ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 4 2024

УДК 517.518.832, 517.518.863

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ НОРМ ЛЮКСЕМБУРГА В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

А. Д. Пьянков

В работе получено точное неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве. С помощью этого неравенства как следствие доказано неравенство разных метрик для норм Люксембурга на функциях, для которых существует оценка сверху нормы производной через норму самой функции, и получено альтернативное доказательство неравенства разных метрик С. М. Никольского для норм тригонометрического полинома в пространствах Орлича.

Ключевые слова: неравенство разных метрик, дискретная норма Люксембурга, тригонометрический полином, пространство Орлича.

A. D. P'yankov. Inequality of different metrics for discrete Luxemburg norms in finite-dimensional spaces.

An exact inequality of different metrics is obtained for discrete Luxemburg norms in a finite-dimensional space. As a consequence, using this inequality, an inequality of different metrics is proved for Luxemburg norms on functions for which there is an upper bound for the norm of a derivative in terms of the norm of the function, and an alternative proof is presented for S.M. Nikol'skii's inequality of different metrics for norms of a trigonometric polynomial in Orlicz spaces.

Keywords: inequality of different metrics, discrete Luxemburg norm, trigonometric polynomial, Orlicz space.

MSC: 41A17, 42A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-212-223

Введение

С. М. Никольским в [1] было получено точное по порядку неравенство разных метрик для пространств Лебега L^p, L^q $(1 \leqslant p < q \leqslant \infty)$ для целых функций экспоненциального типа $g_{n_1,\ldots,n_d}(z_1,\ldots,z_d)$ конечных типов $n_1,\ldots,n_d$ по каждой переменной $z_1,\ldots,z_d$ соответственно. Рассуждения, использованные в ходе доказательства этого неравенства, переносятся с пространства целых функций на пространство тригонометрических полиномов соответствующих порядков от d переменных. Приведем здесь теорему для тригонометрических полиномов.

Теорема A [1, § 2, (2.4)]. *Для любого тригонометрического полинома $T_{n_1,\ldots,n_d}(x_1,\ldots,x_d)$ порядков n_i по переменным x_i $\big(i=\overline{1,d}\big)$ соответственно справедливо следующее неравенство разных метрик*:

$$\|T_{n_1,\ldots,n_d}\|_q \leqslant 2^d\Big(\prod_{i=1}^d n_i\Big)^{1/p-1/q}\|T_{n_1,\ldots,n_d}\|_p, \quad 1\leqslant p\leqslant q\leqslant +\infty,$$

где

$$\|T_{n_1,\ldots,n_d}\|_p = \Big(\int\limits_{[0,2\pi]^d} |T_{n_1,\ldots,n_d}(x_1,\ldots,x_d)|^p\,dx_1\,\ldots\,dx_d\Big)^{1/p}, \quad 1\leqslant p<+\infty;$$

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2024-1377).

$$\|T_{n_1,\dots,n_d}\|_\infty = \max\left\{|T_{n_1,\dots,n_d}(x_1,\dots,x_d)| : (x_1,\dots,x_d)\in[0,2\pi]^d\right\}.$$

Один из способов доказательства этой теоремы — применение схемы С. М. Никольского, приведенной в [1; 2] при исследовании порядковой оценки норм целых функций экспоненциального типа в пространствах Лебега. С помощью аналогичных рассуждений получается порядковая оценка сверху нормы тригонометрического полинома в L^q через его норму в L^p при $1\leqslant p<q\leqslant\infty$.

Неравенство разных метрик Никольского обобщалось с пространств L^p на нормы более общего вида вплоть до норм в симметричных пространствах. Неравенство для норм симметричных пространств целых функций экспоненциального типа доказано М. З. Берколайко и В. И. Овчинниковым в работе [3], для тригонометрических полиномов от одной переменной — В. А. Родиным в [4], для полиномов от нескольких переменных — Г. А. Акишевым в [5].

Частным случаем симметричных пространств являются пространства Орлича. В настоящей работе как следствие основного результата получено неравенство разных метрик для тригонометрического полинома в пространствах Орлича (см. теорема 3). Рассуждения при доказательстве такого неравенства проводились по уже упомянутой схеме С. М. Никольского. Она представляет собой использование двойного неравенства типа Марцинкевича — Зигмунда [6] между нормой на отрезке и нормой на сетке (дискретной нормой) и неравенства разных метрик для дискретных норм.

Основным результатом настоящей статьи являются неравенства разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве; также доказаны неравенства типа Марцинкевича — Зигмунда, и в качестве следствия получено при помощи схемы Никольского другое по отношению к [5, лемма 6] доказательство неравенства разных метрик для тригонометрического полинома от одной переменной в пространствах Орлича. Результат анонсирован в статье [7].

Функцию $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ будем называть *N-функцией*, если она выпуклая, положительная при $x\neq 0$, четная, имеет непрерывную строго возрастающую производную φ' и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=+\infty.$$

При этом $\varphi(|\cdot|)$ — строго возрастающая функция и

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\varphi'(x)=+\infty.$$

Так как N-функция является четной функцией, то ее производная нечетная. Заметим также, что каждая N-функция φ представима в виде [8, гл. 1, § 1]

$$\varphi(x)=\int\limits_0^{|x|}\varphi'(t)\,dt,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Пусть φ — N-функция. Так как φ' строго возрастает на всей оси, сохраняет ноль и обе бесконечности и непрерывна, то она обратима и $(\varphi')^{-1}$ удовлетворяет указанным для φ' свойствам. Тогда функция

$$\bar\varphi(x)=\int\limits_0^{|x|}(\varphi')^{-1}(t)\,dt,\qquad x\in\mathbb{R},$$

будет являться N-функцией [8, гл. 1, § 1] и называется *сопряженной по Юнгу* или *дополнительной* N-функцией к функции φ.

О п р е д е л е н и е 1. Говорят, что N-функция φ *удовлетворяет* Δ_2*-условию*, если

$$\exists x_0\geqslant 0, C>0\ \ \forall x\geqslant x_0\quad \varphi(2x)\leqslant C\varphi(x).$$

Пусть φ — N-функция. *Классом Орлича* $L^{\varphi}_{*}(A)$ по функции φ и (измеримому) множеству $A \subseteq \mathbb{R}^d$ называется множество определенных на множестве A функций f, для которых

$$\rho(f;\varphi) = \int\limits_A \varphi(f(x))\,dx < +\infty.$$

Пространством Орлича $L^{\varphi}(A)$ называется множество функций f, для которых

$$\forall g \in L^{\bar{\varphi}}_{*}(A) \quad |(f,g)| = \left|\int\limits_A f(x)g(x)\,dx\right| < +\infty.$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть φ — N-функция, A — измеримое множество на вещественной оси, $f \in L^{\varphi}(A)$. Выражение

$$\|f\|_{(\varphi)} = \inf\left\{k > 0\colon \int\limits_A \varphi\Big(\frac{f(x)}{k}\Big)\,dx \leqslant 1\right\}$$

называется *нормой Люксембурга* функции f в пространстве $L^{\varphi}(A)$. Если $\varphi(x) = p^{-1}|x|^p$ $(p > 1)$, то норма Люксембурга совпадет с нормой в пространстве L^p.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ — вектор из $\mathbb{R}^N$, φ — N-функция. Определим *дискретную норму Люксембурга* (норму Люксембурга вектора a) следующим образом:

$$\|a\|_{(\varphi)} = \|a\|^h_{(\varphi)} = \inf\left\{k > 0\colon h\sum_{i=1}^{N}\varphi\left(\frac{a_i}{k}\right) \leqslant 1\right\}, \quad h > 0.$$

В последнем определении число h — параметр, от которого будет зависеть формулировка основного результата и который будет использоваться в получаемых в дальнейшем следствиях.

1. Формулировки результатов

Теорема 1. *Пусть a — вектор из $\mathbb{R}^N$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, φ_1, φ_2 — N-функции, удовлетворяющие следующим условиям*:

$$\frac{\varphi_1^{-1}(x)}{\varphi_2^{-1}(x)} \text{ не убывает при } x > 0; \tag{1.1}$$

$$\phi_y(x) = \frac{\varphi_2'(xy)}{\varphi_1'(x)} \text{ при любом } y > 0 \text{ строго возрастает по } x \text{ на } (0, +\infty). \tag{1.2}$$

Тогда для всех векторов a из единичной сферы $\{a \in \mathbb{R}^N : \|a\|_{(\varphi_1)} = 1\}$ справедливо неравенство

$$\|a\|_{(\varphi_2)} \leqslant \frac{\varphi_1^{-1}(1/h)}{\varphi_2^{-1}(1/h)}.$$

Неравенство обращается в равенство на векторах, лежащих на координатных осях, например, на векторе $(t, 0, \ldots, 0)$, где t — параметр из условия $\|(t, 0, \ldots, 0)\|_{(\varphi_1)} = 1$.

Легко видеть, что в условиях теоремы 1 для любого вектора $a \in \mathbb{R}^N$ справедливо следующее точное неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга:

$$\|a\|^h_{(\varphi_2)} \leqslant \frac{\varphi_1^{-1}(1/h)}{\varphi_2^{-1}(1/h)}\,\|a\|^h_{(\varphi_1)}.$$

Обозначим через $C^1[a,b]$ класс функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$. В качестве следствия теоремы 1 будет получено неравенство разных метрик для пространств функций, имеющих ограничение сверху на норму производной через норму самой функции (например, неравенство Бернштейна).

Теорема 2. *Пусть φ_1, φ_2 — N-функции, удовлетворяющие условиям* (1.1) *и* (1.2) *теоремы* 1, *и дополнительно φ_1 удовлетворяет Δ_2-условию, $f \in C^1[a,b]$. Предположим, что существует число $\alpha = \alpha(f) > 0$ такое, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство*

$$\int_a^b \varphi_1(tf'(x))\,dx \leqslant \int_a^b \varphi_1(t\alpha f(x))\,dx.$$

Тогда для заданной функции f справедливо неравенство разных метрик

$$\|f\|_{(\varphi_2)} \leqslant \|f\|_{(\varphi_1)} C_1 \frac{\varphi_1^{-1}(\alpha)}{\varphi_2^{-1}(C_2\alpha)}, \tag{1.3}$$

где $C_1, C_2 > 0$ не зависят от α.

Теорему 2 имеет смысл применять для функций из класса, в котором можно взять параметр α одним для всех функций f из этого класса. Примером такого класса функций служит множество тригонометрических полиномов [9, (1.2)]. В этом случае неравенство разных метрик в заключении теоремы 2 является порядково точным относительно степени полинома.

Теорема 3. *Пусть φ_1, φ_2 — N-функции, удовлетворяющие условиям* (1.1) *и* (1.2), *и дополнительно φ_1 удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда для любого тригонометрического полинома T_n порядка не выше n справедливо следующее точное по порядку относительно n неравенство разных метрик в пространствах Орлича*

$$\|T_n\|_{(\varphi_2)} \leqslant C_1 \frac{\varphi_1^{-1}(n)}{\varphi_2^{-1}(C_2 n)} \|T_n\|_{(\varphi_1)}, \tag{1.4}$$

где $C_1, C_2 > 0$ не зависят от n. Порядковая точность неравенства достигается на ядре Фейера n-го порядка

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \Big(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\Big)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Неравенство разных метрик в теореме 3 является непосредственным следствием теоремы 2. Порядковая точность этого неравенства будет доказана в разделе 4.

2. Неравенство разных метрик для дискретных норм

В настоящем разделе будет доказана теорема 1, и будут обсуждены возможные ослабления ее условий.

Пусть φ — N-функция, $a \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Поскольку φ непрерывна и не убывает, то справедливо следующее представление нормы Люксембурга вектора a:

$$\|a\|_{(\varphi)} = \inf \Big\{ k > 0 \colon h \sum_{i=1}^N \varphi\Big(\frac{a_i}{k}\Big) = 1 \Big\},$$

а так как $\varphi(|\cdot|)$ строго возрастает, то положительное число k в предыдущей формуле определяется однозначно, т. е.

$$\|a\|_{(\varphi)} = k > 0 \colon h \sum_{i=1}^N \varphi\Big(\frac{a_i}{k}\Big) = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Норма Люксембурга инвариантна относительно знаков координат вектора, поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$a_1, a_2, \ldots, a_N \geqslant 0.$$

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $f = \|\cdot\|_{(\varphi_2)}$ аргументов a_i, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ с условием связи $\|a\|_{(\varphi_1)} = 1$. Для решения такой задачи составим функцию Лагранжа

$$L(a_1, a_2, \ldots, a_N, \lambda) = f(a_1, a_2, \ldots, a_N) + \lambda(\|a\|_{(\varphi_1)} - 1)$$

и приравняем все ее частные производные к 0 ($L'_\lambda = 0$ — это всегда условие связи).

Далее понадобится выражение для производной нормы Люксембурга по a_i. Норма Люксембурга по функции φ есть неявная функция относительно g:

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_N, g) = 0,$$

где $g = g(a) = g(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, $G(a_1, a_2, \ldots, a_N, g) = h\sum\limits_{i=1}^{N} \varphi\Big(\dfrac{a_i}{g}\Big) - 1$. Согласно правилу дифференцирования неявной функции $g'_{a_i} = -\dfrac{G'_{a_i}}{G'_g}$. В данной задаче

$$G'_{a_i} = h\varphi'\Big(\frac{a_i}{g}\Big)\frac{1}{g}, \quad G'_g = h\sum_{j=1}^{N}\Big(\varphi'\Big(\frac{a_j}{g}\Big)\frac{-a_j}{g^2}\Big),$$

тогда

$$g'_{a_i} = \frac{g\varphi'\Big(\dfrac{a_i}{g}\Big)}{\sum\limits_{j=1}^{N}\Big(a_j\,\varphi'\Big(\dfrac{a_j}{g}\Big)\Big)}.$$

Теперь можно выписать производную функции Лагранжа по i-й координате вектора a, обозначив $g(a) = \|a\|_{(\varphi_1)}$: $L'_{a_i} = f'_{a_i} + \lambda g'_{a_i} = 0$. Для производной g'_{a_i} возможны два случая.

1) Пусть $g'_{a_i} \neq 0$. В следующих выкладках в выражении производной функции g будет учитываться условие связи $\|a\|_{(\varphi_1)} = 1$. Имеем

$$-\lambda = \frac{f'_{a_i}}{g'_{a_i}} = \frac{f(a)\,\varphi'_2\Big(\dfrac{a_i}{f(a)}\Big)\sum\limits_{j=1}^{N}\Big(a_j\,\varphi'_1\Big(\dfrac{a_j}{g(a)}\Big)\Big)}{g(a)\,\varphi'_1\Big(\dfrac{a_i}{g(a)}\Big)\sum\limits_{j=1}^{N}\Big(a_j\,\varphi'_2\Big(\dfrac{a_j}{f(a)}\Big)\Big)} = \frac{f(a)\,\varphi'_2\Big(\dfrac{a_i}{f(a)}\Big)\sum\limits_{j=1}^{N}(a_j\,\varphi'_1(a_j))}{\varphi'_1(a_i)\sum\limits_{j=1}^{N}\Big(a_j\,\varphi'_2\Big(\dfrac{a_j}{f(a)}\Big)\Big)}.$$

Полученное равенство представляет собой симметричную систему уравнений относительно неизвестных a_i. Это означает, что любое решение этой системы инвариантно относительно перестановок неизвестных. Кроме того, в каждой части равенства симметричной системы можно убрать множители, инвариантные относительно перестановок неизвестных. От этого система не перестанет быть симметричной, решения у нее также не поменяются, но одна часть — та, которая содержит λ, — изменится на $\lambda\,Q(a)$, где $Q(a)$ зависит симметрично от координат вектора a. В данной задаче такими множителями являются $f(a)$, $\sum\limits_{j=1}^{N}(a_j\varphi'_1(a_j))$ и $\sum\limits_{j=1}^{N}\Big(a_j\varphi'_2\Big(\dfrac{a_j}{f(a)}\Big)\Big)$,

$$-\lambda Q(a) = \frac{\varphi'_2\Big(\dfrac{a_i}{f(a)}\Big)}{\varphi'_1(a_i)} = \phi_{(f(a))^{-1}}(a_i).$$

Это равенство выполняется для всех $i = \overline{1, N}$. В силу строгого возрастания функции ϕ_y (условие (1.2)) при $y = (f(a))^{-1} > 0$, если $a_i \neq a_j$, то $-\lambda Q(a) = \phi_y(a_i) \neq \phi_y(a_j) = -\lambda Q(a)$. Получено противоречие, поэтому в этом случае единственная стационарная точка функции Лагранжа — точка, у которой все координаты одинаковы: $a^* = (x, x, \ldots, x)$, $x > 0$. При этом

$$1 = \|(x, x, \ldots, x)\|_{(\varphi_1)} \Rightarrow h\sum_{i=1}^{N}\varphi_1(x) = 1 \Rightarrow x = \varphi_1^{-1}\Big(\frac{1}{hN}\Big).$$

Тогда

$$\|(x,x,\ldots,x)\|_{(\varphi_2)} = f_{\text{extr}} = k > 0: \ h\sum_{i=1}^{N}\varphi_2\Big(\frac{x}{k}\Big) = 1 \Rightarrow k = \frac{x}{\varphi_2^{-1}\Big(\dfrac{1}{hN}\Big)} = \frac{\varphi_1^{-1}\Big(\dfrac{1}{hN}\Big)}{\varphi_2^{-1}\Big(\dfrac{1}{hN}\Big)}.$$

Это один из условных экстремумов функции $f = \|\cdot\|_{(\varphi_2)}$.

2) Пусть $g'_{a_i} = 0$. Тогда в силу выражения для g'_{a_i}, полученного при обосновании случая 1 и строгой монотонности производной N-функции, получится, что $a_i = 0$. Поскольку норма Люксембурга является линейной комбинацией значений N-функции от масштабированных координат вектора, то нулевые координаты можно исключать из вектора a до тех пор, пока размерность этого вектора не станет равной числу его ненулевых координат, так как нулевые координаты вектора не влияют на значение нормы Люксембурга этого вектора. В результате такого преобразования и с учетом симметричности нормы Люксембурга относительно порядка следования координат вектора вектор a примет вид $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s, 0, \ldots, 0)$. Далее можно провести рассуждения из п.1) для вектора меньшей размерности $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ и прийти к равенству этих координат: $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = \varphi_1^{-1}\Big(\dfrac{1}{hs}\Big)$. Тогда

$$k = k(s) = \|a\|_{(\varphi_2)} = \frac{\varphi_1^{-1}\Big(\dfrac{1}{hs}\Big)}{\varphi_2^{-1}\Big(\dfrac{1}{hs}\Big)}.$$

Исходя из условия (1.1), $k(s)$ принимает наибольшее значение при минимальном возможном s, т. е. при $s = 1$: $k_{\max} = \dfrac{\varphi_1^{-1}(1/h)}{\varphi_2^{-1}(1/h)}$. Такую норму Люксембурга по функции φ_2 будет иметь вектор вида $(t, 0, \ldots, 0)$, $t \neq 0$, норма любого другого вектора a будет не больше $k_{\max}$.

Теорема 1 доказана.

Обсудим условия (1.1) и (1.2). От первого условия можно отказаться, тогда неравенство разных метрик останется точным и будет выглядеть следующим образом:

$$\|a\|^h_{(\varphi_2)} \leqslant \frac{\varphi_1^{-1}\Big(\dfrac{1}{hs}\Big)}{\varphi_2^{-1}\Big(\dfrac{1}{hs}\Big)}\,\|a\|^h_{(\varphi_1)}, \quad h > 0, \quad a \in \mathbb{R}^N,$$

где s можно взять любым из множества $\operatorname{Argmax}\left\{\dfrac{\varphi_1^{-1}\Big(\dfrac{1}{hs}\Big)}{\varphi_2^{-1}\Big(\dfrac{1}{hs}\Big)} : s = 1, 2, \ldots, N\right\}$. Параметр s и, следовательно, константа в последнем неравенстве будут, вообще говоря, зависеть от N и h. Поэтому величина C_1 в неравенстве (1.3) из формулировки теоремы 2 будет зависеть от α, что в дальнейшем не даст получить порядковую точность неравенства (1.4) в теореме 3.

Выполнения обоих условий (1.1) и (1.2) можно требовать не при всех $x > 0$, а отделившись от нуля. То есть можно потребовать выполнения условий

$$\frac{\varphi_1^{-1}(x)}{\varphi_2^{-1}(x)} \text{ не убывает при } x > x_0; \tag{2.1}$$

$$\phi_y(x) = \frac{\varphi_2'(xy)}{\varphi_1'(x)} \text{ при любом } y > 0 \text{ строго возрастает по } x \text{ на } [x_0, +\infty). \tag{2.2}$$

Тогда при $0 < h \leqslant h_0 = \dfrac{1}{\max\{\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)\}}$ справедливо следующее неравенство разных метрик, которое является порядково точным относительно h, где C не зависит от h:

$$\|a\|^h_{(\varphi_2)} \leqslant C\frac{\varphi_1^{-1}(1/h)}{\varphi_2^{-1}(1/h)}\,\|a\|^h_{(\varphi_1)}. \tag{2.3}$$

Однако величина C в (2.3) зависит от размерности N пространства векторов ($C = C(N)$), при этом $\sup_{N\in\mathbb{N}} C(N) = +\infty$, что делает невозможным использование неравенства (2.3) при доказательстве теоремы 2. Если при этом дополнительно отказаться от условия (2.1), получим неравенство разных метрик

$$\exists s \in \{1, 2, \ldots, N\} \quad \|a\|^h_{(\varphi_2)} \leqslant C \frac{\varphi_1^{-1}\Bigl(\dfrac{1}{hs}\Bigr)}{\varphi_2^{-1}\Bigl(\dfrac{1}{hs}\Bigr)} \|a\|^h_{(\varphi_1)}, \quad h \in (0, h_0], \quad a \in \mathbb{R}^N.$$

При этом C, как уже говорилось выше, может зависеть от N и, кроме того, от x_0, а параметр s, вообще говоря, зависит от N, h и x_0.

3. Неравенство разных метрик для функциональных пространств на отрезке

Из теоремы 1 можно получить неравенство разных метрик для норм Люксембурга на классах функций, для которых справедливо ограничение сверху на норму производной через норму самой функции (например, неравенство Бернштейна) в пространствах Орлича, в частности — неравенство разных метрик на классе тригонометрических полиномов. Предварительно докажем неравенство между дискретной и интегральной нормами (неравенство Марцинкевича—Зигмунда) при накладывании Δ_2-условия на N-функцию.

Определим *дискретную норму Люксембурга функции.* Пусть $[a, b]$ — отрезок на $\mathbb{R}$, набор точек $\Bigl\{x_i = a + \dfrac{(b-a)i}{N}\Bigr\}_{i=0}^{N}$ — равномерное разбиение этого отрезка, $f \in C[a, b]$, φ — N-функция. Следующее выражение будем называть *дискретной нормой Люксембурга функции* f и обозначать как $((f))_{(\varphi),N}$:

$$((f))_{(\varphi),N} = \inf\Bigl\{k_N > 0\colon \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi\Bigl(\frac{f(\bar{x}_i)}{k_N}\Bigr) \leqslant 1\Bigr\},$$

где $\bar{x}_i$ — точка из $[x_i, x_{i+1}]$ такая, что $|f(\bar{x}_i)| = \max\{|f(x)|\colon x \in [x_i, x_{i+1}]\}$.

Лемма 1. *Пусть φ — N-функция, удовлетворяющая Δ_2-условию, $f \in C^1[a, b]$, $[a, b]$ — отрезок на $\mathbb{R}$, и для всех $t > 0$ выполняется неравенство*

$$\int_a^b \varphi(tf'(x))\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(t\alpha f(x))\,dx, \quad \text{где} \;\; \alpha = \alpha(f) > 0.$$

Тогда $((f))_{(\varphi),N} \leqslant C\|f\|_{(\varphi)}$, где $C > 0$ не зависит от f при $N \geqslant 2(b-a)\alpha$.

Доказательство. При $f \equiv 0$ это утверждение очевидно. Пусть f — ненулевая функция. Тогда, так как N-функция непрерывна и не убывает по определению, для дискретной и интегральной норм Люксембурга функции f справедливы представления

$$\|f\|_{(\varphi)} = \inf\Bigl\{k > 0\colon \int_a^b \varphi\left(\frac{f(x)}{k}\right) dx = 1\Bigr\};$$

$$((f))_{(\varphi),N} = \inf\Bigl\{k_N > 0\colon \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi\left(\frac{f(\bar{x}_i)}{k_N}\right) = 1\Bigr\},$$

а строгая монотонность функции $\varphi(|\cdot|)$ определяет однозначно числа k и k_N, т. е.

$$\|f\|_{(\varphi)} = k > 0\colon \int\limits_a^b \varphi\left(\frac{f(x)}{k}\right) dx = 1; \quad ((f))_{(\varphi),N} = k_N > 0\colon \frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi\left(\frac{f(\bar{x}_i)}{k_N}\right) = 1.$$

Оценим $((f))_{(\varphi),N}$ сверху через $\|f\|_{(\varphi)}$. Пусть точки $\tilde{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ такие, что $|f(\tilde{x}_i)| = \min\{|f(x)| : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, $i = \overline{0, N-1}$. Применяя определение выпуклости функции φ, имеем

$$1 = \frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi\Big(\frac{f(\bar{x}_i)}{k_N}\Big) = \frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi\Big(\frac{f(\bar{x}_i) - f(\tilde{x}_i) + f(\tilde{x}_i)}{k_N}\Big)$$

$$\leqslant \frac{b-a}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\Big(\varphi\Big(2\,\frac{f(\bar{x}_i) - f(\tilde{x}_i)}{k_N}\Big) + \varphi\Big(2\,\frac{f(\tilde{x}_i)}{k_N}\Big)\Big)$$

$$= \frac{b-a}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\varphi\left(2\,\frac{\int_{\tilde{x}_i}^{\bar{x}_i}|f'(t)|\,dt}{k_N}\right) + \varphi\Big(2\frac{f(\tilde{x}_i)}{k_N}\Big)\right)$$

$$\leqslant \frac{b-a}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\varphi\left(2\,\frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{N}{b-a}\,|f'(t)|\,dt}{\frac{N}{b-a}\,k_N}\right) + \varphi\Big(2\,\frac{f(\tilde{x}_i)}{k_N}\Big)\right).$$

Применяя неравенство Йенсена [10, добавл. к гл. 8, § 21] для интегралов к первому слагаемому, имеем

$$\frac{b-a}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\varphi\left(2\,\frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{N}{b-a}\,|f'(t)|\,dt}{\frac{N}{b-a}\,k_N}\right) + \varphi\Big(2\,\frac{f(\tilde{x}_i)}{k_N}\Big)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\Big(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi\Big(\frac{2(b-a)}{Nk_N}\,|f'(t)|\Big)\,dt\Big) + \frac{b-a}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi\Big(2\,\frac{f(\tilde{x}_i)}{k_N}\Big) =: S_1 + S_2.$$

Оценим сверху величины S_1 и S_2, при этом накладывая ограничения на параметр N. Согласно ограничению в условии леммы на производную f', имеем

$$S_1 = \frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_a^b\varphi\Big(\frac{2(b-a)}{Nk_N}\,|f'(t)|\Big)\,dt\Bigg) \leqslant \frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_a^b\varphi\Big(\frac{2(b-a)\alpha}{Nk_N}\,|f(t)|\Big)\,dt\Bigg)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\,\frac{k}{k_N}\Bigg(\int\limits_a^b\varphi\Big(\frac{2(b-a)\alpha}{Nk}\,|f(t)|\Big)\,dt\Bigg) \leqslant \frac{k}{2k_N} \quad \text{при } N \geqslant 2(b-a)\alpha;$$

$$S_2 = \frac{b-a}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi\Big(2\,\frac{f(\tilde{x}_i)}{k_N}\Big) \leqslant \frac{b-a}{2N}\,\frac{k}{k_N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi\Big(2\,\frac{f(\tilde{x}_i)}{k}\Big)$$

$$\leqslant \frac{c}{2}\,\frac{k}{k_N}\,\frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi\Big(\frac{f(\tilde{x}_i)}{k}\Big) \leqslant \frac{c}{2}\,\frac{k}{k_N}\int\limits_a^b\varphi\Big(\frac{f(x)}{k}\Big)\,dx \leqslant \frac{ck}{2k_N},$$

где $c > 0$ — константа из Δ_2-условия для функции φ, не зависящая от α.

В итоге заключаем, что

$$1 \leqslant S_1 + S_2 \leqslant \frac{k}{k_N}\Big(\frac{1+c}{2}\Big),$$

откуда $k_N \leqslant Ck$ при $C = 1/2 + c/2$.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение, аналогичное лемме 1 для тригонометрических полиномов степени не выше n, доказано в [11, Theorem 2]. При этом в [11] дискретная норма Люксембурга полинома определяется по его значениям в нулях функции $\sin((n+1/2)\,t)$.

Теперь можно перейти к доказательству неравенства разных метрик.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. По определению дискретной нормы функции f, введенной перед леммой, имеем

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \|f\|_{(\varphi_2)} \leqslant ((f))_{(\varphi_2),N}. \tag{3.1}$$

Положим N — минимальное целое число, удовлетворяющее соотношению $N \geqslant 2(b-a)\alpha$. Применим для дискретных норм неравенство разных метрик, в котором $h = (b-a)/N$. Из теоремы 1 получаем

$$((f))_{(\varphi_2),N} \leqslant ((f))_{(\varphi_1),N}\,\frac{\varphi_1^{-1}\Big(\dfrac{N}{b-a}\Big)}{\varphi_2^{-1}\Big(\dfrac{N}{b-a}\Big)}. \tag{3.2}$$

Теперь применим неравенство из леммы к дискретной норме в правой части неравенства (3.2). Имеем

$$((f))_{(\varphi_1),N} \leqslant C\,\|f\|_{(\varphi_1)}, \tag{3.3}$$

$C > 0$ не зависит от α. Объединяя (3.1)–(3.3) и пользуясь вогнутостью и строгим возрастанием функции φ_1^{-1}, получаем неравенство (1.3).

Теорема 2 доказана.

4. Неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов является прямым следствием теоремы 2, так как справедливо неравенство Бернштейна [9, (1.2)] при $\alpha = n$.

Докажем порядковую точность неравенства. С этой целью найдем порядок нормы ядра Фейера относительно степени полинома n. Заметим сначала, что согласно определению нормы Люксембурга и в силу четности ядра Фейера $\|\Phi_n\|_{(\varphi)} = k_n^* > 0$ удовлетворяет равенству

$$1 = \int_0^{2\pi} \varphi\Big(\frac{\Phi_n(x)}{k_n^*}\Big)\,dx = 2\int_0^{\pi} \varphi\Big(\frac{\Phi_n(x)}{k_n^*}\Big)\,dx.$$

Заметим также, что норма Люксембурга монотонна по модулю функции, т. е. если для любого x $|f(x)| \leqslant |g(x)|$, то $\|f\|_{(\varphi)} \leqslant \|g\|_{(\varphi)}$.

Оценка снизу. Самый маленький по модулю корень уравнения $\Phi_n(x) = 0$ равен $\dfrac{2\pi}{n}$; функция Φ_n строго убывает на $\Big[0, \dfrac{2\pi}{n}\Big]$. Поэтому ядро Фейера можно поточечно оценить снизу функцией $f_n(x) = \Phi_n\Big(\dfrac{\pi}{n}\Big)\,\chi_{[0,\frac{\pi}{n}]}(x),\ x \in [0,\pi]$. Так как

$$\Phi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n\sin^2\dfrac{\pi}{2n}} \geqslant \frac{2n}{\pi^2},$$

то для нормы $\|f_n\|_{(\varphi)} =: a_n^* > 0$ имеем

$$1 = 2\int\limits_0^{\pi} \varphi\Big(\frac{f_n(x)}{a_n^*}\Big)\,dx = 2\int\limits_0^{\pi/n} \varphi\left(\frac{1}{a_n^*\,2n\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}\right)dx \geqslant 2\int\limits_0^{\pi/n} \varphi\Big(\frac{2n}{a_n^*\pi^2}\Big)\,dx = \frac{2\pi}{n}\,\varphi\Big(\frac{2n}{a_n^*\pi^2}\Big),$$

откуда

$$\frac{n}{2\pi} \geqslant \varphi\Big(\frac{2n}{a_n^*\pi^2}\Big) \;\Rightarrow\; \varphi^{-1}\Big(\frac{n}{2\pi}\Big) \geqslant \frac{2n}{a_n^*\pi^2} \;\Rightarrow\; a_n^* \geqslant \frac{2}{\pi^2}\,\frac{n}{\varphi^{-1}\Big(\dfrac{n}{2\pi}\Big)} \geqslant \frac{2}{\pi^2}\,\frac{n}{\varphi^{-1}(n)}.$$

В итоге получаем порядковую оценку снизу нормы ядра Фейера

$$k_n^* = \|\Phi_n\|_{(\varphi)} \geqslant \|f_n\|_{(\varphi)} = a_n^* \geqslant \frac{2}{\pi^2}\,\frac{n}{\varphi^{-1}(n)}. \tag{4.1}$$

Оценка сверху. Здесь можно оценить ядро Фейера поточечно сверху функцией $g_n(x) = g_{1,n}(x) + g_{2,n}(x)$ (см. [10, (47.6)]), где

$$g_{1,n}(x) = \frac{n}{2}\cdot\chi_{[0,\frac{2\pi}{n}]}(x), \quad x\in[0,\pi]; \quad g_{2,n}(x) = \frac{\pi^2}{2nx^2}\cdot\chi_{(\frac{2\pi}{n},\pi]}(x), \quad x\in[0,\pi].$$

Нормы этих функций связаны соотношением

$$\|\Phi_n\|_{(\varphi)} \leqslant \|g_n\|_{(\varphi)} \leqslant \|g_{1,n}\|_{(\varphi)} + \|g_{2,n}\|_{(\varphi)}. \tag{4.2}$$

Оценим сверху каждую из норм в правой части (4.2). Для $\|g_{1,n}\|_{(\varphi)} =: b_{1,n}^* > 0$ получаем

$$1 = 2\int\limits_0^{\pi} \varphi\Big(\frac{g_{1,n}(x)}{b_{1,n}^*}\Big)\,dx = 2\int\limits_0^{2\pi/n} \varphi\Big(\frac{n}{2b_{1,n}^*}\Big)\,dx$$

$$= \frac{4\pi}{n}\,\varphi\Big(\frac{n}{2b_{1,n}^*}\Big) \Rightarrow \frac{n}{4\pi} = \varphi\Big(\frac{n}{2b_{1,n}^*}\Big) \;\Rightarrow\; \varphi^{-1}\Big(\frac{n}{4\pi}\Big) = \frac{n}{2b_{1,n}^*} \Rightarrow b_{1,n}^* = \frac{n}{2\,\varphi^{-1}\Big(\dfrac{n}{4\pi}\Big)},$$

в силу вогнутости и сохранения нуля функции φ^{-1} получаем оценку сверху для $b_{1,n}^*$:

$$b_{1,n}^* = \frac{n}{2\,\varphi^{-1}\Big(\dfrac{n}{4\pi}\Big)} \leqslant \frac{n}{\dfrac{1}{2\pi}\varphi^{-1}(n)} = 2\,\pi\frac{n}{\varphi^{-1}(n)}. \tag{4.3}$$

Оценим сверху норму $\|g_{2,n}\|_{(\varphi)} =: b_{2,n}^* > 0$. Имеем $1 = 2\int_{(2\pi)/n}^{\pi} \varphi\Big(\dfrac{g_{2,n}(x)}{b_{2,n}^*}\Big)\,dx = 2\int_{(2\pi)/n}^{\pi} \varphi\Big(\dfrac{\pi^2}{2nx^2\,b_{2,n}^*}\Big)\,dx$. Сделаем в последнем интеграле замену переменной $y = \dfrac{1}{nx^2}$, тогда

$$x = \frac{1}{\sqrt{ny}}, \quad dx = \frac{-dy}{2\sqrt{n}\,y\sqrt{y}}, \quad x\in\Big[\frac{2\pi}{n},\pi\Big] \Rightarrow y\in\Big[\frac{1}{\pi^2 n},\frac{n}{4\pi^2}\Big];$$

$$1 = 2\int\limits_{(2\pi)/n}^{\pi} \varphi\Big(\frac{\pi^2}{2nx^2\,b_{2,n}^*}\Big)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{1/(\pi^2 n)}^{n/(4\pi^2)} \varphi\Big(\frac{\pi^2 y}{2b_{2,n}^*}\Big)\frac{1}{y\sqrt{y}}\,dy.$$

Функция $\dfrac{\varphi(kx)}{x}$ строго возрастает для любого $k>0$ при $x>0$; это можно показать, исходя из (1.18) в [8, гл. 1, § 1]. Поэтому последний интеграл можно оценить сверху

$$1=\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{1/(\pi^2 n)}^{n/(4\pi^2)}\varphi\Big(\frac{\pi^2 y}{2\,b^*_{2,n}}\Big)\frac{1}{y\sqrt{y}}\,dy\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{1/(\pi^2 n)}^{n/(4\pi^2)}\varphi\Big(\frac{n}{8b^*_{2,n}}\Big)\frac{4\pi^2}{n\sqrt{y}}\,dy=\frac{4\pi^2}{n\sqrt{n}}\,\varphi\Big(\frac{n}{8b^*_{2,n}}\Big)\int\limits_{1/(\pi^2 n)}^{n/(4\pi^2)}\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$=\frac{4\pi^2}{n\sqrt{n}}\,\varphi\Big(\frac{n}{8b^*_{2,n}}\Big)\,2\Big(\sqrt{\frac{n}{4\pi^2}}-\sqrt{\frac{1}{\pi^2 n}}\Big)\leqslant\frac{8\pi^2}{n\sqrt{n}}\,\varphi\Big(\frac{n}{8b^*_{2,n}}\Big)\frac{\sqrt{n}}{2\pi}=\frac{4\pi}{n}\,\varphi\Big(\frac{n}{8b^*_{2,n}}\Big),$$

откуда

$$\frac{n}{4\pi}\leqslant\varphi\Big(\frac{n}{8b^*_{2,n}}\Big)\ \Rightarrow\ \varphi^{-1}\Big(\frac{n}{4\pi}\Big)\leqslant\frac{n}{8b^*_{2,n}}\ \Rightarrow\ b^*_{2,n}\leqslant\frac{n}{8\varphi^{-1}\Big(\dfrac{n}{4\pi}\Big)}\leqslant\frac{n}{\dfrac{2}{\pi}\varphi^{-1}(n)}=\frac{\pi n}{2\varphi^{-1}(n)}. \qquad (4.4)$$

В итоге из (4.2)–(4.4) получаем порядковую оценку сверху нормы ядра Фейера

$$k^*_n=\|\Phi_n\|_{(\varphi)}\leqslant b^*_{1,n}+b^*_{2,n}\leqslant\frac{5\pi}{2}\,\frac{n}{\varphi^{-1}(n)}. \qquad (4.5)$$

Таким образом, исходя из (4.1) и (4.5), норма ядра Фейера $\|\Phi_n\|_{(\varphi)}$ имеет порядок $\dfrac{n}{\varphi^{-1}(n)}$. Это позволяет утверждать, что на тригонометрическом полиноме Φ_n достигается порядковое равенство в (1.4).

Теорема 3 доказана.

Благодаря теореме 2 для алгебраических полиномов тоже можно получить неравенство разных метрик (используя при этом неравенства Маркова [12, гл. 6]), однако точность такого неравенства требует дополнительного исследования.

Автор настоящей работы выражает большую благодарность своему научному руководителю Н. Ю. Антонову за постановку задачи, обсуждение работы и важные замечания, а также рецензенту за проявленный интерес к работе, найденные погрешности и полезную ссылку [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Никольский С.М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
2. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. М.: Главная редакция физ.-мат. лит., 1977. 456 с.
3. **Берколайко М.З., Овчинников В.И.** Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах // Тр. математического ин-та АН СССР. 1983. Т. 161. С. 3–17.
4. **Родин В.А.** Неравенства Джексона и Никольского для тригонометрических полиномов в симметричном пространстве // Тр. 7-й зимней школы. Дрогобыч, 1974. М., 1976. С. 133–139.
5. **Акишев Г.А.** О порядках M-членных приближений классов функций симметричного пространства. // Мат. журн. 2014. Т. 14. № 4 (54). С. 46–71.
6. **Marcinkiewicz J., Zygmund A.** Mean values of trigonometrical polynomials. // Fundamental Mathematics. 1937. Vol. 28. P. 9–166.
7. **Пьянков А.Д.** Неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве // Современные проблемы функций и их приложения: сб. статей. Материалы 22-й Междунар. Саратовской зим. шк., посвящен. 300-летию РАН. Саратов, 2024. P. 230–233.
8. **Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 271 с.
9. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных. // Мат. изв. Серия математическая. 1981. Т. 45. № 1. С. 3–22.
10. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 937 с.

11. **Pawlewicz A., Wojciechowski M.** Marcinkiewicz sampling theorem for Orlicz spaces. // Positivity. 2022. Vol. 26, no. 3, art. no. 56. doi: 10.1007/s11117-022-00918-w
12. **Milovanovic G.V., Mitrinovic D.S., Rassias Th.M.** Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publishing Co. Ptc. Ltd., 1994. 836 p.

Поступила 11.04.2024
После доработки 27.08.2024
Принята к публикации 2.09.2024

Пьянков Александр Дмитриевич
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: sascha.pyankow@mail.ru

REFERENCES

1. Nikol'skii S.M. Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1951, vol. 38, pp. 244–278.
2. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*. Berlin, Springer-Verlag, 2011, 420 p. ISBN: 978-3-642-65713-9 . Original Russian text published in Nikol'skii S. M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 456 p.
3. Berkolaiko M.Z., Ovchinnikov V.I. Inequalities for entire functions of exponential type in symmetric spaces. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1984, vol. 161, pp. 1–17.
4. Rodin V.A. Jackson and Nikolsky inequalities for trigonometric polynomials in symmetric space. In: *Proc. of the 7th winter school*, Drogobych, 1974, Moscow, 1976, pp. 133–139.
5. Akishev G. On the orders of M-terms approximations of classes of functions of the symmetrical space. *Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 46–71 (in Russian).
6. Marcinkiewicz J., Zygmund A. Mean values of trigonometrical polynomials. *Fund. Math.*, 1937, vol. 28, pp. 9–166.
7. Pyankov A.D. Inequality of different metrics for discrete Luxembourg norms in a finite-dimensional space. In: *Modern problems of function theory and their applications*, ISSN 2658-4948 (Online), ed. A. P. Khromov, Proc. of the 22nd Internat. Saratov Winter School dedicated to the 300th anniversary of the Russian Academy of Sciences, 2024, iss. 22, pp. 230–233.
8. Krasnosel'sky M.A., Rutitsky Ya.B. *Vypuklyye funktsii i prostranstva Orlicha* [Convex functions and Orlicz spaces]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958, 271 p.
9. Arestov V.V. On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives. *Math. USSR, Izv.*, 1982, vol. 18, pp. 1–18. doi: 10.1070/im1982v018n01abeh001375
10. Bari N.K. *Trigonometricheskiye ryady* [Trigonometric series]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 936 p.
11. Pawlewicz A., Wojciechowski M. Marcinkiewicz sampling theorem for Orlicz spaces. *Positivity*, 2022, vol. 26, no. 3, art. 56. doi: 10.1007/s11117-022-00918-w
12. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. *Topics in polynomials*: *extremal problems, inequalities, zeros*, Singapore, World Scientific Publ. Comp., 1994, 821 p. ISBN: 981-02-0499-X .

Received April 11, 2024
Revised August 27, 2024
Accepted September 2, 2024

Funding Agency: This work was performed as a part of the research conducted in the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement no. № 075-02-2024-1377).

Aleksandr Dmitrievich P'yankov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: sascha.pyankow@mail.ru .

Cite this article as: A. D. P'yankov. Inequality of different metrics for discrete Luxemburg norms in finite-dimensional spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 212–223 .