для произвольного фиксированного r показываем в п. 2 доказательства, что $\|g_{k,r}\|_p \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Итак,

$$g_{k_1,0} = \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N - \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j},$$

- при $1 \leq k \leq k_1$ коэффициенты ряда (16) $a_{p_k,j}^* = a_{p_k,j}^*(g_{k-1,0})$, $r = 0$, вычисляются от функции $g_{k-1,0}$,
если например, $k_1 \geq 3$, то $\|g_{k_1-1,0}\|_p \geq \frac{1}{2}$ и $\|g_{k_1,0}\|_p < \frac{1}{2}$,
- при $k_1 + 1 \leq k \leq k_2$ коэффициенты ряда (16) $a_{p_k,j}^* = a_{p_k,j}^*(g_{k-1,1})$, $r = 1$, вычисляются от функции $g_{k-1,1}$ и т. д.;
- при $k_r + 1 \leq k \leq k_{r+1}$ коэффициенты ряда (16) $a_{p_k,j}^* = a_{p_k,j}^*(g_{k-1,r})$ вычисляются от функции $g_{k-1,r}$,

$$g_{k_1,1} = \left(\sum_{i=0}^{n_0} f_i^N + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} f_i^N \right) - \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j},$$

$$g_{k_2,1} = \left(\sum_{i=0}^{n_0} f_i^N + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} f_i^N \right) - \sum_{i=1}^{k_2} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j}, \quad \|g_{k_2,1}\|_p < \frac{1}{2^2},$$

$$g_{k_2,2} = \left(\sum_{i=0}^{n_1} f_i^N + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} f_i^N \right) - \sum_{i=1}^{k_2} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j}$$

и т. д.

Убедимся, что построенный ряд (16) сходится к функции f по метрике пространства L_p , $0 < p < 1$. Рассмотрим какое-либо большое $n > 0$ и определим индекс $k \geq 2$ так, что $0 \leq j_0 \leq 2^{p_k} - 1$, $k \geq 2$; данному индексу k соответствует индекс r и

$$\sum_{l=1}^n a_l^* \psi_l(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j}(t) + \sum_{j=0}^{j_0} a_{p_k,j}^* \psi_{p_k,j}(t).$$

Обратим внимание, что при нумерации всех элементов системы (13) для некоторых номеров l коэффициенты a_l^* берем равными нулю.

Используя леммы 1, 3 и неравенство (14), получим

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N + \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j}(t) + \sum_{j=0}^{j_0} a_{p_k,j}^* \psi_{p_k,j}(t) \right) \right\|_p \\ & \leq \frac{1}{2^{r+1}} + \|g_{k-1,r}\|_p + \left\| \sum_{j=0}^{j_0} a_{p_k,j}^* \psi_{p_k,j}(t) \right\|_p \leq \frac{1}{2^{r+1}} + \|g_{k-1,r}\|_p \\ & + 2 \|R_k^*(t)\|_p \leq \frac{1}{2^{r+1}} + \|g_{k-1,r}\|_p + 2 \|R_k^*(t) - R_k(t)\|_p + 2 \|R_k(t)\|_p \\ & \leq \frac{1}{2^{r+1}} + \|g_{k-1,r}\|_p + \frac{2}{2^{p_k p}} + 2 \|g_{k-1,r} - R_k(t)\|_p + 2 \|g_{k-1,r}\|_p \\ & \leq 3 \|g_{k-1,r}\|_p + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{2}{2^{p_k p}} + \frac{1}{2^{r+1}}. \end{aligned}$$

2. В этом пункте наша цель — показать, что при фиксированном r (роль фиксации r такая же, как в доказательстве теоремы 1) $\|g_{k,r}\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Используя леммы 1, 3, неравенства (14) и (15), получим при $k > k_r$ (при фиксированном r)

$$\begin{aligned} \|g_{k,r}\|_p & \leq \|g_{k-1,r} - R_k^*(t)\|_p + \|R_k^*(t) - S_k^*(g_{k-1,r}, t)\|_p \\ & \leq \|g_{k-1,r} - R_k(t)\|_p + \|R_k^*(t) - R_k(t)\|_p + \sigma \|R_k^*(t)\|_p \\ & \leq \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{p(k+1)}} + \sigma \|R_k^*(t) - R_k(t)\|_p + \sigma \|R_k(t)\|_p \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{p(k+1)}} + \frac{\sigma}{2^{p(k+1)}} + \sigma \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \|g_{k-1,r}\|_p \right) \leq \frac{4}{2^{p(k+1)}} + \sigma \|g_{k-1,r}\|_p. \quad (17)$$

Таким образом, при фиксированном r из (17) и условия для σ из леммы 3 получаем при $k > k_r$ (в этом случае k должно выбираться все больше и больше)

$$\begin{aligned} \|g_{k,r}\|_p &\leq \frac{4}{2^{p(k+1)}} + \frac{4\sigma}{2^{pk}} + \dots + \frac{4}{2^{p(k_r+2)}} \sigma^{k-k_r-1} + \sigma^{k-k_r} \left\| \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \sum_{i=1}^{k_r} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j}(t) \right\|_p \\ &\leq 4(k-k_r)\sigma^k + \sigma^{k-k_r} \left\| \sum_{i=0}^{n_r} f_i^N - \sum_{i=1}^{k_r} \sum_{j=0}^{2^{p_i}-1} a_{p_i,j}^* \psi_{p_i,j}(t) \right\|_p \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Мы получили, что при фиксированном r будет выполняться неравенство $\|g_{k,r}\| < \frac{1}{2^{r+1}}$ при некотором $k = k_{r+1}$.

3. Продолжим доказательство сходимости ряда (16). Из (17) и (5) получим для $k = k_r + 1$ (заметим, что ниже используем равенство $g_{k_r,r} = g_{k_r,r-1} + \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} f_i^N$)

$$\begin{aligned} \|g_{k,r}\|_p &\leq \frac{4}{2^{p(k+1)}} + \sigma \|g_{k-1,r}\|_p \\ &\leq \frac{4}{2^{p(k+1)}} + \sigma \left\| g_{k-1,r-1} + \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} f_i^N \right\|_p \leq \frac{4}{2^{p(k+1)}} + \frac{\sigma}{2^{r-1}} + \sigma \|g_{k-1,r-1}\|_p. \end{aligned} \quad (18)$$

Обратим внимание, что в (18) получился “переход” сначала от k к $k-1$, а затем “переход” от r к $r-1$.

Рассмотрим $\|g_{k,r}\|_p$ и будем переходить от номера k к номеру $k-1$, затем к $k-2$ и т.д. Применим (17) для $k \neq k_r$, $r = 0, 1, 2, \dots$, а (18) для $k = k_r$, $r = 0, 1, 2, \dots$. Предположим для определенности, что $k = k_r + l_r$, $l_r \in \mathbb{N}$. Следовательно, из последовательного применения (17), (18), (5) и условия для σ из леммы 3 получаем (заметим, что в предпоследнем неравенстве для удобства мы переставили элементы суммы)

$$\begin{aligned} \|g_{k,r}\|_p &\leq \frac{4}{2^{pk}} + \sigma \|g_{k-1,r}\|_p \leq \frac{4}{2^{pk}} + \frac{4\sigma}{2^{p(k-1)}} + \sigma^2 \|g_{k-2,r}\|_p \\ &\leq \frac{4}{2^{pk}} + \frac{4\sigma}{2^{p(k-1)}} + \dots + \frac{4\sigma^{l_r-1}}{2^{p(k-(l_r-1))}} + \sigma^{l_r} \|g_{k_r,r}\|_p \\ &\leq \frac{4}{2^{pk}} + \frac{4\sigma}{2^{p(k-1)}} + \dots + \frac{4\sigma^{l_r-1}}{2^{p(k-(l_r-1))}} + \sigma^{l_r} \|g_{k_r,r-1}\|_p + \frac{\sigma^{l_r}}{2^{r-1}} \\ &\leq \frac{4}{2^{pk}} + \frac{4\sigma}{2^{p(k-1)}} + \dots + \frac{4\sigma^{l_r-1}}{2^{p(k-(l_r-1))}} + \frac{\sigma^{l_r}}{2^{r-1}} + \frac{4\sigma^{l_r}}{2^{p(k-l_r)}} \\ &\quad + \frac{4\sigma^{l_r+1}}{2^{p(k-(l_r+1))}} + \dots + \frac{4\sigma^{l_r+l_{r-1}-1}}{2^{p(k-(l_r+l_{r-1}-1))}} + \frac{\sigma^{l_r+l_{r-1}}}{2^{r-2}} + \sigma^{l_r+l_{r-1}} \|g_{k_{r-1},r-2}\|_p \\ &\leq \frac{4}{2^{pk}} + \frac{4\sigma}{2^{p(k-1)}} + \dots + \frac{4}{2^p} \sigma^{k-1} + \sigma^k \left\| \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N \right\|_p \\ &\quad + \frac{\sigma^{l_r}}{2^{r-1}} + \frac{\sigma^{l_r+l_{r-1}}}{2^{r-2}} + \frac{\sigma^{l_r+l_{r-1}+l_{r-2}}}{2^{r-3}} + \dots + \sigma^{\sum_{i=1}^r l_i} \leq 4k\sigma^k + r\sigma^r \\ &\quad + \sigma^k \left\| \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N \right\|_p \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $1 \leq l_i \leq k$, $l_{i-1} = k_i - k_{i-1}$, $i = \overline{1, r}$, $l_r = k - k_r$, $k_0 = 0$. Напомним, что $g_{0,0} = \sum_{i=0}^{n_0} f_i^N$.

И, таким образом, $\|f - \sum_{l=1}^n a_l^* \psi_l\|_p \leq 3 \|g_{k-1,r}\|_p + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{2}{2^{pk}} + \frac{1}{2^{r+1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Назовем разложения функций в теоремах 1, 2 *целочисленным разложением* функций из соответствующих пространств.

Для разложений несуммируемых функций, рассмотренных в следствии 1, получено следующее утверждение.

Следствие 2. Для любой функции $f \in L_p(0,1)$, $0 < p < 1$, удовлетворяющей условию J (где $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$), существует ряд (конструктивно определяемый) $\sum_{l=1}^{\infty} a_l^* \psi_l(t)$ по системе (13), где $a_l^* \in \mathbb{Z}$, который сходится по квазинорме пространства $L_p(0,1)$, $0 < p < 1$, к $f(t)$, т. е. $\|f - \sum_{l=1}^m a_l^* \psi_l(t)\|_p \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$

Д о к а з а т е л ь с т в о этого следствия полностью повторяет доказательство теоремы 2, где вместо сумм $\sum_{i=0}^{n_r} f_i^N$ рассматриваются суммы

$$\sum_{i=1}^{n_r} f_i, \quad g_{0,0} = \sum_{i=1}^{n_0} f_i, \quad g_{1,0} = \sum_{i=1}^{n_0} f_i - \sum_{j=0}^{2^{p_1}-1} a_{p_1,j}^* \psi_{p_1,j}$$

и вместо (5) используется (11). □

Отметим, что в доказательстве следствия 2 также дается алгоритм построения ряда по системе (13), который можно реализовать на компьютере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Filippov V.I., Oswald P.** Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory. 1995. Vol. 82, no. 1. P. 15–29.
2. **Филиппов В.И.** Системы представления, полученные из сжатий и сдвигов одной функции в многомерных пространствах E_φ // Изв. РАН. Сер. математическая. 2012. Т. 76, № 6. С. 193–206.
3. **Филиппов В.И.** Об обобщениях системы Хаара и других систем функций в пространствах E_φ // Изв. вузов. Математика. 2018. Т. 62, № 1. С. 87–92.
4. **Филиппов В.И.** Ряды типа Фурье с целыми коэффициентами по системам из сжатий и сдвигов одной функции в пространствах L_p , $p \geq 1$ // Изв. вузов. Математика. 2019. Т. 63, № 6. С. 58–64.
5. **Филиппов В.И.** Алгоритмизация целочисленного разложения элементов пространств L_p , $0 < p < 1$, использование программного обеспечения в виде пакета программ Matlab // Вестн. СГТУ им. Гагарина Ю.А. 2021. Т. 90, № 3. С. 52–61.
6. **Fekete M.** Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Zeitschrift. 1923. Bd. 17. P. 228–249. doi: 10.1007/BF01504345
7. **Альпер С.Я.** О приближении функций многочленами с целыми коэффициентами на замкнутых множествах // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1964. Т. 28, № 5. С. 1173–1186.
8. **Бородин П.А., Шкляев К.С.** Плотность квантованных приближений // Успехи мат. наук. 2023. Т. 78, вып. 5. С. 3–64. doi: 10.4213/rm10115
9. **Benedetto J.J., Njeunje F.O.N.** Haar approximation from within for $L_p(\mathbb{R}^d)$, $0 < p < 1$ // Sampl. Theory Signal Process. Data Anal. 2021. Vol. 19, art. no. 2. 10.1007/s43670-020-00001-z
10. **Benedetto J.J.** Noise reduction in terms of the theory of frames // Wavelet Anal. Appl. Vol. 7. NY: Academic, 1998. P. 259–284. doi: 10.1016/S1874-608X(98)80010-1
11. **Арестов В.В.** О неравенствах Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.
12. **Арестов В.В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 6. С. 10–26.
13. **Голубов Б.И.** О существовании базисов из сдвигов функций в однородных пространствах // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2008. vol. 5, no. 1, pp. 104–112.
14. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 444 с.
15. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

16. Ульянов П.Л. О рядах по системе Хаара // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 3. С. 356–391.

Поступила 21.08.2024

После доработки 4.11.2024

Принята к публикации 18.11. 2024

Филиппов Вадим Иванович

д-р физ.-мат. наук, профессор

Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина,

e-mail: 888vadim@mail.ru

REFERENCES

1. Filippov V.I., Oswald P. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function. *J. Approx. Theory*, 1995, vol. 82, no. 1, pp. 15–29.
2. Filippov V.I. Representation systems obtained using translates and dilates of a single function in multidimensional spaces E_φ . *Izv.: Math.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 1257–1270. doi: 10.1070/IM2012v076n06ABEH002623
3. Filippov V.I. On generalization of Haar system and other function systems in spaces E_φ . *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 76–81. doi: 10.3103/S1066369X18010115
4. Filippov V.I. Fourier-type series with integer coefficients in systems of contractions and shifts of a single function in spaces L_p , $p \geq 1$. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 51–57. doi: 10.3103/S1066369X19060069
5. Filippov V.I. Algorithmization of integer decomposition of elements of spaces L_p , $0 < p < 1$, using software in the form of the Matlab software package. *Vestnik SGTU im. Gagarina Yu.A.*, 2021, vol. 90, no. 3, pp. 52–61 (in Russian).
6. Fekete M. Über die verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Math. Z.*, 1923, bd. 17, pp. 228–249. doi: 10.1007/BF01504345
7. Al'per S.Ya. On the approximation of functions on closed sets by polynomials with entire coefficients. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1964, vol. 28, no. 5, pp. 1173–1186 (in Russian).
8. Borodin P.A., Shklyaev K.S. Density of quantized approximations. *Russian Math. Surv.*, 2023, vol. 78, no. 5, pp. 797–851. doi: 10.4213/rm10115e
9. Benedetto J.J., Njeunje F.O.N. Haar approximation from within for $L_p(\mathbb{R}^d)$, $0 < p < 1$. *Sampl. Theory Signal Process. Data Anal.*, 2021, vol. 19, art. no. 2. doi: 10.1007/s43670-020-00001-z
10. Benedetto J.J. Noise reduction in terms of the theory of frames. *Wavelet Anal. Appl.*, 1998, vol. 7, pp. 259–284. doi: 10.1016/S1874-608X(98)80010-1
11. Arestov V.V. On inequalities of S. N. Bernstein for algebraic and trigonometric polynomials. *Sov. Math., Dokl.*, 1979, vol. 20, pp. 600–603.
12. Arestov V.V. The Szegő inequality for derivatives of a conjugate trigonometric polynomial in L_0 . *Math. Notes*, 1994, vol. 56, no. 5–6, pp. 1216–1227. doi: 10.1007/BF02266689
13. Golubov B.I. On the existence of bases from shifts of functions in homogeneous spaces. *Zb. prats' In-tu matematiki NAN Ukraini*, 2008, vol. 5, no. 1, pp. 104–112 (in Russian).
14. Rudin W. *Functional analysis*, New York, McGraw-Hill Book Comp., 1973, 407 p. Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1975, 450 p.
15. Yoshida K. *Functional analysis*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1965, 458 p. doi: 10.1007/978-3-662-25762-3. Translated to Russian under the title *Funktsional'nyy analiz*. Moscow, Mir Publ., 1967, 624 p.
16. Ul'yanov P.L. On Haar series. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1964, vol. 63(105), no. 3, pp. 356–391 (in Russian).

Received August 21, 2024

Revised November 4, 2024

Accepted November 18, 2024

Vadim Ivanovich Filippov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Povolzhsky Institute of Management named after P.A. Stolypin, Saratov, 410031 Russia, email: 888vadim@mail.ru.

Cite this article as: V.I. Filippov. Integer expansion of elements from spaces of nonintegrable functions into Fourier-type series in systems of contractions and shifts of one function. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 286–300.