ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 4 2024

УДК 517.53

ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ МНОГОЧЛЕНОВ, ЗАДАННЫХ С ПОГРЕШНОСТЬЮ

А. А. Трембач

Исследуется задача оптимальной экстраполяции многочленов, заданных с погрешностью на компакте. Устанавливается ее взаимосвязь с задачей Чебышёва о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля на компакте. Получено точное решение задачи оптимальной экстраполяции многочленов для случая, когда компакт является лемнискатой. Выписано точное решение задачи экстраполяции с отрезка $[-1,1]$ на вещественную прямую.

Ключевые слова: оптимальная экстраполяция многочленов; оптимальное восстановление функционалов; многочлен Чебышёва компакта.

A. A. Trembach. Optimal extrapolation of polynomials given with error.

The problem of optimal extrapolation of polynomials given with an error on a compact set is studied. Its relationship with Chebyshev's problem on a polynomial that least deviates from zero on a compact set is established. An exact solution to the problem of optimal extrapolation of polynomials is obtained for the case when the compact set is a lemniscate. An exact solution is written for the problem of extrapolation from the interval $[-1,1]$ to the real line.

Keywords: optimal extrapolation of polynomials, optimal recovery of functionals, Chebyshev polynomial of a compact set.

MSC: 30C10, 41A10, 30A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-265-275

1. Постановка и обсуждение задач

1.1. Задача наилучшей экстраполяции многочлена с компакта

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ пространство многочленов степени не более чем n с комплексными коэффициентами. Пусть K — компакт комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $C(K)$ обозначим пространство непрерывных на K комплекснозначных функций, наделенное равномерной нормой

$$\|f\|_{C(K)} = \max\{|f(z)|\colon z \in K\}, \quad f \in C(K).$$

Целью нашего исследования является задача наилучшей (оптимальной) экстраполяции многочлена с компакта K. Пусть на K известна функция f_δ, уклоняющаяся от неизвестного многочлена P_n не более чем на δ : $\|P_n - f_\delta\|_{C(K)} \le \delta$. Для точки $z \in \mathbb{C}$ необходимо наилучшим способом (с наименьшей возможной погрешностью) вычислить значение $P_n(z)$ многочлена P_n в точке z. Строгая постановка задачи следующая. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех функционалов на $C(K)$ и $\theta \in \mathfrak{R}$. Величина

$$U_n(\theta, z; \delta) := \sup\left\{|P_n(z) - \theta f_\delta|\colon P_n \in \mathcal{P}_n,\ f_\delta \in C(K),\ \|P_n - f_\delta\|_{C(K)} \le \delta\right\}$$

является погрешностью экстраполяции в точку z методом θ многочленов степени не более чем n, приближенно заданных (с погрешностью δ) на компакте K. Тогда *величина оптимальной экстраполяции* в точку z многочленов степени не более чем n, приближенно заданных на компакте K, определяется равенством

$$\mathcal{E}_n(z, \delta) := \inf\{U(\theta, z; \delta)\colon \theta \in \mathfrak{R}\}. \tag{1.1}$$

Задача состоит в вычислении величины (1.1) и нахождении оптимального метода экстраполяции — функционала, на котором в (1.1) достигается нижняя грань.

Задача наилучшей экстраполяции является конкретным вариантом задачи оптимального восстановления, а именно, задачей оптимального восстановления функционала — значения функции в точке на классе $\mathcal{P}_n$ по δ-приближенным значениям функции (многочлена) на K. Более полную информацию о задаче оптимального восстановления можно найти в [1; 2] (см. также ссылки на литературу, приведенные там). В частности, из общей теории оптимального восстановления известно [1, гл. 2, § 2.2; 2, § 2], что если восстанавливаемый функционал линейный, а класс выпуклый и уравновешенный, то среди оптимальных существует метод, являющийся линейным ограниченным функционалом, и величина оптимального восстановления равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала.

Для изучаемой задачи модулем непрерывности функционала — значения функции в точке z на (выпуклом и уравновешенном) классе $\mathcal{P}_n$ является величина

$$\omega_n(K, z; \delta) := \sup\left\{|P_n(z)| : P_n \in \mathcal{P}_n,\ \|P_n\|_{C(K)} \le \delta\right\}, \quad \delta > 0. \tag{1.2}$$

Таким образом, задача вычисления (1.1) сводится к вычислению величины (1.2). Многочлены, на которых в (1.2) достигается верхняя грань, в дальнейшем будем называть *экстремальными многочленами.*

Нетрудно понять, что по δ величина (1.2) линейная и справедливо равенство

$$\omega_n(K, z; \delta) = \kappa_n(K, z)\,\delta, \tag{1.3}$$

в котором множитель

$$\kappa_n(K, z) = \omega_n(K, z; 1) = \sup\left\{|P_n(z)| : P_n \in \mathcal{P}_n,\ \|P_n\|_{C(K)} \le 1\right\} \tag{1.4}$$

является нормой функционала — значения функции в точке z на подпространстве многочленов $\mathcal{P}_n$ пространства $C(K)$. Соответственно $\kappa_n(K, z)$ является точной (наименьшей) константой неравенства

$$|P_n(z)| \le \kappa_n(K, z)\|P_n\|_{C(K)}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n. \tag{1.5}$$

В итоге, учитывая (1.3), получаем цепочку равенств

$$\mathcal{E}_n(K, z; \delta) = \omega_n(K, z; \delta) = \kappa_n(K, z)\delta. \tag{1.6}$$

Оценка сверху константы $\kappa_n(K, z)$ следует из неравенства Уолша (см. [3, гл. 4, § 4.6])

$$|P_n(z)| \le |\Phi(z)|^n\|P_n\|_{C(K)}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n. \tag{1.7}$$

Здесь Φ — функция, конформно отображающая внешность $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ компакта на внешность единичного круга, переводящая бесконечно удаленную точку в себя: $\Phi(\infty) = \infty$. Неравенство (1.7) рассматривается в случае, если $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ связно.

1.2. Задача Чебышёва о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля на компакте

Обозначим через $\tau_n(K)$ величину *наименьшего уклонения от нуля на компакте* K многочленов из $\mathcal{P}_n$ точной степени n со старшим коэффициентом, равным единице

$$\tau_n(K) := \inf\Big\{\|P_n\|_{C(K)} \colon P_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k z^k,\ p_k \in \mathbb{C}\Big\}. \tag{1.8}$$

Многочлен $\mathrm{T}_n[K]$, на котором достигается нижняя грань в (1.8), называют *многочленом Чебышёва степени n компакта K.*

Задачу об алгебраических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на компакте в равномерной норме, поставил и решил П. Л. Чебышёв в 1854 г. [4] в случае, когда компакт K является отрезком $[-1,1]$. В этом случае многочлен $T_n = \mathrm{T}_n[-1,1]$ — это классический многочлен Чебышёва первого рода

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos z) = \frac{1}{2^n}((z+\sqrt{z^2-1})^n + (z-\sqrt{z^2-1})^n).$$

В дальнейшем будет важен еще один тип компактов — лемнискаты. Для многочлена

$$Q_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} q_k z^k \in \mathcal{P}_n$$

и числа $s > 0$ определим *лемнискату* $L = L(Q_n, s) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |Q_n(\zeta)| = s\}$ и пару открытых множеств

$$D_0 = D_0(Q_n, s) := \{z \in \mathbb{C}\colon |Q_n(z)| < s\}, \quad D_\infty = D_\infty(Q_n, s) := \{z \in \mathbb{C}\colon |Q_n(z)| > s\},$$

которые будем называть соответственно внутренностью и внешностью лемнискаты L. Внешность лемнискаты D_∞ является неограниченной областью. Внутренность лемнискаты D_0 содержит все нули многочлена Q_n и имеет не более чем n компонент связности $D_{0,j}$, $j = \overline{1,m}$, $m \le n$. Будем обозначать через L_j границу j-й компоненты внутренности лемнискаты: $L_j = \partial D_{0,j}$, $j = \overline{1,m}$. Каждая из компонент представляет собой, по крайней мере, кусочно-гладкую замкнутую кривую.

В случае, когда компакт является лемнискатой ($K = L(Q_n, s)$), имеет место следующее утверждение.

Теорема A (Г. Фабер [5]). *Многочленом Чебышёва степени n лемнискаты $L(Q_n, s)$ является порождающий ее многочлен $\mathrm{T}_n[L(Q_n, s)] = Q_n$, и справедливо равенство*

$$\tau_n(L(Q_n, s)) = \|Q_n\|_{C(L)} = s.$$

При этом для логарифмической емкости $L(Q_n, s)$ справедливо равенство $\operatorname{cap}(L(Q_n, s)) = s^{1/n}$.

Теорема A может быть получена из теорем 1 и 3, которые будут доказаны ниже.

Задаче Чебышёва о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на компакте, посвящена обширная литература (см. монографии [6; 7], статьи [8–10] и приведенную в них библиографию).

2. Связь наилучшей экстраполяции многочлена с задачей Чебышёва

Для произвольного компакта K обозначим через $\Lambda = \Lambda(K, n)$ лемнискату его многочлена Чебышёва

$$\Lambda(K, n) := L(\mathrm{T}_n[K], \tau_n(K)) = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\mathrm{T}_n[K](\zeta)| = \tau_n(K)\},$$

а через $\Delta_0 = \Delta_0(K, n)$ и $\Delta_\infty = \Delta_\infty(K, n)$ — ее лемнискатные множества

$$\Delta_0(K, n) := D_0(\mathrm{T}_n[K], \tau_n(K)), \quad \Delta_\infty(K, n) := D_\infty(\mathrm{T}_n[K], \tau_n(K)).$$

Отметим отдельно случай когда $\tau_n(K) = 0$. Это означает, что K содержит не более чем n различных точек. Тогда $\kappa_n(z, K) = +\infty$. Действительно, для любого $c > 0$ справедливо $\|c\mathrm{T}_n[K]\|_{C(K)} = 0$. С другой стороны, $|c\mathrm{T}_n[K](z)|$, $z \notin K$, неограниченно возрастает при $c \to \infty$.

В случае произвольного компакта K многочлен Чебышёва, по крайней мере, дает оценку снизу величины $\kappa_n(K, z)$.

Лемма 1. *Пусть K — компакт комплексной плоскости и $\tau_n(K) \neq 0$. Тогда для произвольного $\delta > 0$ и точки $z \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство*

$$\kappa_n(K, z) \geq \max\left\{1;\ \tau_n^{-1}(K)|\mathrm{T}_n[K](z)|\right\} = \begin{cases} 1, & z \in \Delta_0, \\ \tau_n^{-1}(K)|\mathrm{T}_n[K](z)|, & z \in \Delta_\infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения величины $\kappa_n(K, z)$ следует, что для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ такого, что $\|P_n\|_{C(K)} \leq 1$, справедливо неравенство $\kappa_n(K, z) \geq |P_n(z)|$. Рассмотрев многочлены $I(z) \equiv 1$ и $\tau_n^{-1}\mathrm{T}_n[K](z)$, получим оценку снизу (2.1).

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть K — компакт комплексной плоскости и $\tau_n(K) \neq 0$. Тогда справедливо равенство*

$$\tau_n(K) = \lim_{z\to\infty} |z|^n \kappa_n^{-1}(K, z). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 вытекает оценка снизу величины наименьшего уклонения многочленов от нуля на компакте

$$\tau_n(K) \geq \kappa_n^{-1}(K, z)|\mathrm{T}_n(z)| = |z|^n \kappa_n^{-1}(K, z)\frac{|\mathrm{T}_n(z)|}{|z|^n}, \quad z \in \Delta_\infty.$$

Перейдя в ней к пределу при $z \to \infty$, получим неравенство

$$\tau_n(K) \geq \overline{\lim_{z\to\infty}} |z|^n \kappa_n^{-1}(K, z). \tag{2.3}$$

Получим оценку сверху. Для этого будем использовать многочлен

$$P^*_{n,z}(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,z}\zeta^k,$$

экстремальный в (1.4). Исследуем свойства коэффициентов многочлена $P^*_{n,z}$ в зависимости от точки экстраполяции z. Во-первых, коэффициенты являются равномерно ограниченными. Действительно, так как $\tau_n(K) \neq 0$ (K содержит хотя бы $n+1$ точку), имеет место неравенство разных метрик

$$\max_{1\leq k\leq n} |c_k| \leq A_n(K)\|P_n\|_{C(K)}, \quad P_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} c_k\zeta^k \in \mathcal{P}_n,$$

в котором константа $A_n(K)$ конечна, вследствие эквивалентности норм в конечномерных пространствах $\mathcal{P}_n$. Отсюда и из равенства $\|P^*_{n,z}\|_{C(K)} = 1$ получим оценку

$$\max_{1\leq k\leq n} |c_{k,z}| \leq A_n(K), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Во-вторых, свойство отделимости от нуля старшего коэффициента $c_{n,z}$ при достаточно больших z. Точнее, существуют $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ такие, что для любого $z, |z| > R$, справедливо неравенство $|c_{n,z}| \geq \varepsilon$. Предположим, что утверждение выше не верно, тогда для произвольных $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ найдется $z_{\varepsilon,R}, |z_{\varepsilon,R}| > R$, такая, что $|c_{n,z_{\varepsilon,R}}| < \varepsilon$. Для натуральных m обозначим через z_m точку $z_{m,1/m}$, при $R = m$, $\varepsilon = 1/m$. Тогда имеют место равенства

$$\lim_{m\to\infty} c_{n,z_m} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} |z_m| = +\infty.$$

Отсюда для многочлена $e_n(\zeta) = \zeta^n$, учитывая ограниченность коэффициентов $P^*_{n,z}$, имеем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|P^*_{n,z_m}(z_m)|}{|e_n(z_m)|/\|e_n\|_{C(K)}} = \lim_{m\to\infty} \|e_n\|_{C(K)}\left|c_{n,z_m} + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,z_m} z_m^{k-n}\right| = 0.$$

Это противоречит экстремальности P^*_{n,z_m} для всех m, начиная с некоторого. Следовательно, найдется $R > 0$ такое, что $c_{n,z}$ отделен от нуля при $|z| > R$.

Перейдем к оценке сверху величины $\tau_n(K)$. Из определения $\tau_n(K)$ и того, что $P^*_{n,z}$ экстремальный в (1.4), получаем оценку

$$\tau_n(K) \le |c_{n,z}^{-1}| \|P^*_{n,z}\|_{C(K)} = |z|^n \kappa_n^{-1}(K,z) \frac{|P^*_{n,z}(z)|}{|c_{n,z}||z|^n}, \quad |z| > R.$$

Для любого $z, |z| > R$, имеет место неравенство $|c_{n,z}^{-1} P^*_{n,z}\|_{C(K)} \le |c_{n,z}|^{-1}$, а $c_{n,z}$ отделены от нуля, следовательно, коэффициенты $c_{n,z}^{-1} P^*_{n,z}$ ограничены при $|z| > R$. Значит, перейдя в последнем неравенстве к пределу при $z \to \infty$, получим соотношение

$$\tau_n(K) \le \varliminf_{z\to\infty} |z|^n \kappa_n^{-1}(K,z). \tag{2.4}$$

Неравенства (2.3) и (2.4) дают равенство (2.2).

Теорема 1 доказана.

3. Оптимальная экстраполяция с отрезка на прямую

Рассмотрим случай, когда компакт K является отрезком $I = [-1, 1]$. На пространстве $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ многочленов степени не более чем n с вещественными коэффициентами задачи (1.2) и (1.1) восходят к *теореме Чебышёва об экстраполяции значения полинома в точке* (см., например, [11, гл. 3, § 3]). Их решение (и более общей задачи восстановления функционала — значения производной порядка k в точке $z \in \mathbb{C} \setminus I$) можно найти в работе [12].

Приведем решение задачи (1.1) оптимальной экстраполяции с отрезка I в точки вещественной оси $x \in \mathbb{R} \setminus I$ для многочленов из $\mathcal{P}_n$ с комплексными коэффициентами. Основной интерес представляет оптимальный метод в задаче оптимальной экстраполяции (1.1).

Далее нам потребуется многочлен w степени $n+1$, определяемый равенством

$$w(z) := \frac{1}{n}\,(z^2 - 1)T_n'(z) = \prod_{k=0}^{n} (z - x_k),$$

где $x_k := \cos((n-k)\pi/n)$, $k = \overline{0,n}$, — точки альтернанса многочлена Чебышёва на отрезке $I = [-1, 1]$. Используя дифференциальное уравнение для многочлена Чебышёва (см., например, [11, Гл.2, §2]), вычислим его производную

$$w'(z) = \frac{1}{n}\,\left\{(z^2-1)T_n''(z) + 2zT_n'(z)\right\} = \frac{1}{n}\,\left\{n^2 T_n(z) + zT_n'(z)\right\}. \tag{3.1}$$

С помощью интерполяционной формулы Лагранжа по сетке $\chi_{n+1} := \{x_k \colon k = \overline{0,n}\}$ для фиксированной точки $x \in \mathbb{R} \setminus I$ определим на $C(I)$ функционал

$$\Theta f = \sum_{k=0}^{n} \frac{w(x)}{w'(x_k)(x - x_k)} f(x_k). \tag{3.2}$$

Теорема 2. *Для произвольной точки $x \in \mathbb{R} \setminus I$ и $\delta > 0$ справедливы равенства*

$$\kappa_n(I,x) = 2^{n-1}|T_n(x)|; \tag{3.3}$$

$$\mathcal{E}_n(I,x;\delta) = \omega_n(I,x;\delta) = 2^{n-1}|T_n(x)|\delta. \tag{3.4}$$

Экстремальным методом в (1.1) является функционал (3.2), а экстремальными многочленами в (1.2) — многочлены cT_n, $|c| = 2^{n-1}\delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 имеем оценку снизу

$$\kappa_n(I,z) \geq \tau_n^{-1}(I)|T_n(z)| = 2^{n-1}|T_n(z)|, \quad z \in \mathbb{C}\setminus I. \tag{3.5}$$

Получим оценку сверху величины $\mathcal{E}_n(I,x;\delta)$, $x \in \mathbb{R}\setminus I$. Для этого вычислим уклонение $U_n(\Theta,x;\delta)$ для функционала Θ, определенного равенством (3.2).

Используя формулу (3.1), получаем равенства

$$w'(x_k) = nT_n(x_k) = 2^{1-n}n(-1)^{n-k}, \quad k=\overline{1,n-1};$$

$$w'(-1) = -2n^{-1}T_n'(-1) = (-1)^n 2^{2-n}; \quad w'(1) = 2n^{-1}T_n'(1) = 2^{2-n}.$$

Таким образом, знаки $w'(x_k)$ и $T_n(x_k)$ совпадают. При этом для любой фиксированной точки $x\in\mathbb{R}\setminus I$ совпадают знаки отношений $w(x)/(x-x_k)$ для всех $k=\overline{0,n}$. Тогда для произвольных $P_n\in\mathcal{P}_n$ и $f_\delta\in C(I)$ таких, что $\|P_n-f_\delta\|_{C(I)}\leq\delta$, справедлива оценка

$$|P_n(x)-\Theta f_\delta| = |\Theta(P_n-f_\delta)| \leq \sum_{k=0}^{n}\Big|\frac{w(x)}{w'(x_k)(x-x_k)}\Big||P_n(x_k)-f_\delta(x_k)|$$

$$\leq 2^{n-1}\,\delta\,\Big|\sum_{k=0}^{n}\frac{w(x)T_n(x_k)}{w'(x_k)(x-x_k)}\Big| = 2^{n-1}|T_n(x)|\delta.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$U_n(\Theta,x;\delta) \leq 2^{n-1}|T_n(x)|\delta. \tag{3.6}$$

Объединяя оценки (3.5), (3.6) и равенство (1.6), получим цепочку соотношений

$$2^{n-1}|T_n(x)|\delta \leq \kappa_n(I,x)\delta = \omega_n(I,x;\delta) = \mathcal{E}_n(I,x;\delta) \leq U_n(\Theta,x;\delta) \leq 2^{n-1}|T_n(x)|\delta.$$

Отсюда следуют равенства (3.3), (3.4), экстремальность многочлена T_n и функционала Θ.

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. В исследуемых задачах многочлен Чебышёва компакта не всегда является экстремальным. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев, например, случай компакта $K=[-1,1]$ и чисто мнимой точки $z=ix, x\in\mathbb{R}$, уже при $n=1$.

4. Решение задачи оптимальной экстраполяции с лемнискаты

Напомним, что для многочлена Q_n и числа $s>0$ лемнискатой является множество $L=L(Q_n,s):=\{\zeta\in\mathbb{C}: |Q_n(\zeta)|=s\}$. Соответственно внутренностью и внешностью лемнискаты L — открытые множества $D_0=D_0(Q_n,s):=\{z\in\mathbb{C}\colon |Q_n(z)|<s\}$ и $D_\infty=D_\infty(Q_n,s):=\{z\in\mathbb{C}\colon |Q_n(z)|>s\}$.

Вычислим величину $\kappa_n(L,z)$ и как следствие величины $\mathcal{E}_n(L,z;\delta)$ и $\omega_n(L,z;\delta)$ в случае, когда компактом является лемниската.

Теорема 3. *Пусть Q_n — произвольный многочлен степени n с единичным старшим коэффициентом и $s>0$, а $L=L(Q_n,s)$ — определяемая ими лемниската. Тогда для произвольных точки $z\in\mathbb{C}$ и $\delta>0$ справедливы равенства*

$$\kappa_n(L,z) = \max\{1;\, s^{-1}|Q_n(z)|\} = \begin{cases} 1, & z\in\overline{D_0},\\ s^{-1}|Q_n(z)|, & z\in\overline{D_\infty};\end{cases} \tag{4.1}$$

$$\mathcal{E}_n(L,z;\delta) = \omega_n(L,z;\delta) = \max\{1;\, s^{-1}|Q_n(z)|\}\,\delta, \quad \delta>0. \tag{4.2}$$

Экстремальными многочленами в (1.2) являются константы c, $|c|=\delta$, при $z\in D_0$ и многочлены $cs^{-1}Q_n$, $|c|=\delta$, при $z\in D_\infty$, и только они.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 1, получим оценку снизу

$$\kappa_n(L,z) \ge \max\left\{1;\, s^{-1}|Q_n(z)|\right\}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.3}$$

Найдем оценку сверху. Пусть P_n является произвольным многочленом из $\mathcal{P}_n$, удовлетворяющим неравенству $\|P_n\|_{C(L)} \le 1$. Тогда по принципу максимума модуля аналитической функции имеем $|P_n(z)| \le 1$, $z \in D_0$. При этом, если в какой-либо точке $z \in D_0$ имеет место равенство, то $P_n \equiv c$, $|c| = 1$.

В случае $z \in D_\infty$ оценка сверху вытекает из неравенства (1.7). Для рассматриваемого компакта — лемнискаты эта оценка следующая. Рассмотрим рациональную функцию f, задаваемую равенством

$$f(z) := \frac{sP_n(z)}{Q_n(z)}.$$

Так как степень числителя не превосходит степени знаменателя и нули многочлена Q_n принадлежат множеству D_0, то f является аналитической в D_∞ и непрерывной в $\overline{D_\infty}$ (включая точку $z=\infty$). Учитывая, что на лемнискате L имеет место неравенство $|f(\zeta)| \le 1$, по принципу максимума модуля (см., например, [13, гл. 4, § 10]) получим неравенство

$$|f(z)| = \left|\frac{sP_n(z)}{Q_n(z)}\right| \le 1, \quad z \in D_\infty.$$

При этом, если в какой-либо точке $z \in D_\infty$ имеет место равенство, то $f \equiv c$, $|c| = 1$. В результате для величины $\kappa_n(L,z)$ получаем оценку сверху

$$\kappa_n(K,z) \le \begin{cases} 1, & z \in D_0, \\ s^{-1}|Q_n(z)|, & z \in \overline{D_\infty}, \end{cases}$$

совпадающую с оценкой снизу (4.3).

Тем самым доказано равенство (4.1) и описаны экстремальные многочлены. Утверждение (4.2) следует из равенств (1.6) и (4.1).

Теорема 3 доказана.

Теорема 3 в случае, когда компакт является лемнискатой, содержит значение величины (1.1), но не дает оптимального метода экстраполяции. Такой метод получен в следующем утверждении. Его доказательсво также содержит и (иное, более конструктивное) доказательство равенств (4.2).

Для области D обозначим через $\mathfrak{G}_D(\xi,\zeta)$ функцию Грина области D (см. [14, гл. 6, § 6]). Пусть $\mathfrak{P}_D(\xi,\zeta) := \dfrac{\partial \mathfrak{G}(\xi,\zeta)}{\partial n}$ — ядро Пуассона области D — производная функции Грина вдоль внутренней относительно области D нормали к границе $L = \partial D$.

Определим функционалы на пространстве $C(L)$ равенствами

$$\Theta_{D_\infty} f = \int\limits_L \mathfrak{P}_{D_\infty}(z,\zeta)\, \frac{Q_n(z)}{Q_n(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta| \quad \text{в случае} \quad z \in D_\infty; \tag{4.4}$$

$$\Theta_{D_{0,j}} f = \int\limits_{L_j} \mathfrak{P}_{D_{0,j}}(z,\zeta)\, f(\zeta)\, |d\zeta| \quad \text{в случае} \quad z \in D_{0,j}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{4.5}$$

Теорема 4. *Пусть Q_n — произвольный многочлен степени n с единичным старшим коэффициентом и $s > 0$, а $L = L(Q_n, s)$ — определяемая ими лемниската. Тогда для произвольной точки $z \in D_\infty$ и $\delta > 0$ оптимальным методом в* (1.1) *является функционал* (4.4); *для произвольной точки $z \in D_0$ и $\delta > 0$ — функционал* (4.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $z \in D_\infty$. Для произвольного многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ функция $\phi := P_n/Q_n$ аналитическая и ограниченная в D_∞, непрерывная в замыкании $\overline{D_\infty}$. Следовательно, она восстанавливается в области D_∞ интегралом Пуассона по границе области L :

$$\phi(z) = \int\limits_L \mathfrak{P}_{D_\infty}(z,\zeta)\,\phi(\zeta)\,|d\zeta|.$$

Тогда для произвольной функции $f_\delta \in C(L)$, удовлетворяющей неравенству $\|P_n - f_\delta\|_{C(L)} \le \delta$, имеем

$$P_n(z) - \Theta_{D_\infty} f_\delta = \int\limits_L \mathfrak{P}_{D_\infty}(z,\zeta)\,\frac{Q_n(z)}{Q_n(\zeta)}\,(P_n(\zeta) - f_\delta(\zeta))\,|d\zeta|.$$

Учитывая, что на лемнискате $|Q_n(\zeta)| \equiv s$ и равенство $\int_L \mathfrak{P}_{D_\infty}(z,\zeta)\,|d\zeta| \equiv 1$, получаем оценку

$$|P_n(z) - \Theta_{D_\infty} f_\delta| \le \int\limits_L \mathfrak{P}_{D_\infty}(z,\zeta)\left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(\zeta)}\right|\,|P_n(\zeta) - f_\delta(\zeta)|\,|d\zeta| \le s^{-1}|Q_n(z)|\delta.$$

Отсюда и из утверждения теоремы 3 имеем цепочку соотношений

$$\mathcal{E}_n(L,z;\delta) \le U_n(\Theta_{D_\infty}, z;\delta) \le s^{-1}|Q_n(z)|\delta = \mathcal{E}_n(L,z;\delta).$$

Следовательно, функционал (4.4) является оптимальным методом в (1.1). Первая часть теоремы 4 доказана.

Аналогичная оценка при $z \in D_0$ показывает справедливость и второй части утверждения теоремы 4. Для произвольной точки $z \in D_{0,j}$ справедливо

$$\left|P_n(z) - \Theta_{D_{0,j}} f_\delta\right| \le \int\limits_{L_j} \mathfrak{P}_{D_{0,j}}(z,\zeta)\,|P_n(\zeta) - f_\delta(\zeta)|\,|d\zeta| \le \delta.$$

Теорема 4 доказана.

Отметим, что в случае, когда компакт является лемнискатой, экстремальный многочлен не зависит от точки экстраполяции. Вследствие этого с помощью теоремы 3 можно получить два утверждения.

Из теорем 1 и 3 вытекает утверждение теоремы А. Пусть $L = L(Q_n, s)$ — лемниската, определяемая многочленом Q_n с единичным старшим коэффициентом и числом $s > 0$. Тогда $s = \|Q_n\|_{C(L)}$. Используя равенства (2.2) и (4.2), получим

$$\tau_n(L) = \lim_{z\to\infty} |z|^n \kappa_n^{-1}(L,z) = \lim_{z\to\infty} |z|^n \|Q_n\|_{C(L)} |Q_n(z)|^{-1} = \|Q_n\|_{C(L)}.$$

Таким образом многочлен Q_n является многочленом Чебышёва степени n лемнискаты L. Вторым утверждением является точное неравенство разных метрик.

Следствие 1. *Пусть V — компакт комплексной плоскости и $V \subset \overline{D_\infty}$; $X(V)$ — банахова решетка функций, определенных на V, содержащая пространство многочленов $\mathcal{P}_n$, наделенная нормой $\|\cdot\|_X$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|P_n\|_X \le s^{-1}\|Q_n\|_X\,\|P_n\|_{C(L)}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n. \tag{4.6}$$

Неравенство (4.6) *обращается в равенство на полиномах cQ_n, $c \in \mathbb{C}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя свойства нормы пространства X, из (1.5) для произвольного компакта K получаем неравенство

$$\|P_n\|_X \le \|\kappa_n(K,\cdot)\|_X \|P_n\|_{C(K)}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n.$$

В случае лемнискаты по теореме 3 имеем $\|\kappa_n(L,\cdot)\|_X = s^{-1}\|Q_n\|_X$. Точность неравенства (4.6) проверяется подстановкой многочлена Q_n.

Следствие 1 доказано.

Обозначим через γ_r окружность с центром в точке нуль радиуса r. Для произвольного натурального n окружность γ_r является лемнискатой многочлена $E_n(z) = z^n$, а именно $\gamma_r = L(E_n, r^n)$. Соответственно, как прямое следствие из теорем 3 и 4 получаем решение задач оптимальной экстраполяции многочленов с окружности.

Следствие 2. *Для произвольных точки $z \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$ справедливы равенства*

$$\kappa_n(\gamma_R, z) = \max\left\{1;\, r^{-n}|z|^n\right\};$$

$$\mathcal{E}_n(\gamma_R, z; \delta) = \omega_n(\gamma_R, z; \delta) = \max\left\{1;\, r^{-n}|z|^n\right\}\delta, \quad \delta > 0.$$

Экстремальными многочленами являются константы при $|z| < r$ и многочлены $cr^{-n}z^n$, $|c| = \delta$ при $|z| > r$, и только они.

Для произвольной точки $z, |z| > r$, и $\delta > 0$ оптимальным методом в (1.1) *является функционал*

$$\Theta_\infty f = \frac{1}{2\pi}\frac{\rho^n}{r^n}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - r^2)e^{in(\tau - t)}}{\rho^2 - 2r\rho\,\cos(\tau - t) + r^2}\, f(re^{it})\,dt, \quad z = \rho e^{i\tau};$$

для произвольной точки $z, |z| < r$, и $\delta > 0$ — функционал

$$\Theta_0 f = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2r\rho\,\cos(\tau - t) + r^2}\, f(re^{it})\,dt, \quad z = \rho e^{i\tau}.$$

З а м е ч а н и е 2. Из теорем 2 и 4 вытекает равенство величин оптимальной экстраполяции для разных компактов

$$\mathcal{E}_n(I, x; \delta) = \mathcal{E}_n(\chi_{n+1}, x; \delta) = \mathcal{E}_n(L(T_n, \tau_n(I)), x; \delta), \quad x \in \mathbb{R} \setminus I.$$

При этом для каждого компакта оптимальным методом будет интерполяция по сетке χ_{n+1}, но для лемнискаты $L(T_n, \tau_n(I))$ оптимальным является еще один, принципиально другой метод — интеграл пуассоновского типа (близкий оптимальный метод восстановления ранее был описан в статье [15]).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Р. Р. Акопяну за постановку задачи, плодотворные обсуждения и помощь в оформлении данной работы; рецензенту за высказанные замечания, благодаря которым текст статьи был значительно улучшен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипенко К.Ю.** Введение в теорию оптимального восстановления. СПб.: Лань, 2022. 388 с.
2. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Vol. 51, № 6 (312). С. 89–124.
3. **Walsh J.L.** Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1960. 405 p.
4. **Чебышёв П.Л.** Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышёва: в 5 т. Т. 2: Математический анализ. М.; Л.: АН СССР, 1947. С.23–51.

5. **Faber G.** Über Tschebyscheffsche Polynome // J. reine und angew. Math. 1920. Vol. 150. P. 79–106. doi: 10.1515/crll.1920.150.79
6. **Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M.** Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Comp., 1994. 821 p.
7. **Fischer B.** Chebyshev polynomials for disjoint compact sets // Constr. Approx. 1992. Vol. 8, no. 3. P. 309–329. doi: 10.1007/BF01279022
8. **Peherstorfer F.** Minimal polynomials for the compact sets of the complex plane // Constr. Approx. 1996. T. 12, no. 4. C. 481–488. doi: 10.1007/BF02437504
9. **Бородин П.А.** Об одном условии на многочлен, достаточном для минимальности его нормы на заданном компакте // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2006. № 4. С. 14–18.
10. **Пестовская А.Э.** Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, с ограничением на расположение корней // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Vol. 28, № 3. P. 166–175. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-166-175
11. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.
12. **Кочуров А.С., Тихомиров В.М.** Об экстраполяции полиномов с действительными коэффициентами в комплексную плоскость // Мат. заметки. 2019. Vol. 106, №4. P. 543–548. doi: 10.4213/mzm12260
13. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного. СПб: Лань, 2004. 336 с.
14. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного.. М.; Л.: Наука ГИТТЛ, 1952. 628 с.
15. **Акопян Р.Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Мат. заметки. 2016. Vol. 99, №2. P. 163–170.
doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-19-33

Поступила 21.04.2024
После доработки 16.10.2024
Принята к публикации 5.11.2024

Трембач Алексей Андреевич
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: alex.trembach2015@yandex.ru

REFERENCES

1. Osipenko K.Yu. *Vvedeniye v teoriyu optimal'nogo vosstanovleniya* [Introduction to the theory of optimal recovery]. St. Petersburg, Lan', 2022, 388 p. ISBN: 978-5-507-44358-1 .
2. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surv.*, 1996, vol. 51, iss. 6, pp. 1093–1126.
doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001
3. Walsh J.L. *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain.* Rhode Island, Amer. Math. Soc., 1960, 405 p. ISBN: 9780821810200 .
4. Chebyshev P.L. Theory of the mechanisms known as parallelograms. In: Chebyshev P. L. *Collected works. Vol. II. Mathematical analysis.* Moscow, Leningrad, Acad. Sci. USSR, 1947, pp. 23–51 (in Russian).
5. Faber G. Über Tschebyscheffsche polynome. *J. reine und angew. Math.*, 1920, vol. 150, pp. 79–106.
doi: 10.1515/crll.1920.150.79
6. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. *Topics in polynomials*: *extremal problems, inequalities, zeros.* Singapore, World Sci. Publ. Comp., 1994, 821 p. ISBN: 981-02-0499-X .
7. Fischer B. Chebyshev polynomials for disjoint compact sets. *Constr. Approx.*, 1992, vol. 8, no. 3, pp. 309–329. doi: 10.1007/BF01279022
8. Peherstorfer F. Minimal polynomials for the compact sets of the complex plane. *Constr. Approx.*, 1996, vol. 12, no. 4, pp. 481–488. doi: 10.1007/BF02437504
9. Borodin P.A. On a condition for a polynomial that is sufficient for its norm to be minimal on a given compactum. *Vestnik Moskov. Univ. Ser.* 1. *Mat. Mekh.*, 2006, no. 4, pp. 14–18 (in Russian).

10. Pestovskaya A.E. Polynomials least deviating from zero with a constraint on the location of roots. *Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 166–175 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-166-175
11. Suetin P.K. *Klassicheskiye ortogonal'nyye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 416 p.
12. Kochurov A.S., Tikhomirov V.M. On extrapolation of polynomials with real coefficients to the complex plane. *Math. Notes*, 2019, vol. 106, iss. 4, pp. 572–576. doi: 10.1134/S0001434619090256
13. Shabat B.V. *Vvedeniye v kompleksnyy analiz. Ch.* 1. *Funktsii odnogo peremennogo* [Introduction to complex analysis. Part 1. Functions of one variable]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2004, 336 p.
14. Goluzin G.M. *Geometric theory of functions of a complex variable.* Translations of mathematical monographs, vol. 26. Providence, R.I., American Math. Soc., 1969, 676 p. doi: 10.1090/mmono/026. Original Russian text published in Goluzin G. M. *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo*: *Uchebnoe posobie.* Moscow, Leningrad, Nauka GITTL Publ., 1952, 628 p.
15. Akopyan R.R. Optimal recovery of analytic functions from boundary values specified with error. *Math. Notes*, 2016, vol. 99, iss. 2, pp. 177–182. doi: 10.1134/S000143461601020X

Received April 21, 2024
Revised October 16, 2024
Accepted November 5, 2024

Alexey Andreevich Trembach, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: alex.trembach2015@yandex.ru .

Cite this article as: A. A. Trembach. Optimal extrapolation of polynomials given with error. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 265–275 .