ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 4 2024

УДК 517.977.8

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ α-МНОЖЕСТВАМИ И СЛАБО ВЫПУКЛЫМИ МНОЖЕСТВАМИ[1]

В. Н. Ушаков, А. А. Ершов

Усилено известное соотношение между α-множествами и слабо выпуклыми по Виалю множествами в евклидовых пространствах размерности больше двух. А именно, в формуле, описывающей соотношение мер невыпуклости α-множеств и слабо выпуклых множеств, удвоенный чебышевский радиус заменен на диаметр множества с коэффициентом. Тем не менее в двумерном пространстве соответствующая оценка выражается через диаметр множества без коэффициента и является точнее. В связи с этим вопрос о возможности дальнейшего уточнения оценки степени невыпуклости α через параметр слабой выпуклости R и диаметр множества в евклидовых пространствах размерности больше двух остается открытым.

Ключевые слова: α-множество, слабо выпуклое множество, обобщенно выпуклое множество, диаметр множества, чебышевский радиус, выпуклая оболочка.

V. N. Ushakov, A. A. Ershov. On the relation between α-sets and weakly convex sets.

The known relation between α-sets and Vial weakly convex sets in Euclidean spaces of dimension greater than two is strengthened. Namely, in the formula describing the relationship between nonconvexity measures for α-sets and weakly convex sets, the double Chebyshev radius is replaced by the diameter of the set with a coefficient. However, in the two-dimensional space the corresponding estimate is expressed in terms of the set diameter without a coefficient and is more accurate. In this connection, the question of the possibility of further refinement of the estimate for the nonconvexity degree α in terms of the weak convexity parameter R and the set diameter in Euclidean spaces of dimension greater than two remains open.

Keywords: α-set, weakly convex set, generalized convex set, diameter of a set, Chebyshev radius, convex hull.

MSC: 52A30

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-276-285

Введение

Впервые α-множества были введены в 2009 г. в работе [1] для классификации множеств достижимости по степени их невыпуклости и относятся к так называемым обобщенно выпуклым множествам. Интересен вопрос о соотношении α-множеств с другими обобщениями выпуклых множеств (см., например, [2–5]). В данной работе рассмотрим их взаимосвязь со слабо выпуклыми множествами [6]. В [7, теорема 1] доказано, что в $\mathbb{R}^2$ для связного слабо выпуклого по Ефимову — Стечкину множества M с константой R выполняется следующая оценка на степень невыпуклости α в терминах α-множеств, а именно (с учетом равенства $\arccos(1-2t^2) = 2\arcsin t$ для $t \in [0,1]$),

$$\alpha \leqslant 2\arcsin\frac{\operatorname{diam}(M)}{2R}. \tag{0.1}$$

В [8, лемма 1] показано, что в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности $n \in \mathbb{N}$ для замкнутого слабо выпуклого по Виалю множества M с константой R выполняется более слабая оценка

$$\alpha \leqslant 2\arcsin\frac{R_{\text{чеб.}}(M))}{R}, \tag{0.2}$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00424, https://rscf.ru/project/24-21-00424/.

так как в общем случае удвоенный чебышевский радиус $2R_{\text{чеб.}}(M)$ больше диаметра $\mathrm{diam}(M)$ множества M.

Заметим, что в $\mathbb{R}^2$ вид слабо выпуклого множества (по Виалю или по Ефимову — Стечкину) для нас неважен в силу следующего утверждения.

Предложение 1. *Для множества $X \subset \mathbb{R}^2$ равносильны следующие условия*:

(1) X — *связное слабо выпуклое по Ефимову — Стечкину множество с константой*
$$R > \frac{1}{2}\mathrm{diam}(X);$$

(2) X — *замкнутое слабо выпуклое по Виалю множество с константой* $R > \dfrac{1}{2}\mathrm{diam}(X)$.

Доказательство. Действительно, пусть выполняется (1). Тогда по [6, лемма 1.3.4] оно замкнуто, что в конечномерном пространстве (в частности, в $\mathbb{R}^2$) равносильно локальной компактности. По [7, лемма 2] множество X обладает чебышевским слоем толщины R, что при обладании им локальной компактностью эквивалентно тому, что множество X является слабо выпуклым по Виалю с той же константой R (см. [6, теорема 1.7.4].

Обратно, по [6, теорема 1.8.1] любое замкнутое слабо выпуклое по Виалю с константой R множество в гильбертовом пространстве является слабо выпуклым по Ефимову — Стечкину с той же константой, а из условия $R > \dfrac{1}{2}\mathrm{diam}(X)$ в силу [6, теорема 1.4.1] и следует его связность. □

Заметим, что условия замкнутости и связности в этом случае вовсе не обременительны, так как любое α-множество с $\alpha < \pi$ является замкнутым по определению и односвязным в $\mathbb{R}^2$ (см. [9, §2]).

Однако в пространствах более высокой размерности слабо выпуклые по Ефимову — Стечкину множества могут быть более “плохими” (см., например, [6, лемма 1.3.5]) без дополнительных условий, поэтому будем рассматривать слабо выпуклые по Виалю множества.

Целью данной статьи является усиление оценки (0.2).

1. Обозначения и определения

Будем использовать следующие обозначения [10].

Обозначим:

- символом $\mathrm{co}\, M$ выпуклую оболочку множества M;
- $\langle x_*, x^*\rangle$ — скалярное произведение x_* и x^* из $\mathbb{R}^n$;
- $||x_*|| = \langle x_*, x_*\rangle^{1/2}$ — стандартную норму (порожденную скалярным произведением) в евклидовом пространстве;
- $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| \leqslant r\}$ — замкнутый шар с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r \geqslant 0$;
- $\angle(x_*, x^*) = \arccos \dfrac{\langle x_*, x^*\rangle}{||x_*|| \cdot ||x^*||} \in [0,\pi]$ — угол между векторами x_* и x^*;
- $\mathrm{diam}(M) = \sup\limits_{x,y\in M} ||x-y||$ — диаметр множества M;
- $\mathrm{con}\, M = \{y = \lambda\, x : \lambda \geqslant 0, x \in M\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на множество M, с вершиной в нуле.

Под проекцией p^* точки z^* на множество M мы понимаем ближайшую к z^* точку из M. Множество всех проекций точки z^* на множество M обозначим через $\Omega_M(z^*)$.

Отметим, что множество проекций $\Omega_M(z^*)$ может быть несчетным для невыпуклого множества M или пустым для открытого множества M. Если $z^* \in M$, то $\Omega_M(z^*) = \{z^*\}$.

О п р е д е л е н и е 1 [11]. Пусть A — замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Через $H_A(z^*) = \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*)$ обозначим конус, натянутый на множество $\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* \colon z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\}$. Определим функцию $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$. Полагаем $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Множество A назовем *α-множеством* с числом $\alpha = \alpha_A$.

О п р е д е л е н и е 2 [6]. Множество A в нормированном пространстве E называется *слабо выпуклым по Ефимову — Стечкину* с константой $R > 0$, если существует непустое множество $A_1 \subset E$ такое, что $A = \bigcap\limits_{a \in A_1} \big(E \setminus \operatorname{int} B(a, R)\big)$.

О п р е д е л е н и е 3 [6]. Пусть в нормированном пространстве E заданы две точки $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ и число $R \geqslant \dfrac{||x^{(1)} - x^{(0)}||}{2}$. Множество

$$D_R(x^{(0)}, x^{(1)}) = \bigcap_{a \in E \colon \{x^{(0)}, x^{(1)}\} \subset B(a, R)} B(a, R)$$

называется *сильно выпуклым отрезком*.

О п р е д е л е н и е 4 [6]. Множество A в нормированном пространстве называется *слабо выпуклым по Виалю* с константой $R > 0$, если для любых двух точек $x^{(0)}, x^{(1)} \in A$ таких, что $0 < ||x^{(1)} - x^{(0)}|| < 2R$, существует точка $x \in D_R(x^{(0)}, x^{(1)}) \cap A$, не совпадающая с точками $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$.

О п р е д е л е н и е 5 [12]. Пусть M — ограниченное множество вещественного банахова пространства B. Элемент $x^{(0)} \in B$ называется *чебышевским центром* множества M, если

$$\sup_{x \in M} ||x - x^{(0)}|| = R_{\text{чеб.}}(M) = \inf_{y \in B} \sup_{x \in M} ||x - y||.$$

Величина $R_{\text{чеб.}}(M)$ называется *чебышевским радиусом* множества M.

В [12, теорема 1] доказано, что для любого ограниченного множества M в гильбертовом пространстве существует чебышевский центр $x^{(0)} \in \operatorname{cl}(\operatorname{co} M)$, где $\operatorname{cl}(\operatorname{co} M)$ — замыкание выпуклой оболочки множества M.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $x_1, x_2, e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, $\langle e, x_i \rangle \geqslant \gamma \geqslant 0$ при $i = 1, 2$. Тогда*

$$\|x_1 + x_2\|^2 \geqslant (\|x_1\| - \|x_2\|)^2 + 4\gamma^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $i = 1, 2$ обозначим $\gamma_i = \langle e, x_i \rangle$, $y_i = x_i - \gamma_i e$. Тогда $\gamma_i \geqslant \gamma$, $\langle e, y_i \rangle = 0$, $x_i = y_i + \gamma_i e$, $\|x_i\| = \sqrt{\|y_i\|^2 + \gamma_i^2}$ при $i = 1, 2$. Следовательно,

$$(\|x_1\| - \|x_2\|)^2 \leqslant (\|y_1\| - \|y_2\|)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2,$$

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|y_1 + y_2\|^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2 \geqslant (\|y_1\| - \|y_2\|)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2.$$

Полагая для определенности, что $\gamma_1 \geqslant \gamma_2$, и используя неравенство $\gamma_2 \geqslant \gamma$, получаем

$$(\gamma_1 + \gamma_2)^2 = (\gamma_1 - \gamma_2 + 2\gamma)^2 \geqslant (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 4\gamma^2.$$

Поэтому $\|x_1 + x_2\|^2 \geqslant (\|y_1\| - \|y_2\|)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2 \geqslant (\|y_1\| - \|y_2\|)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 4\gamma^2 \geqslant (\|x_1\| - \|x_2\|)^2 + 4\gamma^2$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $x_1, x_2, e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, $\langle e, x_i\rangle \geqslant \gamma > 0$ *при* $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\left\| \frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|} \right\| \leqslant \frac{2\|x_1 - x_2\|}{\sqrt{\|x_1 - x_2\|^2 + 4\gamma^2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $d = \|x_1 - x_2\|$, $\Delta = \Big|\|x_1\| - \|x_2\|\Big|$, $\varepsilon = \left\| \frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|} \right\|$. Тогда в силу леммы 1 имеем $\|x_1 + x_2\|^2 \geqslant \Delta^2 + 4\gamma^2$. Отсюда и из равенства параллелограмма $2\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right) = \|x_1 - x_2\|^2 + \|x_1 + x_2\|^2$ получаем неравенство

$$2\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right) \geqslant d^2 + \Delta^2 + 4\gamma^2. \tag{2.1}$$

Так как $4\|x_1\| \cdot \|x_2\| = 2\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right) - 2\Delta^2$, то согласно неравенству (2.1) получаем цепочку неравенств

$$d^2 + 4\gamma^2 - \Delta^2 \leqslant 4\|x_1\| \cdot \|x_2\| \leqslant 2\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right). \tag{2.2}$$

Заметим, что

$$\varepsilon^2 = 2 - \frac{2\langle x_1, x_2\rangle}{\|x_1\| \cdot \|x_2\|}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим случай $\langle x_1, x_2\rangle \geqslant 0$. В этом случае согласно второму из неравенств в цепочке (2.2) имеем

$$\varepsilon^2 \leqslant 2 - \frac{4\langle x_1, x_2\rangle}{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} = \frac{2\|x_1 - x_2\|^2}{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}.$$

Используя неравенство (2.1), приходим к цепочке неравенств

$$\varepsilon^2 \leqslant \frac{4d^2}{d^2 + \Delta^2 + 4\gamma^2} \leqslant \frac{4d^2}{d^2 + 4\gamma^2},$$

из которой вытекает доказываемое неравенство.

Рассмотрим теперь случай $\langle x_1, x_2\rangle < 0$. В этом случае, используя равенство (2.3), получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= 2 - \frac{4\langle x_1, x_2\rangle}{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} + 4\langle x_1, x_2\rangle\Big(\frac{1}{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} - \frac{1}{2\|x_1\| \cdot \|x_2\|}\Big) \\ &= \frac{2d^2}{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} - \frac{4\langle x_1, x_2\rangle\Delta^2}{2\|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)}.\end{aligned}$$

В силу первого из неравенств в цепочке (2.2) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &\leqslant \frac{2d^2}{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} - \frac{8\langle x_1, x_2\rangle\Delta^2}{(d^2 + 4\gamma^2 - \Delta^2) \cdot (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)} \\ &\leqslant \frac{2d^2}{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} + \frac{4\Delta^2}{d^2 + 4\gamma^2 - \Delta^2}\Big(\frac{d^2}{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} - 1\Big).\end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (2.1) следует, что

$$\varepsilon^2 \leqslant \frac{4d^2}{d^2 + \Delta^2 + 4\gamma^2} + \frac{4\Delta^2}{d^2 + 4\gamma^2 - \Delta^2}\Big(\frac{2d^2}{d^2 + \Delta^2 + 4\gamma^2} - 1\Big).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Big(\varepsilon^2 - \frac{4d^2}{d^2 + 4\gamma^2}\Big)(d^2 + \Delta^2 + 4\gamma^2) &\leqslant 4d^2 + \frac{4\Delta^2}{d^2 + 4\gamma^2 - \Delta^2}(d^2 - \Delta^2 - 4\gamma^2) - 4d^2\Big(1 + \frac{\Delta^2}{d^2 + 4\gamma^2}\Big) \\ &= 4\Delta^2\Big(\frac{d^2 - \Delta^2 - 4\gamma^2}{d^2 + 4\gamma^2 - \Delta^2} - \frac{d^2}{d^2 + 4\gamma^2}\Big) = -\frac{16\Delta^2\gamma^2(d^2 + \Delta^2 + 4\gamma^2)}{(d^2 + 4\gamma^2 - \Delta^2)(d^2 + 4\gamma^2)} < 0.\end{aligned}$$

Отсюда снова получаем неравенство $\varepsilon^2 \leqslant \dfrac{4d^2}{d^2 + 4\gamma^2}$, что завершает доказательство. □

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, выпуклое по Виалю с константой $R \geqslant R_{чеб.}(A)$. Тогда множество A является α-множеством с числом*

$$\alpha \leqslant 2 \arcsin \frac{\operatorname{diam}(A)}{2\sqrt{R^2 - R^2_{чеб.}(A) + \frac{1}{4}\operatorname{diam}^2(A)}}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть z^* — произвольная точка из $\mathbb{R}^n \backslash A$, имеющая более одной проекции на A. Согласно [6, теорема 1.7.1] множество A как замкнутое и слабо выпуклое по Виалю с константой R обладает чебышевским слоем толщины R, или, иными словами, все точки из открытой R-окрестности множества A обладают единственной метрической проекцией на A. Следовательно, расстояние $\rho(z^*, \Omega_A(z^*)) \geqslant R$, или, иначе говоря, точка z^* является центром открытого шара $\operatorname{int} B(z^*, \hat{R})$ с радиусом

$$\hat{R} \geqslant R, \tag{3.2}$$

который не содержит точек из A, и при этом $\Omega_A(z^*) \subset \partial B(z^*, \hat{R})$, где $\partial B(z^*, \hat{R})$ — граница шара $B(z^*, \hat{R})$.

Без ограничения общности будем считать, что $z^* = 0$. Пусть точка a является чебышевским центром множества A. Тогда $A \subset B(a, R_{\text{чеб.}}(A))$. Кроме того, $\Omega_A(z^*) \subset \hat{\Omega}_A(z^*)$, где

$$\hat{\Omega}_A(z^*) = B(a, R_{\text{чеб.}}(A)) \cap \partial B(0, \hat{R}) = \{x : ||x|| = \hat{R}, ||x - a|| \leqslant R_{\text{чеб.}}(A)\}.$$

Рассмотрим множество $\hat{\Omega}_A(z^*)$. С учетом условия $||x|| = \hat{R}$ преобразуем выражение

$$||x - a||^2 = \langle x - a, x - a\rangle = ||x||^2 - 2\langle x, a\rangle + ||a||^2 = \hat{R}^2 - 2\langle x, a\rangle + ||a||^2.$$

Отсюда следует, что множество

$$\hat{\Omega}_A(z^*) = \{x : ||x|| = \hat{R}, \hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + ||a||^2 \leqslant 2\langle x, a\rangle\}. \tag{3.3}$$

Отметим, что в ходе доказательства [8, лемма 1] установлено, что

$$\operatorname{co}\hat{\Omega}_A(z^*) = \{x : ||x|| \leqslant \hat{R}, \hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + ||a||^2 \leqslant 2\langle x, a\rangle\}. \tag{3.4}$$

Покажем, что для любых ненулевых $h_* \in H_A(z^*)$ и $h^* \in H_A(z^*)$ найдутся точки $y_* \in \hat{\Omega}_A(z^*)$ и $y^* \in \hat{\Omega}_A(z^*)$ такие, что $\angle(h_*, h^*) = \angle(y_*, y^*)$ (см. рис. 1).

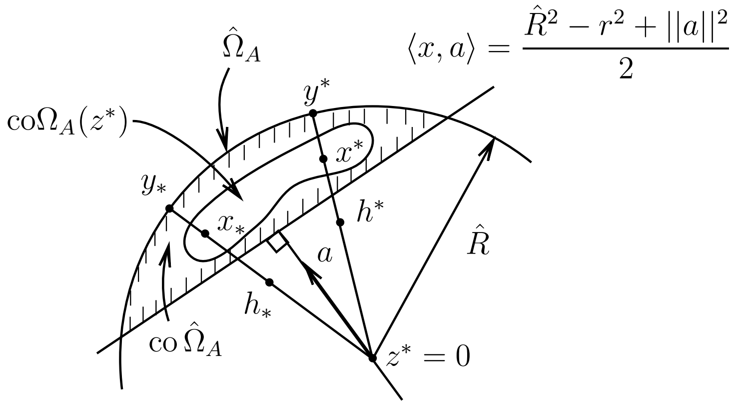

Рис. 1. Расположение точек h_*, h^*, y_* и y^*.

Определим

$$y_* = \hat{R}\frac{h_*}{||h_*||}, \quad y^* = \hat{R}\frac{h^*}{||h^*||}. \tag{3.5}$$

При таком определении $\angle(h_*, h^*) = \angle(y_*, y^*)$ осталось показать, что

$$y_* \in \hat{\Omega}_A(z^*), \quad y^* \in \hat{\Omega}_A(z^*). \tag{3.6}$$

Действительно, заметим, что поскольку $z^* = 0$, то

$$H_A(z^*) = \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*) = \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*)).$$

По определению для любых ненулевых точек h_* и h^* из конуса $\operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*))$ существуют такие точки x_*, x^* из $\operatorname{co}\Omega_A(z^*)$ и постоянные $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, что $h_* = \lambda_1 x_*$ и $h^* = \lambda_2 x^*$.

Поскольку $x_* \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)$, $x^* \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)$, $\operatorname{co}\Omega_A(z^*) \subset \operatorname{co}\hat{\Omega}_A(z^*)$, то из (3.4) следует

$$||x_*|| \leqslant \hat{R}, \quad ||x^*|| \leqslant \hat{R}, \tag{3.7}$$

$$2\langle x_*, a\rangle \geqslant \hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + ||a||^2, \quad 2\langle x^*, a\rangle \geqslant \hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + ||a||^2. \tag{3.8}$$

Теперь заметим, что, с одной стороны,

$$||y_*|| = ||y^*|| = \hat{R} \tag{3.9}$$

и ввиду (3.7) выполнено

$$||y_*|| \geqslant ||x_*||, \quad ||y^*|| \geqslant ||x^*||, \tag{3.10}$$

а с другой — в силу (3.8), (3.10) сонаправленности радиус-векторов $x_* \uparrow\uparrow y_*$ и $x^* \uparrow\uparrow y^*$ имеем

$$\begin{aligned} 2\langle y_*, a\rangle \geqslant 2\langle x_*, a\rangle \geqslant \hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + ||a||^2 > 0, \\ 2\langle y^*, a\rangle \geqslant 2\langle x^*, a\rangle \geqslant \hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + ||a||^2 > 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Вследствие выполнения (3.3), (3.9) и (3.11) справедливы включения (3.6).

Наконец, оценим искомую величину $\angle(h_*, h^*) = \angle(y_*, y^*) = \angle(y_* - z^*, y^* - z^*)$. Рассмотрим треугольник $\Delta y_* y^* z^*$. По теореме косинусов

$$\|y_* - y^*\|^2 = \|z^* - y_*\|^2 + \|z^* - y^*\|^2 - 2\|z^* - y_*\| \cdot \|z^* - y^*\| \cos\angle(y_*, y^*).$$

Отсюда

$$\angle(y_*, y^*) = \arccos\frac{\|z^* - y_*\|^2 + \|z^* - y^*\|^2 - \|y_* - y^*\|^2}{2\|z^* - y_*\| \cdot \|z^* - y^*\|}. \tag{3.12}$$

Здесь вследствие определения (3.5) и размещения центра координат в точке z^* выполняются равенства $\|z^* - y_*\| = \|z^* - y^*\| = \hat{R}$.

В силу монотонности арккосинуса функция (3.12) достигает максимума при наибольшей длине отрезка $y_* y^*$ и наименьшем значении $\hat{R}$, которое, напомним, обозначает расстояние от точки z^* до ее проекций на множество A.

Ввиду (3.2) очевидно, что наименьшее значение $\hat{R}$ ограничено снизу постоянной R. Несколько сложнее оценить сверху величину $\|y_* - y^*\|$ с учетом неравенства

$$\|x_* - x^*\| \leqslant \operatorname{diam}(\operatorname{co}\Omega_A(z_*)) = \operatorname{diam}(\Omega_A(z_*)) \leqslant \operatorname{diam}(A(z_*)).$$

Итак, заметим, что отрезок $x_* x^*$ находится во множестве $\hat{\Omega}_A(z_*)$, а точки y_* и y^* суть проекции точек x_* и x^* на $\partial B(z_*, \hat{R})$. Так как точка x_* содержится во множестве $\operatorname{co}\hat{\Omega}_A(z^*)$, то согласно формуле (3.4) имеем

$$2\langle x_*, a\rangle \geqslant \hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \|a\|^2.$$

Отсюда и из неравенства $\hat{R} > R_{\text{чеб.}}(A)$ следует, что $a \neq 0$. Обозначим $e = a/\|a\|$. Тогда

$$\langle e, x_* \rangle \geqslant \frac{\hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \|a\|^2}{2\|a\|} \geqslant \hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A).$$

Аналогично $\langle e, x^* \rangle \geqslant \hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A)$. Применяя лемму 2, получаем

$$\left\| \frac{x_*}{\|x_*\|} - \frac{x^*}{\|x^*\|} \right\| \leqslant \frac{\|x_* - x^*\|}{\sqrt{\hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \frac{1}{4}\|x_* - x^*\|^2}} \leqslant \frac{\operatorname{diam}(A)}{\sqrt{\hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \frac{1}{4}\operatorname{diam}^2(A)}}.$$

Поэтому

$$\|y_* - y^*\| = \hat{R} \left\| \frac{x_*}{\|x_*\|} - \frac{x^*}{\|x^*\|} \right\| \leqslant \frac{\hat{R}\operatorname{diam}(A)}{\sqrt{\hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \frac{1}{4}\operatorname{diam}^2(A)}}$$

$$\leqslant \frac{R\operatorname{diam}(A)}{\sqrt{R^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \frac{1}{4}\operatorname{diam}^2(A)}}.$$

Отсюда с учетом (3.12) равенства $\angle(h_*, h^*) = \angle(y_*, y^*)$ и произвольности выбора пары (h_*, h^*) в $H_A(z^*)$, как и самой точки z_* получаем оценку

$$\alpha \leqslant \arccos\left(1 - \frac{R^2}{R^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \frac{1}{4}\operatorname{diam}^2(A)} \frac{\operatorname{diam}^2(A)}{2R^2}\right),$$

из которой в силу равенства $\arccos(1 - 2t^2) = 2\arcsin t$ при $t \in [0, 1]$ следует искомая оценка (3.1). $\square$

З а м е ч а н и е 1. По построению очевидно, что $\|y_* - y^*\| < 2R_{\text{чеб.}}(A)$ при $\operatorname{diam}(A) < 2R_{\text{чеб.}}(A)$. Если грубо оценить $\|y_* - y^*\| \leqslant 2R_{\text{чеб.}}(A)$, то мы придем к ранее полученной оценке (0.2).

З а м е ч а н и е 2. Полученое в ходе доказательства теоремы 1 неравенство

$$\|y_* - y^*\| \leqslant \frac{\hat{R}\operatorname{diam}(A)}{\sqrt{\hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \frac{1}{4}\operatorname{diam}^2(A)}}$$

имеет следующую геометрическую интерпретацию. Напомним, что точки y_* и y^* представляют собой проекции точек x_* и x^* на $\partial B(z_*, \hat{R})$. Нестрого покажем, что наибольшая длина отрезке $y_* y^*$ достигается при следующем симметричном расположении отрезка $x_* x^*$ (см. рис. 2).

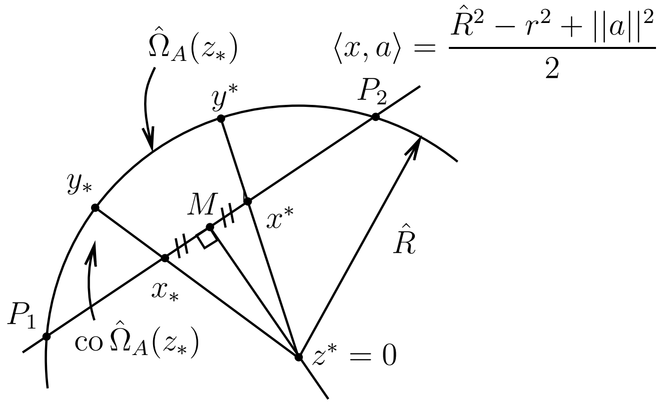

Рис. 2. “Оптимальное” расположение точек x_* и x^*.

Действительно, любое расположение отрезка x_*x^* в сечении $\mathrm{co}\,\hat{\Omega}_A(z_*)$ плоскостью (обозначим ее через ω), проходящей через точку z_*, может быть достигнуто с помощью четырех действий:

1) выбор плоскости ω;
2) выбор длины x_*x^*;
3) выбор расстояния между серединой M отрезка x_*x^* и точкой z^*;
4) выбор угла $\angle z_*Mx_*$.

Если ω не делит $\mathrm{co}\,\hat{\Omega}_A(z_*)$ пополам (с образованием наидлиннейшей дуги $\overset{\frown}{P_1P_2}\subset \partial B(z_*, \hat{R})$ такой, что $\|P_1 - P_2\| = R_{\text{чеб.}}(A)$, что следует из определения $\hat{\Omega}_A(z_*)$), то это только уменьшает наши возможности по увеличению $\|y_* - y^*\|$. Для достижения максимума $\|y_* - y^*\|$, очевидно, следует выбирать максимальную длину x_*x^*, т. е. равную $\mathrm{diam}(A)$. Также вне зависимости от других параметров величина $\|y_* - y^*\|$ увеличивается при уменьшении $\|z_* - M\|$. Наконец, при фиксированных M, ω и длине x_*x^*, очевидно, что наибольшая длина отрезка y_*y^* достигается при $x_*x^* \perp z_*M$.

Если же отрезок x_*x^* расположен так, как рис. 2 и $\|x_* - x^*\| = \mathrm{diam}(A)$, $\|P_1 - P_2\| = R_{\text{чеб.}}(A)$, то можно вычислить

$$\|y_* - y^*\| = \frac{\hat{R}\,\mathrm{diam}(A)}{\sqrt{\hat{R}^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \dfrac{1}{4}\mathrm{diam}^2(A)}}\,.$$

Заключение

Полученное усиление оценки (0.2) по всей видимости неокончательное. Можно заметить, что отрезок x_*x^* не может абсолютно произвольно располагаться внутри $\mathrm{co}\,\hat{\Omega}_A(z^*)$. Скорее всего, “оптимальное” расположение отрезка x_*x^*, показанное на рис. 2, недостижимо при $\|x_* - x^*\| = \mathrm{diam}(A)$, в связи с чем возможно дальнейшее усиление оценки (0.2). Также интересен поиск контрпримера в пространствах размерности $n \geqslant 3$, для которого оценка (0.1) нарушается.

В завершение заметим, что использование новой оценки (3.1) вместо оценки (0.2) позволяет соответствующим образом усилить теорему 1 из [8] о росте степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем в терминах α-множеств.

Благодарности

Авторы весьма признательны за полезные замечания и обсуждения доктору физико-математических наук, профессору Г. Е. Иванову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.** α-Множества и их свойства / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.2004, № 543-В2004.
2. **Зелинский Ю.Б.** Выпуклость. Избранные главы / Институт математики НАН Украины. Киев, 2012. 280 с.
3. **Michael E.** Paraconvex sets // Mathematica Scandinavica. 1959. Vol. 7, no. 2. P. 312–315.
4. **Ngai H.V., Penot J.-P.** Paraconvex functions and paraconvex sets // Studia Mathematica. 2008. Vol. 184, no. 1. P. 1–29.
5. **Семенов П.В.** Функционально паравыпуклые множества // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 6. С. 74–81.
6. **Иванов Г.Е.** Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006.
7. **Ушаков В.Н., Ершов А.А.** Оценка роста степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем в терминах α-множеств // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 73–79.

8. **Ушаков В.Н., Ершов А.А., Матвийчук А.Р.** Об оценке степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем // Тр. МИАН. 2021. Т. 315. С. 261–270.

9. **Ушаков В.Н., Успенский А.А.** Теоремы об отделимости α-множеств в евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 277–291.

10. **Половинкин Е.С., Балашов М.В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 438 с.

11. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Ершов А.А.** Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их приложения в теории управления // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14, вып. 3. С. 261–272.

12. **Гаркави А.Л.** О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 6. С. 139–145.

Поступила 30.05.2024
После доработки 9.07.2024
Принята к публикации 15.07.2024

Ушаков Владимир Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ale10919@yandex.ru

REFERENCES

1. Uspenskii A.A., Ushakov V.N., Fomin A.N. *α-Mnozhestva i ikh svoystva* [α-Sets and their properties]. Yekaterinburg, Deposited at VINITI on 02.04.2004, № 543-V2004, 62 p.

2. Zelinskii Yu.B. *Vypuklost'. Izbrannyye glavy* [Convexity. Selected topics]. Kyiv, Inst. Math. NASU Publ., 2012, 280 p. doi: 10.13140/RG.2.1.4282.0641

3. Michael E. Paraconvex sets. *Math. Scand.*, 1959, vol. 7, no. 2, pp. 372–376.

4. Ngai H.V., Penot J.-P. Paraconvex functions and paraconvex sets. *Studia Math.*, 2008, vol. 184, no. 1, pp. 1–29.

5. Semenov P.V. Functionally paraconvex sets. *Math. Notes*, 1993, vol. 54, iss. 6, pp. 1236–1240. doi: 10.1007/BF01209085

6. Ivanov G.E. *Slabo vypuklyye mnozhestva i funktsii: teoriya i prilozheniya* [Weakly convex sets and functions: theory and applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 352 p. ISBN: 978-5-9221-0738-9 .

7. Ushakov V.N., Ershov A.A. Estimation of the growth of the degree of nonconvexity of reachable sets in terms of α-sets. *Dokl. Math.*, 2020, vol. 102, no. 3, pp. 532–537. doi: 10.1134/S1064562420060198

8. Ushakov V.N., Ershov A.A., Matviychuk A.R. On estimating the degree of nonconvexity of reachable sets of control systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 315, suppl. 1, pp. 247–256. doi: 10.1134/S0081543821050199

9. Ushakov V.N., Uspenskii A.A. Theorems on the separability of α-sets in Euclidean space. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 231–245. doi: 10.1134/S0081543817090255

10. Polovinkin E.S., Balashov M.V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 440 p. ISBN: 978-5-9221-0896-6 .

11. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Ershov A.A. Alpha-sets in finite-dimensional Euclidean spaces and their applications in control theory. *Vestn. St.-Peterbg. Univ. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 261–272. doi: 10.21638/11701/spbu10.2018.307
12. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and convex hull of a set. *Usp. Mat. Nauk*, 1964, vol. 19, no. 6, pp. 139–145.

Received May 30, 2024
Revised July 9, 2024
Accepted July 15, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00424, https://rscf.ru/en/project/24-21-00424/).

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Corresponding member of RAS, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ushak@imm.uran.ru .

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ale10919@yandex.ru .

Cite this article as: V. N. Ushakov, A. A. Ershov. On the relation between α-sets and weakly convex sets. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 276–285 .