

УДК 517.982.256

СТРОГИЕ СОЛНЦА, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ ПЛОСКОСТЕЙ¹

А. Р. Алимов

Множество M называется строгим солнцем, если для каждой точки $x \notin M$ множество ближайших точек $P_M x$ из M для x непусто и любая точка $y \in P_M x$ является ближайшей точкой из M для любой точки z из луча с началом в y и проходящего через x . Строгие солнца иногда называют множествами Колмогорова, поскольку для них выполнен критерий Колмогорова элемента наилучшего приближения. Исследуются структурные свойства строгих солнц, составленных из конечного числа плоскостей (аффинных подпространств, возможно, вырожденных в точки). Мы всегда будем предполагать, что объединение плоскостей $M := \bigcup L_i$ является неприводимым, т. е. никакая плоскость из объединения $\bigcup L_i$ не содержит другую. Устанавливается, что если $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — строгое солнце в нормированном пространстве, являющееся конечным неприводимым объединением плоскостей, то M состоит из одной плоскости. Показывается, что условие строгой солнчности нельзя заменить на условие солнчности. В пространстве ℓ_n^∞ доказывается более сильный локальный аналог этого свойства. Именно, показывается, что если $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — неприводимое конечное объединение плоскостей в ℓ_n^∞ , Π — брус (пересечение экстремальных гиперплоскостей), $M \cap \Pi \neq \emptyset$, то множество $M' := M \cap \Pi$ является строгим солнцем в пространстве ℓ_n^∞ , если и только если M' выпукло, т. е. M' — пересечение некоторой плоскости L_i с брусом Π . Как следствие, если $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — локальное строгое солнце в пространстве ℓ_n^∞ , то M состоит из одной плоскости. Аналогичные утверждения получены для множеств $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ с непрерывной метрической проекцией в ℓ_n^∞ . Полученные результаты продолжают и развивают исследования о приближении чебышёвскими множествами, составленными из объединения плоскостей, начатые автором статьи и И. Г. Царковым, в линейных нормированных и несимметрично нормированных пространствах, а также результаты И. Г. Царкова о множествах с кусочно-непрерывной метрической проекцией.

Ключевые слова: наилучшее приближение; объединение плоскостей, солнце, строгое солнце, дискретизация.

A. R. Alimov. Strict suns composed of planes.

A set M is a strict sun if, for each $x \notin M$, the set $P_M x$ of best approximants from M for x is nonempty and each point $y \in P_M x$ is a nearest point from M for each point z from the ray emanating from y and passing through x . Strict suns are sometimes called Kolmogorov sets, because they satisfy the Kolmogorov criterion for best approximation. We study structural properties of strict suns composed of a finite number of planes (affine spaces, which may possibly degenerate to points). We always assume that the union of planes $M := \bigcup L_i$ is irreducible, i. e., no plane in this union contains another plane from the union. We show that if an irreducible finite union of planes $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ is a strict sun in a normed space, then M consists of a single plane. In this result, the strict sun cannot be replaced by a sun. A stronger local analog of this result is proved in the space ℓ_n^∞ . Namely, we show that if $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ is an irreducible union of planes in ℓ_n^∞ , Π is a bar (intersection of extreme hyperplanes), and $M \cap \Pi \neq \emptyset$, then $M' := M \cap \Pi$ is a strict sun in ℓ_n^∞ if and only if M' is convex, i. e., M' is the intersection of some plane L_i with the bar Π . As a corollary, if $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ is a local strict sun in ℓ_n^∞ , then M consists of a single plane. Similar results are also established for sets $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ with continuous metric projection in ℓ_n^∞ . The present paper continues and develops the previous studies on approximation by Chebyshev sets composed of planes began by the author of the article and I.G. Tsar'kov in linear normed and asymmetrically normed spaces and the results of I.G. Tsar'kov on sets with piecewise continuous metric projection.

Keywords: best approximation, union of planes, sun, strict sun, discretization.

MSC: 41A65

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-27-36

1. Введение

В работе исследуются свойства строгих солнц (множеств Колмогорова), представляющих собой конечное объединение плоскостей, т. е. аффинных подпространств, возможно, вырож-

¹Работа выполнена в МГУ имени М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00129).

денных в точки. Ниже мы всегда будем предполагать, что объединение плоскостей $M := \bigcup_{i \in A} L_i$ является *неприводимым*, т. е. никакая плоскость из объединения $\bigcup_{i \in A} L_i$ не содержит другую. В настоящее время множества, состоящие из плоскостей, активно изучаются и имеют ряд приложений, например, в задачах восстановления сигналов (про которые, к примеру, известно, что они лежат на некотором объединении подпространств), задачах представления сигналов через разреженный набор базовых сигналов (модель “объединения подпространств”), а также в задачах математической экономики и связанных с ней задачах минимизации рангов и задачи минимизации ℓ_0 -нормы (см., например, [1]). Задачи приближения объединением плоскостей также связаны с приближением ридж-функциями:

$$\mathcal{R}_N := \left\{ \sum_{k=1}^N f_k((a_k, x) + c_k) \mid x \in \mathbb{R}^n, a_k \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n, c_k \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \right\},$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ — не более чем счетные множества (см. [2]), а также с классическими вариантами задачи n -членного приближения (см., например, [3]).

Настоящая работа продолжает и развивает исследования о приближении чебышёвскими множествами, составленными из объединения плоскостей, начатые автором и И. Г. Царьковым (см., например, [4]), в случае как линейных нормированных, так и несимметрично нормированных пространств. Было показано (см., например, [4]), в частности, что

1) никакое конечное неприводимое объединение плоскостей не является чебышёвским множеством и

2) в рефлексивных CLUR-пространствах² никакое не более чем счетное неприводимое объединение плоскостей не является чебышёвским множеством.

Также в работах А. Р. Алимова и И. Г. Царькова были получены обобщения этих результатов на несимметричный случай. Отметим также ряд результатов И. Г. Царькова (см. [5, § 3]) о строении чебышёвских множеств, представляющие собой не более, чем счетное объединение аппроксимативно компактных множеств.

В настоящей работе исследуются структурные свойства строгих солнц, составленных из конечного числа плоскостей. Ряд результатов об аппроксимативно-геометрических свойствах таких множеств получен в конечномерном пространстве ℓ_n^∞ (пространстве функций на n -точечном компакте с равномерной нормой). Выбор такого пространства обусловлен его важной ролью при исследовании различных вопросов геометрической теории приближений в пространствах типа $C(Q)$ и в общих нормированных и несимметрично нормированных пространствах. Например, часто важные свойства типа монотонной линейной связности удается установить путем специальной дискретизации задачи, при которой она сводится из исходного (абстрактного) пространства к случаю пространства ℓ_n^∞ . Также стоит упомянуть, что впервые ряд нетривиальных аппроксимативно-геометрических свойств солнц, строгих солнц и чебышёвских множеств был установлен именно в пространстве ℓ_n^∞ (Х. Беренс и Л. Хетцельт [6], А. Р. Алимов [7]).

Работа устроена следующим образом. Основные определения даются в разд. 2. В разд. 3 устанавливается результат о тривиальности конечного неприводимого объединения плоскостей, являющегося строгим (прото)солнцем (теоремы 1 и 2). В теореме 3 доказывается более сильный локальный аналог этого свойства в пространстве ℓ_n^∞ . Именно, показывается, что на локальном уровне конечное неприводимое объединение плоскостей в пространстве ℓ_n^∞ или выпукло, или не является строгим солнцем, т. е. непустое пересечение произвольного бруса (пересечения экстремальных гиперполос) с таким множеством или выпукло (т. е. представляет собой

²В нормированном случае класс CLUR-пространств (от англ. “compactly locally uniformly rotund”) определяется следующим образом: $X \in (\text{CLUR})$, если из соотношений $x \in S$, $y_n \in S$, $\|x + y_n\|/2 \rightarrow 1$ следует, что (y_n) имеет сходящуюся подпоследовательность (здесь S — единичная сфера). Класс (CLUR) включает в себя локально равномерно выпуклые нормированные пространства и, следовательно, равномерно выпуклые пространства.

“кусок” плоскости), или не является строгим солнцем. Как следствие, если $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — локальное строгое солнце в пространстве ℓ_n^∞ , то M состоит из одной плоскости. Аналогичные утверждения получены для множеств $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ с непрерывной метрической проекцией в ℓ_n^∞ (теорема 4 и следствие 2).

2. Основные определения

Для прикладных задач, в которых ищется наилучшее или почти наилучшее приближение, часто бывает необходимо использовать характеристизационные свойства элементов наилучшего приближения. Геометрическая теория приближения с этой целью рассматривает понятия солнца, строгого солнца, строгого протосолнца, в определении которых лежит геометрическая переформулировка известного критерия Колмогорова — элемента наилучшего приближения.

Величиной наилучшего приближения (расстоянием) от заданной точки x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$ называется величина $\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения) из множества M для заданного $x \in X$ обозначается $P_M x$. Иными словами, $P_M x := \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\}$. Оператор $P_M : X \rightarrow 2^X$ называется *оператором метрической проекции* на множество M (или кратко, метрической проекцией).

Далее: $B(x, r)$ — замкнутый шар с центром x и радиусом r ; $\dot{B}(x, r)$ — открытый шар с центром x и радиусом r ; $S(x, r)$ — сфера с центром x и радиусом r .

Для подмножества $\emptyset \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \emptyset$ (называемая *точкой светимости*) такая, что

$$y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x) \quad \text{для всех } \lambda \geq 0 \quad (2.1)$$

(иными словами, из точки y исходит “солнечный луч”, проходящий через x , для каждой точки которого y является ближайшей во множестве M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \emptyset$ и условие (2.1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно точкой строгой солнечности) для M .

Множество $M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой строгой протосолнечности, что означает по определению, что для $x \notin M$ условие (2.1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$ (при этом в отличие от точки строгой солнечности точка y , ближайшая к x , не обязана существовать).

Множество B -*связно*, если его пересечение с любым замкнутым шаром связно. Множество M называется множеством существования, если $P_M \neq \emptyset$ для любого $x \in X$.

Отображение $F: X \rightarrow 2^Y$ называется *полунепрерывным снизу* в точке x_0 , если для любой окрестности $O(y)$ любой точки $y \in F(x_0)$ найдется окрестность $O(x_0)$ такая, что $F(x) \cap O(y) \neq \emptyset \forall x \in O(x_0)$. Как обычно, F полунепрерывно снизу, если оно полунепрерывно снизу в любой точке $x_0 \in X$.

Впервые соотношения между непрерывностью (в каком-нибудь смысле) метрической проекции на множество и его аппроксимативными свойствами начали изучать Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин в 1960 гг. Немногим позже Л. П. Власов (см. [8]) показал, что в линейном нормированном пространстве множество существования с полунепрерывной снизу метрической проекцией является δ -солнцем (почти выпуклым множеством).

Строгие солнца и замкнутые множества с полунепрерывной снизу метрической проекцией обладают рядом общих свойств. Например, для каждого множества M , принадлежащего любому из этих классов множеств, выполняется включение

$$\text{conv } P_M x \subset S(x, \rho(x, M)) \quad \text{для любого } x \in X \quad (2.2)$$

(см. теоремы 3.11, 3.12 из [9]), т.е. выпуклая оболочка $\text{conv}(\cdot)$ множества ближайших точек $P_M x$ любой точки $x \notin M$ содержится в собственной грани соответствующей сферы. Для солнц, не являющихся строгими солнцами, включение (2.2) может нарушаться даже в двумерном случае. По поводу дальнейших результатов о соотношении между различными классами солнц и множествами с полунепрерывной снизу метрической проекцией см. работы Н. В. Невесенко [10], И. Г. Царькова [11–14], а также [15; 16]. Из недавних работ укажем [17; 18].

3. Результаты

Начнем со следующего простого результата.

Теорема 1. Пусть $M := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ — B -связное строгое протосолнце в линейном нормированном пространстве X , являющееся неприводимым объединением конечного числа плоскостей. Тогда никакая плоскость L_i не является множеством существования.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы 1 также верно для конечного объединения необязательно замкнутых плоскостей в рефлексивном пространстве.

Как следствие из теоремы 1 мы получаем следующий результат, показывающий, что в конечномерном пространстве неприводимое объединение плоскостей не может быть строгим солнцем.

Теорема 2. Пусть $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — строгое солнце в конечномерном линейном нормированном пространстве, являющееся конечным объединением плоскостей. Тогда M состоит из одной плоскости.

Ниже (теорема 3) мы получим также и локальный вариант этого результата (правда, только для пространства ℓ_n^∞).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Предположим, рассуждая от противного, что некоторая плоскость L_{n_0} из объединения $\bigcup_{i=1}^N L_i$ является плоскостью существования. Пусть $v \in M \setminus L_{n_0}$ (такая точка существует, поскольку M — неприводимое объединение плоскостей). Пусть u — ближайшая точка из плоскости L_{n_0} для точки v . Положим $r := \|u - v\|$. По условию множество M B -связно и $v \in M$, поэтому $\dot{B}(v, r) \cap (M \setminus L_{n_0}) \neq \emptyset$. Так как M является конечным набором плоскостей, найдется точка $s \in L_{n_0}$, $s \notin L_m$ при $m \neq n_0$, $\|s - u\| < r$, близкая к точке u и такая, что $s \notin M \setminus L_{n_0}$ и

$$\dot{B}(w, r) \cap (M \setminus L_{n_0}) \neq \emptyset, \quad \text{где } w := v + s - u. \quad (3.1)$$

Определим

$$\alpha_0 := \inf\{\alpha \mid \dot{B}(w_\alpha, \alpha r) \cap (M \setminus L_{n_0}) \neq \emptyset\}, \quad (3.2)$$

где $w_\alpha := \alpha w + (1 - \alpha)s$. Из (3.1) имеем $\alpha_0 < 1$, при этом $\alpha_0 > 0$ в силу того, что $s \notin L_m$ при $m \neq n_0$ и объединение $\bigcup L_i$ конечно. Пусть $x_0 := w_{\alpha_0}$, $r_0 := \alpha_0 r$. Согласно (3.2) $\dot{B}(x_0, r_0) \cap M = \emptyset$. Поэтому w — точка светимости из M для точки x_0 . Однако это противоречит (3.2) в силу классического критерия Колмогорова ближайшего элемента (см., например, [8, § 3.2]).

Полученное противоречие доказывает теорему 1.

З а м е ч а н и е 2. Пример строгого протосолнца, являющегося неприводимым объединением двух плоскостей, можно построить в любом нерефлексивном пространстве — достаточно взять две параллельные гиперплоскости, являющиеся линиями уровня функционала, не достигающего своей нормы. Каждая из таких плоскостей антипроксиминальна. Построенное таким образом строгое протосолнце, очевидно, не B -связно.

З а м е ч а н и е 3. Для солнц утверждение теоремы 1 не имеет места — на двумерной плоскости ℓ_2^∞ координатный крест (объединение двух координатных прямых) является солнцем (но, конечно, не строгим солнцем). Аналогичный пример можно построить в любом пространстве ℓ_n^∞ , $n \geq 2$.

З а м е ч а н и е 4. Известно (см., например, теорему 3 в [15]), что в пространстве ℓ_n^∞ замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем. Поэтому условия теоремы 1 выполнены, в частности, если метрическая проекция на множество $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ полунепрерывна снизу.

Таким образом, имеет место следующий результат.

Следствие 1. Пусть $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в пространстве ℓ_n^∞ , являющееся конечным объединением плоскостей. Тогда M состоит из одной плоскости.

З а м е ч а н и е 5. В случае, когда хотя бы одно из множеств L_i является точкой, утверждение теоремы 1 может быть усилено следующим образом: солнце не может иметь изолированную компоненту связности, являющуюся точкой. Этот несложный результат (верный в произвольном линейном нормированном пространстве) хорошо известен в геометрической теории приближений.

Для $x, y \in \ell_n^\infty$ положим

$$m(x, y) := \{z \in \ell_n^\infty \mid z^{(i)} \in [x^{(i)}, y^{(i)}], \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Замкнутый брус (или просто брус) — пересечение экстремальных гиперполос вида $\{x \in \ell_n^\infty \mid b^{(i)} \leq x^{(i)} \leq a^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$, где величины $a^{(i)}, b^{(i)} \in \overline{\mathbb{R}}$ фиксированы. Эквивалентно, замкнутое множество $\Pi \subset \ell_n^\infty$ является брусом, если и только если $m(x, y) \subset \Pi$ при любых $x, y \in \Pi$. Частным случаем бруса является замкнутый шар в ℓ_n^∞ .

З а м е ч а н и е 6. Ниже рассматриваются пересечения строгих солнц с брусами — в этой задаче брусы составляют наиболее естественный класс выпуклых множеств, для которых имеет смысл задача сохранения солнечности при пересечении с такими множествами. Хорошо известно, что если V — множество, не являющееся брусом, то найдется солнце (скажем, в пространстве ℓ_n^∞), пересечение которого с таким множеством не является солнцем.

Следующий результат, являющийся локальным аналогом теоремы 1, интересно сравнить с хорошо известным результатом: чебышёвское множество M в ℓ_n^∞ является чебышёвским множеством во всем (см., например, теорему 7.16 из [8]), т. е. если Π — брус в ℓ_n^∞ , $\Pi \cap M \neq \emptyset$, то любая точка из Π имеет единственную ближайшую из M . В теореме 3 для случая неприводимого объединения плоскостей утверждается в некотором смысле обратный результат: конечное неприводимое объединение плоскостей “никогда (локально) не является невыпуклым строгим солнцем”.

Теорема 3. Пусть $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — неприводимое объединение плоскостей в ℓ_n^∞ и пусть Π — брус, $M \cap \Pi \neq \emptyset$. Тогда $M' := M \cap \Pi$ — строгое солнце в пространстве ℓ_n^∞ , если и только если M' выпукло, т. е. M' — пересечение некоторой плоскости L_i с брусом Π .

Как следствие, если $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — локальное строгое солнце в пространстве ℓ_n^∞ , то M состоит из одной плоскости.

(В теореме 3 множество M называется локальным строгим солнцем, если для любой точки $x \in M$ найдется число $r > 0$ такое, что пересечение множества M с шаром $B(x, r)$ является строгим солнцем.)

Теорема 4. Пусть $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — неприводимое объединение плоскостей в ℓ_n^∞ и пусть Π — брус, $M \cap \Pi \neq \emptyset$. Тогда $M' = M \cap \Pi$ имеет полунепрерывную снизу метрическую проекцию в пространстве ℓ_n^∞ , если и только если M' выпукло, т. е. M' — пересечение некоторой плоскости L_i с бруском Π .

Как следствие, если $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ имеет локально полунепрерывную снизу метрическую проекцию в пространстве ℓ_n^∞ , то M состоит из одной плоскости.

Результат теоремы 4 вытекает из теоремы 3, поскольку в конечномерном полиэдральном пространстве (симметрично или несимметрично нормированном) множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем (см. теорему 3 из [14]).

З а м е ч а н и е 7. 1) Как и выше, утверждение теоремы 3 перестает быть верным при замене строгой солнечности на солнечность.

2) На двумерной плоскости ℓ_2^∞ легко построить невыпуклое строгое солнце, являющееся объединением двух отрезков с общей концевой точкой. Соответствующее утверждение теоремы 3 также перестает быть верным при замене плоскостей на более общие выпуклые множества.

Напомним, что подпространство $H \subset \ell_n^\infty$ называется *координатным*, если оно параллельно некоторой собственной грани единичного шара V той же размерности, что и H .

В [7] показано, что пересечение строгого солнца из ℓ_n^∞ с координатным подпространством H всегда является солнцем в H и за исключением конечного числа случаев является строгим солнцем. А именно, имеет место следующий результат.

Лемма А [7, лемма А]. Если N — строгое солнце в ℓ_n^∞ и H — координатное подпространство размерности $k = 1, \dots, n-1$, то для непустого пересечения $N \cap H$ возможны два варианта: или $N \cap H$ — строгое солнце в H , или $N \cap H$ — солнце, но не строгое солнце в H , в последнем случае найдется опорный конус $K := \mathring{K}(\xi, \zeta) \subset \ell_n^\infty$ линейной размерности³ $\geq k$ такой, что $H \subset \text{bd } K$ и $\text{int } K \cap N = \emptyset$, при этом $N \not\subset H$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что множество M' не лежит ни в каком координатном подпространстве размерности $< n$ (см., например, теорему 7.21 в [8]).

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 1. Пусть $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — неприводимое объединение плоскостей в ℓ_n^∞ , Π — брус, и пусть $M' := \Pi \cap M \neq \emptyset$ — строгое солнце. Тогда непустое сечение множества M' произвольной координатной плоскостью H является строгим солнцем (в H и в ℓ_n^∞).

Следствие 2. Пусть $M := \bigcup_{i=1}^N L_i$ — неприводимое объединение плоскостей в ℓ_n^∞ , Π — брус, и пусть $M'' = M \cap \Pi \neq \emptyset$ — строгое солнце в ℓ_n^∞ . Тогда метрическая проекция на M' непрерывна (в аффинной оболочке бруса Π и в ℓ_n^∞).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следствия 2 вытекает из теоремы 2 в [7] с учетом леммы 1.

З а м е ч а н и е 8. Аналогии леммы 1 и следствия 2 для произвольных солнц в ℓ_n^∞ , $n \geq 3$, неверны (см., например, замечание 7 в [7]).

³Под линейной размерностью выпуклого множества $C \subset \ell_n^\infty$ понимается размерность максимального аффинного подпространства, содержащегося в C . Для опорного конуса $\mathring{K}(x, y)$ в ℓ_n^∞ такое максимальное подпространство всегда можно выбрать координатным.

Доказательство леммы 1. Пусть сначала Π — непустой телесный брус. Не ограничивая общности, мы можем считать, что множество M' имеет непустое пересечение с внутренностью $\text{int } \Pi$ бруса Π (см., например, теорему 7.21 из [8]). По лемме А,

$$\text{если } M' \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset, \text{ то } M' \cap H \text{ — строгое солнце в } H. \quad (3.3)$$

Пусть сначала H — координатная плоскость коразмерности 1, содержащая некоторую грань F бруса Π , и пусть $H \cap M' \neq \emptyset$. Обозначим $M'' := M' \cap H$. Предположим, что

$$M'' \text{ не является строгим солнцем в } H. \quad (3.4)$$

В силу (3.3), (3.4) и того, что M является объединением плоскостей, найдется плоскость L_{n_0} из объединения $\bigcup_{i=1}^N L_i$ такая, что

$$L_{n_0} \cap \text{int } \Pi = \emptyset, \quad L_{n_0} \cap F \neq \emptyset, \quad (3.5)$$

т.е. $L_{n_0} \subset H$. В силу (3.5) и так как объединение плоскостей из M конечно, то найдется точка $y \in L_{n_0} \cap \text{int } F \cap M$ такая, что $y \notin \overline{M \cap \text{int } \Pi}$. Также найдется точка $x \in \text{int } \Pi$ такая, что $y \in P_{M'}x = P_{M''}x$, при этом y лежит в относительной внутренней гиперграни шара $B(x, \|x - y\|)$. Но тогда по критерию Колмогорова ближайшего элемента (см. [8, § 3.2]) опорный конус $\dot{K}(y, x)$ (см. [8, § 3.1]) не пересекается с M' (так как $y \in \text{int } F$, опорный конус является открытым полупространством). Это, однако, противоречит тому, что $M' \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$. Общий случай сводится к рассмотренному выше с учетом теоремы 7.21 из [8], которая утверждает, в частности, что если $L \subset X$ — подпространство в X и $M \subset L$ — строгое солнце в L , то M — строгое солнце в X .

Лемма 1 доказана.

Далее нам потребуются несколько определений. Для множества $N \subset \mathbb{R}^n$ определим (см. [7])

$$\begin{aligned} \text{eqc}(N) &= \text{eqc}_{\mathbb{R}^n}(N) := \{j \in \{1, \dots, n\} \mid x^{(j)} = y^{(j)} \text{ для всех } x, y \in N\}, \\ x &= (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), \quad y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \end{aligned}$$

(“eqc” — аббревиатура выражения “equal coordinates” — равные координаты).

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ мы пишем, что

$$\begin{aligned} x \not\perp_N y, & \text{ если } x^{(j)} \neq y^{(j)} \text{ для всех } j \notin \text{eqc}(N); \\ x \perp_N y, & \text{ если } x^{(i)} \neq y^{(i)} \text{ для всех } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Замкнутое множество $N \subset X$ называется *монотонно линейно связным* (см. [8]), если любые две точки из N можно соединить непрерывной монотонной дугой $k(\cdot) \subset N$, т.е. дугой, образ которой под действием любого экстремального функционала из единичной сферы сопряженного пространства является монотонной скалярной функцией.

По аналогии с понятием монотонной линейной связности множество $N \subset \ell_n^\infty$ *строго монотонно линейно связно*, если

- 1) множество N монотонно линейно связно и
- 2) для всех $x, y \in N$, $x \not\perp_N y$, найдется монотонная дуга $k(t) \subset N$, $0 \leq t \leq 1$, соединяющая x и y , такая, что ее координатные функции $[0, 1] \ni t \mapsto k_j(t)$ монотонны для $j = 1, 2, \dots, n$ и строго монотонны для $j \notin \text{eqc}(N)$.

Свойство строгой монотонной линейной связности (как и свойство монотонной линейной связности) является наследственным. Действительно, из определения непосредственно следует, что если $N \subset \ell_k^\infty \subset \ell_m^\infty$ — строго монотонно линейно связное множество в ℓ_k^∞ , то оно строго монотонно линейно связно и в ℓ_m^∞ . При понижении размерности, если множество N (строго) монотонно линейно связно в ℓ_m^∞ и $k \leq m$, то $N \subset \ell_k^\infty$ (строго) монотонно линейно связно в ℓ_k^∞ .

Под *основным кокрестом* в $\mathbb{R}^n$ (см. [7]) мы будем понимать любое из множеств вида

$$c(\mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{(j)} = c_j \text{ для некоторого } j \in \{1, \dots, n\}\}$$

(здесь c_j — константа, зависящая только от координаты j), а под *кок্রেস্তом* $c_{\mathbb{R}^n}(J)$ по набору координат $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ — множество

$$c_{\mathbb{R}^n}(J) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{(j)} = c_j \text{ для некоторого } j \in J, x^{(i)} = c_i \text{ для всех } i \notin J\};$$

при этом, чтобы исключить вырожденные случаи, мы всегда предполагаем, что $k \geq 2$, т. е. $\text{card } J \geq 2$ в определении $c_{\mathbb{R}^n}(J)$. Ясно, что $\text{eqc}(c(\mathbb{R}^n)) = \emptyset$.

Наконец, под *кок্রেস্তом* будем понимать любое множество $C \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $C \subset c_{\mathbb{R}^n}(\{1, \dots, n\} \setminus \text{eqc}(C))$. (При этом всегда $\text{card } \text{eqc}(C) < n - 1$.)

Нам потребуется следующий результат (см. лемму В работы [7]), дающий характеристику строгих солнц в пространстве ℓ_n^∞ :

замкнутое множество $\emptyset \neq N \subset \ell_n^\infty$ является строгим солнцем в ℓ_n^∞ , если и только если N строго монотонно линейно связно и не является кок্রেстом. (3.6)

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Предположим, что $M' = M \cap \Pi$ — строгое солнце в пространстве ℓ_n^∞ . Покажем, что M' выпукло. (Обратная импликация в теореме 3 очевидна.)

Аналогично сказанному выше мы можем считать без ограничения общности, что множество M' не лежит ни в каком координатном подпространстве размерности $< n$, а брус Π является телесным. Так как M' — строгое солнце в конечномерном пространстве, то M' B -линейно связно, т. е. пересечение M' с любым замкнутым шаром линейно связно (см. теорему 8.10 из [8]).

Предположим, что M' невыпукло. Так как M' B -линейно связно, то существуют по крайней мере две различные плоскости L_{n_0} и L_{n_1} из M , пересекающиеся в бресе Π . Пусть $s \in \Pi$ — точка пересечения этих плоскостей. Пусть $u \in L_{n_0} \cap \Pi$, $u \neq s$, $v \in L_{n_1} \cap \Pi$, $v \neq s$. Положим $w := u + v - s$. Пусть $t_\alpha = \alpha v + (1 - \alpha)w \in [w, v]$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Выбирая u достаточно близко к s и v достаточно близко к s , мы можем считать, что $w \in \Pi$ и $P_{M'} t_\alpha \subset L_{n_0} \setminus \bigcup_{i \neq n_0} L_i$ при малых α . По следствию 2 метрическая проекция $P_{M'}$ полунепрерывна снизу. При увеличении α до 1 полунепрерывность снизу метрической проекции может иметь место, только если подпространство L_{n_1} не лежит в координатном подпространстве. Но в этом случае, выбирая v достаточно близко к s , мы получаем, что точка t_α при достаточно малом $\alpha = \alpha_0 > 0$ также лежит в Π и $P_{L_{n_0}} t_\alpha \subset L_{n_0}$. Как и выше, мы получаем, что плоскость L_{n_1} лежит в координатном подпространстве. Таким образом, любая из плоскостей L_i из M , содержащая точку s , лежит в координатном подпространстве. Воспользуемся следующим следствием из теоремы 2 работы [7]):

если N — множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в ℓ_n^∞ , то непустое пересечение множества N с любым брусом является строгим солнцем (3.7)

(иными словами, N экстремально строго солнечно). Соответственно, выбирая достаточно малый телесный брус $\Pi' \subset \Pi$, $\Pi' \ni s$, и пользуясь конечностью набора плоскостей, составляющих множество M , мы можем считать, что в пересечении $\Pi' \cap M$ участвуют только плоскости, проходящие через s . По сказанному выше любая из таких плоскостей лежит в координатной плоскости, при этом $M' \cap \Pi'$ — строгое солнце (см. (3.7)). Однако такое объединение плоскостей является кок্রেстом, что противоречит (3.6), поскольку $M' \cap \Pi'$ — строгое солнце. Случай нетелесного бруса сводится к рассмотренному выше случаю, как в лемме 1. Для доказательства последнего утверждения теоремы нужно воспользоваться хорошо известным фактом: если замкнутое связное подмножество локально выпуклого пространства локально выпукло, то оно выпукло.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hegde C., Indyk P., Schmidt L. Approximation algorithms for model-based compressive sensing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2015. Vol. 61, no. 9. P. 5129–5147. doi: 10.48550/arXiv.1406.1579

2. **Ismailov V.** Ridge functions and applications in neural networks. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2021. 186 p. (Ser. Math. Surveys and Monographs; vol. 263). doi: 10.1090/surv/263
3. **DeVore R.A.** Nonlinear approximation // *Acta Numerica* 1998. Vol. 7. P. 51–150. doi: 10.1017/S0962492900002816
4. **Alimov A.R., Tsar'kov I.G.**, Chebyshev unions of planes, and their approximative and geometric properties // *Approx. Theory*. 2024. Vol. 298. Art. no. 106009. doi: 10.1016/j.jat.2023.106009
5. **Царьков И.Г.** Чебышевские множества с кусочно-непрерывной метрической проекцией // *Мат. заметки*. 2023. Т. 113, № 6. С. 905–917. doi: 10.4213/mzm13628
6. **Berens H., Hetzelt L.** Die metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$ // *Aeq. Math.* 1984. Vol. 27, no. 3. P. 274–287. doi: 10.1007/BF02192677
7. **Алимов А.Р.** Характеризация множеств с непрерывной метрической проекцией в пространстве ℓ_n^∞ // *Мат. заметки*. 2020. Т. 108, № 3. С. 323–333. doi: 10.4213/mzm12725
8. **Алимов А.Р., Царьков И.Г.** Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // *Успехи мат. наук*. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84. doi: 10.4213/rm9698
9. **Brosowski B., Deutsch F.** Radial continuity of set-valued metric projections // *J. Approx. Theory*. 1974. Vol. 11, no. 3. P. 236–253. doi: 10.1016/0021-9045(74)90016-1
10. **Невесенко Н.В.** Строгие солнца и полунепрерывность снизу метрической проекции в линейных нормированных пространствах // *Мат. заметки*. 1978. Т. 23, № 4. С. 563–572.
11. **Царьков И.Г.** Аппроксимативные свойства множеств и непрерывные выборки // *Мат. сб.* 2020. Т. 211, № 8. С. 132–157. doi: 10.4213/sm9319
12. **Царьков И.Г.** Непрерывность метрической проекции, структурные и аппроксимативные свойства множеств // *Мат. заметки*. 1990. Т. 47, № 2. С. 137–148.
13. **Tsar'kov I.G.** Convexity of δ -suns and γ -suns in asymmetric spaces // *Russ. J. Math. Phys.* 2024. Vol. 31, no. 2. P. 326–335. doi: 10.1134/S1061920824020158
14. **Царьков И.Г.** Непрерывные выборки из многозначных отображений и аппроксимация в несимметричных и полулинейных пространствах // *Изв. РАН Сер. математическая*. 2023 Т. 87, № 4. С. 205–22. doi: 10.4213/im9331
15. **Алимов А.Р.** Выборки из метрической проекции и строгая солнечность множеств с непрерывной метрической проекцией // *Мат. сб.* 2017. Т. 208, № 7. С. 3–18. doi: 10.4213/sm8765
16. **Алимов А.Р.** Выпуклость и монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической проекцией в трехмерных пространствах // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2020. Т. 26, № 2. С. 45–55. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-28-46
17. **Бородин П.А., Савинова Е.А.** Всякая чебышевская кривая без самопересечений монотонна // *Мат. заметки*. 2024. Т. 116, № 2. doi: 10.4213/mzm14311
18. **Савинова Е.А.** Множества в $\mathbb{R}^n$, монотонно линейно связные в некоторой норме // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика*. 2023. № 1. С. 53–55. doi: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-53-55

Поступила 23.06.2024

После доработки 27.08.2024

Принята к публикации 2.09.2024

Алимов Алексей Ростиславович

д-р. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

г. Москва

e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

REFERENCES

1. Hegde C., Indyk P., Schmidt L. Approximation algorithms for model-based compressive sensing. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2015, vol. 61, no. 9, pp. 5129–5147. doi: 10.48550/arXiv.1406.1579
2. Ismailov V. *Ridge functions and applications in neural networks*. Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 2021, Ser. Math. Surveys and Monographs, vol. 263, 186 p. doi: 10.1090/surv/263

3. DeVore R.A. Nonlinear approximation. *Acta Numerica*, 1998, vol. 7, pp. 51–150. doi: 10.1017/S0962492900002816
4. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Chebyshev unions of planes, and their approximative and geometric properties. *J. Approx. Theory*, 2024, vol. 298, art no. 106009. doi: 10.1016/j.jat.2023.106009
5. Tsar'kov I.G. Chebyshev sets with piecewise continuous metric projection. *Math. Notes*, 2023, vol. 113, no. 6, pp. 840–849. doi: 10.1134/S0001434623050255
6. Berens H., Hetzelt L. Die metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$. *Aeq. Math.*, 1984, vol. 27, no. 3, pp. 274–287. doi: 10.1007/BF02192677
7. Alimov A.R. Characterization of sets with continuous metric projection in the space ℓ_n^∞ . *Math. Notes*, 2020, vol. 108, no. 3, pp. 309–317. doi: 10.1134/S0001434620090011
8. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and solarly in problems of best and near-best approximation. *Russian Math. Surveys*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 1–77. doi: 10.1070/RM9698
9. Brosowski B., Deutsch F. Radial continuity of set-valued metric projections. *J. Approx. Theory*, 1974, vol. 11, no. 3, pp. 236–253. doi: 10.1016/0021-9045(74)90016-1
10. Nevesenko N.V. Strict sums and semicontinuity below metric projections in linear normed spaces. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, no. 4, pp. 308–312. doi: 10.1007/BF01786961
11. Tsar'kov I.G. Approximative properties of sets and continuous selections. *Sb. Math.*, 2020, vol. 211, no. 8, pp. 1190–1211. doi: 10.1070/SM9319
12. Tsar'kov I.G. Continuity of the metric projection, structural and approximate properties of sets. *Math. Notes*, 1990, vol. 47, no. 2, pp. 218–227. doi: 10.1007/BF01156834
13. Tsar'kov I.G. Convexity of δ -suns and γ -suns in asymmetric spaces. *Russ. J. Math. Phys.*, 2024, vol. 31, no. 2, pp. 325–334. doi: 10.1134/S1061920824020158
14. Tsar'kov I.G. Continuous selections of set-valued mappings and approximation in asymmetric and semilinear spaces. *Izv. Math.*, 2023, vol. 87, no. 4, pp. 835–851. doi: 10.4213/im9331e
15. Alimov A.R. Selections of the metric projection operator and strict solarly of sets with continuous metric projection. *Sb. Math.*, 2017, vol. 208, no. 7, pp. 915–928. doi: 10.1070/SM8765
16. Alimov A.R. Convexity and monotone linear connectivity of sets with a continuous metric projection in three-dimensional spaces. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 28–46 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-28-46
17. Borodin P.A., Savinova E.A. Any Chebyshev curve without self-intersections is monotone. *Math. Notes*, 2024, vol. 116, no. 2, pp. 387–389. doi: 10.1134/S0001434624070320
18. Savinova E.A. Sets in $\mathbb{R}^n$ monotone path-connected with respect to some norm. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2023, vol. 78, no. 1, pp. 49–51. doi: 10.3103/S0027132223010084

Received June 23, 2024

Revised August 27, 2024

Accepted September 2, 2024

Funding Agency: This research was conducted at Lomonosov Moscow State University with the support of the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00129).

Alexey R. Alimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119899 Russia; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119899 Russia, e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru.

Cite this article as: A.R. Alimov. Strict suns composed of planes. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 27–36.