

УДК 510.66

О НОРМАЛЬНЫХ ВЫВОДАХ В ИНТУИЦИОНИСТСКОМ НАТУРАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ

О. А. Охотников

Построенная в статье теория включает формулировку двух натуральных исчислений предикатов первого порядка: интуиционистского и минимального. Для этих двух видов логики в статье определяется новое понятие нормального натурального вывода. Доказывается теорема о нормализации натуральных выводов в этих исчислениях.

Ключевые слова: система натуральной дедукции, интуиционистское натуральное исчисление предикатов, нормальный натуральный вывод, автоматическое доказательство теорем, поиск натурального логического вывода.

O. A. Okhotnikov. On normal deduction proofs in intuitionistic natural predicate calculus.

The theory constructed in the article includes the formulation of two natural first-order predicate calculi: intuitionistic and minimal. For these two types of logic, the article defines a new notion of normal natural deduction. A theorem on the normalization of natural deductions in these calculi is proved.

Keywords: system of natural deduction, intuitionistic natural predicate calculus, normal natural deduction, automated theorem proving, search for a natural logical proof.

MSC: 03F03, 03F05, 03F07

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-188-206

Введение

Задача моделирования естественных способов рассуждений решается с помощью построения натуральных исчислений предикатов [1–4]. С прикладной точки зрения решение такой задачи имеет значение прежде всего для разработки компьютерных помощников построения доказательств [2; 5; 6]. В этой статье определяются системы натуральной дедукции в стиле [1, гл. 1; 2, приложение 3] для интуиционистской и минимальной логики предикатов первого порядка.

Центральной теоремой о натуральной дедукции является теорема о нормализации, согласно которой доказательства в системе натуральной дедукции могут быть преобразованы в нормальную форму. Такой нормальный натуральный вывод осуществляется прямым способом без окольных путей от допущений к конечной формуле [4; 7; 8]. Этот раздел теории доказательств имеет также значение с точки зрения того, какой вклад он вносит в решение недавно обнаруженной последней проблемы Гильберта [8; 9].

Многие алгоритмы поиска натурального вывода находят только нормальные выводы. При этом понятие нормальности может определяться по-разному [3; 4; 7; 8; 10–14]. Нормальные выводы обладают свойством подформульности, которое играет принципиальную роль для решения задач автоматизации дедуктивных построений [5; 15]. В этой статье для интуиционистской и минимальной логики предикатов дается определение новой концепции нормального натурального вывода и доказывается теорема о нормализации. При построении теории нормализации натуральных выводов мы следуем изложению подобной теории в [7, гл. 8; 12], где обоснование нормализационной теоремы получается из теоремы о допустимости сечения.

1. Односукцедентные исчисления секвенций

В этом разделе определяются два односукцедентных секвенциальных исчисления предикатов: минимальное $\mathfrak{S}_1$ и интуиционистское $\mathfrak{S}_2$. Формулируемые исчисления секвенций требуются для того, чтобы доказать нормализацию натуральных выводов.

Для формулировки исчисления секвенций $\mathfrak{S}_i$ прежде всего мы должны фиксировать некоторый логико-математический язык Ω первого порядка. В рамках языка Ω фиксируется множество всех предикатных и функциональных символов различной аргументности начиная с нуля, которые используются для построения выражений. Термы и атомарные формулы строятся из указанных символов и предметных переменных. Мы предполагаем, что сложные формулы языка Ω строятся из атомарных формул этого языка при помощи логических связок $\&$, $\vee$, $\supset$, кванторов $\forall$, $\exists$ и логических констант $\perp$, $\top$. Отрицание $\neg A$ есть по определению формула $A \supset \perp$. Вхождения предметных переменных в формулу обычным образом делятся на свободные и связанные. Переменные, входящие в формулу свободно, называются ее параметрами. Через $A(x/t)$ обозначается результат подстановки терма t вместо всех свободных вхождений переменной x в формулу A . При этом предполагается, что производится переименование связанных переменных формулы A , если параметры t попадают в область действия кванторов A . Вместо $A(x/t)$ мы будем писать просто $A(t)$, когда контекст x очевиден.

Секвенцией [16] называется упорядоченная пара вида $\Gamma \rightarrow A$, где Γ есть конечное, в частности, быть может, пустое, множество формул языка Ω , а A есть формула этого языка. При этом Γ называется антецедентом, а формула A — сукцедентом секвенции. Теоретико-множественные операции над конечными множествами формул рассматриваются обычным образом. Например, объединение $\Gamma \cup \Delta$ конечных множеств формул Γ и Δ состоит из всех формул из Γ и Δ . Как обычно, мы пишем $\Gamma\Delta$ вместо $\Gamma \cup \Delta$. Так что $\Gamma\Delta$ и $\Delta\Gamma$ обозначают одно и то же.

Все исчисления $\mathfrak{S}_i$ содержат аксиомы следующих двух видов: $\Gamma G \rightarrow G$ и $\Delta \rightarrow \top$, где G — атомарная формула языка Ω или $\perp$. Ниже описываются все правила вывода, которые используются в исчислениях $\mathfrak{S}_i$. При этом не все из них используются в обоих этих исчислениях.

$$\begin{array}{ll}
\frac{A \supset B, \Gamma \rightarrow A \quad B, A \supset B, \Gamma \rightarrow G}{A \supset B, \Gamma \rightarrow G} (\supset \rightarrow), & \frac{\Gamma A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} (\rightarrow \supset), \\
\frac{A, B, A \& B, \Gamma \rightarrow G}{A \& B, \Gamma \rightarrow G} (\& \rightarrow), & \frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \& B} (\rightarrow \&), \\
\frac{A, A \vee B, \Gamma \rightarrow G \quad B, A \vee B, \Gamma \rightarrow G}{A \vee B, \Gamma \rightarrow G} (\vee \rightarrow), & \frac{\Gamma \rightarrow A_j}{\Gamma \rightarrow A_1 \vee A_2} (\rightarrow \vee_j), \\
\frac{A(x/t), \forall x A(x), \Gamma \rightarrow G}{\forall x A(x), \Gamma \rightarrow G} (\forall \rightarrow), & \frac{\Gamma \rightarrow A(x/y)}{\Gamma \rightarrow \forall x A(x)} (\rightarrow \forall), \\
\frac{A(x/y), \exists x A(x), \Gamma \rightarrow G}{\exists x A(x), \Gamma \rightarrow G} (\exists \rightarrow), & \frac{\Gamma \rightarrow A(x/t)}{\Gamma \rightarrow \exists x A(x)} (\rightarrow \exists), \\
\frac{\Gamma \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow G} (\perp_i). &
\end{array}$$

Здесь в правилах G — атомарная формула, дизъюнкция, $\perp$ или формула вида $\exists z C(z)$ языка Ω , A, B — любые формулы языка Ω , а Γ — любое конечное множество формул языка Ω . В кванторных правилах $(\rightarrow \forall)$ и $(\exists \rightarrow)$ переменная y не входит свободно в нижнюю секвенцию.

Минимальное исчисление секвенций $\mathfrak{S}_1$, кроме аксиом, включает правила вывода $(\supset \rightarrow)$, $(\rightarrow \supset)$, $(\& \rightarrow)$, $(\rightarrow \&)$, $(\vee \rightarrow)$, $(\rightarrow \vee)$, $(\forall \rightarrow)$, $(\rightarrow \forall)$, $(\exists \rightarrow)$ и $(\rightarrow \exists)$. Интуиционистское исчисление секвенций $\mathfrak{S}_2$ получается из исчисления $\mathfrak{S}_1$ в результате добавления правила $(\perp_i)$.

Выводимость секвенций в $\mathfrak{S}_i$ определяется обычным образом [16]. Вывод удобно оформлять в виде дерева. Высота вывода есть по определению количество секвенций в самой длинной ветви. Мы не будем делать различия между формулами и секвенциями, отличающимися

лишь переименованием связанных переменных. На диаграммах фрагмент $\cdot \cdot \cdot \dot{\cdot} \cdot \cdot \cdot$ будет обозначать часть дерева. Символически выводимость секвенции S обозначается $\vdash S$. Будем писать $\vdash_n S$, если $\vdash S$ и существует вывод с высотой $\leq n$.

Пример 1.1. В приведенном ниже секвенциальном выводе в исчислении $\mathfrak{S}_2$ формулы A и B являются атомарными, переменная x не входит в B , а переменная y не входит в $A(x)$ и B :

$$\frac{\frac{\frac{B, \neg B \rightarrow B \quad \perp, B, \neg B \rightarrow \perp}{B, \neg B \rightarrow \perp} (\supset \rightarrow) \quad \frac{B, \neg B \rightarrow \perp}{B, \neg B \rightarrow A(y)} (\perp_i) \quad \frac{B, \neg B \rightarrow A(y)}{B, \neg B \rightarrow \forall x A(x)} (\rightarrow \forall) \quad \frac{B, \neg B \rightarrow \forall x A(x)}{\neg B \rightarrow B \supset \forall x A(x)} (\rightarrow \supset)}$$

Пример 1.2. Логический закон $(\forall x (A(x) \supset B)) \supset ((\exists x A(x)) \supset B)$ ниже доказан в исчислении $\mathfrak{S}_1$:

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} \forall x (A(x) \supset B), \exists x A(x), \\ A(y), A(y) \supset B \end{array} \right\} \rightarrow A(y) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x (A(x) \supset B), \exists x A(x), \\ A(y), A(y) \supset B, B \end{array} \right\} \rightarrow B}{\frac{\frac{\frac{\forall x (A(x) \supset B), \exists x A(x), A(y), A(y) \supset B \rightarrow B}{\forall x (A(x) \supset B), \exists x A(x), A(y) \rightarrow B} (\forall \rightarrow) \quad \frac{\forall x (A(x) \supset B), \exists x A(x), A(y) \rightarrow B}{\forall x (A(x) \supset B), \exists x A(x) \rightarrow B} (\exists \rightarrow) \quad \frac{\forall x (A(x) \supset B), \exists x A(x) \rightarrow B}{\forall x (A(x) \supset B) \rightarrow (\exists x A(x)) \supset B} (\rightarrow \supset) \quad \frac{\forall x (A(x) \supset B) \rightarrow (\exists x A(x)) \supset B}{\rightarrow (\forall x (A(x) \supset B)) \supset ((\exists x A(x)) \supset B)} (\rightarrow \supset)} (\supset \rightarrow)$$

Начало изучения подобных односукцедентных исчислений секвенций положено в [16]. Формулируемые ниже теоремы 1.1–1.6 требуются, чтобы доказать нормализацию натуральных выводов. Обоснования теорем 1.1–1.5 довольно элементарны, но отдельные утверждения представляют самостоятельный интерес, и для полноты изложения их доказательства вынесены в дополнительные материалы [17].

Лемма 1.1. Если $\vdash_n \Gamma \rightarrow C$, то $\vdash_n D\Gamma \rightarrow C$ для любых формул C и D .

Теорема 1.1. Правила вывода $(\supset \rightarrow)$, $(\& \rightarrow)$, $(\vee \rightarrow)$, $(\forall \rightarrow)$ и $(\exists \rightarrow)$ допустимы для произвольной формулы в сукцеденте в каждом исчислении $\mathfrak{S}_i$:

- 1) если $\vdash (A \supset B)\Gamma \rightarrow A$ и $\vdash (A \supset B)B\Gamma \rightarrow C$, то также и $\vdash (A \supset B)\Gamma \rightarrow C$;
- 2) если $\vdash (A \& B)A\Gamma \rightarrow C$, то $\vdash (A \& B)\Gamma \rightarrow C$;
- 3) если $\vdash (A \vee B)A\Gamma \rightarrow C$ и $\vdash (A \vee B)B\Gamma \rightarrow C$, то $\vdash (A \vee B)\Gamma \rightarrow C$;
- 4) если $\vdash (\forall x A(x))A(x/t)\Gamma \rightarrow C$, то $\vdash (\forall x A(x))\Gamma \rightarrow C$;
- 5) если $\vdash (\exists x A(x))A(x/y)\Gamma \rightarrow C$, то $\vdash (\exists x A(x))\Gamma \rightarrow C$.

Теорема 1.2. Секвенция $\Gamma C \rightarrow C$ выводима для произвольной формулы C в каждом исчислении $\mathfrak{S}_i$.

Теорема 1.3. Правило вывода $(\perp_i)$ допустимо в $\mathfrak{S}_2$ для произвольной формулы в сукцеденте: если $\vdash \Gamma \rightarrow \perp$, то $\vdash \Gamma \rightarrow C$ для всякой формулы C .

Теорема 1.4. Если $\vdash_n S$, z — переменная и t — терм, то $\vdash_n S(z/t)$.

Теорема 1.5. В исчислении секвенций $\mathfrak{S}_i$ обратимы правила вывода $(\rightarrow \&)$, $(\rightarrow \supset)$ и $(\rightarrow \forall)$:

- 1) если $\vdash \Gamma_n \rightarrow A \& B$, то $\vdash_n \Gamma \rightarrow A$ и $\vdash_n \Gamma \rightarrow B$;
- 2) если $\vdash_n \Gamma \rightarrow A \supset B$, то $\vdash_n A\Gamma \rightarrow B$;

3) если $\vdash_n \Gamma \rightarrow \forall x A(x)$, то $\vdash_n \Gamma \rightarrow A(x/y)$.

Лемма 1.2. Если $\vdash_n \top \Gamma \rightarrow A$, то $\vdash_n \Gamma \rightarrow A$.

Теорема 1.6. Следующее правило вывода, называемое сечением, допустимо в $\mathfrak{S}_i$:

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad A\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow B}.$$

Доказательство. Пусть даны выводы в $\mathfrak{S}_i$ секвенций $\Gamma \rightarrow A$ и $A\Gamma \rightarrow B$. Припишем этой паре выводов тройку натуральных чисел (k, l, m) , где k — логическая сложность формулы A , l — высота вывода секвенции $\Gamma \rightarrow A$, а m — высота вывода секвенции $A\Gamma \rightarrow B$. Утверждение докажем индукцией по k , при фиксированном k — индукцией по l , а при фиксированном l — индукцией по m . Фактически для доказательства нужно указать, каким образом следует заменить данное сечение фигурой вывода без сечений или, по крайней мере, фигурой вывода меньшего веса (k, l, m) . Рассмотрим различные случаи строения данной пары выводов.

1. Одна из посылок есть аксиома. Тогда $\Gamma \rightarrow B$ выводится в $\mathfrak{S}_i$. Действительно, в случае, когда A — атомарная формула или $\perp$, секвенция $\Gamma \rightarrow A$ есть аксиома и $A \in \Gamma$, так что $\Gamma \rightarrow B$ совпадает с $A\Gamma \rightarrow B$. Если же $A = \top$, то $\vdash \Gamma \rightarrow B$ следует по лемме 1.2 из $\vdash A\Gamma \rightarrow B$.

Пусть $A\Gamma \rightarrow B$ есть аксиома. Тогда либо $B = \top$, либо $B \in \Gamma \cup \{A\}$ и B — атомарная формула или $\perp$. Если $B = \top$ или $B \in \Gamma$, то $\Gamma \rightarrow B$ есть аксиома. Если же $B = A$, то $\Gamma \rightarrow B$ совпадает с $\Gamma \rightarrow A$.

2. Одна из посылок сечения получена по правилу, не связанному с формулой A . Тогда применим сечение к посылкам этого правила, при этом уменьшится l или m . Затем применим то же самое правило. При этом, когда это необходимо, то в секвенции добавляются посылки по лемме 1.1. Все такие случаи применения сечения рассматриваются подобным образом. Рассмотрим только два из них. При этом применение правила сечения символически будем обозначать (cut).

(2.а) Пусть вывод с сечением имеет вид

$$\frac{\frac{C \& D, C, D, \Delta \rightarrow A}{C \& D, \Delta \rightarrow A} (\& \rightarrow) \quad A, C \& D, \Delta \rightarrow B}{C \& D, \Delta \rightarrow B} (\text{cut})$$

В таком случае преобразуем вывод следующим образом:

$$\frac{C \& D, C, D, \Delta \rightarrow A \quad \frac{A, C \& D, \Delta \rightarrow B}{A, C \& D, C, D, \Delta \rightarrow B}}{\frac{C \& D, C, D, \Delta \rightarrow B}{C \& D, \Delta \rightarrow B} (\& \rightarrow)} (\text{cut})$$

(2.б) Пусть сечение имеет вид

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \perp}{A, \Gamma \rightarrow B} (\perp_i)}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

Эту фигуру преобразуем к виду

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad A, \Gamma \rightarrow \perp}{\frac{\Gamma \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow B} (\perp_i)} (\text{cut})$$

3. Каждая из посылок сечения получена по правилу вывода, связанному с формулой A . Здесь будем преобразовывать исходный вывод с сечением в зависимости от строения формулы A .

(3.а) Пусть $A = C \supset D$. В этом случае сечение имеет вид

$$\frac{\frac{C, \Gamma \rightarrow D}{\Gamma \rightarrow C \supset D} (\rightarrow \supset) \quad \frac{\frac{C \supset D, \Gamma \rightarrow C}{C \supset D, \Gamma \rightarrow B} \quad \frac{C \supset D, D, \Gamma \rightarrow B}{C \supset D, \Gamma \rightarrow B} (\supset \rightarrow)}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

Преобразуем эту фигуру к виду

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \rightarrow C \supset D}{\Gamma \rightarrow C} \quad C \supset D, \Gamma \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow D} \quad C, \Gamma \rightarrow D \quad \frac{\frac{\Gamma \rightarrow C \supset D}{D, \Gamma \rightarrow C \supset D} \quad C \supset D, D, \Gamma \rightarrow B}{D, \Gamma \rightarrow B}}{\Gamma \rightarrow B}$$

Здесь два верхних сечения имеют меньшую высоту правого вывода, а два других сечения применяются к формулам меньшей логической сложности, так что по индуктивному предположению эти сечения допустимы.

(3.б) Пусть $A = \forall x C(x)$. Данное сечение имеет вид

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow C(y)}{\Gamma \rightarrow \forall x C(x)} (\rightarrow \forall) \quad \frac{\frac{\forall x C(x), C(t), \Gamma \rightarrow B}{\forall x C(x), \Gamma \rightarrow B} (\forall \rightarrow)}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

Преобразуем эту фигуру к виду

$$\frac{\Gamma \rightarrow C(t) \quad \frac{\frac{\Gamma \rightarrow \forall x C(x)}{C(t), \Gamma \rightarrow \forall x C(x)} \quad \forall x C(x), C(t), \Gamma \rightarrow B}{C(t), \Gamma \rightarrow B} (\text{cut})}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

Здесь верхнее сечение имеет меньшую высоту правого вывода, а нижнее применяется к формуле меньшей сложности. Вывод секвенции $\Gamma \rightarrow C(t)$ получается из вывода секвенции $\Gamma \rightarrow C(y)$ с помощью теоремы 1.4.

(3.в) Пусть $A = \exists x C(x)$. Возможны два случая. Первый имеет следующий вид:

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow C(t)}{\Gamma \rightarrow \exists x C(x)} (\rightarrow \exists) \quad \frac{\frac{\exists x C(x), C(y), \Gamma \rightarrow B}{\exists x C(x), \Gamma \rightarrow B} (\exists \rightarrow)}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

Эту фигуру преобразуем к виду

$$\frac{\Gamma \rightarrow C(t) \quad \frac{\frac{\Gamma \rightarrow \exists x C(x)}{C(t), \Gamma \rightarrow \exists x C(x)} \quad \exists x C(x), C(t), \Gamma \rightarrow B}{C(t), \Gamma \rightarrow B} (\text{cut})}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

Если $\Gamma \rightarrow \exists x C(x)$ получена в $\mathfrak{S}_2$ из $\Gamma \rightarrow \perp$ по правилу $(\perp_i)$, то $\vdash \Gamma \rightarrow B$ по теореме 1.3.

(3.г) Пусть $A = C \vee D$. Сначала рассмотрим следующее сечение:

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow C \vee D} (\rightarrow \vee) \quad \frac{C \vee D, C, \Gamma \rightarrow B \quad C \vee D, D, \Gamma \rightarrow B}{C \vee D, \Gamma \rightarrow B} (\vee \rightarrow)}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

Эту фигуру преобразуем к виду

$$\frac{\Gamma \rightarrow C \quad \frac{\frac{\Gamma \rightarrow C \vee D}{C, \Gamma \rightarrow C \vee D} \quad C \vee D, C, \Gamma \rightarrow B}{C, \Gamma \rightarrow B} (\text{cut})}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

Если $\Gamma \rightarrow C \vee D$ получена в $\mathfrak{S}_2$ из $\Gamma \rightarrow \perp$, то $\vdash \Gamma \rightarrow B$ по теореме 1.3.

(3.д) Пусть $A = C \& D$. Данное сечение

$$\frac{\frac{\Gamma \rightarrow C \quad \Gamma \rightarrow D}{\Gamma \rightarrow C \& D} (\rightarrow \&) \quad \frac{C \& D, C, D, \Gamma \rightarrow B}{C \& D, \Gamma \rightarrow B} (\& \rightarrow)}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

преобразуем к виду

$$\frac{\Gamma \rightarrow D \quad \frac{\frac{\Gamma \rightarrow C}{D, \Gamma \rightarrow C} \quad \frac{\frac{\Gamma \rightarrow C \& D}{C, D, \Gamma \rightarrow C \& D} \quad C \& D, C, D, \Gamma \rightarrow B}{C, D, \Gamma \rightarrow B} (\text{cut})}{D, \Gamma \rightarrow B} (\text{cut})}{\Gamma \rightarrow B} (\text{cut})$$

Теорема о допустимости сечения доказана.

2. Системы натуральной дедукции

В этом разделе определяются две системы натуральной дедукции: минимальная $\mathfrak{D}_1$ и интуиционистская $\mathfrak{D}_2$. При построении натурального исчисления предикатов $\mathfrak{D}_i$ мы будем следовать за [1; 2]. При этом наше изложение этой теории отличается не только исходным набором логических связок, но и формулировкой некоторых правил вывода. Далее произвольные цепочки символов будем обозначать греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

По сравнению с аксиоматическим исчислением предикатов понятие вывода в натуральном исчислении предикатов является более сложным образованием. Прежде всего введем понятие *субординатной последовательности формул с вхождением* в нее формулы и ее *последней* формулой.

СП1. “ $\langle \rangle$ ” есть субординатная последовательность, она не имеет последней формулы и ни одна формула не входит в нее.

СП2. Если A — формула, то $\langle A \rangle$ есть субординатная последовательность, A есть ее последняя формула и A входит в нее.

СП3. Если α есть субординатная последовательность формул и A есть формула, то $\langle \alpha A \rangle$ есть субординатная последовательность формул, A — ее последняя формула и B входит в $\langle \alpha A \rangle$, если B входит в α или B графически равна A .

СП4. Если α и β суть субординатные последовательности формул и A — формула, то $\langle \alpha [\beta] A \rangle$ есть субординатная последовательность формул, A есть ее последняя формула и формула B входит в нее, если она входит в α или B графически равна A .

Ниже с помощью субординатных последовательностей моделируются натуральные выводы.

Введем понятие *высоты* $h(\alpha)$ субординатной последовательности α следующим образом:

- $h(\langle \rangle) = 0$,
- $h(\langle A \rangle) = 1$,
- $h(\langle \alpha A \rangle) = h(\alpha) + 1$,
- $h(\langle \alpha [\beta] A \rangle) = \max(h(\alpha), h([\beta])) + 1$,
- $h([\alpha]) = \omega \cdot h(\alpha)$.

Очевидно, что высота субординатной последовательности меньше, чем ω^ω , и мы вправе использовать методы доказательства по индукции по высоте субординатной последовательности. Так же мы можем определять понятия и доказывать утверждения по индукции по построению субординатной последовательности.

Мы ввели понятие субординатной последовательности в виде линейного образования в языке, который содержит угловые и прямые скобки. Для теоретических целей такое определение предпочтительно, но оно проигрывает в наглядности по сравнению с двумерной записью, которую также часто используют. В двумерном виде субординатные последовательности формул $\langle \alpha A \rangle$ и $\langle \alpha [\beta] A \rangle$ мы условимся изображать соответственно

$$\begin{array}{c} \alpha \\ A \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ | \beta \\ A \end{array}.$$

При записи субординатных последовательностей формул угловые скобки можно опускать, если зафиксировать правило их восстановления. Условимся их восстанавливать согласно левой ассоциативности. В дальнейшем мы будем опускать угловые скобки.

Заметим, что в определении субординатной последовательности формул переопределяется уже имеющее стандартный смысл понятие вхождения формулы в такую последовательность. Ниже мы употребляем этот термин только в указанном смысле. При этом формула A входит в субординатную последовательность формул α тогда и только тогда, когда α имеет один из следующих видов: $\beta A \gamma$, $\beta_1 [\beta_2] A \gamma$, где β_1 , β_2 , β и γ — субординатные последовательности формул. В случае, когда формула A входит в α , будем употреблять обозначение $A \in \alpha$. Формула A есть последняя формула субординатной последовательности α в том и только в том случае, если α имеет один из следующих видов: βA , $\beta_1 [\beta_2] A$, где β_1 , β_2 и β — субординатные последовательности формул.

В натуральных системах дедукции вывод есть более сложный формальный объект, нежели в аксиоматических. Принципиальное отличие этих двух типов формализации рассуждений состоит в формулировке самого понятия вывода. Натуральные выводы суть субординатные последовательности формул. Опишем системы $\mathfrak{D}_i$ как исчисления, которые будем называть *исчислениями натуральных выводов*, а также *натуральными исчислениями предикатов*.

В исчислении $\mathfrak{D}_i$ имеются два типа правил. Первый тип правил вывода — это правила непосредственной выводимости (в наших системах трехпосылочные, двухпосылочные, однопосылочные и нульпосылочные, т.е. схемы аксиом). Второй тип правил вывода — это правила вспомогательного вывода. Их формулировку удобнее давать при определении натурального вывода для конкретной системы $\mathfrak{D}_i$.

Прежде всего определим отношение непосредственной выводимости между формулами в системах $\mathfrak{D}_i$, где $i = 1, 2$. Ниже формулируются *правила непосредственного вывода*, которые

используются в системах $\mathfrak{D}_i$. При этом не все из них используются в обеих двух:

$$\begin{array}{ll} \frac{A, B}{A \& B} \ (\&i), & \frac{A \& B}{A} \quad \frac{A \& B}{B} \ (\&e), \\ \frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B} \ (\vee i), & \frac{A \vee B, A \supset C, B \supset C}{C} \ (\vee e), \\ \frac{\perp}{A} \ (\perp i), & \frac{A \supset B, A}{B} \ (\supset e), \\ \frac{A(x/t)}{\exists x A(x)} \ (\exists i), & \frac{\forall x A(x)}{A(x/t)} \ (\forall e). \end{array}$$

Все системы $\mathfrak{D}_i$ включают *аксиому* $\top$. Кроме того, система $\mathfrak{D}_1$ включает правила непосредственного вывода $(\&i)$, $(\&e)$, $(\vee i)$, $(\vee e)$, $(\supset e)$, $(\exists i)$ и $(\forall e)$. Система $\mathfrak{D}_2$, кроме указанных правил, включает также $(\perp i)$.

Теперь определим понятие *натурального вывода* для *минимального натурального исчисления предикатов* $\mathfrak{D}_1$. Вывод в системе $\mathfrak{D}_1$ есть субординатная последовательность формул, построенная в соответствии со следующими ниже правилами.

- НВ1. Субординатная последовательность формул вида $\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{array}$ есть вывод из множества посылок $\{A_1, \dots, A_n\}$. Случай $n = 0$ не исключается. Символически это правило будем обозначать (pi) и называть *правилом формирования посылок*.
- НВ2. Если A есть аксиома (т.е. $A = \top$), то A есть вывод из пустого множества посылок $\emptyset$. Символически это правило будем обозначать (Ti) .
- НВ3. Если α есть вывод из множества посылок Γ и A — аксиома, то $\frac{\alpha}{A}$ есть вывод из множества посылок Γ . Это правило будем обозначать (Ti) .
- НВ4. Если α есть вывод из множества посылок Γ и формула C непосредственно выводима из одной или нескольких формул, входящих в α , по правилу $(\&i)$, $(\&e)$, $(\vee i)$, $(\vee e)$, $(\supset e)$, $(\exists i)$ или $(\forall e)$, то $\frac{\alpha}{C}$ есть вывод из множества посылок Γ .
- НВ5. Если α есть вывод из посылок Γ , β есть вывод из посылок $\Delta \cup \{A\}$, все формулы Δ входят в α и последней формулой β является B , то $\frac{\alpha}{\frac{\beta}{A \supset B}}$ есть вывод из множества посылок Γ . Формула A в β называется *допущением* по отношению к α . Символически это правило обозначим $(\supset i)$.
- НВ6. Если α есть вывод из посылок Γ , β есть вывод из посылок Δ , предметная переменная y не является параметром ни одной входящей в α формулы, последней формулой β является $A(y)$ и все формулы Δ входят в α , то $\frac{\alpha}{\frac{\beta}{\forall x A(x)}}$ есть вывод из множества посылок Γ . Используемая в выводе β предметная переменная y называется *варьируемой*. Сформулированное правило обозначим $(\forall i)$.
- НВ7. Если α есть вывод из множества посылок Γ , формула $\exists x A(x)$ входит в α (т.е. $\alpha = \alpha_1 (\exists x A(x)) \alpha_2$), предметная переменная y не является параметром ни одной входящей в α формулы и формулы B , β есть вывод из посылок $\Delta \cup \{A(y)\}$, последней формулой β

является B и все формулы Δ входят в α , то

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \exists x A(x) \\ \alpha_2 \\ | \beta \\ B \end{array}$$

есть вывод из множества посылок Γ . Используемая в выводе β предметная переменная y называется *локальной константой*. Формула $A(y)$ в β называется *допущением* по отношению к α . Это правило обозначим $(\exists e)$.

Формулировка системы натуральной дедукции $\mathfrak{D}_1$ завершена. *Интуиционистская система натуральной дедукции* $\mathfrak{D}_2$ получается из $\mathfrak{D}_1$ в результате переформулировки правила построения НВ4, в котором требуется к упомянутым там правилам непосредственного вывода добавить правило $(\perp_i)$.

Отметим, что в исчислениях $\mathfrak{D}_i$ правило $(\forall i)$ оформляется в виде отдельного подвывода, в отличие от [1; 2]. Формулировки других правил также отличаются от приведенных в [1; 2], которые в этой концепции натуральной дедукции формализуются более естественно и соответствуют практике оформления математических доказательств.

Понятие натурального вывода было определено индуктивно. Очевидно, что множество натуральных выводов из посылок Γ в системе $\mathfrak{D}_1$ совпадает с множеством цепочек, выводимых в некотором исчислении, в котором аксиомами считаются натуральные выводы из посылок Γ , формируемые по правилу НВ1, а правила НВ2, ..., НВ7 построения натуральных выводов из посылок Γ трактуются как правила вывода. И аналогично для $\mathfrak{D}_2$. При этом символические обозначения правил НВ1, ..., НВ7 будем считать также символическими обозначениями соответствующих аксиом и правил вывода в этих исчислениях.

Другими словами, *минимальное* натуральное исчисление предикатов $\mathfrak{D}_1$ включает аксиому (pi) и правила вывода (Ti) , $(\&i)$, $(\supset i)$, $(\vee i)$, $(\forall i)$, $(\exists i)$, $(\&e)$, $(\supset e)$, $(\vee e)$, $(\forall e)$ и $(\exists e)$. *Интуиционистское* натуральное исчисление предикатов $\mathfrak{D}_2$ получается присоединением к исчислению $\mathfrak{D}_1$ правила $(\perp_i)$.

Правила вывода удобно разделить на правила введения и правила удаления логических знаков. *Правила введения* — это суть правила (Ti) , $(\&i)$, $(\supset i)$, $(\vee i)$, $(\forall i)$ и $(\exists i)$, а *правила удаления* — $(\&e)$, $(\supset e)$, $(\vee e)$, $(\forall e)$ и $(\exists e)$. Правило $(\perp_i)$ будем называть $\perp$ -правилом.

Будем говорить, что субординатная последовательность α есть вывод формулы A из посылок Γ , если α есть вывод из посылок Γ и A является последней формулой α . Мы пишем $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}_i} A$ и говорим, что A является *синтаксическим логическим следствием* Γ , если существует вывод формулы A из некоторого конечного подмножества $\Delta \subseteq \Gamma$ в $\mathfrak{D}_i$.

Пример 2.1. В приведенном ниже натуральном выводе в исчислении $\mathfrak{D}_2$ варьируется предметная переменная y , которая не входит в $A(x)$ и B , а предметная переменная x не входит в B . Натуральный вывод дополнен подробным анализом. В колонке слева дана сплошная нумерация формул. В колонке справа размещен комментарий для соответствующих строк вывода:

1.	$\neg B$	посылка
2.	B	допущение
3.	$\neg B$	
4.	B	y — варьируемая переменная
5.	$\neg B$	
6.	$\perp$	4, 5, $(\supset e)$
7.	$A(y)$	6, $(\perp_i)$
8.	$\forall x A(x)$	$(\forall i)$
9.	$B \supset \forall x A(x)$	$(\supset i)$

Пример 2.2. В приведенном ниже натуральном выводе из пустого множества посылок предметная переменная y является локальной константой:

1.	$\forall x (A(x) \supset B)$	допущение
2.	$\exists x A(x)$	допущение
3.	$\forall x (A(x) \supset B)$	
4.	$A(y)$	допущение, y — локальная константа
5.	$\forall x (A(x) \supset B)$	
6.	$A(y) \supset B$	5, $(\forall e)$
7.	B	4, 6, $(\supset e)$
8.	B	2, $(\exists e)$
9.	$(\exists x A(x)) \supset B$	$(\supset i)$
10.	$(\forall x (A(x) \supset B)) \supset ((\exists x A(x)) \supset B)$	$(\supset i)$

При применении правила удаления посылки, содержащая вхождение удаляемого логического символа, называется *бóльшей посылкой*. Чтобы отличать посылки применений правил вывода от посылок всего натурального вывода, будем последние также называть *предположениями* этого вывода. Последнюю формулу натурального вывода будем называть *заключением* этого вывода.

Протоколом построения в $\mathfrak{D}_i$ натурального вывода α из посылок Γ называется конечная последовательность натуральных выводов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, в которой $\alpha = \alpha_k$, α_1 есть последовательность всех формул из Γ и каждый α_j либо порождается по правилу (pi) , либо получается в результате применения некоторого правила вывода исчисления $\mathfrak{D}_i$ из некоторых предшествующих натуральных выводов в этой последовательности.

Очевидно, что субординатная последовательность α является натуральным выводом из посылок Γ в том и только том случае, когда существует протокол $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ построения α из Γ . Определения некоторых понятий о натуральном выводе α могут быть сформулированы только в контексте некоторого его протокола построения. При этом мы не будем всякий раз это оговаривать, имея в виду, что такой протокол $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ подразумевается.

Мы говорим, что β является *непосредственным собственным подвыводом* α , если α имеет вид $\gamma[\beta]\delta$ для некоторых γ и δ . При этом α будем называть *непосредственным собственным надвыводом* β . Отношение *быть собственным подвыводом* определим как транзитивное замыкание отношения непосредственного собственного подвывода.

Кроме собственных подвыводов нам требуются *виртуальные подвыводы*, которые сопряжены с применением правил $(\forall i)$, $(\exists i)$, $(\perp i)$, $(\& i)$, $(\supset e)$, $(\vee e)$ и определяются следующим образом. Рассмотрим несколько случаев вхождений формул A и B в натуральный вывод α из посылок Γ . Пусть либо (а) A — заключение вывода α и A получена по правилу $(\forall i)$, $(\exists i)$ или $(\perp i)$ из $B \in \alpha$; либо (б) A — заключение вывода α , A получена по правилу $(\& i)$ и B — одна из двух посылок; либо (в) A получена по правилу $(\supset e)$ и B — меньшая посылка; либо (г) A получена по правилу $(\vee e)$ и B — одна из двух меньших посылок. Тогда для случаев (а)–(г) в α однозначно находится натуральный вывод β формулы B из посылок Γ с тем свойством, что все вхождения формул в β за исключением предположений из Γ и заключения B являются посылками применения некоторого правила. Такой вывод β будем называть *непосредственным виртуальным подвыводом* α . Отношение *быть виртуальным подвыводом* определим как транзитивное замыкание отношения непосредственного виртуального подвывода.

Подвыводами натурального вывода будем называть, во-первых, его собственные подвыводы, во-вторых, виртуальные подвыводы его и всех его собственных подвыводов.

3. Нормальные натуральные выводы

В этом разделе определяется понятие нормального вывода в исчислении $\mathfrak{D}_i$. Также для него устанавливается свойство подформульности и связь с исчислением секвенций $\mathfrak{S}_i$.

Вхождение формулы в натуральный вывод, которое одновременно является большей посылкой правила удаления и заключением либо правила введения, либо $\perp$ -правила, либо правила $(\vee e)$, либо правила $(\exists e)$, называется *максимальным*.

Вывод называется *нормальным*, если он сам и все его подвыводы обладают следующими свойствами:

- ННВ1. Не содержат максимальных вхождений формул.
- ННВ2. Все вхождения формул за исключением предположений и заключений являются посылками применения некоторого правила.
- ННВ3. Если заключение вида $A \& B$ не является предположением, то должно быть получено по правилу $(\&i)$.
- ННВ4. Если заключение вида $A \supset B$ не является предположением, то должно быть получено по правилу $(\supset i)$.
- ННВ5. Если заключение вида $\forall x A(x)$ не является предположением, то должно быть получено по правилу $(\forall i)$.
- ННВ6. С помощью $\perp$ -правила можно обосновывать только лишь атомарные формулы, дизъюнкции и формулы вида $\exists x A(x)$.
- ННВ7. Все предположения собственных подвыводов за исключением допущений должны быть предположениями их непосредственного надвывода.

Отметим, что требования ННВ3–ННВ7 отличают новую концепцию нормального натурального вывода от других определений этого понятия [4; 7; 8; 10–14]. Мы пишем $\Gamma \vdash^+ A$, если существует нормальный натуральный вывод формулы A из некоторого конечного подмножества $\Delta \subseteq \Gamma$ в $\mathfrak{D}_i$.

Понятие *подформулы* определяется индуктивно следующим образом: A есть подформула формулы A ; если $B \& C$, $B \supset C$ или $B \vee C$ есть подформула формулы A , то B и C суть подформулы A ; если $\forall x B$ или $\exists x B$ есть подформула формулы A , то $B(x/t)$ есть подформула формулы A .

Будем говорить, что натуральный вывод α формулы A из посылок Γ обладает *свойством подформульности*, если каждая формула, входящая в α или его подвывод за исключением меньших посылок применений правила $(\vee e)$ является подформулой A или некоторой формулы из Γ . Нормальные выводы обладают свойством подформульности. Этот факт для систем $\mathfrak{D}_i$ формулируется ниже в теореме 3.1, которая может быть доказана индукцией по высоте нормального натурального вывода. При этом используются леммы 3.1 и 3.2. Первая из них легко доказывается индукцией по длине n указанной там последовательности формул, а вторая — индукцией по высоте нормального вывода.

Лемма 3.1. Пусть α есть натуральный вывод формулы A из посылок Γ такой, что, во-первых, все виртуальные подвыводы α обладают свойством подформульности, во-вторых, в α существует последовательность формул $A_1, \dots, A_n$, в которой $A_1 \in \Gamma$, $A_n = A$ и для $i < n$ каждая A_i является большей посылкой применения правила $(\&e)$, $(\vee e)$ или $(\supset e)$ для получения A_{i+1} . Тогда для α выполняется свойство подформульности.

Лемма 3.2. Если $\Gamma \vdash^+ \perp$ в $\mathfrak{D}_1$ или $\mathfrak{D}_2$, то $\perp$ есть подформула некоторой формулы из Γ .

Теорема 3.1. Всякий нормальный вывод в $\mathfrak{D}_1$ или $\mathfrak{D}_2$ обладает свойством подформульности.

Пример 3.1. Легко проверить, что рассмотренные в примерах 2.1 и 2.2 натуральные выводы являются нормальными. При этом они могут быть получены из рассмотренных в примерах 1.1 и 1.2 соответствующих секвенциальных выводов чисто механически в результате применения эффективного алгоритма.

Следующая лемма, которая легко может быть доказана индукцией по построению нормального натурального вывода, используется в доказательстве теоремы 3.2.

Лемма 3.3. Если существует нормальный вывод формулы A из посылок Δ и $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$, то существует нормальный вывод вида $A_1 \dots A_n \beta A$ из посылок Δ .

Теорема 3.2. Если секвенция $\Gamma \rightarrow A$ выводима в исчислении $\mathfrak{S}_i$, то $\Gamma \vdash^+ A$ в $\mathfrak{D}_i$.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ и Π есть вывод в исчислении $\mathfrak{S}_i$ секвенции $\Gamma \rightarrow A$. Индукцией по построению вывода Π покажем, как построить нормальный вывод π формулы A из посылок Γ в исчислении натуральной дедукции $\mathfrak{D}_i$.

База индукции. Пусть секвенция $\Gamma \rightarrow A$ есть аксиома и вывод Π содержит только ее. Тогда либо $A \in \Gamma$, либо $A = \top$. Если $A = A_j \in \Gamma$, то искомым вывод из посылок Γ можно получить с помощью правила формирования посылок: $A_1 \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_n A$. Если же $A = \top$, то вывод $A_1 \dots A_n A$ получается по правилу ($\top i$). В обоих случаях указанная субординатная последовательность будет нормальным выводом формулы A из посылок Γ , поскольку для него выполняются все требуемые свойства ННВ1, ..., ННВ7.

Шаг индукции. Пусть в исчислении $\mathfrak{S}_i$ в выводе Π заключительная секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получается по одному из правил вывода. Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть в выводе Π секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получена по правилу $(\rightarrow \&)$ из секвенций $\Gamma \rightarrow B$ и $\Gamma \rightarrow C$. Тогда, во-первых, $A = B \& C$; во-вторых, по индуктивному предположению и лемме 3.3 существуют нормальные выводы $A_1 \dots A_n \beta B$ и $A_1 \dots A_n \gamma C$ из посылок Γ соответственно формул B и C . Искомым натуральный вывод π формулы $B \& C$ из посылок Γ сформируем так, как показано на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \vdots \vdots \vdots \\ \Gamma \rightarrow B \quad \Gamma \rightarrow C \\ \hline \Gamma \rightarrow B \& C \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} 1. & A_1 \quad \text{посылка} \\ & \vdots \\ n. & A_n \quad \text{посылка} \\ & \beta \\ l. & B \\ & \gamma \\ m. & C \\ & B \& C \quad l, m, (\&i) \end{array}
 \end{array}$$

Построенный вывод π является нормальным. Действительно, вывод π получен по правилу ($\&i$) из нормальных выводов $A_1 \dots A_n \beta B$ и $A_1 \dots A_n \gamma C$. Поскольку формула $B \& C$ не может быть максимальной в π , то тем самым выполняется свойство ННВ1. Также легко проверяется, что выполняются свойства ННВ2, ..., ННВ7. Тем самым вывод π удовлетворяет всем требованиям, которыми должен обладать нормальный вывод.

2. Пусть в выводе Π заключительная секвенция $\Gamma \rightarrow A$ является результатом применения правила вывода $(\& \rightarrow)$. Тогда по индуктивному предположению существует нормальный вывод $(B \& C) A_1 \dots A_n B C \alpha A$ из посылок $B \& C, A_1, \dots, A_n, B, C$. Применив два раза к нормальному выводу $(B \& C) A_1 \dots A_n$ правило ($\&e$), получаем нормальный вывод $(B \& C) A_1 \dots A_n B C$ теперь уже из посылок $B \& C, A_1, \dots, A_n$. Тогда вывод $(B \& C) A_1 \dots A_n B C \alpha A$ является нормальным из-за того, что B и C не могут быть максимальными. В результате получаем следующее преобразование вывода Π в нормальный вывод π :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \vdots \vdots \vdots \\ B \& C, B, C, \Delta \rightarrow A \\ \hline B \& C, \Delta \rightarrow A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} 1. & B \& C \quad \text{посылка} \\ 2. & A_1 \quad \text{посылка} \\ & \vdots \\ n+1. & A_n \quad \text{посылка} \\ n+2. & B \quad 1, (\&e) \\ n+3. & C \quad 1, (\&e) \\ & \alpha \\ & A \end{array}
 \end{array}$$

3. Пусть секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получена по правилу вывода $(\rightarrow \supset)$ из секвенции $\Gamma B \rightarrow C$. Тогда $A = B \supset C$, и существует нормальный вывод $B A_1 \dots A_n \gamma C$ из посылок $\Gamma \cup \{B\}$. Следующая перестройка этого вывода по правилу $(\supset i)$ сохраняет свойство нормальности:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma, B \rightarrow C \end{array}}{\Gamma \rightarrow B \supset C} \rightsquigarrow \begin{array}{lll} 1. & A_1 & \text{посылка} \\ & \vdots & \vdots \\ n. & A_n & \text{посылка} \\ n+1. & | B & \text{допущение} \\ n+2. & | A_1 & \text{посылка} \\ & | \vdots & \vdots \\ 2n+1. & | A_n & \text{посылка} \\ & | \gamma & \\ & | C & \\ & B \supset C & (\supset i) \end{array}$$

4. Пусть в выводе Π заключительная секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получается по правилу $(\supset \rightarrow)$ из секвенций $(B \supset C) \Delta \rightarrow B$ и $(B \supset C) C \Delta \rightarrow A$. Тогда по индуктивному предположению, во-первых, существует нормальный вывод $(B \supset C) A_1 \dots A_n \beta B$ из посылок $B \supset C, A_1, \dots, A_n$; во-вторых, существует нормальный вывод $C (B \supset C) A_1 \dots A_n \alpha A$ из посылок $C, B \supset C, A_1, \dots, A_n$. Применив к выводу $(B \supset C) A_1 \dots A_n \beta B$ правило $(\supset e)$, получаем нормальный вывод $(B \supset C) A_1 \dots A_n \beta B C$ из тех же посылок. Тогда следующий вывод из этих же посылок является нормальным, поскольку формула C не может быть максимальной:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ B \supset C, \Delta \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C, B \supset C, \Delta \rightarrow A \end{array}}{B \supset C, \Delta \rightarrow A} \rightsquigarrow \begin{array}{lll} 1. & B \supset C & \text{посылка} \\ 2. & A_1 & \text{посылка} \\ & \vdots & \vdots \\ n+1. & A_n & \text{посылка} \\ & \beta & \\ m. & B & \\ & C & 1, m, (\supset e) \\ & \alpha & \\ & A & \end{array}$$

5. Пусть в выводе Π заключительная секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получается по правилу $(\rightarrow \vee_j)$. Тогда $A = B_1 \vee B_2$, и существует нормальный вывод $A_1 \dots A_n \alpha B_j$ из посылок Γ . Применив к этому выводу правило $(\vee i)$, получим вновь нормальный вывод, поскольку формула $B_1 \vee B_2$ не может быть максимальной:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \rightarrow B_j \end{array}}{\Gamma \rightarrow B_1 \vee B_2} \rightsquigarrow \begin{array}{lll} 1. & A_1 & \text{посылка} \\ & \vdots & \vdots \\ n. & A_n & \text{посылка} \\ & \alpha & \\ m. & B_j & \\ & B_1 \vee B_2 & m, (\vee i) \end{array}$$

6. Пусть в выводе Π заключительная секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получается по правилу $(\vee \rightarrow)$ из двух секвенций $(B \vee C) B \Delta \rightarrow A$ и $(B \vee C) C \Delta \rightarrow A$. Тогда по индуктивному предположению, во-первых, существует нормальный вывод $(B \vee C) B A_1 \dots A_n \alpha_1 A$ из посылок $B \vee C, B, A_1, \dots, A_n$; во-вторых, существует нормальный вывод $(B \vee C) C A_1 \dots A_n \alpha_2 A$ из посылок $B \vee C, C, A_1, \dots, A_n$. Теперь, применив сначала дважды правило $(\supset i)$, а затем трехпосылочное

правило $(\vee e)$, получим следующий нормальный вывод π теперь уже из посылок Γ :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \ddots \\ \vdots \\ B \vee C, B, \Delta \rightarrow A \end{array} \quad \begin{array}{c} \ddots \\ \vdots \\ B \vee C, C, \Delta \rightarrow A \end{array} \\
 \hline
 B \vee C, \Delta \rightarrow A
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{lll}
 1. & B \vee C & \text{посылка} \\
 2. & A_1 & \text{посылка} \\
 & \vdots & \vdots \\
 n+1. & A_n & \text{посылка} \\
 n+2. & | B & \text{допущение} \\
 n+3. & | A_1 & \text{посылка} \\
 & | \vdots & \vdots \\
 2n+2. & | A_n & \text{посылка} \\
 & | \alpha_1 & \\
 & | A & \\
 l. & B \supset A & (\supset i) \\
 l+1. & | C & \text{допущение} \\
 l+2. & | A_1 & \text{посылка} \\
 & | \vdots & \vdots \\
 l+n+2. & | A_n & \text{посылка} \\
 & | \alpha_2 & \\
 & | A & \\
 m. & C \supset A & (\supset i) \\
 & A & 1, l, m, (\vee e)
 \end{array}$$

7. Пусть секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получается в результате применения правила $(\rightarrow \forall)$. Тогда $A = \forall x B(x)$, и существует нормальный вывод $A_1 \dots A_n \beta B(x/y)$ из посылок Γ . Следующая перестройка этого вывода по правилу $(\forall i)$ сохраняет свойство нормальности:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \ddots \\ \vdots \\ \Gamma \rightarrow B(x/y) \end{array} \\
 \hline
 \Gamma \rightarrow \forall x B(x)
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{lll}
 1. & A_1 & \text{посылка} \\
 & \vdots & \vdots \\
 n. & A_n & \text{посылка} \\
 n+1. & | A_1 & \text{посылка} \\
 & | \vdots & \vdots \\
 2n. & | A_n & \text{посылка} \\
 & | \beta & \\
 & | B(x/y) & \\
 & \forall x B(x) & (\forall i)
 \end{array}$$

8. Пусть заключительная секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получена по правилу $(\forall \rightarrow)$ из секвенции $B(t) (\forall x B(x)) \Delta \rightarrow A$. Тогда по индуктивному предположению существует нормальный вывод $B(t) (\forall x B(x)) A_1 \dots A_n \alpha A$ из посылок $B(t), \forall x B(x), A_1, \dots, A_n$. Применяя к нормальному выводу $(\forall x B(x)) A_1 \dots A_n$ правило $(\vee e)$, получим нормальный вывод $(\forall x B(x)) A_1 \dots A_n B(t)$ теперь уже из посылок $\forall x B(x), A_1, \dots, A_n$. Тогда указанный ниже вывод из посылок Γ будет нормальным потому, что в нем формула $B(t)$ не является максимальной:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \ddots \\ \vdots \\ \forall x B(x), B(x/t), \Delta \rightarrow A \end{array} \\
 \hline
 \forall x B(x), \Delta \rightarrow A
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{lll}
 1. & \forall x B(x) & \text{посылка} \\
 2. & A_1 & \text{посылка} \\
 & \vdots & \vdots \\
 n+1. & A_n & \text{посылка} \\
 & B(x/t) & 1, (\vee e) \\
 & \alpha & \\
 & A &
 \end{array}$$

9. Пусть в выводе Π заключительная секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получается по правилу $(\rightarrow \exists)$. Тогда $A = \exists x B(x)$, и существует нормальный вывод $A_1 \dots A_n \alpha B(t)$ из посылок Γ . Применяя к этому выводу правило $(\exists i)$, получим следующее преобразование секвенциального вывода Π в нормальный натуральный вывод π :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \rightarrow B(x/t) \end{array}}{\Gamma \rightarrow \exists x B(x)} \rightsquigarrow \begin{array}{ll} 1. & A_1 \quad \text{посылка} \\ & \vdots \\ & \vdots \\ n. & A_n \quad \text{посылка} \\ & \alpha \\ m. & B(x/t) \\ & \exists x B(x) \quad m, (\exists i) \end{array}$$

10. Пусть заключительная секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получена по правилу $(\exists \rightarrow)$ из секвенции $B(y) (\exists x B(x)) \Delta \rightarrow A$. Тогда по индуктивному предположению существует нормальный вывод $B(y) (\exists x B(x)) A_1 \dots A_n \alpha A$ из посылок $B(y)$, $\exists x B(x)$, $A_1, \dots, A_n$. Применяя правило $(\exists e)$, получим следующий нормальный вывод π теперь уже из посылок Γ :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \exists x B(x), B(x/y), \Delta \rightarrow A \end{array}}{\exists x B(x), \Delta \rightarrow A} \rightsquigarrow \begin{array}{ll} 1. & \exists x B(x) \quad \text{посылка} \\ 2. & A_1 \quad \text{посылка} \\ & \vdots \\ & \vdots \\ n+1. & A_n \quad \text{посылка} \\ n+2. & \left| \begin{array}{l} B(x/y) \\ \exists x B(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{допущение} \\ \text{посылка} \end{array} \\ n+3. & \left| \begin{array}{l} B(x/y) \\ \exists x B(x) \end{array} \right. \quad \text{посылка} \\ n+4. & \left| \begin{array}{l} B(x/y) \\ \exists x B(x) \end{array} \right. \quad \text{посылка} \\ & \vdots \\ 2n+3. & \left| \begin{array}{l} A_n \\ \alpha \\ A \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{посылка} \\ \\ \end{array} \\ & A \quad 1, (\exists e) \end{array}$$

11. Пусть в исчислении $\mathfrak{S}_2$ в выводе Π заключительная секвенция $\Gamma \rightarrow A$ получена в результате применения правила $(\perp_i)$ к секвенции $\Gamma \rightarrow \perp$. Тогда по индуктивному предположению в исчислении $\mathfrak{D}_2$ существует нормальный вывод $A_1 \dots A_n \alpha \perp$ из посылок Γ . Применив к этому выводу правило вывода $(\perp_i)$, получаем снова нормальный вывод, поскольку выполняются все требования ННВ1, ..., ННВ7:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \rightarrow \perp \end{array}}{\Gamma \rightarrow A} \rightsquigarrow \begin{array}{ll} 1. & A_1 \quad \text{посылка} \\ & \vdots \\ & \vdots \\ n. & A_n \quad \text{посылка} \\ & \alpha \\ m. & \perp \\ & A \quad m, (\perp_i) \end{array}$$

Теорема доказана.

Внимательный анализ этого доказательства показывает, что имеется полиномиальный алгоритм, который преобразует вывод в $\mathfrak{S}_i$ секвенции $\Gamma \rightarrow A$ в нормальный натуральный вывод формулы A из посылок Γ в $\mathfrak{D}_i$. Тем самым устанавливается, что любой алгоритм поиска вывода в секвенциальном исчислении предикатов $\mathfrak{S}_i$, в частности [15], является также и алгоритмом поиска вывода в натуральном исчислении предикатов $\mathfrak{D}_i$. При этом формируются только нормальные выводы.

4. Теорема о нормализации

В этом разделе устанавливается, что любой натуральный вывод в исчислении $\mathfrak{D}_i$ может быть нормализован.

Теорема 4.1. *Если $\Gamma \vdash A$ в $\mathfrak{D}_i$, то $\vdash \Gamma \rightarrow A$ в $\mathfrak{S}_i$.*

Доказательство проводится индукцией по построению вывода формулы A из посылок Γ в исчислении натуральных выводов $\mathfrak{D}_i$. Провести индукцию не составляет труда. Рассмотрим все возможные случаи построения натурального вывода αA из посылок Γ .

База индукции. Пусть $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ и натуральный вывод αA из посылок Γ состоит только из посылок. Тогда $A = A_j \in \Gamma$. Отсюда по теореме 1.2 получаем $\vdash \Gamma \rightarrow A$ в $\mathfrak{S}_i$.

Шаг индукции. Пусть натуральный вывод αA из посылок Γ в исчислении $\mathfrak{D}_i$ формируется по одному из правил вывода. Покажем, что правила вывода натурального исчисления предикатов сохраняют выводимость в исчислении секвенций. Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть αA есть натуральный вывод из посылок Γ такой, что формула A получает обоснование по нульпосылочному правилу вывода ($\top_i$). В этом случае A является аксиомой, т.е. $A = \top$. Тогда $\Gamma \rightarrow A$ является аксиомой исчисления $\mathfrak{S}_i$.

2. Пусть αA есть вывод из посылок Γ такой, что формула A получает обоснование по двухпосылочному правилу вывода ($\&i$) из некоторых формул $B \in \alpha$ и $C \in \alpha$. Тогда $A = B \& C$, и по индуктивному предположению имеем $\vdash \Gamma \rightarrow B$ и $\vdash \Gamma \rightarrow C$. Отсюда по правилу ($\rightarrow \&$) получаем $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

3. Пусть в выводе αA из посылок Γ формула A обоснована по однопосылочному правилу ($\&e$) либо из формулы $A \& B \in \alpha$, либо из формулы $B \& A \in \alpha$. Тогда по индуктивному предположению имеем $\vdash \Gamma \rightarrow A \& B$ или $\vdash \Gamma \rightarrow B \& A$. Принимая во внимание, что по теореме 1.5.1 правило ($\rightarrow \&$) обратимо, получаем $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

4. Пусть в выводе αA формула A обоснована в $\mathfrak{S}_2$ по однопосылочному правилу ($\perp_i$) из формулы $\perp \in \alpha$. Отсюда по индуктивному предположению $\vdash \Gamma \rightarrow \perp$. Тогда по теореме 1.3 получаем $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

5. Пусть αA есть натуральный вывод из посылок Γ такой, что формула A имеет обоснование по двухпосылочному правилу вывода ($\supset e$) из некоторых формул $B \in \alpha$ и $(B \supset A) \in \alpha$. Покажем, что тогда $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

Действительно, по индуктивному предположению имеем $\vdash \Gamma \rightarrow B$ и $\vdash \Gamma \rightarrow B \supset A$. По теореме 1.5.2 правило ($\rightarrow \supset$) обратимо. Это значит, что из $\vdash \Gamma \rightarrow B \supset A$ следует $\vdash B\Gamma \rightarrow A$. Теперь остается применить теорему о допустимости сечения 1.6 к выводимым секвенциям $\Gamma \rightarrow B$ и $B\Gamma \rightarrow A$, в результате чего и получим секвенцию $\Gamma \rightarrow A$.

6. Пусть в выводе αA формула A обоснована по однопосылочному правилу ($\vee i$) из формулы $B \in \alpha$. Тогда по индуктивному предположению $\vdash \Gamma \rightarrow B$, а также $A = B \vee C$ или $A = C \vee B$. В обоих случаях по правилу ($\rightarrow \vee_j$) получаем $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

7. Пусть αA есть вывод из посылок Γ такой, что формула A обоснована по трехпосылочному правилу вывода ($\vee e$) из некоторых формул $(B \vee C) \in \alpha$, $(B \supset A) \in \alpha$ и $(C \supset A) \in \alpha$. Покажем, что тогда $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

Действительно, по индуктивному предположению имеем $\vdash \Gamma \rightarrow B \vee C$, $\vdash \Gamma \rightarrow B \supset A$ и $\vdash \Gamma \rightarrow C \supset A$. Ввиду обратимости правила ($\rightarrow \supset$) из $\vdash \Gamma \rightarrow B \supset A$ и $\vdash \Gamma \rightarrow C \supset A$ следует $\vdash B\Gamma \rightarrow A$ и $\vdash C\Gamma \rightarrow A$. Отсюда вытекает, что $\vdash (B \vee C)B\Gamma \rightarrow A$ и $\vdash (B \vee C)C\Gamma \rightarrow A$. Тогда по теореме 1.1.3 получаем $\vdash (B \vee C)\Gamma \rightarrow A$. Теперь можно применить сечение к выводимым секвенциям $\Gamma \rightarrow B \vee C$ и $(B \vee C)\Gamma \rightarrow A$. В результате получаем $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

8. Пусть в выводе αA формула A обоснована по однопосылочному правилу ($\forall e$) из формулы $\forall x B(x) \in \alpha$. Отсюда $A = B(x/t)$, и по индуктивному предположению $\vdash \Gamma \rightarrow \forall x B(x)$. Принимая во внимание теоремы 1.4 и 1.5.3, тогда получаем $\vdash \Gamma \rightarrow B(t)$.

9. Пусть в выводе αA формула A обоснована по однопосылочному правилу $(\exists i)$ из формулы $B(x/t) \in \alpha$. Отсюда $A = \exists x B(x)$, и по индуктивному предположению $\vdash \Gamma \rightarrow B(t)$. Тогда по правилу $(\rightarrow \exists)$ получаем $\vdash \Gamma \rightarrow \exists x B(x)$.

10. Пусть вывод αA из посылок Γ получен по правилу вывода $(\supset i)$. В этом случае $A = B \supset C$ и $\alpha = \beta[\gamma C]$, где γC есть вывод из посылок $\{B_1, \dots, B_m, B\}$, и при этом все формулы $B_1, \dots, B_m$ входят в β . По индуктивному предположению имеем $\vdash B_1 \dots B_m B \rightarrow C$ и $\vdash \Gamma \rightarrow B_j$, где $j = 1, \dots, m$. Отсюда по правилу $(\rightarrow \supset)$ получаем $\vdash B_1 \dots B_m \rightarrow B \supset C$. Тогда $\vdash B_1 \dots B_m \Gamma \rightarrow B \supset C$ и $\vdash B_{j+1} \dots B_m \Gamma \rightarrow B_j$. Применив m раз сечение, получаем $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

11. Пусть вывод αA из посылок Γ получен по правилу вывода $(\forall i)$. В этом случае $A = \forall x B(x)$ и $\alpha = \beta[\gamma B(y)]$, где $\gamma B(y)$ есть вывод из посылок $\{B_1, \dots, B_m\}$, все указанные формулы $B_1, \dots, B_m$ входят в β и переменная y не входит свободно в β . По индуктивному предположению имеем $\vdash B_1 \dots B_m \rightarrow B(y)$ и $\vdash \Gamma \rightarrow B_j$, где $j = 1, \dots, m$. Отсюда по правилу $(\rightarrow \forall)$ получаем $\vdash B_1 \dots B_m \rightarrow \forall x B(x)$. Тогда $\vdash B_1 \dots B_m \Gamma \rightarrow \forall x B(x)$ и $\vdash B_{j+1} \dots B_m \Gamma \rightarrow B_j$. Применив m раз сечение, выведем требуемую секвенцию $\Gamma \rightarrow A$.

12. Пусть αA есть вывод формулы A из посылок Γ такой, что A получена по правилу вывода $(\exists e)$ из формулы $\exists x B(x) \in \alpha$. Это значит, что αA имеет вид $\alpha_1 (\exists x B(x)) \alpha_2 [B(x/y) \beta A] A$, где $B(y) \beta A$ есть вывод из посылок $\{B(y), B_1, \dots, B_m\}$, все формулы $B_1, \dots, B_m$ входят в $\alpha_1 (\exists x B(x)) \alpha_2$ и переменная y не входит свободно в $\alpha_1 (\exists x B(x)) \alpha_2$ и формулу A . По индуктивному предположению $\vdash \Gamma \rightarrow \exists x B(x)$, $\vdash B(y) B_1 \dots B_m \rightarrow A$ и $\vdash \Gamma \rightarrow B_j$, где $j = 1, \dots, m$. Отсюда $\vdash B(y) (\exists x B(x)) B_1 \dots B_m \rightarrow A$. По теореме 1.1.5 тогда $\vdash (\exists x B(x)) B_1 \dots B_m \rightarrow A$. Добавив посылки, получим $\vdash (\exists x B(x)) B_1 \dots B_m \Gamma \rightarrow A$ и $\vdash (\exists x B(x)) B_{j+1} \dots B_m \Gamma \rightarrow B_j$. Наконец, применяя $m + 1$ раз сечение, получаем $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

Теорема доказана.

Теорема 4.2. Если $\Gamma \vdash A$ в $\mathfrak{D}_i$, то в $\mathfrak{D}_i$ существует нормальный вывод A из Γ .

Доказательство. Пусть $\Gamma \vdash A$ в $\mathfrak{D}_i$. По теореме 4.1 тогда $\vdash \Gamma \rightarrow A$ в $\mathfrak{S}_i$. По теореме 3.2 отсюда получаем $\Gamma \vdash^+ A$ в $\mathfrak{D}_i$.

Теорема доказана.

Заключение

В статье построена теория нормализации натуральных выводов для интуиционистской и минимальной логики предикатов первого порядка. Автор планирует распространить построенную теорию на классическую логику предикатов, логику предикатов с равенством и высокопорядковую логику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 220 с.
2. Смирнов В.А., Маркин В.И., Новодворский А.Е., Смирнов А.В. Доказательство и его поиск. Курс логики и компьютерный практикум // Логика и компьютер. Вып. 3. М.: Наука, 1996. 254 с.
3. Troelstra A., Schwichtenberg H. Basic proof theory. Second Edt. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 417 p. doi: 10.1017/CBO9781139168717
4. Pelletier F.J. and Hazen A. Natural deduction systems in logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2021.
5. Вторушин Ю.И. О поиске вывода в системе натуральной дедукции логики предикатов // Интеллектуальные системы. 2009. Т. 13. С. 263–288.
6. Portoraro F. Automated Reasoning // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2024.
7. Negri S., von Plato J. Structural proof theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 274 p. doi: 10.1017/CBO9780511527340
8. Negri S., von Plato J. Proof analysis. A Contribution to Hilbert's last problem. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 278 p. doi: 10.1017/CBO9781139003513

9. **Thiele R.** Hilbert's twenty-fourth problem // American Mathematical Monthly. Vol. 110, no. 1. P. 1–24. 2003. doi: 10.1080/00029890.2003.11919933
10. **Sieg W., Byrnes J.** Normal natural deduction proofs (in classical logic) // Studia Logica. Vol. 60, no. 1. 1998. P. 67–106. doi: 10.1023/A:1005091418752
11. **Sieg W., Cittadini S.** Normal natural deduction proofs (in non-classical logic) // Mechanizing Mathematical Reasoning. 2005. P. 169–191. (Ser. Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence; vol. 2605). doi: 10.1007/978-3-540-32254-2_11
12. **Серебрянников О.Ф.** Нормальные формы логических доказательств и проблемы теоретической эвристики // Вопросы гносеологии, логики и методологии научного исследования. Вып. 3. Ленинград, 1972. С. 89–106.
13. **Правиц Д.** Натуральный вывод. М.: ЛОРИ, 1997. 108 с.
14. **Серебрянников О.Ф.** Нормальные формы логических доказательств // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 267–273.
15. **Okhotnikov O.** About proof-search in intuitionistic natural deduction calculus using partial Skolemization // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. Vol. 1680. Art. 012038. P. 1–7. doi: 10.1088/1742-6596/1680/1/012038
16. **Okhotnikov O.** A new sequent calculus for automated proof search // Appl. Math. Sci. 2014. Vol. 8, no. 100. P. 4977–4984. doi: 10.12988/ams.2014.46497
17. Дополнительные материалы к статье: О. А. Охотников “О нормальных выводах в интуиционистском натуральном исчислении предикатов”. Онлайн-версия содержит дополнительные материалы, размещенные на http://journal.imm.uran.ru/Suppl_inf_2024-v.30-4 (PDF).

Поступила 20.09.2024

После доработки 15.10.2024

Принята к публикации 21.10.2024

Охотников Олег Алиевич
старший преподаватель
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: oleg.okhotnikov@gmail.com

REFERENCES

1. Smirnov V.A. *Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya* [Logical methods of analysis of scientific knowledge]. Moscow, Editorial URSS, 2002, 264 p. ISBN: 5-8360-0308-4.
2. Smirnov V.A., Markin V.I., Novodvorskii A.E., Smirnov A.V. *Dokazatel'stvo i ego poisk. Kurs logiki i komp'uternyi praktikum* [Proof and its search. A course of logic and computer practical work]. In: *Logika i komp'uter* [Logic and computer], no. 3. Moscow, Nauka Publ., 1996, 256 p. ISBN: 5-02-013603-4.
3. Troelstra A., Schwichtenberg H. *Basic proof theory*. Second Edt. Cambridge Univ. Press, 2000, 417 p. doi: 10.1017/CBO9781139168717
4. Pelletier F.J., Hazen A. Natural deduction systems in logic. *The Stanford encyclopedia of philosophy*, 2021.
5. Vtorushin Yu.I. On the search for inference in the system of natural deduction of predicate logic. *Intellectual'nyye sistemy*, 2009, vol. 13, no. 1–4, pp. 263–288.
6. Portoraro F. Automated reasoning. *The Stanford encyclopedia of philosophy*, 2024.
7. Negri S., von Plato J. *Structural proof theory*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001, 274 p. doi: 10.1017/CBO9780511527340
8. Negri S., von Plato J. *Proof analysis. A contribution to Hilbert's last problem*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2011, 278 p. doi: 10.1017/CBO9781139003513
9. Thiele R. Hilbert's twenty-fourth problem. *American Math. Monthly*, 2003, vol. 110, iss. 1, pp. 1–24. doi: 10.1080/00029890.2003.11919933
10. Sieg W., Byrnes J. Normal natural deduction proofs (in classical logic). *Studia logica*, 1998, vol. 60, no. 1, pp. 67–106. doi: 10.1023/A:1005091418752

11. Sieg W., Cittadini S. Normal natural deduction proofs (in non-classical logic). *Mech. Math. Resoning.*, Ser. Lecture notes in computer science, 2005, vol. 2605, pp. 169–191. doi: 10.1007/978-3-540-32254-2_11
12. Serebryannikov O.F. Normal forms of logical proofs and problems of theoretical heuristics. *Voprosy gnoseologii, logiki i metodologii nauchnogo issledovaniya*, 1972, vol. 3, pp. 89–106 (in Russian).
13. Prawitz D. *Natural deduction. A proof-theoretical study*, Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1965, 113 p. Reprint: NY, Dover Publ., 2006, 128 p. ISBN: 978-0486446554. Translated to Russian under the title *Natural'nyi vyvod*, Moscow, Lori Publ., 1997, 108 p. ISBN: 5-85582-026-2.
14. Serebryannikov O.F. Normal forms of logical proofs. *Logicheskii vyvod*, 1979, pp. 267–273 (in Russian).
15. Okhotnikov O. About proof-search in intuitionistic natural deduction calculus using partial Skolemization. *J. Phys.: Confer. Ser.*, 2020, vol. 1680, art. 012038, pp. 1–7. doi: 10.1088/1742-6596/1680/1/012038
16. Okhotnikov O. A new sequent calculus for automated proof search. *Appl. Math. Sci.*, 2014, vol. 8, no. 100, pp. 4977–4984. doi: 10.12988/ams.2014.46497
17. Supplementary Materials for the article O. A. Okhotnikov. “On normal deduction proofs in intuitionistic natural predicate calculus”. The online version contains supplementary material available at http://journal.imm.uran.ru/Suppl_inf_2024-v.30-4 (PDF).

Received September 20, 2024

Revised October 15, 2024

Accepted October 21, 2024

Oleg Alievich Okhotnikov, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: oleg.okhotnikov@gmail.com.

Cite this article as: O. A. Okhotnikov. On normal deduction proofs in intuitionistic natural predicate calculus. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 188–206.