

УДК 519.17

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ МАССИВОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $AT4$ -ГРАФОВ С $q \leq 4$

Д. В. Падучих

Пусть $\mathcal{M}$ — класс сильно регулярных графов, для которых μ является неглавным собственным значением. Заметим, что окрестность любой вершины $AT4$ -графа лежит в $\mathcal{M}$. Ранее было получено описание параметров графов из $\mathcal{M}$. В работе найдены массивы пересечений $AT4$ -графов с $q \leq 4$ и параметры отвечающих им сильно регулярных графов.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, $AT4$ -граф, локально $\mathcal{M}$ -графы.

D. V. Paduchikh. Enumeration of intersection arrays of $AT4$ -graphs with $q \leq 4$.

Let $\mathcal{M}$ be a class of strongly regular graphs for which μ is a nonprincipal eigenvalue. Note that the neighborhood of any vertex of an $AT4$ -graph lies in $\mathcal{M}$. Previously, the parameters of graphs from $\mathcal{M}$ were described. In this paper, intersection arrays of $AT4$ -graphs with $q \leq 4$ and the parameters of the corresponding strongly regular graphs are found.

Keywords: strongly regular graph, $AT4$ -graph, locally $\mathcal{M}$ -graph.

MSC: 05E30, 05C50

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-207-211

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ , число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a, L) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$ или pG_α). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P , и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется

дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечений графа Γ (см. [1]). Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$ — собственные значения Γ . По [2] выполняется фундаментальная граница $\left(\theta_1 + \frac{k}{a_1 + 1}\right)\left(\theta_d + \frac{k}{a_1 + 1}\right) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1 + 1)^2}$. Положим $b^+ = -1 - \frac{b_1}{1 + \theta_d}$, $b^- = -1 - \frac{b_1}{1 + \theta_1}$. Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется *плотным*. Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^- . Фундаментальная граница может быть записана в удобном виде $k(a_1 + b^+b^-) \leq (a_1 - b^+)(a_1 - b^-)$. Хорошо известно (см., например, [2, теорема 3.2]), что плотный граф диаметра 3 является графом Тэйлора. В этом случае окрестность любой вершины либо не содержит треугольников, либо является сильно регулярным графом с $k' = 2\mu'$.

Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4 с индексом антиподальности r . Тогда по [1, предложение 4.2.2] Γ имеет массив пересечений $\{k, k - a_1 - 1, (r - 1)c_2, 1; 1, c_2, k - a_1 - 1, k\}$. По [2, теорема 5.2] Γ является плотным тогда и только тогда, когда $q_{11}^4 = 0$. Если Γ — плотный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$, то все параметры Γ выражаются через p, q, r . В этом случае назовем Γ *антиподальным плотным графом* диаметра 4 с параметрами p, q, r ($AT4(p, q, r)$ -графом). В $AT4(p, q, r)$ -графе окрестности вершин сильно регулярны с неглавным собственным значением $\mu = p$. Скажем, что в графе Γ параметр α существует, если $|[u] \cap [w] \cap [z]| = \alpha$ для любых вершин u, w, z с условиями $d(u, w) = 1$, $d(u, z) = d(w, z) = 2$. В $AT4(p, q, r)$ -графе параметр α существует, $\alpha = (p + q)/r$ и $c_2 = \alpha q$.

Через $\mathcal{M}$ обозначим класс сильно регулярных графов с параметрами (v, k, λ, μ) , для которых μ является неглавным собственным значением. В [3] получено описание параметров графов из $\mathcal{M}$ и найдены некоторые ограничения на параметры $AT4(p, q, r)$ -графов. Если $\Delta \in \mathcal{M}$, то выполняются следующие утверждения:

- Предложение 1.** (1) Δ имеет параметры $(t^2\mu + t\mu + t^2, (t + 1)\mu, 2\mu - t, \mu)$ и собственные значения $\mu, -t$;
 (2) $2\mu \geq t$, причем $2\mu = t$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$;
 (3) $\mu + t$ делит $(\mu - 1, t + 1)(\mu + 1, t - 1)(\mu, t)^2$;
 (4) если $\mu = t\alpha$, то Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(t\alpha + \alpha, t - 1)$.

В данной работе найдены массивы пересечений $AT4(p, q, r)$ -графов с $q \leq 4$ и параметры отвечающих им сильно регулярных графов.

Теорема 1. Пусть Γ является $AT4$ -графом с $q \leq 4$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $q = 2$, и тройка (p, q, r) равна $(1, 2, 3)$ (граф Конвея — Смита), $(2, 2, 2)$ (граф Джонсона $J(8, 4)$) или $(4, 2, 2)$ (половинный 8-куб);
- (2) $q = 3$, и тройка (p, q, r) равна $(3, 3, 3)$ (граф $3.O_6^-(3)$), $(9, 3, 3)$ (граф $3.O_7(3)$), $(9, 3, 2)$;
- (3) $q = 4$, и тройка (p, q, r) равна $(2, 4, 3)$ (первый граф Сойчера), $(8, 4, 2)$ (первый граф Мейкснера), $(8, 4, 4)$ (второй граф Мейкснера), $(20, 4, 3)$ (второй граф Сойчера), $(4, 4, 2)$, $(8, 4, 3)$, $(16, 4, 2)$, $(20, 4, 2)$, $(44, 4, 2)$, $(56, 4, 2)$.

По [4, теорема 8] для $AT4(p, q, r)$ -графа Γ верно неравенство $r \leq (p + q^3)/(p + q)$. В случае $r = (p + q^3)/(p + q) = 2$ подграф $\Gamma_2(u)$ является $AT4(q^3 - q^2 - q, q, 2)$ -графом для любой вершины $u \in \Gamma$. В работе продолжено изучение графов в случае $r = (p + q^3)/(p + q)$, начатое в [4].

Теорема 2. Пусть Γ является $AT4(p, q, r)$ -графом, $2 \leq r \leq 5$. Если $r = (p + q^3)/(p + q)$, то либо

- (1) $r = 2$, $p = q^3 - 2q$, $q^3 - q$ делится на 4, q не сравнимо с 3 по модулю 4, либо
- (2) $r = 3$ и $q \in \{2, 3, 9, 12, 17, 27, 57\}$, либо
- (3) $r = 4$ и $q \in \{5, 7, 8, 20, 29, 32, 40, 68, 84, 95, 128, 260, 392, 788\}$, либо
- (4) $r = 5$ и $q \in \{5, 11, 15, 19, 25, 35, 55, 71, 75, 109, 115, 185, 235, 280, 299, 375, 451, 565, 755, 1135, 1515, 2275, 4555\}$.

1. Предварительные результаты

Лемма 1.1 [3, лемма 1.4]. Пусть Γ является $AT4(p, q, r)$ -графом. Тогда Γ — граф с массивом пересечений $\{q(pq + p + q), (q^2 - 1)(p + 1), (r - 1)q(p + q)/r, 1; 1, q(p + q)/r, (q^2 - 1)(p + 1), q(pq + p + q)\}$, $a_1 = a_3 = p(q + 1)$, $a_2 = pq^2$, $a_4 = 0$, антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $\bar{k} = k$, $\bar{\lambda} = a_1$, $\bar{\mu} = q(p + q)$ и собственные значения $p, -q^2$, а параметры окрестности вершины в Γ равны $v' = q(pq + p + q)$, $k' = p(q + 1)$, $\lambda' = 2p - q$, $\mu' = p$.

Лемма 1.2. Пусть Γ является $AT4(p, q, r)$ -графом, отличным от графа Конвея — Смита. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $pq(p + q)/r$ четно, $r(p + 1) < q(p + q)$ и r делит $p + q$, $p \geq q - 2$, причем равенство выполняется только в случае $q_{44}^4 = 0$;
- (2) $p + q$ делит $q^2(q^2 - 1)$ и $p + q^2$ делит $q^2(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$;
- (3) μ -подграфы из Γ являются полными многодольными тогда и только тогда, когда $(p, q, r) = (sq, q, q)$ для некоторого s ;
- (4) либо Γ является $AT4(q - 2, q, q - 1)$ -графом или $AT4(sq, q, q)$ -графом, либо $(p + q)(2q + 1) \geq 3r(p + 2)$.

Доказательство. Лемма следует из [4, леммы 3–5]. □

Пусть Γ является $AT4(p, q, r)$ -графом. Если $q = 2$, то ввиду леммы 1.2 тройка (p, q, r) равна $(1, 2, 3)$ (граф Конвея — Смита), $(2, 2, 2)$ (граф Джонсона $J(8, 4)$) или $(4, 2, 2)$ (половинный 8-куб). Если $q = 3$, то ввиду [4, теорема 20] тройка (p, q, r) равна $(3, 3, 3)$ (граф $3.O_6^-(3)$), $(9, 3, 3)$ (граф $3.O_7(3)$) или $(9, 3, 2)$. $AT4(9, 3, 2)$ -граф имеет массив пересечений $\{117, 80, 18, 1; 1, 18, 80, 117\}$, его локальные подграфы сильно регулярны с параметрами $v' = 117$, $k' = 36$, $\lambda' = 15$, $\mu' = 9$ и $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(378, 117, 36, 36)$.

2. Параметры $AT4(p, 4, r)$ -графов

В этом разделе предполагается, что Γ является $AT4(p, 4, r)$ -графом. Тогда Γ — граф с массивом пересечений $\{4(5p + 4), 15(p + 1), 4(r - 1)(p + 4)/r, 1; 1, 4(p + 4)/r, 15(p + 1), 4(5p + 4)\}$, локальные подграфы сильно регулярны с параметрами $k' = 5p$, $\lambda' = 2p - 4$, $\mu' = p$ и параметры антиподального частного $\bar{\Gamma}$ равны $\bar{k} = 4(5p + 4) = k$, $\bar{\lambda} = a_1 = 5p$, $\bar{\mu} = 4(p + 4)$. По лемме 1.2 $p + 4$ делит $16 \cdot 15$ и $p + 16$ делит $16 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 6$.

Лемма 2.1. Имеем $r \leq 4$, причем в случае $r = 4$ получим $p \leq 8$, тройка (p, q, r) равна $(8, 4, 4)$ и Γ — второй граф Мейкснера.

Доказательство. Ввиду п. (4) леммы 1.2 имеем либо $AT4(2, 4, 3)$ (первый граф Сойчера), либо $AT4(4s, 4, 4)$ -граф, либо $9(p+4) \geq 3r(p+2)$. Во втором случае тройка (p, q, r) равна $(8, 4, 4)$ и Γ — второй граф Мейкснера. В третьем случае $r \leq 3(p+4)/(p+2) = 3+6/(p+2)$. Так как $p \geq 2$, то $r \leq 4$, причем в случае $r = 4$ имеем $4 \leq 3+6/(p+2)$ и $p \leq 4$. Однако по [5] $AT4(4, 4, 4)$ -граф не существует. $\square$

Лемма 2.2. Если $r = 3$, то тройка (p, q, r) равна $(2, 4, 3)$ (и Γ — первый граф Сойчера), $(8, 4, 3)$ или $(20, 4, 3)$.

Доказательство. Пусть $r = 3$. По лемме 1.2 число r делит $p+4$, и в случае $AT4(q-2, q, q-1)$ -графа имеем первый граф Сойчера. По [4, теорема 8] имеем $3 = r \leq (p+64)/(p+4)$. Отсюда $3p+12 \leq p+64$, $p \leq 26$ и $p \in \{5, 8, \dots, 26\}$. Так как $p+4$ делит $16 \cdot 15$ и $p+16$ делит $16 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 6$, то $p \in \{8, 20\}$. $\square$

Лемма 2.3. Если $r = 2$, то тройка (p, q, r) равна $(4, 4, 2)$, $(8, 4, 2)$ (первый граф Мейкснера), $(16, 4, 2)$, $(20, 4, 2)$, $(44, 4, 2)$ или $(56, 4, 2)$.

Доказательство. Пусть $r = 2$. По лемме 1.2 число r делит $p+4$, и $(p+4)/r$ чётно, поэтому p делится на 4. По [4, теорема 8] имеем $p \leq q^3 - 2q = 56$. В случае $p = 56$ по [4, теорема 17] для любой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ является $AT4(44, 4, 2)$ -графом. По лемме 1.2 число $p+4$ делит $16 \cdot 15$ и $p+16$ делит $16 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 6$. Отсюда $p \in \{4, 8, 16, 20, 44, 56\}$.

Напомним, что локальный подграф Δ сильно регулярен с параметрами $k' = 5p$, $\lambda' = 2p-4$, $\mu' = p$. $\square$

Теорема 1 полностью доказана.

3. Параметры $AT4(p, q, r)$ -графов, $2 \leq r \leq 5$ и $r = (p+q^3)/(p+q)$

В этом разделе предполагается, что Γ является $AT4(p, q, r)$ -графом, $2 \leq r \leq 4$ и $r = (p+q^3)/(p+q)$. По [4, теорема 8] каждый μ -подграф Σ является сильно регулярным с параметрами $(q(p+q)/r, p, (q-1)(q-2)+2(p-1)/(q+1), (p+q^3)/(q+1))$.

Если $r > 2$, то по [4, лемма 21] число $q+r$ делит $r(r-2)(r-1)^2(r^2-r-1)$.

Лемма 3.1. Если параметр r равен 5, то либо $q = 5t$, $t = 56$ и $q = 280$ или t нечётно и $t+1$ делит $3 \cdot 16 \cdot 19$, либо q не делится на 5, $q = 4t$ и $4t+5$ делит $3 \cdot 19$ или q нечётно и $q+5$ делит $48 \cdot 19$.

Доказательство. Пусть $r = 5$. Тогда $5(p+q) = p+q^3$, поэтому $p = (q^3 - 5q)/4$, $q+5$ делит $15 \cdot 16 \cdot 19$ и 5 делит $(q^2 - 5)(q^3 - q)$. Если $q = 5t$, то либо $t = 4s$ и $4s+1$ делит $3 \cdot 19$, либо t нечётно, $25t^2 - 1$ делится на 4 и $t+1$ делит $3 \cdot 16 \cdot 19$. Отсюда либо $4s+1 = 57$, $t = 56$ и $q = 280$, либо t нечётно и $t+1$ делит $3 \cdot 16 \cdot 19$. Если q не делится на 5, то $q^2 - 1$ делится на 5, либо $q = 4t$, $(4t+1)(4t-1)$ делится на 5 и $4t+5$ делит $3 \cdot 19$, либо q нечётно и $q+5$ делит $48 \cdot 19$. $\square$

Лемма 3.2. Если параметр r равен 4, то $q \in \{5, 7, 8, 20, 29, 32, 40, 68, 84, 95, 128, 260, 392, 788\}$.

Доказательство. Пусть $r = 4$. Тогда $4(p+q) = p+q^3$, поэтому $p = (q^3 - 4q)/3$ и $q+4$ делит $8 \cdot 9 \cdot 11$. По лемме 1.2 число $pq(p+q)/r$ чётно, поэтому $pq(p+q) = pq(q^3 - q)/3$ делится на 8. Отсюда $q \in \{5, 7, 8, 20, 29, 32, 40, 68, 84, 95, 128, 260, 392, 788\}$. $\square$

Лемма 3.3. Если $r = 3$, то $q \in \{2, 3, 9, 12, 17, 27, 57\}$.

Доказательство. Ввиду [4, пример 23] имеем $q \in \{2, 3, 7, 9, 12, 17, 27, 57\}$, $p = (q^3 - 3q)/2$ и каждый μ -подграф Σ является сильно регулярным с параметрами $(q(q^3 - q)/6, (q^3 - 3q)/2, 3q^2 - 5q - 2, 3q(q-1)/2)$. В случае $q = 7$ получим $p = 161$, $c_2 = 392$ и μ -подграф из Γ является сильно регулярным с параметрами $(392, 161, 110, 63)$. Противоречие с тем, что $vk\lambda$ не делится на 6. $\square$

Лемма 3.4. Если $r = 2$, то $p = q^3 - 2q$, $q^3 - q$ делится на 4, q не сравнимо с 3 по модулю 4.

Доказательство. Имеем $2(p+q) = p+q^3$, поэтому $p = q^3 - 2q$. По лемме 1.2 число $(p+q)/2$ четно, поэтому $p+q = q^3 - q$ делится на 4. Далее, $\mu(\Sigma) = (p+q^3)/(q+1) = 2q(q-1)$, $\lambda(\Sigma) = (q-1)(q-2) + 2(q^3 - 2q - 1)/(q+1) = 3q^2 - 5q$, поэтому Σ является сильно регулярным графом с параметрами $(q(q^3 - q)/2, q^3 - 2q, q(3q - 5), 2q(q - 1))$. По [4, теорема 17] при $r = 2$ для любой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ является $AT_4(q^3 - q^2 - q, q, 2)$ -графом, а по [4, следствие 19] число q не сравнимо с 3 по модулю 4. $\square$

Из лемм 3.1–3.4 следует теорема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. Jurisic A., Koolen J. Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4 // Discrete Mathematics. 2002. Vol. 244. P. 181–202.
3. Махнев А.А., Падучих Д.В. О сильно регулярных графах с собственным значением μ и их расширениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 207–214.
4. Xia Zheng-Jiang, Lee Jae-Ho, Koolen J. A new feasibility condition to the AT_4 family // The Electronic J. Comb. 2023. Vol. 30, no. 2, art. no. P2.7. doi: 10.37236/11332
5. Jurisic A., Koolen J. Classification of the family $AT_4(qs, q, q)$ of antipodal tight graphs // J. Comb. Theory, 2011. Vol. 118, no. 3. P. 842–852.

Поступила 16.08.2024

После доработки 15.10.2024

Принята к публикации 21.10.2024

Падучих Дмитрий Викторович

д-р физ.-мат. наук, главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: dpaduchikh@gmail.com

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs*. Berlin etc, Springer-Verlag, 1989, 495 p.
2. Jurisic A., Koolen J. Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4. *Discrete Mathematics*, 2002, vol. 244, pp. 181–202.
3. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. On strongly regular graphs with eigenvalue μ and their extensions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 3, pp. 207–214 (in Russian).
4. Xia Zheng-Jiang, Lee Jae-Ho, Koolen J. A new feasibility condition to the AT_4 family. *The Electronic J. Comb.*, 2023, vol. 30, no. 2, art. no. P2.7. doi: 10.37236/11332
5. Jurisic A., Koolen J. Classification of the family $AT_4(qs, q, q)$ of antipodal tight graphs. *J. Comb. Theory*, 2011, vol. 118, no. 3. pp. 842–852.

Received August 16, 2024

Revised October 15, 2024

Accepted October 21, 2024

Dmitrii Viktorovich Paduchikh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dpaduchikh@gmail.com.

Cite this article as: D. V. Paduchikh. Enumeration of intersection arrays of AT_4 -graphs with $q \leq 4$. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 207–211.