

УДК 519.853

О РЕГУЛЯРИЗОВАННОМ МЕТОДЕ БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ В АНАЛИЗЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Д. Скарин

В работе рассматривается проблема построения аппроксимаций для широкого класса несобственных задач выпуклого программирования (НЗ ВП). Исходная задача с противоречивой системой ограничений погружается в параметрическое семейство разрешимых моделей ВП, где параметром служит норма невязки функций ограничений. Минимальное значение параметра, при котором допустимое множество задачи становится непустым, определяет оптимальную коррекцию НЗ ВП. Для решения задачи коррекции применяется один из классических методов регуляризации некорректных экстремальных задач — метод стабилизирующих функций (метод Тихонова). При этом исходная задача с ограничениями вначале сводится к проблеме безусловной минимизации некоторой штрафной функции. Вместо обычных функций внешнего штрафа в работе используется метод внутренних (барьерных) функций. Конструктивные особенности барьерных функций могут дать определенные преимущества при численной реализации метода коррекции. В статье формулируются условия разрешимости задач, возникающих на различных этапах предлагаемого метода коррекции, исследуются вопросы согласования параметров процесса, обеспечивающих требуемую сходимость. Подробно изучаются возможности метода при работе с возмущенными данными.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод регуляризации Тихонова, методы барьерных функций.

V. D. Skarin. On the regularized method of barrier functions in the analysis of improper convex programs.

The paper considers the problem of constructing approximations for a wide class of improper convex programs (ICPs). The original problem with an inconsistent system of constraints is immersed in a parametric family of feasible convex programming models, where the norm of the discrepancy of the constraint functions serves as a parameter. The minimum value of the parameter at which the feasible set of the problem becomes nonempty determines an optimal correction of the ICP. To solve the correction problem, one of the classical methods of regularization of ill-posed extremal problems is used — the method of stabilizing functions (Tikhonov's method). In this case, the original problem with constraints is initially reduced to the problem of unconstrained minimization of a certain penalty function. Instead of conventional external penalty functions, the paper uses the method of internal (barrier) functions. The design features of barrier functions can provide certain advantages in the numerical implementation of the correction method. Conditions for the solvability of problems arising at various stages of the proposed correction method are formulated, and the issues of matching the process parameters that ensure the required convergence are studied. The capabilities of the method when working with perturbed data are analyzed.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, Tikhonov regularization method, barrier function methods.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-234-250

Введение

При математическом моделировании процессов принятия оптимальных решений в различных сферах человеческой деятельности нередко возникают задачи с особенностями, которые не имеют решений в обычном смысле данного понятия. Распространенными примерами подобных задач служат постановки с противоречивой системой ограничений. Такая ситуация является обычной в практике экономико-математического моделирования в случаях, когда пытаются учесть завышенные требования к качеству решений, когда имеются жесткие ресурсные ограничения, когда исходная информация об исследуемой системе является неполной и неточной.

Математические модели с противоречивыми ограничениями составляют важнейший класс так называемых несобственных задач математического программирования (НЗ МП), которые были введены в рассмотрение академиком И. И. Ереминым в начале 1980-х годов. Так, в случае выпуклой оптимизации по определению (см. [1; 2]) под несобственной понимается задача выпуклого программирования (ВП), для которой не выполняются классические соотношения двойственности, что, как правило, и является следствием несовместности системы ограничений. В силу своего распространения и значения для теории и практики методов оптимизации несобственные задачи стали важным объектом научного исследования (см. работы [3–11]). При этом в основном рассматриваются различные процедуры коррекции НЗ МП, т. е. преобразования такой модели в разрешимую задачу. Так, конкретная НЗ МП может погружаться в параметрическое семейство разрешимых задач МП, в котором затем отыскивается оптимальная относительно значения параметра модель (оптимальная коррекция). Решение последней задачи принимается за обобщенное (аппроксимационное) решение исходной НЗ. Существуют и другие подходы к коррекции НЗ МП, например, связанные с выбором максимально совместных подсистем несовместных систем ограничений (см. [12; 13]).

Одной из основных причин возникновения несовместности в задачах МП являются погрешности в задании информации, описывающей анализируемую постановку. В свою очередь модели с возмущенными входными данными представляют собой объект развитой теории неустойчивых (некорректных) задач оптимизации. Поэтому при исследовании НЗ МП естественным образом могут быть использованы идеи регуляризации некорректных экстремальных задач, лежащие в основе стандартных методов — таких как метод Тихонова, методы невязки и квазиразрешений (см. [14; 15]). В данной статье при построении алгоритмов нахождения обобщенного решения НЗ ВП используется структура наиболее распространенного подхода к регуляризации, а именно, метода стабилизирующих функций (метода Тихонова). Отметим, что рассматриваемый способ коррекции НЗ МП исследовался в работах [11; 16; 17].

Метод Тихонова применительно к задачам МП основан на сведении оптимизационной задачи с ограничениями к задаче параметрической безусловной минимизации. Обычно для этой цели в качестве нового критерия оптимизации используются варианты функции внешнего штрафа (см. [18–20]). Отличие данной работы состоит в применении для агрегации ограничений идеи метода внутреннего штрафа (метода барьерных функций). По сравнению с внешними штрафными функциями барьерная функция выделяется более высокой степенью гладкости, что позволяет выбирать при ее численной минимизации алгоритмы с повышенной эффективностью. Среди немногих публикаций, в которых рассматривался регуляризованный метод барьерных функций для коррекции НЗ МП, отметим работы [21; 22].

В статье ниже представлен регуляризованный вариант метода обобщенной обратной барьерной функции для нахождения аппроксимационного решения НЗ ВП. Формулируются условия разрешимости задач, возникающих на различных этапах метода. Исследуются общие вопросы сходимости, особое внимание уделяется согласованию управляющих параметров процесса (штрафного коэффициента, параметров регуляризации и коррекции ограничений), приведению их к единому параметру. Подробно изучаются возможности метода при работе с возмущенными данными.

1. Несобственная задача ВП и ее коррекция

Рассмотрим задачу ВП

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \quad (1)$$

где $X = \{x \mid f(x) \leq 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$ ($i = 0, 1, \dots, m$).

Пусть (1) — НЗ ВП, у которой $X = \emptyset$. Основной шаг в исследовании подобных задач составляет их коррекция. Под коррекцией НЗ будем понимать ее аппроксимацию в некотором классе разрешимых задач. При этом в структуру модели стараются внести минимальные

правки, привести ее к виду, типичному для данного класса и затем привлечь для дальнейшего анализа известные методы исследования подобных задач.

Одним из распространенных подходов к коррекции НЗ ВП является ее погружение в класс параметрических задач вида $\min\{f_0(x) \mid x \in X_\sigma\}$, где $X_\sigma = \{x \mid f_i(x) \leq \sigma, i = \overline{1, m}\}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^1$. Определим параметр $\bar{\sigma} = \min\{\sigma \mid X_\sigma \neq \emptyset\}$ и *задачей оптимальной коррекции* для НЗ ВП (1) назовем задачу

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\sigma}}\}. \quad (2)$$

Очевидно, что вместо скалярного параметра $\bar{\sigma}$ можно взять векторный $\bar{\xi} \in \mathbb{R}_+^m$ из условия

$$\bar{\xi} = \arg \min\{\|\xi = [\xi_1, \dots, \xi_m]\|_p \mid X_\xi = \{x \mid f_i(x) \leq \xi_i, i = \overline{1, m}\} \neq \emptyset\}, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|_p$ — символ некоторой векторной нормы, например, евклидовой ($p = 2$). Заметим, что $\bar{\sigma}$ из (2) является частным случаем (3), когда $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty$ — чебышевская норма вектора $\bar{\xi} = [\bar{\sigma}, \dots, \bar{\sigma}] \in \mathbb{R}_+^m$: $\|\bar{\xi}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |\xi_i| = \bar{\sigma}$.

Обозначим $\tilde{X}_\infty = \text{Arg min}\|f^+(x)\|_\infty$. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}_\infty$, $\tilde{\sigma} = \|f^+(\tilde{x})\|_\infty$. Так как $f_i^+(\tilde{x}) \leq \|f^+(\tilde{x})\|_\infty$ ($i = \overline{1, m}$), то $\tilde{x} \in X_{\tilde{\sigma}}$ и для $\bar{x} \in X_{\tilde{\sigma}}$ имеем

$$\tilde{\sigma} \geq \bar{\sigma} = \min\{\sigma \mid X_\sigma \neq \emptyset\} \geq \max_{1 \leq i \leq m} f_i^+(\bar{x}) = \|f^+(\bar{x})\|_\infty \geq \|f^+(\tilde{x})\|_\infty = \tilde{\sigma}.$$

Таким образом, задачу оптимальной коррекции (2) можно записать в виде

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \leq \bar{\sigma}, i = \overline{1, m}\}, \quad (4)$$

где $\bar{\sigma} = \min_x \|f^+(x)\|_\infty$.

2. Разрешимость задачи оптимальной коррекции

Остановимся на проблеме существования обобщенного решения НЗ ВП (1) (оптимального плана задачи (4)). Очевидно, что для разрешимости (4) необходимо следующее:

$$1) X_{\bar{\sigma}} \neq \emptyset; \quad 2) \exists \bar{x} \in X_{\bar{\sigma}}: f_0(\bar{x}) \leq f_0(x) \quad (\forall x \in X_{\bar{\sigma}}).$$

Вначале приведем пример НЗ ВП, которая не имеет обобщенных решений в силу того, что $X_{\bar{\sigma}} = \emptyset$.

Пример 1. Рассмотрим задачу (1) в пространстве $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$, у которой $X = \{x \mid f_1(x) \leq 0, f_2(x) \leq 0\}$, где $f_1(x) = 2^{x_1} - x_2$, $f_2(x) = x_2$. Очевидно, $X = \emptyset$. Также здесь пусто и множество $\tilde{X}_\infty = \text{Arg min}_x \|f^+(x)\|_\infty$, поскольку инфимум $\gamma = \inf \|f^+(x)\|_\infty = 0$ не достигается и тем самым величина $\bar{\sigma}$ не определяется.

Сформулируем для задачи (1) следующее условие.

Условие Y1 ($\bar{\gamma}$ -ограниченности; см. [2, § 27]). Существуют индексы $i_1, \dots, i_q \in \overline{1, m}$, для которых множество $S^{\bar{\gamma}} = \{x \mid f_{i_s}(x) \leq \bar{\gamma}, s = \overline{1, q}\}$ непусто и ограничено для некоторого $\bar{\gamma} > 0$.

Теорема 1. Если для НЗ ВП (1) выполнено условие Y1, то задача оптимальной коррекции (4) разрешима.

Доказательство. Обозначим:

$$F(x) = \|f^+(x)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} f_i^+(x), \quad F_1(x) = \max_{1 \leq s \leq q} f_{i_s}^+(x),$$

$$F_2(x) = \max_{i \neq i_s} f_i^+(x), \quad \mathcal{M}_{\bar{\gamma}} = \{x \mid F_1(x) \leq \bar{\gamma}\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{M}_{\bar{\gamma}} = S^{\bar{\gamma}}$ и, следовательно, $\mathcal{M}_{\bar{\gamma}}$ — непустое ограниченное множество. Пусть $\mathcal{N}_{\bar{\gamma}} = \text{Arg min}_{x \in \mathcal{M}_{\bar{\gamma}}} F_2(x)$, $\bar{x} \in \mathcal{N}_{\bar{\gamma}}$ и $\max_{i \neq i_s} f_i^+(\bar{x}) = \bar{\gamma}_1$. Выберем число $\bar{\gamma}_2 \geq \max\{\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1\}$ и рассмотрим множество $\mathcal{M} = \{x \mid F(x) \leq \bar{\gamma}_2\} = \mathcal{M}_{\bar{\gamma}_2} \cap \{x \mid f_i(x) \leq \bar{\gamma}_2, i \in \overline{1, m}, i \neq i_s\}$. В силу ограниченности $S^{\bar{\gamma}}$ множества $\mathcal{M}_{\bar{\gamma}_2}$ и $\mathcal{M}$ будут также ограничены. Функция $F(x)$ выпукла и неотрицательна для $x \in \mathbb{R}^m$, поэтому существует $\gamma' = \inf F(x)$, $\gamma' \geq 0$. Пусть $F(x_k) \searrow \gamma' (k \rightarrow \infty)$. Можно считать, что $x_k \in \mathcal{M}_0 = \{x \mid F(x) \leq F(\bar{x})\} (\forall k)$. Так как $\mathcal{M}_0$ — компактное множество, то существует $\tilde{x}$ — предельная точка для $\{x_k\} (k \rightarrow \infty)$, при этом $F(\tilde{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = \gamma'$, т.е. $\gamma' = F(\tilde{x}) = \min F(x)$, $\tilde{x} \in \bar{X}_{\infty} = \text{Arg min } \|f^+(x)\|_{\infty}$. Полагая $\bar{\sigma} = \|f^+(\tilde{x})\|_{\infty}$, имеем $X_{\bar{\sigma}} \neq \emptyset$. Окончательно разрешимость задачи (4) следует из ограниченности $X_{\bar{\sigma}}$ и выпуклости $f_0(x)$. $\square$

Следствие 1. Если в НЗ ВП (1) хотя бы одна функция-ограничение $f_i(x)$ ($i \in \overline{1, m}$) сильно выпуклая (см. [15]), то справедлива теорема 1.

Доказательство вытекает из того факта, что у сильно выпуклой функции $f_i(x)$ множество $\mathcal{M}_i(y) = \{x \mid f_i(x) \leq f_i(y)\}$ выпукло, замкнуто и ограничено для любого $y \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Замечание 1. Исходная задача (1) может иметь обобщенные решения и без выполнения условия Y1.

Пример 2. Пусть задача (1) в пространстве $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ имеет вид: $\min\{f_0(x) \mid f_1(x) \leq 0, f_2(x) \leq 0\}$, где $f_0(x)$ — некоторая выпуклая функция двух переменных, $f_1(x) = -x_1 + x_2 - 2$, $f_2(x) = x_1 - x_2 + 4$. Здесь $X = \{x \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, 2\} = \emptyset$, $\bar{\sigma} = \min_x \|f^+(x)\|_{\infty} = 1$, $X_{\bar{\sigma}} = \{x \mid -x_1 + x_2 = 3\}$. Очевидно, что $X_{\bar{\sigma}}$ — неограниченное множество и разрешимость задачи оптимальной коррекции для (1) будет зависеть от вида функции $f_0(x)$. Так, для $f_0(x) = x_1$ данная задача решения не имеет, тогда как для $f_0(x) = x_1 + x_2^2$ обобщенным решением НЗ ВП будет вектор $x^* = [-1.5, 1.5]$.

Сформулируем для задачи (1) следующее условие.

Условие Y2. Существует число $c \geq 0$ такое, что множество $\mathcal{M}_0(c) = \{x \mid f_0(x) \leq c\}$ непусто и ограничено.

Теорема 2. Пусть для НЗ ВП (1) выполнено условие Y2. Если в задаче (4) $X_{\bar{\sigma}} \neq \emptyset$, то эта задача разрешима.

Доказательство. Из выпуклости функции $f_0(x)$ и условия Y2 следует ограниченность множества $\mathcal{M}_0(c)$ для любого c , если $\mathcal{M}_0(c) \neq \emptyset$. Пусть $\bar{x}$ — произвольная точка из $X_{\bar{\sigma}}$, $c = f_0(\bar{x})$. Обозначим $X_{\bar{\sigma}}^c = X_{\bar{\sigma}} \cap \mathcal{M}_0(c)$. Так как $X_{\bar{\sigma}}^c$ — непустое выпуклое ограниченное множество, то существует $x^* = \arg \min_{x \in X_{\bar{\sigma}}^c} f_0(x)$. Отсюда следует $x^* \in X_{\bar{\sigma}}$, $f_0(x^*) \leq f_0(\bar{x})$, т.е. x^* — решение задачи (4). $\square$

Следствие 2. Если в задаче (1) $f_0(x)$ — сильно выпуклая функция, то для задачи (1) выполнено условие Y2.

Пусть в задаче (4) величина $\bar{\sigma}$ определена приближенно с точностью $\alpha > 0$. Тогда наряду с (4) возникает задача

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \leq \bar{\sigma} + \alpha, i = \overline{1, m}\}. \quad (5)$$

Если в (4) множество $X_{\bar{\sigma}}$ непусто и ограничено, то таким же будет и множество $X_{\bar{\sigma}+\alpha}$ для любого $\alpha > 0$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть для НЗ ВП (1) множество $X_{\bar{\sigma}}$ непусто и ограничено, $\bar{x}$ — обобщенное решение задачи (1) и $f_0(\bar{x}) = \bar{f}$. Тогда задача (5) разрешима для любого $\alpha > 0$ в некоторых точках x_{α} , при этом $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_0(x_{\alpha}) = \bar{f}$ и каждая предельная точка последовательности x_{α_k} при $\alpha_k \searrow 0$ будет обобщенным решением задачи (1).

Доказательство. Пусть $\bar{f}_k = f_0(x_{\alpha_k})$, $x_{\alpha_k} \in X_{\bar{\sigma}+\alpha_k}$, $0 < \alpha_{k+1} < \alpha_k < \dots < \alpha_0$. Так как $X_{\bar{\sigma}} \subset X_{\bar{\sigma}+\alpha_{k+1}} \subset X_{\bar{\sigma}+\alpha_k} \subset \dots \subset X_{\bar{\sigma}+\alpha_0}$, то $\bar{f} \geq \bar{f}_{k+1} \geq \bar{f}_k$. Числовая последовательность $\{\bar{f}_k\}$ возрастает при $\alpha_k \searrow 0$ и ограничена сверху, поэтому существует число $\tilde{f}$, для которого $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{f}_k = \tilde{f}$, где $\bar{f} \geq \tilde{f}$. Последовательность $\{x_{\alpha_k}\}$ лежит в ограниченном множестве $X_{\bar{\sigma}+\alpha_0}$. Обозначим через $\tilde{x}$ ее предельную точку при $\alpha_k \searrow 0$. Тогда $\tilde{x} \in X_{\bar{\sigma}}$ и справедливо

$$\lim_{\alpha_k \searrow 0} \bar{f}_k = \lim_{\alpha_k \searrow 0} f_0(x_{\alpha_k}) = f_0(\tilde{x}) \geq \bar{f} \geq \tilde{f} = \lim_{\alpha_k \searrow 0} \bar{f}_k.$$

Таким образом,

$$\lim_{\alpha_k \rightarrow 0} \bar{f}_k = \bar{f}. \quad (6)$$

Лемма доказана. $\square$

Замечание 2. Особо отметим, что лемма 1 охватывает распространенный важный случай, когда $X_{\bar{\sigma}} = \{\bar{x}\}$ и имеет место сходимость $\lim_{\alpha_k \rightarrow 0} x_{\alpha_k} = \bar{x}$.

Лемма 2. Пусть в задаче (4) множество $X_{\bar{\sigma}}$ непусто и ограничено, $\bar{f}_k = \min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\sigma}+\alpha_k}\}$. Существует константа $L > 0$ такая, что

$$0 \leq \bar{f} - \bar{f}_k \leq L \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Доказательство. На функцию $\bar{f}_\alpha = \min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\sigma}+\alpha}\}$ можно смотреть как на функцию чувствительности (см. [23]) $\varphi(\alpha)$ для задачи (4): $\varphi(\alpha) = \min\{f_0(x) \mid f_i(x) - \bar{\sigma} \leq \alpha, i = \overline{1, m}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^1$. Легко проверить, что $\varphi(\alpha)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}_+^1$. Известно (см., например, [15, § 4.6, теорема 6]), что выпуклая функция является липшицевой на любом ограниченном подмножестве своей области определения. Поэтому существует число $L > 0$, для которого $|\bar{f}_{\alpha_2} - \bar{f}_{\alpha_1}| \leq L |\alpha_2 - \alpha_1|$ ($\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha_0]$), откуда и следует (7). $\square$

Рассмотрим регуляризованную задачу (5)

$$\min\{F_\beta(x) = f_0(x) + \beta \|x\|^2 \mid f_i(x) \leq \bar{\sigma} + \alpha, i = \overline{1, m}\}. \quad (*)$$

Так как $F_\beta(x)$ — сильно выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция, то задача (*) разрешима для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ в единственной точке $x_{\alpha, \beta}$.

Лемма 3. Пусть $X_{\bar{\sigma}}^* \neq \emptyset$, где $X_{\bar{\sigma}}^*$ — множество решений задачи (4). Если в задаче (*) $\alpha \searrow 0$, $\beta = \beta(\alpha) \rightarrow 0$, $\frac{\alpha_k}{\beta(\alpha)} \rightarrow 0$, то $\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_{\alpha, \beta(\alpha)} = \bar{x}_0$, где $\bar{x}_0 = \arg \min\{\|x\| \mid x \in X_{\bar{\sigma}}^*\}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha_k \searrow 0$, $\beta_k = \beta(\alpha_k) \rightarrow 0$, $\frac{\alpha_k}{\beta_k} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Так как $x_k = x_{\alpha_k, \beta_k} \in X_{\bar{\sigma}+\alpha_k} \subset X_{\bar{\sigma}+\alpha_0}$, то $\{x_k\}$ — ограниченная последовательность при $k \rightarrow \infty$, и пусть $\tilde{x}$ — ее предельная точка. Очевидно, $\tilde{x} \in X_{\bar{\sigma}}$, $f_0(\tilde{x}) \geq \bar{f}$. Так как $\bar{x}_0 \in X_{\bar{\sigma}} \subset X_{\bar{\sigma}+\alpha_k}$, то $f_0(x_k) + \beta_k \|x_k\|^2 \leq \bar{f} + \beta_k \|\bar{x}_0\|^2$. Отсюда следует $f_0(\tilde{x}) \leq \bar{f}$, а также $\|x_k\|^2 - \|\bar{x}_0\|^2 \leq \frac{\bar{f} - f_0(x_k)}{\beta_k} \leq \frac{\bar{f} - \bar{f}_k}{\beta_k}$, где $\bar{f}_k$ — из (7). Таким образом, $f_0(\tilde{x}) = \bar{f}$, а с учетом (7) и единственности $\bar{x}_0$ в (4) имеем

$$\|\tilde{x}\|^2 \leq \|\bar{x}_0\|^2 + L \frac{\alpha_k}{\beta_k} \quad (k = 1, 2, \dots); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}_0. \quad \square$$

3. Метод регуляризованной барьерной функции в анализе НЗ ВП

При практическом нахождении обобщенного решения НЗ ВП (1) обычно сводят задачу (4) к эквивалентной постановке безусловной минимизации, агрегируя ограничения с помощью

некоторой штрафной функции $\Phi(x, r)$, чаще всего вида $\Phi(x, r) = f_0(x) + r \sum_{i=1}^m (f_i(x) - \bar{\sigma})^{+p}$, $r > 0$, $p \geq 1$. Недостатком этой функции “внешнего” штрафа является отсутствие дифференцируемости в случае гладких функций $f_i(x)$, что ограничивает выбор численного алгоритма ее минимизации. Более удобной с этой точки зрения будет обратная барьерная функция (“внутреннего” штрафа), которая в применении к разрешимой задаче ВП (1) с $X^0 \equiv \{x \mid f_i(x) < 0, i = \overline{1, m}\} \neq \emptyset$ образует задачу

$$\inf_{x \in X^0} \left\{ B_0(x, \varepsilon) = f_0(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^m \frac{1}{f_i(x)}, \varepsilon > 0 \right\}.$$

Если $\inf_{x \in X^0} B_0(x, \varepsilon) = B_\varepsilon^* = B_0(x_\varepsilon, \varepsilon)$, то можно ожидать, что при определенных условиях $B_\varepsilon^* \rightarrow f^*$, $\rho(x_\varepsilon, X^*) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), где f^* — оптимальное значение задачи (1), X^* — множество решений (1), $\rho(z, X^*) = \inf_{x^* \in X^*} \|z - x^*\|$.

Для задачи (4) аналогичная барьерная функция имела бы вид

$$B(x, \varepsilon) = f_0(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{\sigma} - f_i(x)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Но у задачи (4) множество внутренних точек $X_\sigma^0 = \{x \mid f_i(x) < \bar{\sigma}, i = \overline{1, m}\}$ заведомо пусто, поэтому представляется естественным в задаче $\inf B(x, \varepsilon)$ вместо множества X_σ^0 взять его приближение $X_{\sigma+\alpha}^0 = \{x \mid f_i(x) < \bar{\sigma} + \alpha, i = \overline{1, m}; \alpha > 0\}$, которое непусто для любого $\alpha > 0$. Таким образом, метод обратной барьерной функции для нахождения обобщенного решения НЗ ВП (1) будет иметь вид

$$\inf_{x \in X_{\sigma+\alpha}^0} \left\{ B(x, q) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma} + \alpha - f_i(x)} \right\}, \quad q = [\varepsilon, \alpha] > 0.$$

Одной из распространенных причин возникновения НЗ является приближенный характер информации об исходной модели. Точность задания функций задачи во многом определяет особенности постановки и анализа рассматриваемой проблемы, в частности, требуется принять особые меры для обеспечения устойчивости получаемых решений. Этой цели могут служить идеи стандартных методов регуляризации из теории некорректных оптимизационных задач, таких как метод стабилизирующих функций (метод Тихонова; см. [14]).

Применительно к задаче оптимальной коррекции (4) данный метод заключается в нахождении последовательности точек x_δ^* , для которых

$$T_\delta(x_\delta^*) \leq t_\delta^* + \gamma(\delta), \quad (8)$$

где $T_\delta(x) = f_0^\delta(x) + r P_\delta(x) + \beta \Omega(x)$ — функция Тихонова, $t_\delta^* = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} T_\delta(x)$, $P_\delta(x)$ — некоторая

функция штрафа за нарушение ограничений задачи (4), например, $P_\delta(x) = \sum_{i=1}^m (f_i^\delta(x) - \tilde{\sigma}^\delta)^{+p}$,

$p \geq 1$, $f_i^\delta(x)$ — приближения для $f_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$; $\tilde{\sigma}^\delta = \inf_x \|f^{\delta+}(x)\|_\infty$; $\Omega(x)$ — стабилизатор (см. [15]) задачи (неотрицательная выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$, для которой множество Лебега $Q_c = \{x \mid \Omega(x) \leq c\}$ ограничено при любых $Q_c \neq \emptyset$), $\gamma(\delta)$ — точность минимизации функции $T_\delta(x)$, $r > 0$ — штрафной коэффициент, $\beta > 0$ — параметр регуляризации, $\delta \geq 0$ — параметр погрешности. Требуется найти условия сходимости метода (8) при $\delta \rightarrow 0$ и взаимосвязь параметров γ , r , β , δ .

Применяемая ниже модификация метода регуляризации содержит в задаче (8) вместо $P_\delta(x)$ функцию барьеров

$$b_\delta(x, \alpha) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{\sigma} + \alpha - f_i^\delta(x)}, \quad \alpha > 0.$$

Рассмотрим вначале случай, когда в $T_\delta(x)$ все функции $f_i(x)$ заданы точно, т. е. в (8) $\delta = 0$. В качестве $\Omega(x)$ определим функцию $\Omega(x) = \|x\|^2$.

Исследуем связь между проблемой оптимальной коррекции (4) и задачей (8) в виде

$$\inf_{x \in X_{\bar{\sigma} + \alpha}^0} \left\{ T(x, q) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma} + \alpha - f_i(x)} + \beta \|x\|^2 \right\}, \quad q = [\varepsilon, \alpha, \beta] > 0. \quad (9)$$

Теорема 3. Пусть в задаче (4) множество $X_\sigma^* = \{x \in X_\sigma \mid f_0(x) = \bar{f} = \min_{x \in X_\sigma} f_0(x)\}$ непусто и ограничено; в задаче (9) $q = q_k = [\varepsilon_k, \alpha_k, \beta_k] > 0$, $T_k(x) = T(x, q_k)$, где

$$\varepsilon_k \rightarrow 0, \quad \alpha_k \searrow 0, \quad \beta_k \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (10)$$

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{x \in X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}^0} T_k(x) = \bar{f}$. Если дополнительно к условиям (10)

$$\frac{\alpha_k}{\beta_k} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k \beta_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \quad (11)$$

то $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \bar{x}_0$, где $\bar{x}_k = \arg \min_{x \in X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}^0} T_k(x)$, $\bar{x}_0 = \arg \min\{\|x\| \mid x \in X_\sigma^*\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $T_k(x)$ — сильно выпуклая на множестве $X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}$. На каждом множестве $X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}$ она достигает минимума в единственной точке $\bar{x}_k = \arg \min_{x \in X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}} T_k(x)$.

Из теории выпуклого анализа известно (см., например, [15, § 5.18]) следующее условие регулярности: если $f(x)$ — выпуклая функция, X — выпуклое множество из $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью X^0 , то

$$\min_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X^0} f(x).$$

Применяя это условие в задаче (9), получим $\inf_{x \in X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}^0} T_k(x) = \min_{x \in X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}} T_k(x) = T_k(\bar{x}_k)$. Так как $\bar{x}_0 \in X_{\bar{\sigma}}$, то $\bar{\sigma} + \alpha_k - f_i(\bar{x}_0) \geq \alpha_k > 0$ и, следовательно, $\frac{1}{\bar{\sigma} + \alpha_k - f_i(\bar{x}_0)} < \frac{1}{\alpha_k}$ ($i = \overline{1, m}$). Оценим

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\alpha_k} &= \min_{x \in X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}} f_0(x) < f_0(\bar{x}_k) + \beta_k \|\bar{x}_k\|^2 < T_k(\bar{x}_k) = \min_{x \in X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}} T_k(x) \leq T_k(\bar{x}_0) \\ &= \bar{f} + \beta_k \|\bar{x}_0\|^2 + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_k}{\bar{\sigma} + \alpha_k - f_i(\bar{x}_0)} < \bar{f} + \beta_k \|\bar{x}_0\|^2 + m \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда с учетом (10) и (6) получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\bar{x}_k) = \bar{f}$. Далее из (12) следует

$$\bar{f}_{\alpha_k} + \beta_k \|\bar{x}_k\|^2 \leq f_0(\bar{x}_k) + \beta_k \|\bar{x}_k\|^2 < \bar{f} + \beta_k \|\bar{x}_0\|^2 + m \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k}. \quad (13)$$

Принимая во внимание (7), из (13) имеем $\|\bar{x}_k\|^2 \leq \|\bar{x}_0\|^2 + L \frac{\alpha_k}{\beta_k} + m \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k \beta_k}$, что в силу условий теоремы дает $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x}_k\| \leq \|\bar{x}_0\|$, $\|\tilde{x}\| = \|\bar{x}_0\|$, где $\tilde{x}$ — предельная точка $\{\bar{x}_k\}$ при $k \rightarrow \infty$. Из единственности решения $\bar{x}_0$ вытекает $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \tilde{x} = \bar{x}_0$. $\square$

Пример последовательностей ε_k , α_k , β_k , удовлетворяющих условиям теоремы 3: $\varepsilon_k = 1/k^2$, $\alpha_k = 1/k$, $\beta_k = 1/\sqrt{k}$.

З а м е ч а н и е 3. В методе (9) величины ε_k , α_k , β_k тесно связаны соотношениями (10), (11). Исходя из этой связи, можно построить единый управляющий параметр, обеспечивающий

сходимость метода. Это построение будет зависеть от выбора за основу одного из параметров ε_k , α_k или β_k . В частности, если выбрать ε_k , то метод (9) превратится в задачу

$$\inf_{x \in X_{\bar{\sigma} + \sqrt{\varepsilon_k}}^0} \left\{ T_1(x, \varepsilon_k) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_k}{\bar{\sigma} + \sqrt{\varepsilon_k} - f_i(x)} + \sqrt[4]{\varepsilon_k} \|x\|^2 \right\}, \quad \varepsilon_k > 0, \quad \varepsilon_k \searrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (*)_\varepsilon$$

Если отталкиваться от α_k , получаем задачу

$$\inf_{x \in X_{\bar{\sigma} + \alpha_k}^0} \left\{ T_2(x, \alpha_k) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_k^2}{\bar{\sigma} + \alpha_k - f_i(x)} + \sqrt{\alpha_k} \|x\|^2 \right\}, \quad \alpha_k > 0, \quad \alpha_k \searrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (*)_\alpha$$

Заметим также, что выбор единого параметра в задачах $(*)_\varepsilon$ и $(*)_\alpha$ не является однозначным. Так, наряду с $T_2(x, \alpha_k)$ можно рассматривать

$$\tilde{T}_2(x, \alpha_k) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_k^{3/2}}{\bar{\sigma} + \alpha_k - f_i(x)} + \alpha_k^{1/4} \|x\|^2, \quad \alpha_k > 0.$$

Применим один из этих методов, а именно $(*)_\varepsilon$, к анализу задачи (5) в случае, когда величина оптимальной коррекции $\bar{\sigma}$ в (4) определяется приближенно с точностью $\bar{\alpha} > 0$. Обозначим $\bar{\sigma} + \bar{\alpha} = \tilde{\sigma}$. Согласно лемме 1 ограниченность множества $X_{\tilde{\sigma}}$ влечет разрешимость задачи

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\tilde{\sigma}} = \{x \mid f_i(x) \leq \tilde{\sigma}, \quad i = \overline{1, m}\}\}. \quad (14)$$

Сформулируем для задачи (14) вариант метода Тихонова с применением функции $T_1(x, \varepsilon_k) = \tilde{T}_k(x)$. Пусть задана числовая последовательность $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \searrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), $X_k = X_{\bar{\sigma} + \sqrt{\varepsilon_k}}$. Функция $\tilde{T}_k(x)$ — сильно выпуклая по x на выпуклом замкнутом множестве X_0 , поэтому для любого натурального k существует единственная точка $\tilde{x}_k = \arg \min_{x \in X_k} \tilde{T}_k(x)$.

Теорема 4. Пусть в задаче (4) множество $X_{\bar{\sigma}}$ непусто и ограничено. Решения задач $(*)_\varepsilon$ и (14) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ связаны следующими соотношениями:

$$1) \tilde{f}_k < \tilde{T}_k^* < \tilde{f} + \sqrt[4]{\varepsilon_k} (\|\tilde{x}_0\| + m); \quad 2) \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}_k^* = \tilde{f}; \quad 3) \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = \tilde{x}_0,$$

где $\tilde{T}_k^* = \min_{x \in X_k} \tilde{T}_k(x)$, $\tilde{f}$ и $\tilde{f}_k$ — оптимальные значения задач (14) и $\min_{x \in X_k} f_0(x)$ соответственно, $\tilde{x}_0$ — нормальное решение задачи (14).

Доказательство данного утверждения будет опущено; его можно провести, следуя схеме обоснования теоремы 3.

4. Множители Лагранжа в задаче оптимальной коррекции

Общеизвестна фундаментальная роль теории двойственности в математическом программировании. Она порождает новые средства исследования математических моделей, оценивает эффективность алгоритмов решения задач оптимизации. Эта теория позволяет проводить глубокий экономико-математический анализ моделируемых экономических систем.

Для задачи оптимальной коррекции (4) запишем функцию Лагранжа $L_{\bar{\sigma}}(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(f_i(x) - \bar{\sigma})$, $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \geq 0$. Предположим, что множество $X_{\bar{\sigma}}^* \times \Lambda_{\bar{\sigma}}^*$ седловых точек функции $L_{\bar{\sigma}}(x, \lambda)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ непусто. При этом задача (4) будет разрешима в точках $x^* \in X_{\bar{\sigma}}^*$, а седловые точки $[x^*, \lambda^*]$, где $\lambda^* \in \Lambda_{\bar{\sigma}}^*$ — вектор множителей Лагранжа (вектор двойственных оценок), будут удовлетворять следующим условиям Куна — Таккера:

$$L_{\bar{\sigma}}(x^*, \lambda^*) \leq L_{\bar{\sigma}}(x, \lambda^*) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n), \quad \lambda_i^*(f_i(x^*) - \bar{\sigma}) = 0 \quad (i = \overline{1, m}). \quad (15)$$

Условия (15) будут выполняться, например, в случаях (см. [2]): а) $f_i(x)$ — линейные функции, $i = \overline{1, m}$, $f_0(x)$ — выпуклая функция; б) $f_0(x)$ — выпуклая функция, $f_i(x)$ — выпуклые кусочно-линейные функции, $i = \overline{1, m}$.

Оценим влияние множителей Лагранжа λ_i^* на сходимость метода коррекции (9).

Теорема 5. Пусть $[x^*, \lambda^*] \in X_{\bar{\sigma}}^* \times \Lambda_{\bar{\sigma}}^*$. Тогда

$$\bar{f} - \alpha \|\lambda^*\|_1 + 2\sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i^*} < \inf_{x \in X_{\bar{\sigma}+\alpha}^0} T(x, q) < \bar{f} + \beta \|x^*\|^2 + m \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad (16)$$

где $T(x, q) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma} + \alpha - f_i(x)} + \beta \|x\|^2$, $q = [\varepsilon, \alpha, \beta] > 0$, $\bar{f} = f_0(x^*)$.

Доказательство. С учетом неравенств в (12) проверки требует лишь левое неравенство в (16). Пусть $x' \in X_{\bar{\sigma}+\alpha}^0$. Из условий (15) следует $f_0(x') \geq \bar{f} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^*(\bar{\sigma} - f_i(x'))$. Поэтому

$$\begin{aligned} T(x', q) &= f_0(x') + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma} + \alpha - f_i(x')} + \beta \|x'\|^2 \\ &\geq \bar{f} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^*(\bar{\sigma} + \alpha - f_i(x')) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma} + \alpha - f_i(x')} - \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \\ &= \bar{f} + \sum_{i=1}^m \left[(\lambda_i^*(\bar{\sigma} + \alpha - f_i(x')))^{1/2} - \frac{\varepsilon^{1/2}}{(\bar{\sigma} + \alpha - f_i(x'))^{1/2}} \right]^2 + 2\sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i^*} - \alpha \|\lambda^*\|_1 \\ &\geq \bar{f} - \alpha \|\lambda^*\|_1 + 2\sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i^*}. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 3. Пусть в задаче (9) параметры $q = q_k = [\varepsilon_k, \alpha_k, \beta_k] > 0$ изменяются по правилу (10):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k} = 0, \quad \alpha_{k+1} < \alpha_k \quad (\forall k).$$

Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{T_k^* = \inf_{x \in X_{\bar{\sigma}+\alpha_k}^0} T(x, q_k)\} = \bar{f}.$$

Заметим, что данное следствие вытекает и из теоремы 3. □

Далее оценим качество сходимости последовательности T_k^* . В соответствии с замечанием 3 сведем метод (9) к задаче, зависящей от одного параметра $\alpha = \alpha_k$:

$$\inf_{x \in X_{\bar{\sigma}+\alpha_k}^0} \left\{ T_\gamma(x, \alpha_k) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_k^{2-\gamma}}{\bar{\sigma} + \alpha_k - f_i(x)} + \alpha_k^\gamma \|x\|^2 \right\}, \quad \alpha_k > 0, \quad \gamma = \bar{\gamma} \in (0, 1). \quad (17)$$

Утверждение теоремы 5 для этой задачи приобретает вид: если $[x^*, \lambda^*] \in X_{\bar{\sigma}}^* \times \Lambda_{\bar{\sigma}}^*$ и $\alpha = \alpha_k > 0$, то выполняются неравенства

$$\bar{f} + \alpha_k^{1-\gamma/2} (2C^* - \alpha_k^{\gamma/2} \|\lambda^*\|_1) < T_k^* < \bar{f} + C_0 \alpha_k^\gamma, \quad (18)$$

где $T_k^* = \inf_{x \in X_{\bar{\sigma}+\alpha_k}^0} \{T_k(x) = T_\gamma(x, \alpha_k)\}$, $C^* = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i^*}$, $\lambda^* \neq 0$, $C_0 = \|x^*\|^2 + m$. Пусть в (17)

$\alpha_k \searrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Обозначим через $\bar{k}_1$ номер элемента α_k такого, что $\alpha_k^{\gamma/2} < C^* \|\lambda^*\|_1^{-1}$ при $k \geq \bar{k}_1$. Для таких k $2C^* - \alpha_k^{\gamma/2} \|\lambda^*\|_1 > C^*$, и тогда из (18) получаем

$$\bar{f} + C^* \alpha_k^{1-\gamma/2} < T_k^* < \bar{f} + C_0 \alpha_k^\gamma \quad (k \geq \bar{k}_1). \quad (19)$$

Очевидно, из (19) следует $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^* = \bar{f}$. Уточним характер этой сходимости.

Теорема 6. Пусть $[x^*, \lambda^*] \in X_\sigma^* \times \Lambda_\sigma^*$ и для задачи (4) сформулирован метод (17). Если при этом параметр $\alpha = \alpha_k$ изменяется в соответствии с алгоритмом

$$\alpha_{k+1}^\gamma = K \alpha_k^{1-\gamma/2}, \quad k = \bar{k}_1 + 1, \bar{k}_1 + 2, \dots; \quad \alpha_{\bar{k}_1} < 1, \quad (20)$$

где $K = (C^* + \bar{q} - 1) C_0^{-1}$, C^* и C_0 — константы из (19), $\bar{q}$ — фиксированное число из $(0, 1)$, $C^* + \bar{q} > 1$, то последовательность значений T_k^* сходится к $\bar{f}$ при $k \rightarrow \infty$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\bar{p} \in (0, 1)$.

Доказательство. Согласно (19) $T_{k+1}^* - \bar{f} < C_0 \alpha_{k+1}^\gamma$, $T_k^* - \bar{f} > C^* \alpha_k^{1-\gamma/2}$ ($k \geq \bar{k}_1$). Вычитая из первого неравенства второе, получим

$$T_{k+1}^* - \bar{f} < T_k^* - \bar{f} + C_0 \alpha_{k+1}^\gamma - C^* \alpha_k^{1-\gamma/2} \quad (k \geq \bar{k}_1). \quad (21)$$

В силу (20) имеем $C_0 \alpha_{k+1}^\gamma - C^* \alpha_k^{1-\gamma/2} = (\bar{q} - 1) \alpha_k^{1-\gamma/2}$. Поэтому из (21) следует

$$T_{k+1}^* - \bar{f} < T_k^* - \bar{f} + (\bar{q} - 1) \alpha_k^{1-\gamma/2} \quad (k \geq \bar{k}_1). \quad (22)$$

Учитывая, что согласно (19) $T_k^* - \bar{f} < C_0 \alpha_k^\gamma$ и $\bar{q} - 1 < 0$, получим $\alpha_k^{1-(3/2)\gamma} \frac{\bar{q} - 1}{C_0} (T_k^* - \bar{f}) > (\bar{q} - 1) \alpha_k^{1-\gamma/2}$. Тогда из (22) вытекает

$$T_{k+1}^* - \bar{f} < T_k^* - \bar{f} + (\bar{q} - 1) \alpha_k^{1-(3/2)\gamma} C_0^{-1} (T_k^* - \bar{f}) = p_k (T_k^* - \bar{f}),$$

где $p_k = 1 - \alpha_k^{1-(3/2)\gamma} (1 - \bar{q}) C_0^{-1}$, $k \geq \bar{k}_1$.

Пусть α_k выбрано так, что $\alpha_k^{1-(3/2)\gamma} < C_0 (1 - \bar{q})^{-1}$ для некоторого $\bar{k}_2$, $k \geq \bar{k}_2$. Тогда $0 < p_k < 1$. Так как $p_{k+1} = p_k + (1 - \bar{q}) C_0^{-1} (\alpha_k^{1-(3/2)\gamma} - \alpha_{k+1}^{1-(3/2)\gamma})$ и $\alpha_k \searrow 0$, то $p_{k+1} > p_k$ ($\forall k$), т.е. $\{p_k\}$ — возрастающая последовательность чисел из $(0, 1)$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \bar{p} \in (0, 1)$. $\square$

Несколько слов о выборе параметра γ в методе (17). Поскольку по теореме 3 для задачи (9) $\varepsilon_k / \alpha_k \rightarrow 0$, то $\alpha_k^{1-\gamma} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) и, следовательно, должно быть $1 > \gamma > 0$. Далее, формула для шагового коэффициента p_k содержит множитель $\alpha_k^{1-(3/2)\gamma}$, откуда вытекает требование $0 < \gamma < 2/3$. Например, при $\gamma = 1/2$ алгоритм (20) примет вид: $\alpha_{k+1} = K^2 \alpha_k^{3/2}$.

Если свести метод (9) по аналогии с (17) к задаче, зависящей от одного параметра $\varepsilon = \varepsilon_k$,

$$\inf_{x \in X_{\bar{\sigma} + \varepsilon_k}^0} \left\{ T_\nu(x, \varepsilon_k) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_k}{\bar{\sigma} + \varepsilon_k^\nu - f_i(x)} + \varepsilon_k^\nu \|x\|^2 \right\}, \quad \varepsilon_k > 0, \quad \nu = \bar{\nu} \in (0, 1), \quad (*)_\nu$$

то здесь также можно искать способы перерасчета параметра ε_k с тем, чтобы обеспечить сходимость последовательности $\tilde{T}_k^* = \inf_{x \in X_{\bar{\sigma} + \varepsilon_k}^0} T_\nu(x, \varepsilon_k)$ к значению $\bar{f}$ при $k \rightarrow \infty$ со скоростью геометрической прогрессии. При этом алгоритмы для задачи $(*)_\nu$ могут возникать из алгоритмов для (17) при соответствующей интерпретации параметров ε_k и α_k . Так, если в (17) положить $\varepsilon_k = \alpha_k^{2-\gamma}$, $\varepsilon_k^\nu = \alpha_k$, $\gamma = \nu$, где α_k и γ — из (17), то получим $T_\nu(x, \varepsilon_k) = T_\gamma(x, \alpha_k)$ и придем к аналогу алгоритма (20): $\varepsilon_{k+1}^\nu = K \varepsilon_k^{1-\nu/2}$.

С помощью метода регуляризованной барьерной функции можно находить приближения для соответствующих множителей Лагранжа. Рассмотрим задачу (частный случай $(*)$)

$$\min \{ F_\beta(x) = f_0(x) + \beta \|x\|^2 \mid f_i(x) \leq \tilde{\sigma}, \quad i = \overline{1, m} \}, \quad (23)$$

где $\beta > 0$, $\tilde{\sigma} = \bar{\sigma} + \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} > 0$. Задача (23) разрешима в некоторой точке $\bar{x} = \bar{x}(\beta)$, которая согласно лемме 3 при малом $\bar{\alpha} > 0$ будет приближать обобщенное решение задачи (1) с минимальной нормой.

Для задачи (23) запишем функцию Лагранжа

$$L_{\tilde{\sigma}}(x, \lambda) = F_{\beta}(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - \tilde{\sigma}), \quad \lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \geq 0.$$

Так как у задачи (23) существует точка $x^0 \in X_{\tilde{\sigma}}: f_i(x^0) < \tilde{\sigma}, i = \overline{1, m}$, то выполняются условия теоремы Куна — Таккера (см., например, [19, теорема 21.1]). Согласно этой теореме для $\bar{x}$ существует вектор $\bar{\lambda}$ такой, что пара $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ будет седловой точкой функции Лагранжа в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$, т. е. будут выполняться неравенства

$$L_{\tilde{\sigma}}(\bar{x}, \lambda) \leq L_{\tilde{\sigma}}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L_{\tilde{\sigma}}(x, \bar{\lambda}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m).$$

Последнее же эквивалентно выполнению условий Куна — Таккера

$$\nabla_x L_{\tilde{\sigma}}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0, \quad \bar{\lambda}_i (f_i(\bar{x}) - \tilde{\sigma}) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (24)$$

Задаче (23) поставим в соответствие проблему нахождения

$$\inf_{x \in X_{\tilde{\sigma}}^0} \left\{ B(x, \varepsilon, \beta) = F_{\beta}(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\tilde{\sigma} - f_i(x)} \right\}, \quad \varepsilon > 0, \quad \beta > 0. \quad (25)$$

Функция $B(x, \varepsilon, \beta)$ определена на $X_{\tilde{\sigma}}^0$ и достигает на этом множестве наименьшего значения в единственной точке $\tilde{x} = \tilde{x}(\varepsilon, \beta)$.

Теорема 7. Пусть в задаче (4) $X_{\tilde{\sigma}}$ непусто и ограничено, функции $f_i(x)$ дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$ ($i = 0, 1, \dots, m$), в задаче (25) $\varepsilon = \varepsilon_k > 0$, $\beta = \beta_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$), $\varepsilon_k \searrow 0$, $\beta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), $B_k(x) = B(x, \varepsilon_k, \beta_k)$, $F_k(x) = F_{\beta_k}(x)$, $\tilde{x}_k = \tilde{x}(\varepsilon_k, \beta_k)$. Тогда для пары $[\tilde{x}_k, \tilde{\lambda}_k]$, где $\tilde{\lambda}_k = [\tilde{\lambda}_1^k, \dots, \tilde{\lambda}_m^k]$, $\tilde{\lambda}_i^k = \frac{\varepsilon_k}{[\tilde{\sigma} - f_i(\tilde{x}_k)]^2}$, $i = 1, \dots, m$, выполняется следующий аналог условия (24):

$$\nabla_x L_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}_k, \tilde{\lambda}_k) = 0 \quad (\forall k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |(\tilde{\lambda}_k, f(\tilde{x}_k) - \tilde{\sigma})| = 0. \quad (26)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнение условий (24) для пары $[\tilde{x}_k, \tilde{\lambda}_k]$. После замены в (24) $\bar{x}$ на $\tilde{x}_k$, $\bar{\lambda}$ на $\tilde{\lambda}_k$ имеем

$$\nabla_x L_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}_k, \tilde{\lambda}_k) = \nabla_x F_k(\tilde{x}_k) + \sum \tilde{\lambda}_i^k \nabla f_i(\tilde{x}_k) = \nabla_x F_k(\tilde{x}_k) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_k \nabla f_i(\tilde{x}_k)}{[\tilde{\sigma} - f_i(\tilde{x}_k)]^2} = \nabla_x B_k(\tilde{x}_k).$$

По определению точки $\tilde{x}_k$ будет $\nabla_x B_k(\tilde{x}_k) = 0$ ($\forall k$), и тем самым имеет место первое из равенств (26).

Обозначим $\bar{f}_{\bar{\alpha}} = \inf_{x \in X_{\tilde{\sigma}}^0} f_0(x) = f_0(\bar{x}_{\bar{\alpha}})$. Для задачи (25) справедливы соотношения

$$\bar{f}_{\bar{\alpha}} \leq f_0(\tilde{x}_k) < F_k(\tilde{x}_k) < B_k(\tilde{x}_k) \leq B_k(\bar{x}_{\bar{\alpha}}) = \bar{f}_{\bar{\alpha}} + \beta_k \|\bar{x}_{\bar{\alpha}}\|^2 + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_k}{\tilde{\sigma} - f_i(\bar{x}_{\bar{\alpha}})}. \quad (27)$$

Так как в (27) величины $\|\bar{x}_{\bar{\alpha}}\|$ и $(\tilde{\sigma} - f_i(\bar{x}_{\bar{\alpha}}))^{-1}$ есть константы, зависящие от $\bar{\alpha}$, то отсюда следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k(\tilde{x}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(\tilde{x}_k) = \bar{f}_{\bar{\alpha}}. \quad (28)$$

Далее имеем

$$(\tilde{\lambda}_k, f(\tilde{x}_k) - \tilde{\sigma}) = \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_k (f_i(\tilde{x}_k) - \tilde{\sigma})}{[\tilde{\sigma} - f_i(\tilde{x}_k)]^2} = - \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_k}{\tilde{\sigma} - f_i(\tilde{x}_k)} = F_k(\tilde{x}_k) - B_k(\tilde{x}_k).$$

Учитывая соотношения (28), убеждаемся в справедливости и второго равенства из (26). $\square$

5. Сходимость метода в случае неточной информации

Пусть в задаче (1) $X = \emptyset$ и выполнено условие Y1 из разд. 2. Тогда согласно теореме 1 будет разрешима задача оптимальной коррекции (4), при этом $X_{\bar{\sigma}} \neq \emptyset$, $\bar{\sigma} = \min\{\sigma \mid X_{\sigma} \neq \emptyset\}$ и существует точка $\bar{x} \in X_{\bar{\sigma}}$ такая, что $\|f^+(\bar{x})\|_{\infty} = \bar{\sigma}$, $f_0(\bar{x}) = \bar{f} = \min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\sigma}}\}$.

Предположим, что в задаче (1) вместо $f_i(x)$ определены непрерывные функции $f_i^{\delta}(x)$, для которых

$$|f_i^{\delta}(x) - f_i(x)| \leq \delta(1 + \|x\|^2), \quad \delta > 0, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \quad (29)$$

Тогда задача оптимальной коррекции (4) для (1) примет вид

$$\min\{f_0^{\delta}(x) \mid x \in X_{\bar{\sigma}^{\delta}}\},$$

где $X_{\bar{\sigma}^{\delta}} = \{x \mid f_i^{\delta}(x) \leq \bar{\sigma}^{\delta}, \quad i = \overline{1, m}\}$, $\bar{\sigma}^{\delta} = \inf_x \|f^{\delta+}(x)\|_{\infty}$.

Сформулируем задачу

$$\min\left\{B^{\delta}(x, q) = f_0^{\delta}(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma}^{\delta} + 2\alpha - f_i^{\delta}(x)} + \beta \|x\|^2\right\}, \quad (30)$$

где $x \in \bar{X}_{\alpha}^{\delta} = \{x \mid f_i^{\delta}(x) \leq \bar{\sigma}^{\delta} + \alpha, \quad i = \overline{1, m}; \quad x \in D\}$, $q = [\varepsilon, \alpha, \beta] > 0$, $\bar{\sigma}^{\delta} = \min\{\|f^{\delta+}(x)\|_{\infty} \mid x \in D = \{x \mid \|x\| \leq d = \|\bar{x}\|\}\}$.

Теорема 8. Пусть в задаче (30)

$$0 < \delta \leq \frac{\alpha}{4(1 + d^2)}. \quad (31)$$

Для любого $x' \in \bar{X}_{\alpha}^{\delta}$ справедлива оценка

$$|B^{\delta}(x', q) - B(x', q)| \leq \delta(1 + d^2) + m \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad (32)$$

где $B(x, q) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma} + 2\alpha - f_i(x)} + \beta \|x\|^2$, $q = [\varepsilon, \alpha, \beta] > 0$.

Доказательство. Оценим связь между величинами $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma}^{\delta}$. Из определения (29) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $\|f^{\delta+}(x)\|_{\infty} \leq \|f^+(x)\|_{\infty} + \delta(1 + \|x\|^2)$, поэтому

$$\bar{\sigma}^{\delta} = \min_{x \in D} \|f^{\delta+}(x)\|_{\infty} \leq \min_{x \in D} \{\|f^+(x)\|_{\infty} + \delta(1 + \|x\|^2)\} \leq \|f^+(\bar{x})\|_{\infty} + \delta(1 + \|\bar{x}\|^2) = \bar{\sigma} + \delta(1 + d^2).$$

Симметричным образом из (29) также следует $\|f^+(x)\|_{\infty} \leq \|f^{\delta+}(x)\|_{\infty} + \delta(1 + \|x\|^2)$, и, значит,

$$\bar{\sigma} = \min_x \|f^+(x)\|_{\infty} = \min_{x \in D} \|f^+(x)\|_{\infty} \leq \min_{x \in D} \{\|f^{\delta+}(x)\|_{\infty} + \delta(1 + \|x\|^2)\}$$

$$\leq \|f^{\delta+}(x_{\delta})\|_{\infty} + \delta(1 + \|x_{\delta}\|^2) \leq \bar{\sigma}^{\delta} + \delta(1 + d^2)$$

(здесь $x_{\delta} = \arg \min_{x \in D} \|f^{\delta+}(x)\|_{\infty}$). Таким образом, справедлива оценка

$$|\bar{\sigma}^{\delta} - \bar{\sigma}| \leq \delta(1 + d^2) \quad (\forall \delta > 0). \quad (33)$$

Если в задаче (30) параметры α и δ связаны соотношением (31), то

$$\bar{X}_{\bar{\sigma}} \subset \bar{X}_{\alpha}^{\delta} \subset \bar{X}_{\bar{\sigma}+2\alpha}, \quad (34)$$

где $\bar{X}_{\bar{\sigma}} = X_{\bar{\sigma}} \cap D$, $\bar{X}_{\bar{\sigma}+2\alpha} = \{x \mid f_i(x) \leq \bar{\sigma} + 2\alpha, \quad i = \overline{1, m}\} \cap D$.

В самом деле, пусть $\bar{x} \in \bar{X}_{\bar{\sigma}}$. В соответствии с (30), (33) и (31) получим $f_i^\delta(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}) + \delta(1+d^2) \leq \bar{\sigma} + \delta(1+d^2) \leq \bar{\sigma}^\delta + 2\delta(1+d^2) \leq \bar{\sigma}^\delta + (1/2)\alpha$, т. е. $\bar{x} \in \bar{X}_\alpha^\delta$. Далее, для произвольной точки $x' \in \bar{X}_\alpha^\delta$ имеем $f_i(x') - \delta(1+d^2) \leq f_i^\delta(x') \leq \bar{\sigma}^\delta + \alpha \leq \bar{\sigma} + \delta(1+d^2) + \alpha$, что в силу (31) дает $f_i(x') \leq \bar{\sigma} + 2\delta(1+d^2) + \alpha \leq \bar{\sigma} + 2\alpha$, т. е. $x' \in \bar{X}_{\bar{\sigma}+2\alpha}$.

Пусть $x' \in \bar{X}_\alpha^\delta$. Тогда

$$\begin{aligned} B(x', q) &= f_0(x') + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma} + 2\alpha - f_i(x')} + \beta \|x'\|^2 = f_0^\delta(x') + f_0(x') - f_0^\delta(x') + \beta \|x'\|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma}^\delta + 2\alpha - f_i^\delta(x')} + \varepsilon \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{\bar{\sigma} + 2\alpha - f_i(x')} - \frac{1}{\bar{\sigma}^\delta + 2\alpha - f_i^\delta(x')} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Оценим разность $\frac{1}{\bar{\sigma} + 2\alpha - f_i(x')} - \frac{1}{\bar{\sigma}^\delta + 2\alpha - f_i^\delta(x')}$. Учитывая (29), (33) и (31), получим $\bar{\sigma} + 2\alpha - f_i(x') \geq \bar{\sigma}^\delta + 2\alpha - f_i^\delta(x') - 2\delta(1+d^2) = \bar{\sigma}^\delta + \alpha - f_i^\delta(x') + \alpha/2 + \alpha/2 - 2\delta(1+d^2) \geq \alpha/2 > 0$. Поэтому

$$\frac{1}{\bar{\sigma} + 2\alpha - f_i(x')} < \frac{2}{\alpha}. \quad (36)$$

Далее, из того, что $x' \in \bar{X}_\alpha^\delta$, имеем $\bar{\sigma}^\delta + 2\alpha - f_i^\delta(x') \geq \alpha > 0$, откуда следует

$$\frac{1}{\bar{\sigma}^\delta + 2\alpha - f_i^\delta(x')} < \frac{1}{\alpha}.$$

Последнее вместе с (36), (33), (26), (31) дает следующую оценку для анализируемой разности из (35):

$$\frac{1}{\bar{\sigma} + 2\alpha - f_i(x')} - \frac{1}{\bar{\sigma}^\delta + 2\alpha - f_i^\delta(x')} = \frac{\bar{\sigma}^\delta - \bar{\sigma} + f_i(x') - f_i^\delta(x')}{(\bar{\sigma} + 2\alpha - f_i(x'))(\bar{\sigma}^\delta + 2\alpha - f_i^\delta(x'))} \leq \frac{4\delta(1+d^2)}{\alpha^2} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом, из (35) получаем

$$B(x', q) \leq B^\delta(x', q) + \delta(1+d^2) + m \frac{\varepsilon}{\alpha} \quad (\forall x' \in \bar{X}_\alpha^\delta). \quad (37)$$

Повторяя ход рассуждений, которые привели к (37), можно получить аналогичную оценку

$$B^\delta(x', q) \leq B(x', q) + \delta(1+d^2) + m \frac{\varepsilon}{\alpha} \quad (\forall x' \in \bar{X}_\alpha^\delta), \quad (38)$$

что наряду с (37) приводит к требуемому неравенству (32). $\square$

Сформулируем общую теорему о сходимости метода регуляризованной барьерной функции применительно к анализу НЗ ВП.

Теорема 9. Пусть в задаче (30)

$$0 < \delta \leq \frac{\alpha}{4(1+d^2)}, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \beta > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \alpha \searrow 0, \quad \beta \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon}{\alpha} \rightarrow 0. \quad (39)$$

Тогда $\lim_{x \in \bar{X}_\alpha^\delta} \min B^\delta(x, q) = \bar{f} = \min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\sigma}}\}$. Если дополнительно к условиям (39)

$$\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon}{\alpha\beta} \rightarrow 0, \quad (40)$$

то $\lim x_\alpha^\delta = \bar{x}_0$, где $\bar{x}_0 = \arg \min\{\|\bar{x}\| \mid \bar{x} - \text{обобщенное решение задачи (1)}\}$.

Доказательство. Обозначим: $\bar{f}_\alpha^\delta = \min_{x \in \bar{X}_\alpha^\delta} f_0(x)$, $\bar{f}_{2\alpha} = \min_{x \in \bar{X}_{\bar{\sigma}+2\alpha}} f_0(x)$. Учитывая (34), получим $\bar{f} = \bar{f}_{\bar{\sigma}} \geq \bar{f}_\alpha^\delta \geq \bar{f}_{2\alpha}$. Согласно лемме 1 имеем $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{f}_{2\alpha} = \bar{f}$. Поэтому

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{f}_\alpha^\delta = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{f}_{2\alpha} = \bar{f}. \quad (41)$$

Пусть $\bar{B}^\delta = \min_{x \in \bar{X}_\alpha^\delta} B^\delta(x, q) = B^\delta(x_\alpha^\delta, q)$. Применим оценку (38) при $x' = \bar{x} \in \bar{X}_{\bar{\sigma}} \subset \bar{X}_\alpha^\delta$. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{B}^\delta &\leq B^\delta(\bar{x}, q) \leq B(\bar{x}, q) + \delta(1 + d^2) + m \frac{\varepsilon}{\alpha} = f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\bar{\sigma} + 2\alpha - f_i(\bar{x})} \\ &+ \beta \|\bar{x}\|^2 + \delta(1 + d^2) + m \frac{\varepsilon}{\alpha} \leq \bar{f} + \beta \|\bar{x}\|^2 + \delta(1 + d^2) + 2m \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned} \quad (42)$$

С другой стороны,

$$\bar{B}^\delta > f_0^\delta(x_\alpha^\delta) + \beta \|x_\alpha^\delta\|^2 \geq f_0(x_\alpha^\delta) - \delta(1 + d^2) \geq \bar{f}_\alpha^\delta - \delta(1 + d^2). \quad (43)$$

Принимая во внимание оценки (42), (43), равенство (41), получим требуемый предел $\lim \bar{B}^\delta = \bar{f}$. Далее, из (42) и (43) следует

$$\begin{aligned} \bar{f}_{2\alpha} + \beta \|x_\alpha^\delta\|^2 - \delta(1 + d^2) &\leq \bar{f} + \beta \|\bar{x}\|^2 + \delta(1 + d^2) + 2m \frac{\varepsilon}{\alpha}, \\ \|x_\alpha^\delta\|^2 &\leq \frac{\bar{f} - \bar{f}_{2\alpha}}{\beta} + \|\bar{x}\|^2 + \frac{\alpha}{2\beta} + 2m \frac{\varepsilon}{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (44)$$

Согласно лемме 2 существует константа $L > 0$, для которой $|\bar{f} - \bar{f}_{2\alpha}| < L\alpha$. Последовательность $\{x_\alpha^\delta\}$ лежит в ограниченном множестве $\bar{X}_\alpha^\delta \subset \bar{X}_{\bar{\sigma}+2\alpha}$, ее предельную точку при стремлении параметров задачи (30) к нулю в соответствии с условиями (39), (40) обозначим через $\tilde{x}$. Так как $f_i(x_\alpha^\delta) \leq \bar{\sigma} + 2\alpha$, то $\tilde{x} \in \bar{X}_{\bar{\sigma}}$. Из (44) следует

$$\|x_\alpha^\delta\|^2 \leq L \frac{\alpha}{\beta} + \|\bar{x}_0\|^2 + \frac{\alpha}{2\beta} + 2m \frac{\varepsilon}{\alpha\beta},$$

откуда с учетом (39), (40) получаем $\|\tilde{x}\| \leq \|\bar{x}_0\|$, что в силу единственности нормального решения задачи (4) влечет $\lim x_\alpha^\delta = \bar{x}_0$. $\square$

Заключение

Предметом исследований в данной статье являются задачи выпуклого программирования с противоречивой системой ограничений. Подобные объекты представляют важнейший класс несобственных задач выпуклого программирования. Основное внимание в работе уделяется проблеме коррекции НЗ ВП. Под процессом коррекции здесь понимается построение параметрического семейства близких в определенном смысле разрешимых моделей, в котором отыскивается оптимальная относительно значения параметра модель. Решение этой задачи оптимальной коррекции принимается за обобщенное решение исходной НЗ. В работе в качестве модели коррекции рассматривается задача минимизации целевой функции на множестве точек минимума чебышевской нормы невязки ограничений. Данная проблема чувствительна к точности задания своих функций, поэтому представляется актуальным применение идей регуляризации некорректных моделей оптимизации. С этой целью в работе рассматривается известный метод стабилизирующих функций (метод Тихонова). Обычно в этом методе при решении задач оптимизации с ограничениями используется предварительное сведение задачи к проблеме безусловной минимизации при помощи некоторого метода внешних штрафных

функций. В данной работе для этой цели применяется метод барьерных функций (внутреннего штрафа), который имеет ряд преимуществ при численной реализации. Рассматриваются условия разрешимости задач, возникающих на различных этапах предлагаемого варианта коррекции НЗ ВП. Особое внимание уделяется согласованию значений управляющих параметров, использованию двойственных оценок при обосновании сходимости метода. Подробно исследуется работа метода с возмущенными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
4. **Кочиков И.В., Матвиенко А.Н., Ягола А.Г.** Обобщенный принцип невязки для решения несовместных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 7. С. 1087–1090.
5. Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. Сб. науч. статей. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1985. 136 с.
6. **Скарин В.Д.** Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 3. С. 439–448.
7. **Попов Л.Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 3–11.
8. **Волков В.В., Ерохин В.И., Красников А.С., Разумов А.В., Хвостов М.Н.** Минимальная по евклидовой норме матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 11. С. 1788–1803.
9. **Васильев Ф.П., Потапов М.М., Артемьева Л.А.** Экстраградиентный метод коррекции противоречивых задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 12. С. 1992–1998.
10. **Dax A.** The smallest correction of an inconsistent system of linear inequalities // Optimization and Engineering. 2001. Vol. 2. P. 349–359.
11. **Renaut R.A., Guo N.** Efficient algorithms for solution of regularized total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, № 2. P. 457–476.
12. **Мазуров Вл.Д.** Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990. 248 с.
13. **Хачай М.Ю.** Об оценке числа членов минимального комитета системы линейных неравенств. Журн. вычислительной математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 11. С. 1399–1404.
14. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
15. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: Кн. 1, 2. Изд-во МЦНМО, 2011. 1056 с.
16. **Golub G.N., Hansen P.C., O’Leary D.P.** Tikhonov regularization and total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1999. Vol. 21, no. 1. P. 185–194.
17. **Скарин В.Д.** О некоторых универсальных методах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Автоматика и телемеханика. 2012. № 2. С. 99–110.
18. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
19. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 196 с.
20. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
21. **Скарин В.Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.
22. **Попов Л.Д.** Поиск обобщенных решений несобственных задач линейного и выпуклого программирования с помощью барьерных функций // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 2. С. 134–146.

23. Эльстер К.-Х., Рейнгарт Р., Шойбле М., Донат Г. Введение в нелинейное программирование. М.: Наука, 1985. 264 с.

Поступила 8.07.2024

После доработки 5.08.2024

Принята к публикации 12.08.2024

Скарин Владимир Дмитриевич

д-р физ.-мат. наук, зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: skavd@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Eremin I.I. Duality for improper problems of linear and convex programming. *Sov. Math., Dokl.*, 1981, vol. 23, pp. 62–66.
2. Eremin I.I., Mazurov V.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 336 p.
3. Eremin I.I. *Protivorechivye modeli optimal'nogo planirovaniya* [Contradictory models of optimal planning]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 160 p. ISBN: 5-02-013773-1.
4. Kochikov I.V., Matvienko A.N., Yagola A.G. The generalized residual principle for the solution of inconsistent equations. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1984, vol. 24, no. 4, pp. 78–80. doi: 10.1016/0041-5553(84)90233-7
5. *Parametricheskaya optimizatsiya i metody approksimatsii nesobstvennykh zadach matematicheskogo programmirovaniya* [Sb. st.] [Parametric optimization and methods of approximation of improper problems of mathematical programming. Sb. Art.], USSR Academy of Sciences, Ural. Sci. Center; [Ans. ed. I. I. Eremin, L. D. Popov], Sverdlovsk, UC USSR Academy of Sciences, 1985, 135 p.
6. Skarin V.D. An approach to the analysis of improper linear programming problems. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1986, vol. 26, no. 2, pp. 73–79. doi: 10.1016/0041-5553(86)90011-X
7. Popov L.D. Use of barrier functions for optimal correction of improper problems of linear programming of the 1st kind. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 417–424. doi: 10.1134/S0005117912030010
8. Volkov V.V., Erokhin V.I., Krasnikov A.S., Razumov A.V., Khvostov M.N. Minimum-Euclidean-norm matrix correction for a pair of dual linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2017, vol. 57, no. 11, pp. 1757–1770. doi: 10.1134/S0965542517110148
9. Artem'eva L.A., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. Extragradient method for correction of inconsistent linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 1919–1925. doi: 10.1134/S0965542518120163
10. Dax A. The smallest correction of an inconsistent system of linear inequalities. *Optimization and Engineering*, 2001, vol. 2, pp. 349–359. doi: 10.1023/A:1015370617219
11. Renaut R.A., Guo N. Efficient algorithms for solution of regularized total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, vol. 26, no. 2, pp. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889
12. Mazurov V.D. *Metod komitetov v zadachakh optimizatsii i klassifikatsii* [Committee method in optimization and classification problems]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 245 p. ISBN: 5-02-013976-9.
13. Khachai M.Yu. On an estimate for the number of members in the minimal committee of a system of linear inequalities. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1997, vol. 37, no. 11, pp. 1356–1361.
14. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solutions of ill-posed problems*. Transl. from the 2nd Russian ed., NY, Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240. Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p.
15. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, MCNMO Publ., 2011, vol. 1, 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2; vol. 2, 433 p. ISBN: 978-5-94057-708-9.
16. Golub G.N., Hansen P.C., O'Leary D.P. Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1999, vol. 21, no. 1, pp. 185–194. doi: 10.1137/s0895479897326432
17. Skarin V.D. On some universal methods of correction of the improper convex programming problems. *Automat. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 2, pp. 300–309. doi: 10.1134/S0005117912020087

18. Fiacco A.V., McCormick G.P. *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*. Classics in applied mathematics, vol. 4. Philadelphia, SIAM, 1987, 226 p.
doi: 10.1137/1.9781611971316. Translated to Russian under the title *Nelineinoe programmirovaniye. Metody posledovatel'noi bezuslovnoi minimizatsii*. Moscow, Mir Publ., 1972, 240 p.
19. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 196 p.
20. Evtushenko Yu.G. *Numerical optimization techniques*. NY, Springer-Verlag, 1985, 562 p. ISBN: 978-1-4612-9530-3. Original Russian text published in Evtushenko Yu. G., *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ikh primeneniye v sistemakh optimizatsii*, Moscow, Nauka Publ., 1982, 432 p.
21. Skarin V.D. Barrier function method and correction algorithms for improper convex programming problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 263, no. 2, pp. S120–S134.
doi: 10.1134/S0081543808060126
22. Popov L.D. Search for generalized solutions of improper problems of linear and convex programming using barrier functions. *Iz. Irkutsk State Univ. Ser. Math.*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 134–146 (in Russian).
23. Elster K.-H., Reinhardt R., Schaulle M., Donath Y. *Einführung in die nichtlineare optimierung*. Leipzig, 1977. Translated to Russian under the title *Vvedeniye v nelineynoye programmirovaniye*, Moscow, Nauka Publ., 1985, 264 p.

Received July 8, 2024

Revised August 5, 2024

Accepted August 12, 2024

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: skavd@imm.uran.ru.

Cite this article as: V.D. Skarin. The method of quasi-solutions based on barrier functions in the analysis of improper convex programming problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 234–250.