

УДК 517.518.153

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ НЕПРЕРЫВНОЙ НИГДЕ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ С МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩИМ ДАННОГО

А. И. Рубинштейн, Д. С. Теляковский

Найдутся такие положительные числа C и c , что для произвольной выпуклой вверх функции типа модуля непрерывности $\omega(t)$, у которой $\omega(t)/t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$, можно построить пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции $W_\omega(x)$ типа Вейерштрасса, для которой выполнены следующие условия.

1°. Модуль непрерывности функции $W_\omega(x)$ не превосходит $C\omega(t)$.

2°. Для каждой точки x_0 найдется сходящаяся к x_0 последовательность $\{x_n\}$, для которой при каждом номере n выполнено неравенство $|W_\omega(x_n) - W_\omega(x_0)| > c\omega(|x_n - x_0|)$.

3°. В каждой точке производные числа функции $W_\omega(x)$ принимают любое значение из промежутка $[-\infty; +\infty]$.

Ключевые слова: модуль непрерывности, нигде не дифференцируемая непрерывная функция, производные числа, нигде не дифференцируемая непрерывная функция типа Вейерштрасса.

A. I. Rubinstein, D. S. Telyakovskii. One example of a continuous nowhere differentiable function whose modulus of continuity does not exceed a given one.

There exist positive numbers C and c such that, for an arbitrary concave up function $\omega(t)$ of the modulus of continuity type with $\omega(t)/t \rightarrow +\infty$ as $t \rightarrow +0$, one can construct an example of a continuous nowhere differentiable Weierstrass-type function $W_\omega(x)$ satisfying the following conditions:

1°. The modulus of continuity of $W_\omega(x)$ does not exceed $C\omega(t)$.

2°. For each point x_0 , there exists a sequence $\{x_n\}$ convergent to x_0 , such that $|W_\omega(x_n) - W_\omega(x_0)| > c\omega(|x_n - x_0|)$ for each n .

3°. At each point x_0 , the derivative numbers of $W_\omega(x)$ take all values from the interval $[-\infty; +\infty]$.

Keywords: modulus of continuity, nowhere differentiable continuous function, derivative numbers, Weierstrass-type nowhere differentiable continuous function.

MSC: 26A15, 26A16

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-224-233

Пусть $\mathbb{K}$ есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. В статье рассматриваются определенные на $\mathbb{K}$ действительнoзначные функции $f(x)$, имеющие период $T > 0$, т. е. функции, удовлетворяющие равенству $f(x + T) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{K}$.

Пусть $\omega(t)$ — функция типа модуля непрерывности и

$$H^\omega = \left\{ f(\cdot) : \omega_f(\delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{x \in \mathbb{K}} |f(x + h) - f(x)| = O(\omega(\delta)) \right\}$$

— соответствующий класс Никольского — Гёльдера.

С. Б. Стечкин¹ ([1], 1961) показал, что для любого модуля непрерывности $\omega(t)$ можно найти выпуклую вверх функцию типа модуля непрерывности $\hat{\omega}(t)$, для которой $\omega(t) \leq \hat{\omega}(t) \leq 2\omega(t)$. Поэтому модуль непрерывности $\omega(t)$ будем считать выпуклым вверх, общности это не ограничивает.

¹Лемма С. Б. Стечкина с согласия ее автора была впервые опубликована в работе А. В. Ефимова [1, лемма 4, с. 78].

Так как функции, удовлетворяющие условию Липшица, дифференцируемы почти всюду, то модуль непрерывности нигде не дифференцируемой функции является *нелипшицевым*, т. е. для него

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\omega(t)}{t} = +\infty. \quad (1)$$

Далее будут рассматриваться только выпуклые вверх нелипшицевы модули непрерывности.

Первый пример нигде не дифференцируемой непрерывной функции был построен Б. Больцано [2] около 1830 г., но эта тематика до сих пор остается актуальной. Построенная в этой работе функция используется в исследованиях по теории моногенности. Непрерывные нигде не дифференцируемые функции возникают при рассмотрении случайных функциональных рядов (см., например, статью Ю. С. Мишуры и А. Шида [3], 2019).

Для некоторого $c > 0$ и произвольного нелипшицева модуля непрерывности $\omega(t)$ А. И. Рубинштейн ([4], 1964) построил пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции $f_\omega(x) \in H^\omega$, у которой для каждой точки x_0 выполнено неравенство

$$\overline{\lim} \left| \frac{f_\omega(x) - f_\omega(x_0)}{\omega(|x - x_0|)} \right| > c \quad \text{при } x \rightarrow x_0. \quad (2)$$

Функция $f_\omega(x)$ в [4], как и в классическом примере К. Вейерштрасса [5], была получена как сумма равномерно сходящегося лакунарного тригонометрического ряда. В той же работе [4] первый автор доказал, что для любой функции $f(x) \in H^\omega$ почти во всех точках x_0

$$\underline{\lim} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{\omega(|x - x_0|)} \right| = 0 \quad \text{при } x \rightarrow x_0. \quad (3)$$

Ясно, что в H^ω есть функции, для которых соотношение (3) в некоторых точках не выполняется, например для самого модуля непрерывности $\omega(x)$ условие (3) не выполнено в точке $x_0 = 0$. В нашей работе ([6], 2023) был построен пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции $V_\omega(x) \in H^\omega$, у которой соотношения (2) и (3) выполнены в каждой точке. Функция $V_\omega(x)$ получена как сумма лакунарного ряда пилообразных функций.

В настоящем исследовании мы построили непрерывную нигде не дифференцируемую функцию $W_\omega(x) \in H^\omega$, у которой в каждой точке

а) выполнено соотношение (2),

б) множество производных чисел $W_\omega(x)$ является промежутком $[-\infty; +\infty]$.

Ясно, что соотношение (3) следует из условия б). Пример функции $W_\omega(x)$ в целом следует примеру функции $V_\omega(x)$ из [6], но вместо лакунарного ряда из пилообразных функций используется лакунарный тригонометрический ряд.

А. Д. Мышкис ([7], 1957) дал пример непрерывной функции $\varphi(x)$, производные числа которой в каждой точке принимают любое значение из промежутка $[-\infty; +\infty]$; при этом модуль непрерывности $\varphi(x)$ в [7] не оценивался. Далее в [7] была рассмотрена функция $f(z) = f(x + iy) := \varphi(x)$, у которой в каждой точке $\zeta \in \mathbb{C}$ множество моногенности $\mathfrak{M}(\zeta, f)^2$, т. е. множество всех производных чисел функции $f(z)$ в точке ζ , совпадает с $\bar{\mathbb{C}}$.

Как и в работе А. Д. Мышкиса [7], построенная здесь функция $W_\omega(x)$ используется в исследованиях по теории моногенности. Действительно, $f_\omega(z) = f_\omega(x + iy) := W_\omega(x)$ принадлежит классу Никольского — Гёльдера H^ω и нигде не дифференцируема. Этот пример показывает невозможность замены условия типа условия Липшица, наложенного в доказанном вторым автором ([8], 2022) достаточном условии голоморфности, на условие принадлежности функции классу H^ω для некоторого *нелипшицева* модуля непрерывности $\omega(t)$. Подробнее об этом

²Пример из работы [7] относился к теореме о структуре множеств моногенности непрерывных функций, доказанной Ю. Ю. Трохимчуком ([10], 1956). Полное описание возможной структуры множеств моногенности необязательно непрерывных или однозначных функций, привел Е. П. Долженко ([11], 1962).

написано в работе ([9], 2022), в которой пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции с модулем непрерывности, не превосходящим произвольного нелипшицева, строился с использованием той же идеи, что и пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции, данный Б. Больцано ([2], 1830). Заметим также, что $\mathfrak{M}(\zeta, f_\omega) = \mathbb{C}$ в каждой точке $\zeta \in \mathbb{C}$, причем, как и в примере А.Д. Мышкиса в любой окрестности точки ζ разностное отношение $\frac{f_\omega(z) - f_\omega(\zeta)}{z - \zeta}$ принимает любое значение из $\mathbb{C}$, за возможным исключением значений, лежащих на некоторой окружности, проходящей через начало координат.

Теорема 1. *Найдутся такие положительные числа C и c , что для произвольного выпуклого вверх нелипшицевого модуля непрерывности $\omega(t)$ существует нигде не дифференцируемая непрерывная функция $W_\omega(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

- 1°. *Модуль непрерывности функции $W_\omega(x)$ не превосходит $C\omega(t)$.*
- 2°. *В каждой точке x_0 выполнено условие (2).*
- 3°. *В каждой точке x_0 множество производных чисел функции $W_\omega(x)$ в x_0 является промежутком $[-\infty; +\infty]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Шаг 1.** Выбор последовательности номеров $\{n_j\}$.

Проверим, что для произвольного выпуклого вверх нелипшицевого модуля непрерывности $\omega(t)$ существует строго возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$, для которой при каждом k выполнены соотношения

$$\sum_{j=1}^{k-1} 2^{n_j} \omega(2^{-n_j}) < \frac{1}{k} \frac{\omega(2^{-n_k})}{2^{-n_k}}, \quad (4)$$

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_j}) < \frac{1}{k} \omega(2^{-n_k}), \quad \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_j}) < \frac{1}{2\pi k^2 \sum_{p=1}^k 2^{2n_p} \omega(2^{-n_p})}. \quad (5)$$

В [6] мы использовали последовательность номеров $\{n_j\}$, удовлетворяющую неравенству (4) и первому из неравенств (5). Заметим, что из условий (5) следует сходимость ряда $\sum \omega(2^{-n_j})$.

Значения n_k будут выбираться последовательно. Положим $n_1 := 1$. Далее, считая, что при $j < k$ номера n_j уже выбраны, определим номер n_k . При этом необходимо учитывать, что в неравенствах (5) значение n_k связано с номерами n_j , $j > k$, которые должны быть определены уже после выбора номера n_k .

Поскольку $\frac{\omega(t)}{t} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$, то независимо от набора значений n_j , $j < k$, неравенство (4) выполняется, если только значение n_k достаточно велико.

Неравенства (5) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_j}) &< \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-k}} \frac{1}{k} \omega(2^{-n_k}); \\ \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_j}) &< \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-k}} \frac{1}{2\pi k^2 \sum_{p=1}^k 2^{2n_p} \omega(2^{-n_p})}. \end{aligned}$$

Для выполнения этих неравенств достаточно, чтобы при каждом k и каждом $j \geq k+1$

$$\omega(2^{-n_j}) < \frac{1}{2^{j-k}} \frac{1}{k} \omega(2^{-n_k}), \quad \omega(2^{-n_j}) < \frac{1}{2^{j-k}} \frac{1}{2\pi k^2 \sum_{p=1}^k 2^{2n_p} \omega(2^{-n_p})}. \quad (6)$$

Соотношения (6) были получены как условия на n_k , в которых величины n_k связываются со значениями n_j , $j > k$, но эти же неравенства можно рассматривать как условия на n_j ,

выраженные через n_k при $k < j$. Тогда при каждом $j \geq 2$ неравенства (6) дают систему из $2(j-1)$ условий на величины n_j , выраженные через n_k при $k \leq j-1$. Заменяя в этой системе индекс j на k , а индекс k на j , получаем систему неравенств

$$\omega(2^{-n_k}) < \frac{1}{2^{k-j}} \frac{1}{j} (2^{-n_j}), \quad \omega(2^{-n_k}) < \frac{1}{2^{k-j}} \frac{1}{2\pi j^2 \sum_{p=1}^j 2^{2n_p} \omega(2^{-n_p})}, \quad j = 1, \dots, k-1. \quad (7)$$

Из выполнения соотношений (7) для каждого k при всех $j < k$ следует, что для последовательности номеров $\{n_k\}$ при каждом k и $j \geq k+1$ выполнены неравенства (6), а следовательно, и (5). Поскольку $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то если при $j < k$ все значения n_j уже определены, то значение n_k можно выбирать так, чтобы при каждом $j < k$ выполнялись бы неравенства (7) (этих неравенств конечное число). Ранее уже было отмечено, что при любом выборе значений n_j при $j < k$ условие (4) выполнено при достаточно больших значениях n_k .

Таким образом, номера n_k можно определить так, чтобы для последовательности $\{n_k\}$ при каждом k выполнялись соотношения (4) и (5).

Шаг 2. Определение функции $W_\omega(x)$ и проверка выполнения для $W_\omega(x)$ условий 1° и 2° теоремы.

Сначала определим пилообразную функцию $s(x)$. На отрезке $[0; 4]$ положим

$$s(x) := \begin{cases} x, & x \in [0; 1], \\ -x + 2, & x \in [1; 3], \\ x - 4, & x \in [3; 4], \end{cases} \quad (8)$$

и с $[0; 4]$ продолжим $s(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ с периодом 4. Определим далее функцию $w(x)$:

$$w(x) := \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Ясно, что синусоида $w(x)$ касается графика пилообразной функции $s(x)$ в точках пересечения графиков $w(x)$ и $s(x)$ с осью Ox (рис. 1).

Положим далее (рис. 2)

$$s_k(x) := \omega(2^{-n_k}) s(2^{n_k} x), \quad w_k(x) := \omega(2^{-n_k}) w(2^{n_k} x) = \frac{2}{\pi} \omega(2^{-n_k}) \sin(\pi 2^{n_k-1} x). \quad (10)$$

Обозначим $T_k := 4 \cdot 2^{-n_k} = 2^{-(n_k-2)}$ период функций $s_k(x)$ и $w_k(x)$, а $A_k := \frac{\omega(2^{-n_k})}{2^{-n_k}}$ — абсолютную величину угловых коэффициентов звеньев $s_k(x)$. Так как $\omega(t)$ — нелипшицев модуль непрерывности (условие (1)), то $A_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

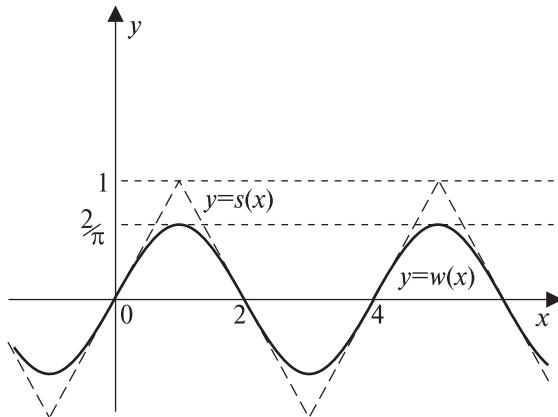


Рис. 1.

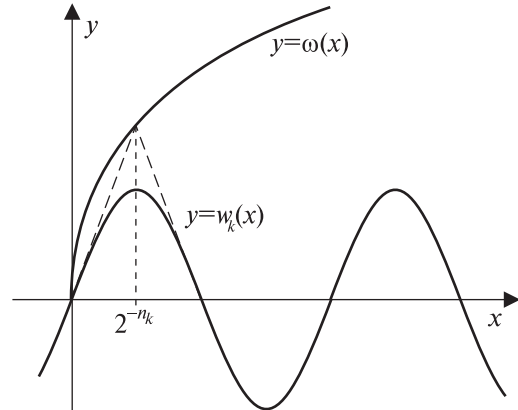


Рис. 2.

З а м е ч а н и е 1. На рис. 1 пунктиром изображен график пилообразной функции $s(x)$, а сплошной линией — график функции $w(x)$. Рис. 2 иллюстрирует определение функции $w_k(x)$ согласно формуле (10).

Определим функцию $W_\omega(x)$, положив

$$W_\omega(x) := \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x). \quad (11)$$

Как уже отмечалось, из условий (4) следует сходимость ряда $\sum \omega(2^{-n_j})$. Поэтому, так как $|w_j(x)| \leq |s_j(x)| \leq \omega(2^{-n_j})$, ряд (11) с непрерывными членами сходится равномерно, и, значит, функция $W_\omega(x)$ непрерывна.

В работе [6] при определении функции $V_\omega(x)$ вместо функций $w_j(x)$ мы использовали функции $v_j(x)$, равные $|s_j(x)|$:

$$V_\omega(x) := \sum_{j=1}^{\infty} v_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |s_j(x)|,$$

а при доказательстве того, что из выполнения условий (4) (они же условия (4) настоящей работы) для последовательности номеров $\{n_j\}$ следует выполнение для функции $V_\omega(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |s_j(x)|$ условий 1° и 2° теоремы, использовали только неравенство треугольника, причем для рядов с неотрицательными членами. Учитывая, что для каждого номера j в каждой точке x выполнены неравенства

$$\frac{2}{\pi} v_j(x) = \frac{2}{\pi} |s_j(x)| \leq |w_j(x)| \leq |s_j(x)| = v_j(x),$$

и буквально повторяя рассуждения из [6] с функцией $W_\omega(x)$ вместо $V_\omega(x)$, получаем, что для $W_\omega(x)$ так же, как и для $V_\omega(x)$ выполнены условия 1° и 2°. Будут изменены только полученные в [6] значения коэффициентов $C = 5$ — из п. 1° и $c = 1/2$ — из п. 2°, которые будут умножены на $2/\pi$.

Заметим, что так как для $W_\omega(x)$ в каждой точке выполнено условие 2°, то функция $W_\omega(x)$ нигде не дифференцируема.

Шаг 3. Проверка выполнения условия 3° теоремы для функции $W_\omega(x)$.

Зафиксируем произвольный номер $k > 1$ и запишем функцию $W_\omega(x)$ в следующем виде:

$$W_\omega(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x) = \sum_{j=1}^{k-1} w_j(x) + w_k(x) + \sum_{j=k+1}^{\infty} w_j(x) =: \sum_{(1)}(x) + w_k(x) + \sum_{(3)}(x).$$

При произвольном фиксированном значении x будем рассматривать разностное отношение для $W_\omega(x)$ как функцию от h :

$$\begin{aligned} \frac{W_\omega(x+h) - W_\omega(x)}{h} &= \frac{\sum_{(1)}(x+h) - \sum_{(1)}(x)}{h} + \frac{w_k(x+h) - w_k(x)}{h} \\ &\quad + \frac{\sum_{(3)}(x+h) - \sum_{(3)}(x)}{h}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для сокращения записи разностные отношения в формуле (12) обозначим соответственно $q(h)$, $q_{k,1}(h)$, $q_{k,2}(h)$ и $q_{k,3}(h)$. С использованием этих обозначений равенство (12) запишется так:

$$q(h) = q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h) + q_{k,3}(h). \quad (13)$$

В числителях разностных отношений $q_{k,1}(h)$ и $q_{k,2}(h)$ стоят приращения тригонометрических многочленов. Поэтому, если при $h = 0$ доопределить $q_{k,1}(h)$ и $q_{k,2}(h)$ значениями соответствующих производных в точке x , то функции $q_{k,1}(h)$ и $q_{k,2}(h)$ станут непрерывными по h .

Так как функция $W_\omega(x)$ нигде не дифференцируема, то функция $q_{k,3}(h)$ предела при $h \rightarrow 0$ не имеет, но является непрерывной на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Определим, какие значения заведомо принимает разностное отношение $q(h)$ вблизи точки $h = 0$ при произвольном фиксированном x . Сначала рассмотрим значения функций $q_{k,1}(h)$, $q_{k,2}(h)$ и $q_{k,3}(h)$ по отдельности.

(а) Оценка сверху модуля разностного отношения $q_{k,1}(h)$.

Если $h \neq 0$, то по теореме Лагранжа о конечных приращениях между точками x и $x+h$ найдется точка ξ , для которой

$$q_{k,1}(h) = \frac{\sum_{(1)}(x+h) - \sum_{(1)}(x)}{h} = \sum'_{(1)}(\xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{k-1} \omega(2^{-n_j}) \pi 2^{n_j-1} \cos(\pi 2^{n_j-1} \xi).$$

Поэтому, учитывая первое неравенство (4), получаем, что для произвольного $h \neq 0$

$$|q_{k,1}(h)| = \left| \frac{\sum_{(1)}(x+h) - \sum_{(1)}(x)}{h} \right| \leq \sum_{j=1}^{k-1} 2^{n_j} \omega(2^{-n_j}) < \frac{1}{k} \frac{\omega(2^{-n_k})}{2^{-n_k}} = \frac{1}{k} A_k. \quad (14)$$

Поскольку разностное отношение $q_{k,1}(h)$ непрерывно по h , то эта же оценка выполнена и при $h = 0$.

(б) Оценка границ промежутка, который заведомо покрывается значениями $q_{k,2}(h)$ при $|h| \leq T_k$. (Напомним, что $T_k = 2^{-(n_k-2)}$ — период функции $w_k(x)$.)

Расстояние между соседними максимумами и соседними минимумами функции $w_k(x)$ равно T_k . Для выбранной точки x обозначим x' и x'' два соседних максимума $w_k(x)$, между которыми лежит точка x , если $w_k(x) < 0$ (рис. 3а), или два соседних минимума $w_k(x)$, между которыми лежит точка x , если $w_k(x) \geq 0$ (рис. 3б). Считаем, что $x' < x''$. Расстояние от точки x до концов отрезка $[x'; x'']$ не превосходит $\frac{3T_k}{4}$ (рис. 3), поэтому

$$\left| \frac{w_k(x') - w_k(x)}{x' - x} \right| \geq \frac{|w_k(x')|}{\frac{3T_k}{4}} = \frac{\frac{2}{\pi} \omega(2^{-n_k})}{3 \cdot 2^{-n_k}} = \frac{2}{3\pi} \frac{\omega(2^{-n_k})}{2^{-n_k}} = \frac{2}{3\pi} A_k. \quad (15)$$

Ясно, что оценка (15) выполняется, если в (15) вместо x' подставить x'' .

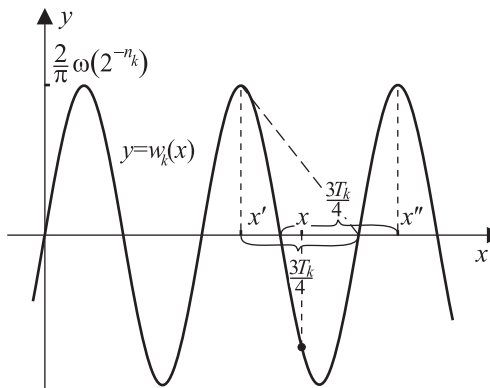


Рис. 3а

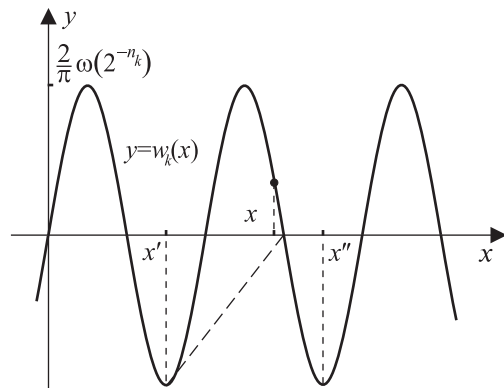


Рис. 3б

З а м е ч а н и е 2. На рис. 3а изображен выбор точек x' и x'' при $w_k(x) < 0$, а на рис. 3б — при $w_k(x) \geq 0$. В обоих случаях модуль углового коэффициента наклонной пунктирной линии согласно (15) равен $\frac{2}{3\pi}A_k$.

Поскольку величины $\frac{w_k(x') - w_k(x)}{x' - x}$ и $\frac{w_k(x'') - w_k(x)}{x'' - x}$ имеют противоположные знаки (рис. 3) и разностное отношение $q_{k,2}(h)$ непрерывно по h , то из (15) следует, что когда точка $x+h$ пробегает от x' до x'' , то множество значений $q_{k,2}(h)$ включает отрезок $[-\frac{2}{3\pi}A_k; \frac{2}{3\pi}A_k]$. Так как $[x'; x''] \subset [x - T_k; x + T_k]$, то при $|h| \leq T_k$ выражение $q_{k,2}(h)$ принимает все значения на отрезке $[-\frac{2}{3\pi}A_k; \frac{2}{3\pi}A_k]$.

(в) Определение $\delta_k > 0$ настолько малого, что при $|h| \leq \delta_k$ сумма разностных отношений $q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h)$ принадлежит промежутку длины, не превосходящей $\frac{1}{k}$.

Возьмем произвольное $\delta > 0$; будем считать, что $h \neq 0$ и $|h| \leq \delta$. Выражение $\sum_{(1)}(x) + w_k(x)$ является тригонометрическим полиномом. Поэтому, применяя последовательно теорему Лагранжа о конечных приращениях, сначала получаем, что найдется точка ξ' , лежащая между $x+h$ и x , а затем найдется точка ξ'' , лежащая между ξ' и x , для которых будут выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & \left| (q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h)) - \left(\sum_{(1)}(x) + w_k(x) \right)' \right| \\ &= \left| \frac{(\sum_{(1)}(x+h) + w_k(x+h)) - (\sum_{(1)}(x) + w_k(x))}{h} - \left(\sum_{(1)}(x) + w_k(x) \right)' \right| \\ &= \left| \left(\sum_{(1)}(\xi') + w_k(\xi') \right)' - \left(\sum_{(1)}(x) + w_k(x) \right)' \right| = \left| \left(\sum_{(1)}(\xi'') + w_k(\xi'') \right)'' \right| \cdot |\xi' - x| \\ &\leq \max_{t \in [x-\delta; x+\delta]} \left| \left(\frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^k \omega(2^{-n_j}) \sin(\pi 2^{n_j-1} t) \right)'' \right| \cdot \delta \\ &\leq \frac{2}{\pi} \pi^2 \left(\sum_{j=1}^k \omega(2^{-n_j}) 2^{2(n_j-1)} \right) \delta = \left(\frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^k 2^{2n_j} \omega(2^{-n_j}) \right) \delta. \end{aligned} \quad (16)$$

Поэтому, если положить

$$\delta = \delta_k := \frac{1}{k\pi \left(\sum_{j=1}^k 2^{2n_j} \omega(2^{-n_j}) \right)}, \quad (17)$$

то последний член цепочки соотношений (16) равен $\frac{1}{2k}$. Следовательно, при $|h| \leq \delta_k$ значения суммы разностных отношений $q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h)$ отличаются от значения производной $\left(\sum_{(1)}(x) + w_k(x) \right)'$ в точке x не больше, чем на $\frac{1}{2k}$ и, значит, лежат на промежутке длины не более $\frac{1}{k}$.

(г) Оценка сверху абсолютной величины разностного отношения $q_{k,3}(h)$ при $|h| \geq \delta_k$.

По определению функций $w_j(x)$ и величины δ_k получаем, что если $|h| \geq \delta_k$, то

$$\begin{aligned} |q_{k,3}(h)| &= \left| \frac{\sum_{(3)}(x+h) - \sum_{(3)}(x)}{h} \right| \leq \frac{|\sum_{(3)}(x+h)| + |\sum_{(3)}(x)|}{\delta_k} \leq \frac{2 \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_j})}{\delta_k} \\ &= 2 \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_j}) \pi k \left[\sum_{j=1}^k 2^{2n_j} \omega(2^{-n_j}) \right] = \left[\sum_{j=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_j}) \right] \left(2\pi k \left[\sum_{j=1}^k 2^{2n_j} \omega(2^{-n_j}) \right] \right). \end{aligned}$$

Отсюда согласно (5) получаем, что при любом h , $|h| \geq \delta_k$,

$$|q_{k,3}(h)| = \left| \frac{\sum_{(3)}(x+h) - \sum_{(3)}(x)}{h} \right| < \frac{1}{k}. \quad (18)$$

Оценка (18) будет использоваться для значений h , у которых $|h| \in [\delta_k; T_k]$.

Теперь, пользуясь соотношениями, полученными в пп. (а)–(г), определим, какие значения во всяком случае принимает разностное отношение $q(h)$ при h , $\delta_k \leq |h| \leq T_k$.

Заметим сначала, что на каждом из отрезков $[-T_k; -\delta_k]$ и $[\delta_k; T_k]$ все функции в выражении (13) непрерывны, поэтому и $q(h)$, и сумма любого набора функций $q_{k,j}(h)$ переводит каждый из этих отрезков в отрезок.

Согласно п. (б) образ отрезка $[-T_k; T_k]$ при отображении функцией $q_{k,2}(h)$ содержит промежуток $[-\frac{2}{3\pi}A_k; \frac{2}{3\pi}A_k]$. Поскольку в силу п. (а) при любом значении h выполнено неравенство $|q_{k,1}(h)| \leq \frac{1}{k}A_k$, то образом отрезка $[-T_k; T_k]$ при отображении непрерывной функцией $q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h)$ является отрезок (обозначим его Δ_k), который во всяком случае содержит промежуток $[-(\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k; (\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k]$. Чтобы величина $\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k}$ была положительной, считаем, что взято значение $k \geq 5$.

Далее, в силу п. (в) множеством значений функции $q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h)$ на промежутке $h \in [-\delta_k; \delta_k]$ является отрезок длины меньше $\frac{1}{k}$. Поэтому множеством значений $q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h)$ на объединении $[-T_k; -\delta_k] \cup [\delta_k; T_k]$ при отображении функцией $q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h)$ является отрезок Δ_k , из которого, быть может, исключен произвольным образом расположенный интервал длины меньше $\frac{1}{k}$. Это множество состоит из одного или двух отрезков (причем, если отрезков два, то расстояние между ними меньше $\frac{1}{k}$) и во всяком случае содержит отрезок $[-(\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k + \frac{1}{k}; (\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k - \frac{1}{k}]$, из внутренней части которого, быть может, исключен произвольным образом расположенный интервал длины не более $\frac{1}{k}$.

Наконец, согласно п. (г), если $|h| \geq \delta_k$, то разностное отношение $q_{k,3}(h)$ удовлетворяет оценке $|q_{k,3}(h)| < \frac{1}{k}$. Поэтому образ каждой точки $h \in [-T_k; -\delta_k] \cup [\delta_k; T_k]$ при отображении функцией $q(h) = (q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h)) + q_{k,3}(h)$ лежит на расстоянии не более $\frac{1}{k}$ от образа этой точки h при отображении функцией $q_{k,1}(h) + q_{k,2}(h)$. Следовательно, учитывая вывод из пп. (а), (б) и непрерывность функции $q(h)$, получаем, что множество значений функции $q(h)$ на множестве $[-T_k; -\delta_k] \cup [\delta_k; T_k]$ во всяком случае содержит отрезок $[-(\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k + \frac{2}{k}; (\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k - \frac{2}{k}]$, из внутренней части которого, быть может, исключен произвольным образом расположенный интервал длины не более $\frac{3}{k}$. Считаем, что значение k выбрано достаточно большим, чтобы левая граница отрезка $[-(\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k + \frac{2}{k}; (\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k - \frac{2}{k}]$ была меньше правой и его длина превосходила $\frac{1}{k}$.

Обозначим M_k образ множества $[-T_k; -\delta_k] \cup [\delta_k; T_k]$ при отображении $q(h)$. Так как при $k \rightarrow \infty$ множества $[-T_k; -\delta_k] \cup [\delta_k; T_k]$ сжимаются к точке $h = 0$, то замыкание множества

$$\overline{\lim} M_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{j=k}^{+\infty} M_j$$

содержится во множестве производных чисел функции $W_\omega(x)$ в точке x . Так как при каждом $k \geq 5$ промежуток $[-(\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k + \frac{3}{k}; (\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{k})A_k - \frac{3}{k}]$, из которого, быть может, исключен

интервал длины, не превосходящей $\frac{3}{k}$, включается в M_k , то $\overline{\lim} M_k$ содержит все значения из $(-\infty; +\infty)$ за исключением, быть может, одного. Причем это одно значение может действительно быть исключено, например в точках строгого экстремума функции $W_\omega(x)$ множество $\overline{\lim} M_k$ не содержит значение “нуль”. Но в любом случае замыкание $\overline{\lim} M_k = [-\infty; +\infty]$.

Это значит, что в каждой точке множество производных чисел функции $W_\omega(x)$ совпадает с $[-\infty; +\infty]$, т. е. для $W_\omega(x)$ выполнено условие 3° теоремы.

Таким образом, функция $W_\omega(x)$ удовлетворяет свойствам 1°–3°.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов А.В.** Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // Мат. сб. 1961. Т. 54, № 1. С. 51–90.
2. **Bolzano B.** Functionenlehre. Handwriting 1830. Königliche böhmische Gesellschaft der Wissenschaften, 1930. 207 p.
3. **Mishura Y., Schied A.** On (signed) Takagi–Landsberg functions: pth variation, maximum, and modulus of continuity // J. Math. Analysis Appl. 2019. Vol. 473, no. 1. P. 258–272. doi: 10.48550/arXiv.1806.05702
4. **Рубинштейн А.И.** Об ω -лакунарных рядах и о функциях классов H^ω // Мат. сб. 1964. Т. 65, № 2. С. 239–271.
5. **Weierstrass K.** Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotient besitzen. In: Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1872. P. 190–193. doi: 10.1007/978-3-322-91273-2_5
6. **Рубинштейн А.И., Теляковский Д.С.** О функциях типа ван-дер-Вардена // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, № 3. С. 339–347. doi: 10.18500/1816-9791-2023-23-3-339-347
7. **Мышкис А.Д.** Еще о задаче Н. Н. Лузина // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 2 (74). С. 155–157.
8. **Теляковский Д.С.** Об условиях моногенности // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междунар. Саратов. зим. шк. Саратов, 2022. С. 289–293.
9. **Теляковский Д.С.** Пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции с модулем непрерывности, не превосходящим данного // Вестн. НИЯУ МИФИ. 2022. Т. 11, № 3. С. 228–234. doi: 10.56304/S2304487X22030117
10. **Трохимчук Ю.Ю.** О двух проблемах Н. Н. Лузина // Успехи мат. наук. Т. 11, № 5 (71). С. 215–222.
11. **Долженко Е.П.** О производных числах комплексных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1962. Т. 26, № 3. С. 347–360.

Поступила 7.08.2024

После доработки 7.11.2024

Принята к публикации 18.11.2024

Рубинштейн Александр Иосифович

д-р физ.-мат. наук, профессор

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ

г. Москва

ORCID 0000-0001-8863-5438

e-mail: rubinshtein_aleksandr@mail.ru

Теляковский Дмитрий Сергеевич

канд. физ.-мат. наук

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ

г. Москва

ORCID 0000-0003-1579-2154

e-mail: dtelyakov@mail.ru

REFERENCES

1. Efimov A.V. Linear methods of approximating continuous periodic functions. *Mat. Sb. (Nov. Ser.)*, 1961, vol. 54(96), no. 1, pp. 51–90 (in Russian).
2. Bolzano B. *Functionenlehre*. Handwriting 1830. Königliche böhmische Gesellschaft der Wissenschaften, 1930, 207 p.
3. Mishura Y., Schied A. On (signed) Takagi — Landsberg functions: p^{th} variation, maximum, and modulus of continuity. *J. Math. Anal. Appl.*, 2019, vol. 473, no. 1, pp. 258–272. doi: 10.48550/arXiv.1806.05702
4. Rubinstein A.I. On ω -lacunary series and functions of the classes H^ω . *Mat. Sb. (Nov. Ser.)*, 1964, vol. 65(107), no. 2, pp. 239–271.
5. Weierstrass K. *Über continuirliche functionen eines reellen arguments, die für keinen werth des letzteren einen bestimmten differentialquotienten besitzen*. In: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre*. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, pp. 190–193. doi: 10.1007/978-3-322-91273-2_5
6. Rubinstein A.I., Telyakovskii D.S. On functions of van der Waerden type. *Izv. Saratov Univ. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, no. 3, pp. 339–347 (in Russian). doi: 10.18500/1816-9791-2023-23-3-339-347
7. Myshkis A.D. Further remarks about the problem of N.N. Luzin. *Uspehi Mat. Nauk (Nov. Ser.)*, 1957, vol. 12, no. 2(74), pp. 155–157 (in Russian).
8. Telyakovskii D.S. On monogeneity conditions. Modern problems of function theory and applications. In: *Proc. 21st Inter. Saratov Winter Workshop “Modern problems of function theory and their applications”*, Saratov, 2022, vol. 21, pp. 289–293 (in Russian).
9. Telyakovskii D.S. Example of a continuous nowhere-differentiable function with the modulus of continuity not exceeding a given value. *Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Un-ta “MIFP”*, 2022, vol. 11, no. 3, pp. 228–234 (in Russian). doi: 10.56304/S2304487X22030117
10. Trokhimchuk Yu.Yu. On two problems of N.N. Luzin. *Uspehi Mat. Nauk (Nov. Ser.)*, 1956, vol. 11, no. 5(71), pp. 215–222 (in Russian).
11. Dolzhenko E.P. On the derivative numbers of complex functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1962, vol. 26, pp. 347–360 (in Russian).

Received August 7, 2024

Revised November 7, 2024

Accepted November 18, 2024

Aleksandr Iosifovich Rubinshtein, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., National Research Nuclear University MEPhI, 115409 Russia; ORCID 0000-0001-8863-5438, e-mail: rubinshtein_aleksandr@mail.ru.

Dmitrii Sergeevich Telyakovskii, Cand. Sci. (Phys.-Math.), National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409 Russia; ORCID 0000-0003-1579-2154, e-mail: dtelyakov@mail.ru.

Cite this article as: A.I. Rubinstein, D.S. Telyakovskii. One example of a continuous nowhere differentiable function whose modulus of continuity does not exceed a given one. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 224–233.