

УДК 512.531.2

**ОРДИНАЛЬНЫЕ СУММЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПОЛУГРУПП,  
ДОПУСКАЮЩИЕ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ КЭЛИ  
И ИХ ОБОБЩЕНИЯ****Д. В. Соломатин**

Известно несколько эквивалентных определений класса полугрупп, которые мы называем прямоугольными полугруппами. Термин “прямоугольная полугруппа” будем использовать для обозначения прямых произведений сингулярных полугрупп. Полугруппу называют сингулярной, если она является полугруппой левых нулей или полугруппой правых нулей. Ранее было установлено характеристическое свойство допускающих планарные графы Кэли ординальных сумм прямоугольных полугрупп. В настоящей статье приводятся характеристические свойства допускающих внешнепланарные графы Кэли ординальных сумм прямоугольных полугрупп. Кроме того, проанализированы возможности их обобщения до обобщенных внешнепланарных графов Кэли полугрупп в том же классе. А именно, доказано необходимое и достаточное условие существования внешнеплоской или обобщенной внешнеплоской укладки графов Кэли ординальных сумм прямоугольных полугрупп. Подробно рассмотрен случай, когда графы Кэли таких полугрупп оказываются обобщенными внешнепланарными, но не внешнепланарными. В работе рассматриваются обобщенные внешнепланарные графы, охарактеризованные Иржи Седлачеком.

Ключевые слова: внешнепланарный граф, полугруппы с внешнепланарными графами Кэли, обобщенные внешнепланарные графы, графы Седлачека, полугруппы с планарными графами Кэли.

**D. V. Solomatin. Ordinal sums of rectangular semigroups with outerplanar Cayley graphs and their generalizations.**

There are several equivalent definitions of the class of semigroups which we call rectangular semigroups. We will use the term rectangular semigroup to denote direct products of singular semigroups. A semigroup is called singular if it is a left zero semigroup or a right zero semigroup. A characteristic property of ordinal sums of rectangular semigroups with planar Cayley graphs is known. This article presents the characteristic properties of ordinal sums of rectangular semigroups with outerplanar Cayley graphs. In addition, the possibilities of their generalization to generalized outerplanar Cayley graphs of semigroups in the same class are analyzed. Namely, a necessary and sufficient condition for the existence of an outerplane embedding in the plane or generalized outerplane embedding in the plane of the Cayley graphs of the ordinal sums of rectangular semigroups is proved. The case when the Cayley graphs of such semigroups turn out to be generalized outerplanar, but not outerplanar, is considered in detail. The paper considers generalized outerplanar graphs characterized by Jiří Sedláček.

Keywords: outerplanar graph, semigroups with outerplanar Cayley graphs, generalized outerplanar graphs, Sedláček graphs, semigroups with planar Cayley graphs.

MSC: 20M10

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-251-264

**Введение**

В рамках данной статьи будем рассматривать конечные конечнопорожденные полугруппы. Ординальные суммы полугрупп — математическое понятие, введенное Клиффордом. Они используются для создания новой структуры полугруппы при объединении попарно не пересекающихся полугрупп. Прежде ординальные суммы полугрупп активно изучались в контексте треугольных норм [1]. Треугольные нормы  $T$  — это такие бинарные операции на единичном отрезке  $[0, 1]$ , что  $([0, 1], T)$  обладает структурой вполне упорядоченной абелевой полугруппы с нейтральным элементом 1. Они играют важную роль во многих областях, например, таких как вероятностные метрические пространства, многозначная логика, нечеткая логика, теория принятия решений, статистика, неаддитивные меры и кооперативные игры. Более того, через ординальные суммы полугрупп можно определить униформы [2] в виде особого класса

операций ассоциативного агрегирования, которые одновременно обобщают как треугольные нормы, так и треугольные конормы. Они полезны в таких областях, как теории принятия решений, синтеза информации, субъективных оценок, оптимизации и контроля, при построении экспертных систем, нейронных сетей, моделировании нечетких схем, псевдоанализе и теории меры, моделировании нечеткой математической морфологии, обработке изображений, в теории нечетких множеств и нечеткой логики в приближенных рассуждениях и во многих других прикладных сферах.

Плоские группы перечислены давно [3], кроме того, в [4] охарактеризованы плоские правые группы (прямые произведения групп на полугруппы правых нулей), в [5, с. 285] охарактеризованы плоские коммутативные полугруппы идемпотентов (полурешетки) и плоские полугруппы Клиффорда с двумя группами (предпосылки к исследованию которых анонсировались на конференции в [6], а с итоговым вариантом можно ознакомиться в монографии [5, с. 287], вышедшей 11 лет спустя). В большинстве из этих случаев получить ограничение на внешнепланарность достаточно просто. При этом поиск характеристики для всех плоских полугрупп или хотя бы для плоских моноидов кажется безнадежной задачей. Что касается внешнепланарных графов вообще и внешнепланарных графов Кэли полугрупп в частности, то они тесно связаны с конечными автоматами и, будучи обобщенными, имеют множество ценных с практической точки зрения приложений [7]. Они используются в различных областях, таких как информатика, символьные вычисления и теория кодирования. Исследование и характеристика орграфов, являющихся графами Кэли некоторых алгебраических структур, имеют долгую историю, выходящую за рамки настоящей статьи. Изучение графов Кэли полугрупп обычно включает в себя следующие три основных аспекта: описание графа Кэли данной полугруппы; дан граф Кэли полугруппы, необходимо определить структуру или изучить свойства этой полугруппы; нахождение или построение полугруппы, граф Кэли которой является заданным графом. Понятие внешнепланарности в теории графов относится к графу, который можно нарисовать на плоскости таким образом, чтобы все его вершины принадлежали внешней грани, а ребра не пересекались. Это свойство потенциально может иметь значение для визуализации, анализа схем и применения графов Кэли полугрупп в различных областях.

Известно описание конечных свободных коммутативных полугрупп (см. теоремы 18, 36, 46 из обзора [8]), конечных свободных коммутативных полугрупп с нулем — теоремы 20, 37, 47 [8], конечных свободных коммутативных моноидов с циклическими соотношениями — теоремы 19, 38, 48 [8], рассыпчатых полугрупп — теоремы 54, 39, 49 [8], прямых произведений циклических моноидов — теорема 22 [8] и теоремы 1, 2 в [9], допускающих планарные, внешнепланарные или обобщенные внешнепланарные графы Кэли соответственно. Активно изучаются мультипликативные полугруппы классов вычетов по составному модулю с планарными графами Кэли.

В обзоре [8] мы дополнительно проанализировали вопросы планарности графов Кэли ординальных сумм прямоугольных полугрупп, но остались не выясненными условия их внешнепланарности и условия обобщенной внешнепланарности. В продолжение начатого ранее изучения ординальных сумм прямоугольных полугрупп [11, с. 32, 46], имеющих планарные графы Кэли (см. [8, теорема 55]), в настоящей статье найдены необходимые и достаточные условия, при которых ординальные суммы прямоугольных полугрупп допускают внешнепланарные или обобщенные внешнепланарные графы Кэли.

Ординальные суммы прямоугольных полугрупп играют важную роль в теории полугрупп. Вместе с графами Кэли они используются для представления и анализа структуры полугрупп, что в свою очередь имеет приложения в различных областях математики, включая алгебру, теорию чисел, теорию графов и дискретную математику. Кроме того, ординальные суммы полугрупп могут быть использованы для представления полугрупп идемпотентов, которые являются полурешеткой конечного числа полугрупп правых нулей. Это может быть использовано для оценки числа ординальных сумм прямоугольных полугрупп, допускающих внешнепланарные или обобщенные внешнепланарные графы Кэли. Таким образом, ординальные суммы прямоугольных полугрупп имеют важное прикладное значение в теории полугрупп и могут

быть использованы для решения различных задач в этой области. Однако стоит отметить, что детальное изучение этих вопросов опирается на знания в области абстрактной алгебры, теории полугрупп и теории графов.

Основные определения теории полугрупп можно почерпнуть в [11], а необходимые сведения из теории графов — в [12]. Развернутые формулировки определений графов Кэли полугрупп и связанных с ними вопросов планарности можно найти в [5]. *Ординальной суммой* попарно не пересекающихся полугрупп  $S_e$ , где  $e$  пробегает цепь  $P$ , называется полугруппа  $S = \bigcup_{e \in P} S_e$ , в которой при  $e < f$  для любых  $a \in S_e$  и  $b \in S_f$  действует правило умножения  $a \cdot b = b \cdot a = a$ , а внутри полугрупп  $S_e$  ( $e \in P$ ) сохраняется заданное на них умножение. Полугруппа называется *сингулярной*, если она является полугруппой левых нулей или полугруппой правых нулей. *Прямоугольной полугруппой* называется полугруппа, изоморфная прямому произведению  $L \times R$ , где  $L$  — конечная полугруппа левых нулей, а  $R$  — конечная полугруппа правых нулей. Условимся в дальнейшем нижним индексом обозначать порядок сингулярных полугрупп. Другими словами, полугруппа левых нулей  $L_{l_i}$  будет состоять из  $|L_{l_i}| = l_i$  элементов, а полугруппа правых нулей  $R_{r_i}$  будет состоять из  $|R_{r_i}| = r_i$  элементов. Тогда прямое произведение  $(L_{l_i} \times R_{r_i})$  содержит  $l_i r_i$  элементов, и в ординальной сумме прямоугольных полугрупп  $(L_{l_i} \times R_{r_i}) \cup (L_{l_j} \times R_{r_j})$  находится  $l_i r_i + l_j r_j$  элементов. При обозначении элементов складываемых полугрупп будем использовать двойную индексацию: первый индекс указывает порядковый номер слагаемой прямоугольной полугруппы, а второй позволяет различать элементы перемножаемых сингулярных полугрупп  $(L_{l_i} \times R_{r_i}) = \{(l_{ik_1}; r_{ik_2}) \mid 1 \leq k_1 \leq l_i, 1 \leq k_2 \leq r_i\}$ . Более того, договоримся слагаемые вида  $(L_1 \times R_{r_i})$  и  $(L_{l_i} \times R_1)$  записывать кратко, в виде  $R_{r_i}$  и  $L_{l_i}$  соответственно. При этом слагаемое  $(L_1 \times R_1)$  может быть записано как  $L_1$  или как  $R_1$ . Такая неоднозначность допустима в силу того, что  $L_1 = R_1$ .

Если относительно некоторого множества образующих полугруппы  $S$  ее граф Кэли является (внешне)планарным, то говорим, что *полугруппа  $S$  допускает (внешне)планарный граф Кэли*. Граф является *обобщенным внешнепланарным* тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, стягиваемого хотя бы к одному из графов Седлачека (см. Fig. 1 из [13]). Топологически обобщенная внешняя планарность означает, что граф может быть нарисован на плоскости без пересечений ребер так, что каждое ребро имеет хотя бы одну вершину, принадлежащую внешней грани. Аналогично граф является *внешнепланарным* тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, стягиваемого к полному графу четвертого порядка  $K_4$  или к полному двудольному графу  $K_{2,3}$ , содержащему две вершины в одной из долей и три вершины в другой доле. Другими словами, подразделения графов  $K_4$  и  $K_{2,3}$  тоже запрещены в качестве подграфов внешнепланарных графов [12].

## 1. Основной результат

**Теорема 1.** Пусть  $S = \bigcup_{i \in P} (L_{l_i} \times R_{r_i})$  — ординальная сумма прямоугольных полугрупп, где  $P$  — простая цепь. Тогда  $S$  допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $|P| = 1$  и  $S = (L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 1$  и  $1 \leq j \leq 3$ ;
- 2)  $|P| = 2$  и выполнено хотя бы одно из условий
  - а) одна из компонент  $R_1$ , а другая —  $(L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 1$  и  $1 \leq j \leq 2$ ;
  - б) одна из компонент  $R_2$ , а другая —  $(L_i \times R_j)$ , где  $1 \leq i \leq 2$  и  $j = 1$ , причем если  $R_2$  является большей, то, возможно,  $i = 2$  и  $j = 2$ ;
  - в) одна из компонент  $L_2$ , либо  $(L_2 \times R_2)$  является меньшей, а другая —  $(L_i \times R_j)$ , где  $1 \leq i \leq 2$ ,  $j = 1$  или  $i = 1$ ,  $j = 2$ , причем если  $L_2$  бо́льшая, то, возможно,  $1 \leq i \leq 2$ ,  $j = 2$ ;
  - г) меньшая из компонент  $(L_i \times R_j)$ , где  $i = 2$ ,  $1 \leq j \leq 2$ , а бо́льшая —  $R_1$  или  $R_2$ , или  $L_2$ , причем если  $R_1$  бо́льшая, то, возможно,  $i \geq 2$ ,  $1 \leq j \leq 3$ .

- 3)  $|P| = 3$  и две из компонент одноэлементные, а третья —  $(L_i \times R_j)$ , где  $i = 2, 1 \leq j \leq 2$  для меньшей или для средней компоненты, а  $1 \leq i \leq 2, j = 1$  для большей.

**Теорема 2.** Пусть  $S = \bigcup_{i \in P} (L_i \times R_i)$  — ординальная сумма прямоугольных полугрупп, где  $P$  — простая цепь. Тогда  $S$  допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $|P| = 1$  и  $S = (L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 1$  и  $1 \leq j \leq 4$ ;
- 2)  $|P| = 2$  и выполнено хотя бы одно из условий
  - а) одна из компонент  $R_1$ , а другая —  $(L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 1$  и  $1 \leq j \leq 3$ ;
  - б) одна из компонент  $R_2$ , а другая —  $(L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 1, j = 1$  или  $1 \leq i \leq 2, j = 2$ ;
  - в) одна из компонент  $L_2$ , либо  $(L_2 \times R_2)$  является меньшей, а другая —  $(L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 1, j = 1$  или  $1 \leq i \leq 2, j = 2$ ;
  - г) меньшая из компонент  $(L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 2, j = 1$  или  $i = 2, j = 2$ , а большая  $R_1$  или  $R_2$ , или  $L_2$ , причем если  $R_1$  большая, то, возможно,  $i \geq 2, 1 \leq j \leq 4$ ;
- 3)  $|P| = 3$  и выполнено хотя бы одно из условий
  - а) две из компонент одноэлементные, а третья —  $(L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 2, j = 1$  или  $i = 2, j = 2$  для меньшей или для средней компоненты, а  $i \geq 1, j = 1$  или  $1 \leq i \leq 2, j = 2$  для большей;
  - б) полугруппа  $S = R_1 \cup L_2 \cup L_2$  либо  $S = L_2 \cup R_1 \cup L_2$ , либо  $S = L_2 \cup L_2 \cup R_1$ , либо  $S = (L_2 \times R_2) \cup R_1 \cup L_2$ , либо  $S = (L_2 \times R_2) \cup L_2 \cup R_1$ ;
- 4)  $|P| = 4$  и все компоненты одноэлементные  $L_1$ .

**Доказательство** теорем 1 и 2. Для одновременного доказательства теорем 1 и 2 представим список ординальных сумм прямоугольных полугрупп, допускающих планарный граф Кэли. Выберем из этого списка отдельно полугруппы, допускающие внешнепланарный граф Кэли, отнесем их к условиям в теореме 1. И отдельно выберем полугруппы, допускающие обобщенный внешнепланарный граф Кэли, отнесем их к условиям в теореме 2. Пусть  $S$  — ординальная сумма прямоугольных полугрупп. Из теоремы 55 [8] вытекает, что тогда  $S$  допускает планарный граф Кэли, если и только если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $S = (L_i \times R_j)$ , где  $1 \leq j < 5, i \geq 1$ ;
- 2) а)  $S = R_1 \cup (L_i \times R_j)$  либо  $S = (L_i \times R_j) \cup R_1$  ( $1 \leq j \leq 3, i \geq 1$ );  
 б)  $S = R_2 \cup (L_i \times R_j)$  ( $1 \leq j \leq 2, i \geq 1$ ) либо  $S = (L_i \times R_j) \cup R_2$  ( $j = 3, i \geq 2$ );  
 в)  $S = (L_i \times R_j) \cup L_2$  либо  $S = L_2 \cup (L_i \times R_j)$ , либо  $S = (L_2 \times R_2) \cup (L_i \times R_j)$  ( $1 \leq j \leq 2, i \geq 1$  или  $j = 3, i = 1$ ), либо  $S = (L_i \times R_j) \cup L_2$  ( $j = 3, i \geq 2$ );  
 г)  $S = (L_i \times R_j) \cup R_1$  либо  $S = (L_i \times R_j) \cup R_2$ , либо  $S = (L_i \times R_j) \cup L_2$  ( $1 \leq j \leq 4, i \geq 2$ );
- 3) а)  $S = (L_i \times R_j) \cup R_1 \cup R_1$  ( $1 \leq j \leq 4, i \geq 2$ ) либо  $S = R_1 \cup (L_i \times R_j) \cup R_1$  ( $1 \leq j \leq 3, i \geq 2$ ), либо  $S = R_1 \cup R_1 \cup (L_i \times R_j)$  ( $1 \leq j \leq 2, i \geq 1$ );  
 б)  $S = R_1 \cup S_2 \cup L_2$  либо  $S = S_2 \cup R_1 \cup L_2$ , либо  $S = R_1 \cup L_2 \cup S_2$ , либо  $S = R_1 \cup (L_2 \times R_2) \cup S_2$ , либо  $S = S_2 \cup L_2 \cup R_1$ , либо  $S = S_2 \cup (L_2 \times R_2) \cup R_1$ , либо  $S = L_2 \cup R_1 \cup S_2$ , либо  $S = (L_2 \times R_2) \cup R_1 \cup S_2$ , либо  $S = L_2 \cup S_2 \cup R_1$ , либо  $S = (L_2 \times R_2) \cup S_2 \cup R_1$  ( $S_2 = R_2$  или  $S_2 = L_2$ );  
 в)  $S = L_2 \cup L_2 \cup L_2$  либо  $S = (L_2 \times R_2) \cup L_2 \cup L_2$ ;
- 4) а)  $S = L_2 \cup L_1 \cup L_1 \cup L_1$  либо  $S = L_1 \cup L_2 \cup L_1 \cup L_1$ , либо  $S = L_1 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_1$ , либо  $S = L_1 \cup L_1 \cup L_1 \cup L_2$ , либо  $S = L_1 \cup L_1 \cup L_1 \cup L_1$ ;  
 б)  $S = (L_2 \times R_2) \cup L_1 \cup L_1 \cup L_1$  либо  $S = L_1 \cup (L_2 \times R_2) \cup L_1 \cup L_1$ , либо  $S = L_1 \cup L_1 \cup (L_2 \times R_2) \cup L_1$ .

Проанализируем каждый случай отдельно на предмет внешнепланарности и обобщенной внешнепланарности графа Кэли соответствующей полугруппы. Минимальное множество неразложимых образующих определяется не единственным образом, поэтому при необходимости будем указывать одну из оптимальных возможностей с точностью до автоморфизма.

**С л у ч а й 1.** При  $|P| = 1$  полугруппа  $S$  является прямоугольной. Основа графа Кэли полугруппы  $S$  представляет собой дизъюнктивное объединение  $i$  экземпляров полных графов  $K_j$  порядка  $j$ , которые для любого  $i \geq 1$  являются внешнепланарными при  $1 \leq j \leq 3$  и являются обобщенными внешнепланарными при  $1 \leq j \leq 4$ , но не являются внешнепланарными при  $j = 4$ , так как содержат подграф, гомеоморфный  $K_4$ .

**С л у ч а й 2а.** При  $|P| = 2$  полугруппы  $R_1 \cup (L_i \times R_1)$  и  $(L_i \times R_1) \cup R_1$  основой своих графов Кэли при любом  $i \geq 1$  имеют звезду  $K_{1,i}$ , являющуюся как внешнепланарной, так и обобщенной внешнепланарной. Полугруппы  $R_1 \cup (L_i \times R_2)$  и  $(L_i \times R_2) \cup R_1$  основой своих графов Кэли при любом  $i \geq 1$  имеют сумму пустого графа  $O_1$  с паросочетаниями, состоящими из  $i$  попарно не пересекающихся ребер, являющуюся внешнепланарной, а следовательно, и обобщенной внешнепланарной. Напомним, что в отличие от объединения графов, при их сложении объединенное множество ребер дополняется новыми ребрами, соединяющими каждую вершину первого слагаемого с каждой вершиной второго слагаемого. Поэтому полугруппы  $R_1 \cup (L_i \times R_3)$  и  $(L_i \times R_3) \cup R_1$  основой своих графов Кэли при любом  $i \geq 1$ , имеющие сумму пустого графа  $O_1$  с  $i$  циклами третьего порядка  $K_3$ , допускают обобщенный внешнепланарный, но не внешнепланарный граф Кэли, так как содержат  $K_4$  в качестве подграфа.

**С л у ч а й 2б.** Полугруппы  $R_2 \cup (L_i \times R_1)$  и  $(L_i \times R_1) \cup R_2$  основой своих графов Кэли при любом  $i \geq 1$  имеют сумму полного графа  $K_2$  второго порядка с грудой  $O_i$ , т. е. с пустым графом порядка  $i$ . Такие графы при любом  $i \geq 1$  являются обобщенными внешнепланарными и внешнепланарными при  $1 \leq i \leq 2$ . Для  $i \geq 3$  в основе графа Кэли появляется подграф, гомеоморфный полному двудольному графу  $K_{2,3}$ , содержащему две вершины в одной доле и три вершины в другой доле, следовательно, она не будет внешнепланарной.

Полугруппы  $R_2 \cup (L_1 \times R_2)$  и  $(L_1 \times R_2) \cup R_2$  основой своих графов Кэли имеют в точности полный граф  $K_4$  четвертого порядка, следовательно, графы являются обобщенными внешнепланарными, но не внешнепланарными.

Полугруппа  $R_2 \cup (L_2 \times R_2)$  не допускает внешнепланарный граф Кэли, так как основой ее графа Кэли является сумма  $K_2$  с  $(O_2 \times K_2)$ , содержащая  $K_4$  в качестве подграфа, но тем не менее данный граф оказывается обобщенным внешнепланарным. А основа графа Кэли полугруппы  $S = (L_2 \times R_2) \cup R_2 = (\{l_{11}, l_{12}\} \times \{r_{11}, r_{12}\}) \cup (\{l_{21}\} \times \{r_{21}, r_{22}\})$  относительно минимального множества образующих допускает внешнеплоскую и, следовательно, обобщенную внешнеплоскую укладку, изображенную на рис. 1. Важно, что такая укладка достигается именно относительно минимального множества образующих  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{12}; r_{12}), (l_{21}; r_{21}), (l_{21}; r_{22})\}$ . Нет необходимости включать элементы  $(l_{11}; r_{12})$  и  $(l_{12}; r_{11})$  во множество образующих, так как имеют место равенства  $(l_{11}; r_{12}) = (l_{11}; r_{11})(l_{12}; r_{12})$  и  $(l_{12}; r_{11}) = (l_{12}; r_{12})(l_{11}; r_{11})$  в полугруппе  $S$ .

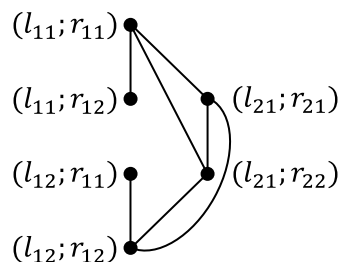


Рис. 1. Внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup R_2$  относительно минимального множества образующих.

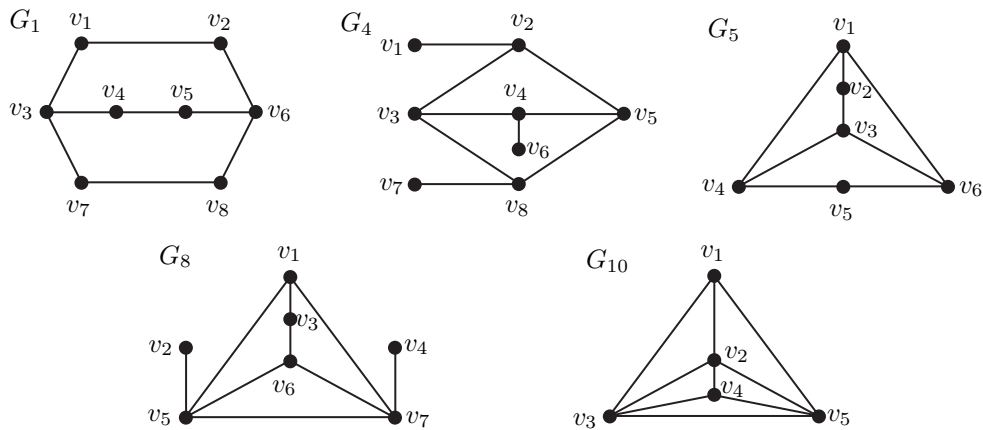


Рис. 2. Подграфы Седлачека.

Основа графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_2) \cup S$  относительно минимального множества образующих для  $S = R_2$  либо  $S = L_2$  из п. 2в при любом  $i \geq 3$  содержит  $G_8$  в качестве подграфа. Подграфы Седлачека (см. рис. 2) здесь и в дальнейшем будем описывать перечислением маршрутов между вершинами в обозначениях [13, Fig. 1]. А именно, в основе графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_2) \cup S$  для  $S = R_2$  либо  $S = L_2$  из п. 2в при любом  $i \geq 3$  присутствуют следующие вершины:  $v_1 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_2 = (l_{11}; r_{12})$ ,  $v_3 = (l_{12}; r_{11})$ ,  $v_4 = (l_{13}; r_{12})$ ,  $v_5 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_6 = (l_{21}; r_{22})$ ,  $v_7 = (l_{13}; r_{11})$  при  $S = R_2$  либо  $v_6 = (l_{22}; r_{21})$  при  $S = L_2$ .

Основа графа Кэли полугруппы  $S \cup (L_i \times R_2)$  относительно минимального множества образующих для  $S = R_2$  либо  $S = L_2$  из п. 2в при любом  $i \geq 3$  содержит  $G_1$  в качестве подграфа. А именно, в основе графа Кэли этой полугруппы присутствуют следующие вершины:  $v_1 = (l_{23}; r_{21})$ ,  $v_2 = (l_{23}; r_{22})$ ,  $v_3 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_4 = (l_{22}; r_{21})$ ,  $v_5 = (l_{22}; r_{22})$ ,  $v_6 = (l_{11}; r_{12})$ ,  $v_7 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_8 = (l_{21}; r_{22})$  при  $S = R_2$  либо  $v_6 = (l_{12}; r_{11})$  при  $S = L_2$ .

Основа графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_3) \cup R_2$  относительно минимального множества образующих при любом  $i \geq 2$  содержит  $G_5$  в качестве подграфа, восстановленного на следующих вершинах:  $v_1 = (l_{21}; r_{22})$ ,  $v_2 = (l_{12}; r_{11})$ ,  $v_3 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_4 = (l_{11}; r_{12})$ ,  $v_5 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_6 = (l_{11}; r_{13})$ . В самом деле, множество неразложимых образующих рассматриваемой полугруппы содержит элементы  $x_1 = v_4$ ,  $x_2 = v_6$ ,  $x_3 = v_2$ , при этом выполнены следующие равенства:  $v_1x_1 = v_4$ ,  $v_1x_3 = v_2$ ,  $v_1x_2 = v_6$ ,  $v_3x_3 = v_2$ ,  $v_3x_1 = v_4$ ,  $v_3x_2 = v_6$ ,  $v_4x_3 = v_5$ ,  $v_6x_3 = v_5$ .

**С л у ч а й 2в.** Основы графов Кэли полугрупп  $(L_1 \times R_j) \cup L_2$  и  $L_2 \cup (L_1 \times R_j)$  являются суммой графов  $K_j + O_2$ , следовательно, внешнепланарны при  $1 \leq j \leq 2$ . Основы графов Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_1) \cup L_2$  и  $L_2 \cup (L_2 \times R_1)$  являются суммой  $O_2 + O_2$ , поэтому тоже внешнепланарны. С основой  $(L_2 \times R_2) \cup L_2$  ситуация иная, так как неочевидно минимальное множество неразложимых образующих, относительно которого выдерживается внешнепланарность. Укажем это множество:  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{12}; r_{12}), (l_{21}; r_{21}), (l_{22}; r_{21})\}$ ; оставшиеся элементы полугруппы раскладываются в произведения образующих:  $(l_{11}; r_{11})(l_{12}; r_{12}) = (l_{11}; r_{12})$  и  $(l_{12}; r_{12})(l_{11}; r_{11}) = (l_{12}; r_{11})$ .

Здесь и в дальнейшем приведенное множество образующих формируется по следующему алгоритму. 1) Относим все элементы из полугруппы с наибольшим порядковым номером ко множеству образующих, поскольку они неразложимы и в результате умножения элементов большего множества на элементы из меньшего множества получаются элементы в меньшем множестве, а не в большем. 2) Поочередно включаем во множество образующих новые элементы, не разложимые в произведение ранее включенных. 3) Если граф Кэли рассматриваемой полугруппы относительно выбранной системы образующих не является (обобщенным) внешнепланарным, то выбираем следующее приведенное множество в цикле, пока есть выбор либо пока не появится (обобщенная) внешнепланарность.

Основа графа Кэли полугруппы  $L_2 \cup (L_2 \times R_2)$  допускает обобщенную внешнеплоскую

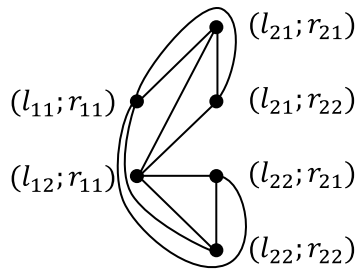


Рис. 3. Обобщенная внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $L_2 \cup (L_2 \times R_2)$  относительно минимального множества образующих.

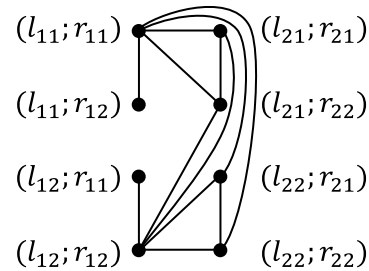


Рис. 4. Обобщенная внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup (L_2 \times R_2)$  относительно минимального множества образующих.

укладку, приведенную на рис. 3, но содержит  $K_{2,3}$  в качестве подграфа, поэтому не является внешнепланарной.

В основах графов Кэли полугрупп  $(L_i \times R_1) \cup L_2$  и  $L_2 \cup (L_i \times R_1)$  лежит сумма груд  $O_i + O_2 = K_{i,2}$ , содержащая полный двудольный граф  $K_{2,3}$  при  $i \geq 3$ , следовательно, для  $i \geq 3$  графы Кэли полугрупп  $(L_i \times R_1) \cup L_2$  и  $L_2 \cup (L_i \times R_1)$  не внешнепланарны, тем не менее допускают обобщенную внешнеплоскую укладку. А в основе графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_2) \cup L_2$  при  $i \geq 3$  обнаруживается подграф  $G_8$ , аналогичный описанному в п. 2б для полугруппы  $(L_i \times R_2) \cup R_2$  при  $i \geq 3$ . И в основе графа Кэли полугруппы  $L_2 \cup (L_i \times R_2)$  при  $i \geq 3$  обнаруживается подграф  $G_1$ , аналогичный описанному в п. 2б для полугруппы  $R_2 \cup (L_i \times R_2)$  при  $i \geq 3$ .

Основы графов Кэли полугрупп  $(L_1 \times R_3) \cup L_2$  и  $L_2 \cup (L_1 \times R_3)$  являются суммой графов  $K_3 + O_2$ , у которых множества вершин  $V(O_2) = \{v_1, v_4\}$  и  $V(K_3) = \{v_2, v_3, v_5\}$  в обозначениях с рис. 2, поэтому они изоморфны графу  $G_{10}$ , следовательно, не являются обобщенно внешнепланарными. Основы графов Кэли полугрупп  $(L_2 \times R_2) \cup R_1$  и  $(L_2 \times R_2) \cup L_2$  являются подграфом графа полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup R_2$ , изображенного на рис. 1, следовательно, тоже внешнепланарны. Обобщенная внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup (L_2 \times R_2)$  представлена на рис. 4. Этот граф содержит  $K_{2,3}$ , восстановленный на вершинах  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{12}; r_{12})\}$  в одной доле и на вершинах  $\{(l_{21}; r_{21}), (l_{21}; r_{22}), (l_{22}; r_{21})\}$  — в другой, следовательно, не является внешнепланарным.

Обобщенная внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup (L_i \times R_1)$  представлена на рис. 5. Для любого  $i \geq 3$  этот граф содержит  $K_{2,3}$ , восстановленный на вершинах  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{12}; r_{12})\}$  в одной доле и на вершинах  $\{(l_{21}; r_{21}), (l_{22}; r_{21}), (l_{2i}; r_{21})\}$  — в другой, следовательно, не является внешнепланарным.

Относительно минимального множества неразложимых образующих в основе графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup (L_3 \times R_2)$  обнаруживается подграф  $G_1$  на вершинах  $v_1 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_2 = (l_{21}; r_{22})$ ,  $v_3 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_4 = (l_{22}; r_{21})$ ,  $v_5 = (l_{22}; r_{22})$ ,  $v_6 = (l_{12}; r_{12})$ ,  $v_7 = (l_{23}; r_{21})$ ,  $v_8 = (l_{23}; r_{22})$ . В основе графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup (L_1 \times R_3)$  обнаруживается под-

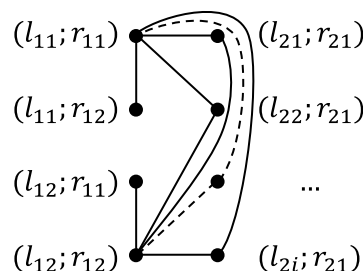


Рис. 5. Обобщенная внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup (L_i \times R_1)$  для  $i \geq 3$  относительно минимального множества образующих.

граф  $G_{10}$  на вершинах  $v_1 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_2 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_3 = (l_{21}; r_{22})$ ,  $v_4 = (l_{12}; r_{12})$ ,  $v_5 = (l_{21}; r_{23})$ . А в основе графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_3) \cup L_2$  при любом  $i \geq 2$  обнаруживается подграф  $G_5$  на вершинах  $v_1 = (l_{22}; r_{21})$ ,  $v_2 = (l_{12}; r_{12})$ ,  $v_3 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_4 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_5 = (l_{11}; r_{12})$ ,  $v_6 = (l_{11}; r_{13})$ . Следовательно, эти полугруппы не допускают даже обобщенные внешнепланарные графы Кэли.

**С л у ч а й 2г.** Основа графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_1) \cup R_1$  при любом  $i \geq 2$  является суммой  $O_i + O_1 = K_{i,1}$ , т.е. внешнеплоской звездой.

Минимальным множеством образующих полугруппы  $(L_i \times R_2) \cup R_1$  при  $i \geq 2$  может быть выбрано множество  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{12}; r_{12}), \dots, (l_{1i}; r_{12}), (l_{21}; r_{21})\}$ . Схема внешнеплоской укладки основы графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_2) \cup R_1$  при  $i \geq 2$  относительно этого множества образующих представлена на рис. 6. Аналогичным образом формируется внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_3) \cup R_1$  при  $i \geq 2$  относительно минимального множества образующих с тем лишь отличием, что вместо паросочетаний в первом слагаемом ординальной суммы появляются полные графы третьего порядка и с первым из таких треугольников инцидентно два ребра, одним из своих концов имеющих вершину  $(l_{21}; r_{21})$ . Для основы графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_4) \cup R_1$  при  $i \geq 2$  относительно минимального множества образующих  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{11}; r_{12}), (l_{12}; r_{13}), (l_{12}; r_{14}), \dots, (l_{1i}; r_{13}), (l_{1i}; r_{14}), (l_{21}; r_{21})\}$  можно получить обобщенную внешнеплоскую укладку, но при любом выборе множества образующих на вершинах  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{11}; r_{12}), (l_{11}; r_{13}), (l_{11}; r_{14})\}$  обнаруживается подграф, гомеоморфный графу  $K_4$ , следовательно, граф не является внешнепланарным.

Основа графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_1) \cup S$ , где  $S \in \{L_2, R_2\}$ , является суммой графов  $O_i + G$ , где  $G \in \{O_2, K_2\}$ , и допускает обобщенную внешнеплоскую укладку для любого натурального  $i \geq 2$ , но при  $i \geq 3$  содержит  $K_{2,3}$  в качестве подграфа, следовательно, при  $i \geq 3$  не является внешнепланарной. Представленную на рис. 1 внешнеплоскую укладку основы графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup R_2$  можно продолжить на случай  $(L_i \times R_2) \cup S$ , где  $S \in \{L_2, R_2\}$  при  $i \geq 2$ . Но для  $i \geq 3$  в этом графе обнаруживается подграф, стягиваемый к графу  $G_4$  на вершинах  $v_1 = (l_{11}; r_{12})$ ,  $v_2 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_3 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_4 = (l_{12}; r_{11})$ ,  $v_5 = (l_{21}; r_{22})$ ,  $v_6 = (l_{12}; r_{12})$ ,  $v_7 = (l_{13}; r_{11})$ ,  $v_8 = (l_{13}; r_{12})$  при  $S = R_2$  либо  $v_5 = (l_{22}; r_{21})$  при  $S = L_2$ . Поэтому при  $i \geq 3$  этот граф не является обобщенным внешнепланарным и, следовательно, не является внешнепланарным.

Основа графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_3) \cup S$ , где  $S \in \{L_2, R_2\}$ , при  $i \geq 3$  содержит подграф, как в предыдущем абзаце, стягиваемый к  $G_4$ , а при  $i = 2$  содержит подграф, стягиваемый к  $G_5$  на вершинах  $v_1 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_2 = (l_{11}; r_{13})$ ,  $v_3 = (l_{11}; r_{12})$ ,  $v_4 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_5 = (l_{12}; r_{13})$ ,  $v_6 = (l_{21}; r_{22})$  при  $S = R_2$  либо  $v_6 = (l_{22}; r_{21})$  при  $S = L_2$ . Поэтому при  $i \geq 2$  этот граф не является обобщенным внешнепланарным и, следовательно, не является внешнепланарным.

**С л у ч а й 3а.** Основа графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_1) \cup R_1 \cup R_1$ , равно как полугрупп

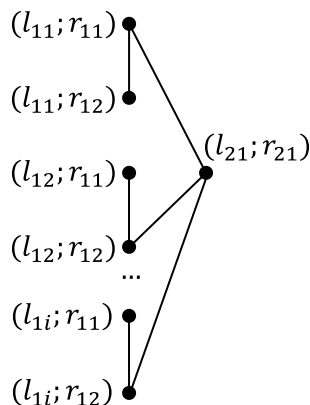


Рис. 6. Схема внешнеплоской укладки основы графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_2) \cup R_1$  при  $i \geq 2$  относительно минимального множества образующих.

$R_1 \cup (L_i \times R_1) \cup R_1$  и  $R_1 \cup R_1 \cup (L_i \times R_1)$ , является суммой графов  $O_i + K_2$ , поэтому допускает внешнеплоскую укладку при  $i = 2$  и допускает обобщенную внешнеплоскую укладку при  $i \geq 3$ . Заметим, что основа графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_j) \cup R_1 \cup R_1$  изоморфна основе графа Кэли полугруппы  $(L_i \times R_j) \cup R_2$  при любых допустимых  $i \geq 2$  и  $1 \leq j \leq 4$ , поэтому имеет внешнеплоскую укладку и обобщенную внешнеплоскую укладку при тех же условиях, что и в случае 2г: для  $i \geq 3$  и  $4 \geq j \geq 2$  содержит подграф, стягиваемый к  $G_4$ , а для  $i = 2$  и  $4 \geq j \geq 3$  содержит подграф, стягиваемый к  $G_5$ .

Внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup (L_2 \times R_2) \cup R_1$  относительно минимального множества образующих  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{21}; r_{22}), (l_{22}; r_{21}), (l_{31}; r_{31})\}$  представлена на рис. 7.

Относительно минимального множества образующих в основе графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup (L_i \times R_j) \cup R_1$  при  $i \geq 3$  и  $3 \geq j \geq 2$  обнаруживается стягиваемый к графу  $G_1$  подграф на вершинах  $v_1 = (l_{21}; r_{22}), v_2 = (l_{21}; r_{21}), v_3 = (l_{11}; r_{11}), v_4 = (l_{22}; r_{22}), v_5 = (l_{22}; r_{21}), v_6 = (l_{31}; r_{31}), v_7 = (l_{23}; r_{21}), v_8 = (l_{23}; r_{22})$ , а в основе графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup (L_2 \times R_3) \cup R_1$  — стягиваемый к графу  $G_{10}$  подграф на вершинах  $v_1 = (l_{31}; r_{31}), v_2 = (l_{11}; r_{11}), v_3 = (l_{21}; r_{23}), v_4 = (l_{21}; r_{22}), v_5 = (l_{21}; r_{21})$ . Следовательно, этот граф не является обобщенным внешнепланарным и не является внешнепланарным.

Основа графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup R_1 \cup (L_i \times R_2)$  при  $1 \leq i \leq 2$  допускает обобщенную внешнеплоскую укладку, изображенную на рис. 8, но содержит подграф  $K_4$  на множестве вершин  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{21}; r_{21}), (l_{31}; r_{31}), (l_{31}; r_{32})\}$ , следовательно, этот граф не является внешнепланарным. Для  $i \geq 3$  в качестве подграфа в рассматриваемом графе обнаруживается  $G_1$  на вершинах  $v_1 = (l_{31}; r_{31}), v_2 = (l_{31}; r_{32}), v_3 = (l_{11}; r_{11}), v_4 = (l_{32}; r_{31}), v_5 = (l_{32}; r_{32}), v_6 = (l_{21}; r_{21}), v_7 = (l_{33}; r_{31}), v_8 = (l_{33}; r_{32})$ , следовательно, при  $i \geq 3$  данный граф не является не только внешнепланарным, но не является и обобщенным внешнепланарным.

С л у ч а й 3б. Основа графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup R_2 \cup L_2$  является суммой полного графа третьего порядка и пустого графа второго порядка,  $K_3 + O_2$ , которая изоморфна графу  $G_{10}$  с вершинами  $v_1 = (l_{31}; r_{31}), v_2 = (l_{21}; r_{21}), v_3 = (l_{11}; r_{11}), v_4 = (l_{32}; r_{31}), v_5 = (l_{21}; r_{22})$ .

Основа графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup L_2 \cup L_2$  изоморфна сумме простой цепи третьего порядка с пустым графом второго порядка,  $P_3 + O_2$ , которая имеет обобщенную внешнеплоскую укладку, но содержит подграф, гомеоморфный графу  $K_4$  на множестве вершин  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{21}; r_{21}), (l_{22}; r_{21}), (l_{31}; r_{31}), (l_{32}; r_{31})\}$ , следовательно, не является внешнепланарным.

Основа графа Кэли полугруппы  $R_2 \cup R_1 \cup L_2$  является суммой полного графа третьего порядка и пустого графа второго порядка,  $K_3 + O_2$ , которая изоморфна графу  $G_{10}$  с вершинами  $v_1 = (l_{31}; r_{31}), v_2 = (l_{11}; r_{11}), v_3 = (l_{11}; r_{12}), v_4 = (l_{32}; r_{31}), v_5 = (l_{21}; r_{21})$ . Основа графа Кэли полугруппы  $L_2 \cup R_1 \cup L_2$  изоморфна сумме простой цепи третьего порядка с пустым графом второго порядка,  $P_3 + O_2$ , которая имеет обобщенную внешнеплоскую укладку, но содержит подграф, изоморфный графу  $K_{2,3}$  на множестве вершин  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{12}; r_{11}), (l_{21}; r_{21}), (l_{31}; r_{31}), (l_{32}; r_{31})\}$ , следовательно, не является внешнепланарным.

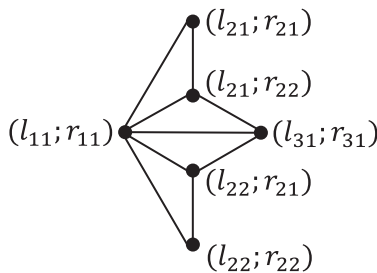


Рис. 7. Внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup (L_2 \times R_2) \cup R_1$  относительно минимального множества образующих.

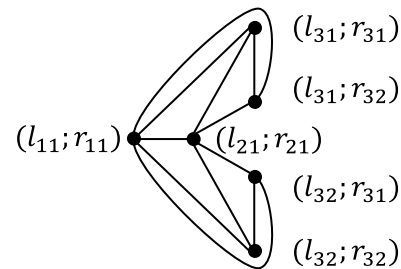


Рис. 8. Внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup R_1 \cup (L_2 \times R_2)$  относительно минимального множества образующих.

ным. Заметим, что  $K_4$  из предыдущего абзаца в нем тоже присутствует, но на других вершинах.

Основа графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup L_2 \cup R_2$  является суммой полного графа третьего порядка и пустого графа второго порядка,  $K_3 + O_2$ , которая изоморфна графу  $G_{10}$  с вершинами  $v_1 = (l_{22}; r_{21})$ ,  $v_2 = (l_{31}; r_{32})$ ,  $v_3 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_4 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_5 = (l_{31}; r_{31})$ . Основа графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup L_2 \cup L_2$  рассматривалась выше, она изоморфна сумме простой цепи третьего порядка с пустым графом второго порядка,  $P_3 + O_2$ , которая имеет обобщенную внешнеплоскую укладку, но содержит подграф, изоморфный графу  $K_{2,3}$  на множестве вершин  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{21}; r_{21}), (l_{22}; r_{21})\}$  в одной доле и  $\{(l_{31}; r_{31}), (l_{32}; r_{31})\}$  в другой, следовательно, не является внешнепланарным.

Основа графа Кэли полугруппы  $R_1 \cup (L_2 \times R_2) \cup S$ , где  $S \in \{L_2, R_2\}$ , содержит подграф  $G_5$  на вершинах  $v_1 = (l_{22}; r_{22})$ ,  $v_2 = (l_{22}; r_{21})$ ,  $v_3 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_4 = (l_{32}; r_{31})$ ,  $v_5 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_6 = (l_{31}; r_{31})$  при  $S = L_2$  либо  $v_4 = (l_{31}; r_{32})$  при  $S = R_2$ , следовательно, данный граф не является обобщенным внешнепланарным.

Основа графа Кэли полугруппы  $R_2 \cup L_2 \cup R_1$  содержит подграф  $G_{10}$  на вершинах  $v_1 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_2 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_3 = (l_{31}; r_{31})$ ,  $v_4 = (l_{22}; r_{21})$ ,  $v_5 = (l_{11}; r_{12})$ , а основа графа Кэли полугруппы  $L_2 \cup L_2 \cup R_1$  содержит подграф  $K_{2,3}$  на множестве вершин  $\{(l_{21}; r_{21}), (l_{22}; r_{21}), (l_{31}; r_{31})\}$  в одной доле и на множестве вершин  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{12}; r_{11})\}$  в другой доле. Следовательно, первый граф не является обобщенным внешнепланарным, а второй не является внешнепланарным, тем не менее допускает обобщенную внешнеплоскую укладку, будучи изоморфным сумме графов  $O_2 + O_2 + O_1$ .

Основа графа Кэли полугруппы  $S \cup (L_2 \times R_2) \cup R_1$ , где  $S \in \{L_2, R_2\}$ , относительно минимального множества образующих содержит подграф, стягиваемый к графу  $G_{10}$  на вершинах  $v_1 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_2 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_3 = (l_{12}; r_{11})$ ,  $v_4 = (l_{22}; r_{22})$ ,  $v_5 = (l_{31}; r_{31})$  при  $S = L_2$  либо  $v_3 = (l_{11}; r_{12})$  при  $S = R_2$ . Причем вершины  $v_2$  и  $v_3$  в случае  $S = L_2$  несмежные, но каждая из них соединена ребром с вершиной  $(l_{22}; r_{21})$ . Следовательно, анализируемый граф не является обобщенным внешнепланарным и не является внешнепланарным.

Основа графа Кэли полугруппы  $L_2 \cup R_1 \cup R_2$  является суммой графов  $O_2 + K_3$  и изоморфна графу  $G_{10}$  на вершинах  $v_1 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_2 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_3 = (l_{31}; r_{32})$ ,  $v_4 = (l_{12}; r_{11})$ ,  $v_5 = (l_{31}; r_{31})$ . А основа графа Кэли полугруппы  $L_2 \cup R_1 \cup L_2$  является суммой графов  $P_3 + O_2$ , имеет обобщенную внешнеплоскую укладку, но содержит  $K_{2,3}$  в качестве подграфа на вершинах из множества  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{21}; r_{21}), (l_{12}; r_{11})\}$  в одной доле и на вершинах из множества  $\{(l_{31}; r_{31}), (l_{32}; r_{31})\}$  в другой.

Основа графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup R_1 \cup R_2$  относительно минимального множества образующих содержит подграф  $G_{10}$  на вершинах  $v_1 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_2 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_3 = (l_{31}; r_{32})$ ,  $v_4 = (l_{12}; r_{12})$ ,  $v_5 = (l_{31}; r_{31})$ , следовательно, не является обобщенным внешнепланарным. А основа графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup R_1 \cup L_2$  допускает обобщенную внешнеплоскую укладку, представленную на рис. 9, но в качестве подграфа содержит  $K_{2,3}$  на множестве вершин  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{21}; r_{21}), (l_{12}; r_{12}), (l_{31}; r_{31}), (l_{32}; r_{31})\}$ , следовательно, не является внешнепланарным.

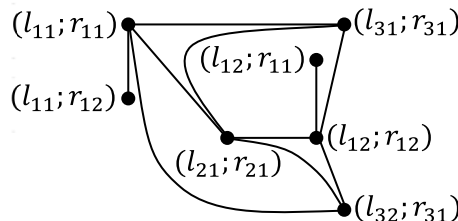


Рис. 9. Внешнеплоская укладка основы графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup R_1 \cup L_2$  относительно минимального множества образующих.

**Вершины, на которых восстанавливается подграф  $G_{10}$   
в графе Кэли полугруппы  $S$**

| Полугруппа $S$                                | $v_1$              | $v_2$              | $v_3$              | $v_4$              | $v_5$              |
|-----------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $L_2 \cup L_1 \cup L_1 \cup L_1$              | $(l_{12}; r_{11})$ | $(l_{31}; r_{31})$ | $(l_{41}; r_{41})$ | $(l_{11}; r_{11})$ | $(l_{21}; r_{21})$ |
| $L_1 \cup L_2 \cup L_1 \cup L_1$              | $(l_{22}; r_{21})$ | $(l_{31}; r_{31})$ | $(l_{41}; r_{41})$ | $(l_{21}; r_{21})$ | $(l_{11}; r_{11})$ |
| $L_1 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_1$              | $(l_{32}; r_{31})$ | $(l_{21}; r_{21})$ | $(l_{41}; r_{41})$ | $(l_{31}; r_{31})$ | $(l_{11}; r_{11})$ |
| $L_1 \cup L_1 \cup L_1 \cup L_2$              | $(l_{42}; r_{41})$ | $(l_{21}; r_{21})$ | $(l_{31}; r_{31})$ | $(l_{41}; r_{41})$ | $(l_{11}; r_{11})$ |
| $(L_2 \times R_2) \cup L_1 \cup L_1 \cup L_1$ | $(l_{12}; r_{12})$ | $(l_{31}; r_{31})$ | $(l_{41}; r_{41})$ | $(l_{11}; r_{11})$ | $(l_{21}; r_{21})$ |
| $L_1 \cup (L_2 \times R_2) \cup L_1 \cup L_1$ | $(l_{22}; r_{22})$ | $(l_{31}; r_{31})$ | $(l_{41}; r_{41})$ | $(l_{21}; r_{21})$ | $(l_{11}; r_{11})$ |
| $L_1 \cup L_1 \cup (L_2 \times R_2) \cup L_1$ | $(l_{32}; r_{32})$ | $(l_{21}; r_{21})$ | $(l_{41}; r_{41})$ | $(l_{31}; r_{31})$ | $(l_{11}; r_{11})$ |

Основа графа Кэли полугруппы  $L_2 \cup R_2 \cup R_1$  представляет собой сумму  $O_2 + K_3$ , изоморфную графу  $G_{10}$  на вершинах  $v_1 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_2 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_3 = (l_{21}; r_{22})$ ,  $v_4 = (l_{12}; r_{11})$ ,  $v_5 = (l_{31}; r_{31})$ , а основа графа Кэли полугруппы  $L_2 \cup L_2 \cup R_1$ , как было показано выше, допускает обобщенную внешнеплоскую укладку, но не является внешнепланарной. Наконец, основа графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup R_2 \cup R_1$  изоморфна основе графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup R_1 \cup R_2$ , поэтому приводит нас к тому же выводу с тем лишь отличием, что  $G_{10}$  обнаруживается на вершинах  $v_1 = (l_{11}; r_{11})$ ,  $v_2 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_3 = (l_{21}; r_{22})$ ,  $v_4 = (l_{12}; r_{12})$ ,  $v_5 = (l_{31}; r_{31})$ . Аналогично, основа графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup L_2 \cup R_1$  изоморфна основе графа Кэли полугруппы  $(L_2 \times R_2) \cup R_1 \cup L_2$  с тем лишь отличием, что подграф  $K_{2,3}$  обнаруживается на множестве вершин  $\{(l_{11}; r_{11}), (l_{21}; r_{21}), (l_{12}; r_{12}), (l_{31}; r_{31}), (l_{22}; r_{21})\}$ .

**С л у ч а й 3в.** Основа графа Кэли полугруппы  $S \cup L_2 \cup L_2$ , где  $S \in \{L_2, (L_2 \times R_2)\}$ , содержит подграф, стягиваемый к графу  $G_{10}$  на вершинах  $v_1 = (l_{22}; r_{21})$ ,  $v_2 = (l_{12}; r_{11})$ ,  $v_3 = (l_{32}; r_{31})$ ,  $v_4 = (l_{21}; r_{21})$ ,  $v_5 = (l_{11}; r_{11})$  для  $S = L_2$  либо  $v_2 = (l_{12}; r_{12})$  для  $S = (L_2 \times R_2)$ . Причем вершины  $v_2$  и  $v_5$  несмежные, но каждая из них соединена ребром с вершиной  $(l_{31}; r_{31})$ . Таким образом, оба графа в данном случае не являются обобщенными внешнепланарными и, следовательно, не являются внешнепланарными.

**С л у ч а и 4а и 4б.** Основа графа Кэли полугруппы  $L_1 \cup L_1 \cup L_1 \cup L_1$  представляет собой полный граф четвертого порядка  $K_4$ , следовательно, эта полугруппа допускает обобщенный внешнепланарный, но не допускает внешнепланарный граф Кэли. Основа графа Кэли каждой из оставшихся семи полугрупп относительно минимального множества образующих содержит подграф  $G_{10}$ . Соответствующие вершины, на которых восстанавливается  $G_{10}$ , приведем в сводной таблице выше.

Таким образом, указанные полугруппы не допускают обобщенный внешнепланарный граф Кэли и, следовательно, не допускают внешнепланарный граф Кэли.

Теоремы 1 и 2 доказаны.

Заметим, что класс ординальных сумм прямоугольных полугрупп имеет непустое пересечение с классом рассыпчатых полугрупп. Например, если взять ординальную сумму одноэлементных сингулярных полугрупп, то ее можно представить и как ординальные суммы прямоугольных полугрупп. Результаты, полученные в данной работе, не перекрываются результатами, полученными ранее.

Сопоставив утверждения теорем 1 и 2, как следствие получаем характеристическое свойство ординальных сумм прямоугольных полугрупп, допускающих обобщенный внешнепланарный, но не допускающих внешнепланарный граф Кэли.

**Следствие 1.** Пусть  $S = \bigcup_{i \in P} (L_i \times R_i)$  — ординальная сумма прямоугольных полугрупп, где  $P$  — простая цепь. Тогда  $S$  допускает обобщенный внешнепланарный, но не допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $|P| = 1$  и  $S = (L_i \times R_i)$ , где  $i \geq 1$ ;

- 2)  $|P| = 2$  и выполнено хотя бы одно из условий
- а) одна из компонент  $R_1$ , а другая —  $(L_i \times R_3)$ , где  $i \geq 1$ ;
  - б) одна из компонент  $R_2$ , а другая —  $(L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 3$  и  $j = 1$  или  $i = 1$  и  $j = 2$ , причем если  $R_2$  меньшая, то дополнительно возможно  $i = 2$  и  $j = 2$ ;
  - в) одна из компонент  $L_2$ , либо  $(L_2 \times R_2)$  является меньшей, а другая —  $(L_i \times R_j)$ ,  $i \geq 3$ ,  $j = 1$ , либо  $i = 2$ ,  $j = 2$  в случае, когда  $L_2$  или  $(L_2 \times R_2)$  меньшая;
  - г) меньшая из компонент  $(L_i \times R_j)$ , где  $i \geq 3$ ,  $j = 1$ , а большая —  $R_2$  либо  $L_2$ , причем если  $R_1$  большая, то возможно  $i \geq 2$ ,  $j = 4$ .
- 3)  $|P| = 3$  и выполнено хотя бы одно из условий
- а) две из компонент одноэлементные, а третья —  $(L_i \times R_1)$ , где  $i \geq 3$ ;
  - б) полугруппа  $S = R_1 \cup L_2 \cup L_2$ , либо  $S = L_2 \cup R_1 \cup L_2$ , либо  $S = L_2 \cup L_2 \cup R_1$ , либо  $S = (L_2 \times R_2) \cup R_1 \cup L_2$ , либо  $S = (L_2 \times R_2) \cup L_2 \cup R_1$ ;
- 4)  $|P| = 4$  и все компоненты одноэлементные  $L_1$ .

### Заключение

В работе рассмотрены ординальные суммы прямоугольных полугрупп. С помощью понятия основы графа проведено исследование возможности внешнеплоской и обобщенной внешнеплоской укладки графа Кэли таких полугрупп. Получены представления всех ординальных сумм прямоугольных полугрупп, допускающих обобщенный внешнепланарный граф Кэли. Подробно рассмотрен случай, когда графы Кэли таких полугрупп оказываются обобщенными внешнепланарными, но не внешнепланарными. Как упоминалось выше, классы полугрупп, для которых характерна планарность графов Кэли, могут быть естественными кандидатами на получение характеристического свойства (обобщенной) внешней планарности. Еще один интересный вопрос — перечислить полугруппы, допускающие вершинно-внешнепланарные графы Кэли, т. е. графы, которые становятся внешнепланарными после удаления некоторой вершины. Класс вершинно-внешнепланарных графов является минорно-замкнутым классом, находится между внешнепланарными и планарными графами, все его 57 запрещенных миноров известны [14].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Klement E.P., Mesiar R., Pap E.** Triangular norms as ordinal sums of semigroups in the sense of A. H. Clifford // Semigroup Forum. 2002. Vol. 65. P. 71–82. doi: 10.1007/s002330010127
2. **Su Y., Zong W., Mesiarová-Zemánková A.** Constructing uninorms via ordinal sums in the sense of A. H. Clifford // Semigroup Forum. 2022. Vol. 105. P. 328–344. doi: 10.1007/s00233-022-10287-1
3. **Maschke H.** The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams // Amer. J. Math. 1896. Vol. 18, no. 2. P. 156–194.
4. **Knauer K., Knauer U.** On planar right groups // Semigroup Forum. 2015. Vol. 92, no. 1. P. 142–157. doi: 10.1007/s00233-015-9688-2
5. **Knauer K., Knauer U.** Algebraic graph theory. Morphisms, monoids and matrices. 2nd edition. Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2019. 349 p. (Ser. De Gruyter Studies in Mathematics; vol. 41). doi: 10.1515/9783110617368
6. **Zhang X.** Clifford semigroups with genus zero, semigroups, acts and categories with applications to graphs // Proc. Int. Conf. Semigroups, acts and categories with applications to graphs. Estonian Math. Soc. Tartu, 2008. Vol. 3. P. 151–160.
7. **Zhu Y.** Generalized Cayley graphs of semigroups I // Semigroup Forum. 2012. Vol. 84. P. 131–143. doi: 10.1007/s00233-011-9368-9
8. **Соломатин Д.В.** Исследования полугрупп с планарными графами Кэли: результаты и проблемы // Прикл. дискрет. математика. 2021. № 54. С. 5–57. doi: 10.17223/20710410/54/1

9. Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических моноидов, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения // Вестн. ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. 2023. № 4. С. 43–56. doi: 10.26456/vtpmk697
10. Адян С.И. Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп // Докл. АН СССР. 1955. Вып. 103:4. С. 533–535.
11. Шеврин Л.Н. Полугруппы // Общая алгебра / под ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. Т. 2, гл. IV. С. 11–191.
12. Harary F. Graph theory. advanced book program series. Boulder: Westview Press, 1994. 288 p.
13. Sedláček J. On a generalization of outerplanar graphs // Časopis Pěst. Mat. 1988. Vol. 2 (113). P. 213–218.
14. Ding G., Dziobiak S. Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs // Graphs and Combinatorics. 2016. Vol. 32 (2). P. 583–627. doi: 10.1007/s00373-015-1611-9

Поступила 25.03.2024

После доработки 4.05.2024

Принята к публикации 13.05.2024

Соломатин Денис Владимирович  
 канд. физ.-мат. наук, доцент  
 доцент кафедры математики и методики обучения математике  
 Омский государственный педагогический университет  
 г. Омск  
 e-mail: solomatin\_dv@omgpu.ru

## REFERENCES

1. Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms as ordinal sums of semigroups in the sense of A. H. Clifford. *Semigroup Forum*, 2002, vol. 65, pp. 71–82. doi: 10.1007/s002330010127
2. Su Y., Zong W., Mesiarová-Zemánková A. Constructing uninorms via ordinal sums in the sense of A. H. Clifford. *Semigroup Forum*, 2022, vol. 105, pp. 328–344. doi: 10.1007/s00233-022-10287-1
3. Maschke H. The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams. *Amer. J. Math.*, 1896, vol. 18, no. 2, pp. 156–194.
4. Knauer K., Knauer U. On planar right groups. *Semigroup Forum*, 2015, vol. 92, no. 1, pp. 142–157. doi: 10.1007/s00233-015-9688-2
5. Knauer K., Knauer U. *Algebraic graph theory: morphisms, monoids and matrices*. Ser. De Gruyter studies in mathematics, vol. 41, 2nd rev. and ext. ed., Berlin, Boston, De Gruyter Publ., 2019, 349 p. doi: 10.1515/9783110617368
6. Zhang X. Clifford semigroups with genus zero. In: *Proc. Int. Conf. Semigroups, acts and categories with applications to graphs*, University of Tartu, 2007, Estonian Math. Soc. Tartu., 2008, vol. 3, pp. 151–160. ISBN: 978–9985–9644–2–2.
7. Zhu Y. Generalized Cayley graphs of semigroups I. *Semigroup Forum*, 2012, vol. 84, pp. 131–143. doi: 10.1007/s00233-011-9368-9
8. Solomatin D.V. Researches of semigroups with planar Cayley graphs: results and problems. *Prikl. Diskr. Mat.*, 2021, no. 54, pp. 5–57 (in Russian).
9. Solomatin D.V. Direct products of cyclic monoids admitting outerplanar Cayley graphs and their generalizations. *Vestnik TvGU. Ser. Prikladnaya Matematika*, 2023, vol. 4, pp. 43–56 (in Russian). doi: 10.26456/vtpmk697
10. Adyan S.I. Algorithmic unsolvability of the recognition problem for certain properties of groups. *Dokl. AN SSSR*, 1955, vol. 103, no. 4, pp. 533–535 (in Russian).
11. Shevrin L.N. Semigroups. *General algebra*. Ed. L. A. Skorniyakov. Moscow, Nauka Publ., 1991, vol. 2, ch. IV, pp. 11–191 (in Russian). ISBN: 5-02-014427-4.
12. Harary F. *Graph Theory*. Advanced book program ser., Boulder, Westview Press, 1994, 288 p.

13. Sedláček J. On a generalization of outerplanar graphs. *Časopis Pěst. Mat.*, 1988, vol. 2, no. 113, pp. 213–218.
14. Ding G., Dziobiak S. Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. *Graphs and combinatorics*, 2016, vol. 32, no. 2, pp. 583–627. doi: 10.1007/s00373-015-1611-9

Received March 25, 2024

Revised May 4, 2024

Accepted May 13, 2024

*Denis Vladimirovich Solomatin*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Omsk State Pedagogical University, Omsk, 644099 Russia, e-mail: solomatin\_dv@omgpu.ru.

Cite this article as: D. V. Solomatin. Ordinal sums of rectangular semigroups with outerplanar Cayley graphs and their generalizations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 251–264.