ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 4 2024

УДК 512.542

# РЕШЕТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ $p$-РАЗРЕШИМЫХ И $p$-СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП[1]

**А-Мин Лю, Сичэ Ван, В. Г. Сафонов, А. Н. Скиба**

Пусть $G$ — конечная группа и $\mathcal{L}(G)$ — решетка всех подгрупп группы $G$. Подгруппа $M$ группы $G$ называется *модулярной* в $G$, если $M$ — модулярный элемент (в *смысле Куроша*) решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е. (1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и (2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$. Если $A$ — подгруппа группы $G$, то $A_{mG}$ — подгруппа в $A$, порожденная всеми теми ее подгруппами, которые модулярны в $G$. Мы говорим, что подгруппа $A$ является *$N$-модулярной* в $G$ ($N \leq G$), если для некоторой модулярной подгруппы $T$ группы $G$, содержащей $A$, $N$ *изолирует пару* $(T, A_{mG})$, т. е. $N \cap T = N \cap A_{mG}$. Используя эти понятия, мы даем новые характеризации $p$-разрешимых и $p$-сверхразрешимых конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, $p$-разрешимая группа, $p$-сверхразрешимая группа, модулярная подгруппа, $N$-модулярная подгруппа.

**A-Ming Liu, Sizhe Wang, V. G. Safonov, A. N. Skiba. Lattice characterizations of $p$-soluble and $p$-supersoluble finite groups.**

Let $G$ be a finite group, and let $\mathcal{L}(G)$ be the lattice of all subgroups of $G$. A subgroup $M$ of $G$ is called *modular* in $G$ if $M$ is a modular element (in the Kurosh sense) of the lattice $\mathcal{L}(G)$, i.e., if (1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ for all $X \leq G, Z \leq G$ such that $X \leq Z$, and (2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ for all $Y \leq G, Z \leq G$ such that $M \leq Z$. If $A$ is a subgroup of $G$, then $A_{mG}$ is the subgroup of $A$ generated by all its subgroups that are modular in $G$. We say that a subgroup $A$ is *$N$-modular* in $G$ ($N \leq G$) if, for some modular subgroup $T$ of $G$ containing $A$, $N$ *avoids the pair* $(T, A_{mG})$, i.e. $N \cap T = N \cap A_{mG}$. Using these notions, we give new characterizations of $p$-soluble and $p$-supersoluble finite groups.

Keywords: finite group, $p$-soluble group, $p$-supersoluble group, modular subgroup, $N$-modular subgroup.

**MSC:** 20D10, 20D30

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-180-187

## 1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны, и $G$ всегда обозначает группу; $\mathcal{L}(G)$ — решетка всех подгрупп группы $G$. Если $K \leq H \leq G$, то $[H/K]$ обозначает подрешетку в $\mathcal{L}(G)$, состоящую из всех подгрупп $V \leq G$ с условием $K \leq V \leq H$.

Подгруппа $M$ группы $G$ называется *модулярной* в $G$, если $M$ — модулярный элемент (в *смысле Куроша* [1, с. 43]) решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е. (1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и (2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Если $A$ — подгруппа группы $G$, то через $A_{mG}$ мы обозначаем подгруппу в $A$, порожденную всеми теми ее подгруппами, которые модулярны в $G$.

Определение 1. Пусть $A$ и $N$ — подгруппы группы $G$. Тогда мы говорим, что $A$ является *$N$-модулярной* в $G$, если для некоторой модулярной подгруппы $T$ группы $G$, содержащей $A$, подгруппа $N$ *изолирует пару* $(T, A_{mG})$, т. е. $N \cap T = N \cap A_{mG}$.

[1]Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (No. 12101165, No. 12171126) и НФЕНК-БРФФИ (No. 12311530761). Исследования третьего и четвертого авторов выполнены при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (No. Ф24КИ-021).

П р и м е р 1. (i) Всякая нормальная подгруппа модулярна в группе (см. [1, теорема 2.1.3(b)]).

(ii) Если подгруппа $A$ модулярна в $G$, то $A_{mG} = A$, и поэтому, полагая $T = A$, видим, что $A$ является $N$-модулярной в $G$ для любой подгруппы $N \leq G$.

(iii) Пусть $p, q, r, t$ — попарно различные простые числа, где $q$ делит $p - 1$ и $t$ делит $r - 1$. Пусть $H = C_p \rtimes C_q$ — неабелева группа порядка $pq$ и $N = C_r \rtimes C_t$ — неабелева группа порядка $rt$.

Пусть $L = Q \rtimes H$, где $Q$ — простой $\mathbb{F}_qH$-модуль, точный для $H$. Пусть $G = L \times N$, и пусть $S$ — подгруппа порядка $q$ из $Q$ и $A = SC_t$. Подгруппа $C_t$ модулярна в $N$ согласно [1, лемма 5.1.2], и поэтому эта подгруппа модулярна в $G$ ввиду [1, лемма 5.1.8]. Понятно также, что $S < Q$. Кроме того, $S^G = Q$ и $S_G = 1$, и поэтому $S$ не является модулярной в $L$ ввиду леммы 1(5), поскольку $Q/1$ не является циклическим главным фактором группы $L$. Значит, $A$ не модулярна в $G$ в соответствие с леммой 1(3), так как $S = A \cap L$ не модулярна в $L$. Следовательно, $A_{mG} = C_t$.

Покажем, что $A$ является $N$-модулярной в $G$. Действительно, пусть $T = QC_t$. Тогда $A \leq T$ и $T$ модулярна в $G$ ввиду леммы 1(4). Кроме того, имеет место

$$N \cap T = C_t = N \cap A_{mG},$$

и поэтому $A$ $N$-модулярна в $G$.

Основной целью данной работы является доказательство следующих теорем.

**Теорема 1.** *Группа $G$ $p$-разрешима (соответственно, $p$-сверхразрешима) в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия*:

(i) *$G$ имеет нормальную подгруппу $N$ с $p$-разрешимым (соответственно, $p$-сверхразрешимым) фактором $G/N$, и*

(ii) *в $G$ имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_t = G$, где подгруппа $G_i$ $N$-модулярна в $G$ и либо индекс $|G_{i+1} : G_i|$ является $p'$-числом, либо решетка $[G_{i+1}/G_i]$ модулярна (соответственно, дистрибутивна) для всех $i = 0, \ldots, t-1$.*

**Следствие 1.** *Группа $G$ разрешима (соответственно, сверхразрешима) в том и только том случае, когда выполняются следующие два условия*:

(i) *$G$ имеет нормальную подгруппу $N$ с разрешимым (соответственно, сверхразрешимым) фактором $G/N$ и*

(ii) *в $G$ имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_t = G$, где подгруппа $G_i$ $N$-модулярна в $G$, и решетка $[G_{i+1}/G_i]$ модулярна (соответственно, дистрибутивна) для всех $i = 0, \ldots, t-1$.*

**Следствие 2** (Шмидт, [1, теорема 5.3.5]). *Группа $G$ разрешима в том и только том случае, когда в $G$ имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_t = G$, где подгруппа $G_i$ модулярна в $G$ и решетка $[G_{i+1}/G_i]$ модулярна для всех $i = 0, \ldots, t-1$.*

**Следствие 3** (Шмидт, [1, теорема 5.3.7]). *Группа $G$ сверхразрешима в том и только том случае, когда в $G$ имеется цепь подгрупп $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_t = G$, где подгруппа $G_i$ модулярна в $G$ и решетка $[G_{i+1}/G_i]$ дистрибутивна для всех $i = 0, \ldots, t-1$.*

Напомним, что если $M_n < M_{n-1} < \ldots < M_1 < M_0 = G$ (*), где $M_i$ — максимальная подгруппа в $M_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то цепь (*) называется *максимальной цепью группы $G$ длины $n$* и $M_n$ называется *$n$-максимальной* подгруппой группы $G$.

**Теорема 2.** *Группа $G$ $p$-разрешима (соответственно, $p$-сверхразрешима) в том и только том случае, когда каждая 2-максимальная подгруппа группы $G$ является $N$-модулярной в $G$ для некоторой нормальной в $G$ подгруппы $N$ с $p$-разрешимым (соответственно, $p$-сверхразрешимым) фактором $G/N$.*

**Следствие 4.** *Группа $G$ разрешима (соответственно, сверхразрешима) в том и только том случае, когда каждая 2-максимальная подгруппа группы $G$ является $N$-модулярной в $G$ для некоторой нормальной в $G$ подгруппы $N$ с разрешимым (соответственно, сверхразрешимым) фактором $G/N$.*

**Следствие 5** (Шмидт, [2]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа $M$ группы $G$ является модулярной в $G$, то $G$ сверхразрешима.*

**Теорема 3.** *Группа $G$ $p$-разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(i) *$G$ имеет нормальную подгруппу $N$ с $p$-разрешимым фактором $G/N$, и*

(ii) *в каждой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы $G$ длины 3 хотя бы одна из подгрупп $M_3$, $M_2$ или $M_1$ $N$-модулярна в $G$.*

**Следствие 6.** *Группа $G$ разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(i) *$G$ имеет нормальную подгруппу $N$ с разрешимым фактором $G/N$, и*

(ii) *в каждой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы $G$ длины 3 хотя бы одна из подгрупп $M_3$, $M_2$ или $M_1$ $N$-модулярна в $G$.*

**Следствие 7** (Шмидт, [2]). *Если каждая 3-максимальная подгруппа группы $G$ является модулярной в $G$, то $G$ разрешима.*

## 2. Доказательство теоремы 1

В наших доказательствах мы будем базироваться на следующих известных свойствах модулярных подгрупп.

**Лемма 1** [1, с. 201]. *Пусть $R, A, E$ — подгруппы в $G$, где $R \trianglelefteq G$ и $A$ модулярна в $G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *$AR/R$ модулярна в $G/R$.*

(2) *Если $U/R$ — модулярная подгруппа в $G/R$, то $U$ — модулярная подгруппа в $G$.*

(3) *$A \cap E$ — модулярная подгруппа в $E$.*

(4) *Если $E$ — модулярная подгруппа в $G$, то $\langle A, E\rangle$ — модулярная подгруппа в $G$.*

(5) *Если $H/K$ — главный фактор $G$ и $A_G \leq K < H \leq A^G$, то $H/K$ является циклическим* (см. [1, теорема 5.2.5]).

(6) *Решетки $[\langle A, E\rangle/A]$ и $[E/(E \cap A)]$ изоморфны.*

**Лемма 2.** *Пусть $R \leq A \leq E \leq G$ и $R \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *$A_{mG}$ модулярна в $G$.*

(2) *$A_{mG} \leq E_{mE}$.*

(3) *$(A/R)_{m(G/R)} = A_{mG}/R$.*

Доказательство. (1) Это утверждение является следствием леммы 1(4).

(2) Это утверждение является следствием свойства (1) и леммы 1(3).

(3) Ввиду свойства (1) и леммы 1(1) $A_{mG}/R \leq (A/R)_{m(G/R)}$. Пусть теперь $U/R \leq A/R$, где $U/R$ модулярна в $G/R$. Тогда $U \leq A$ и $U$ — модулярная подгруппа в $G$ по лемме 1(2). Значит, $U \leq A_{mG}$, и поэтому $(A/R)_{m(G/R)} \leq A_{mG}/R \leq (A/R)_{m(G/R)}$.

Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть $A$ и $N$ — подгруппы $G$ и для минимальной нормальной подгруппы $R$ группы $G$ либо $R \leq N$, либо $R \leq A$. Если $A$ $N$-модулярна в $G$, то $AR/R$ является $NR/R$-модулярной в $G/R$.*

Доказательство. Пусть $A \leq T$, где $T$ модулярна в $G$ и $N \cap T = N \cap A_{mG}$. Тогда $AR/R \leq TR/R$, где $TR/R$ модулярна в $G/R$ по лемме 1(1). Покажем, что

$$NR/R \cap TR/R = NR/R \cap (AR/R)_{m(G/R)}. \tag{2.1}$$

Предположим, что $R \leq N$. Тогда

$$(NR/R) \cap (TR/R) = (N/R) \cap (TR/R) = (N \cap TR)/R = R(N \cap T)/R = R(N \cap A_{mG})/R.$$

С другой стороны, $R(N \cap A_{mG})/R \leq RA_{mG}/R \leq (RA)_{mG}/R = (RA/R)_{G/R}$ по лемме 2(3). Значит, $N/R \cap TR/R \leq N/R \cap (AR/R)_{m(G/R)} \leq N/R \cap TR/R$, и поэтому равенство (2.1) выполняется.

Аналогично показывается, что равенство (2.1) справедливо и в случае, когда $R \leq A$. Таким образом, $AR/R$ является $NR/R$-модулярной в $G/R$.

Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $A \leq E$ и $L \leq N \leq G$. Если $A$ $N$-модулярна в $G$, то $A$ $L$-модулярна в $G$ и $(N \cap E)$-модулярна в $E$.*

Доказательство. Пусть $A \leq T$, где $T$ модулярна в $G$ и $N \cap T = N \cap A_{mG}$. Тогда

$$L \cap T = L \cap N \cap T = L \cap N \cap A_{mG} = L \cap A_{mG},$$

т. е. $A$ $L$-модулярна в $G$ и, кроме того, $A \leq T \cap E$ и $T \cap E$ модулярна в $E$ по лемме 1(3). Покажем, что

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) = (N \cap E) \cap A_{mE}. \tag{2.2}$$

Действительно, из $N \cap T = N \cap A_{mG}$ следует, что $(N \cap E) \cap (T \cap E) = (N \cap E) \cap A_{mG}$, где $(N \cap E) \cap A_{mG} \leq (N \cap E) \cap A_{mE}$ по лемме 2(2), и поэтому

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) \leq (N \cap E) \cap A_{mE} \leq (N \cap E) \cap (T \cap E).$$

Значит, равенство (2.2) справедливо. Следовательно, $A$ $(N \cap E)$-модулярна в $E$.

Лемма доказана.

Напомним, что подгруппа $A$ группы $G$ называется $\mathfrak{U}$-нормальной в $G$ [3], если цикличен каждый главный фактор $H/K$ группы $G$ с условием $A_G \leq K \leq H \leq A^G$.

Следующая лемма является следствием теорем 1.3 и 1.4 работы [3].

**Лемма 5.** *Если $A$ и $B$ — $\mathfrak{U}$-нормальные подгруппы $G$, то пересечение $A \cap B$ также является $\mathfrak{U}$-нормальным в $G$.*

Доказательство теоремы 1. Если $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_t = G$ — главный ряд $p$-разрешимой (соответственно, $p$-сверхразрешимой) группы $G$, то условия (i) и (ii), очевидно, выполнены для $G_i$ и $[G_{i+1}/G_i]$.

Покажем теперь, что если условия (i) и (ii) выполнены в $G$, то $G$ является $p$-разрешимой (соответственно, $p$-сверхразрешимой) группой. Предположим, что это не так, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Тогда $N \neq 1$. Пусть $R$ — минимальная подгруппа $G$, содержащаяся в $N$. Тогда для некоторого $i$ имеет место $R \nleq G_i$ и $R \leq G_{i+1}$.

(1) $G/R$ $p$-разрешима (соответственно, $p$-сверхразрешима) и подгруппа $R$ не является абелевой (соответственно, циклической) $p'$-группой.

В $G/R$ рассмотрим ряд $G_0R/R \leq G_1R/R \leq \cdots \leq G_tR/R = G/R$. Прежде заметим, что $G_jR/R$ является $N/R$-модулярной в $G/R$ для всех $j = 0, \ldots, t-1$ ввиду леммы 3, где $(G/R)/(N/R) \simeq G/N$ $p$-разрешима (соответственно, $p$-сверхразрешима). Предположим, что индекс $|G_{j+1}R/R : /G_iR/R|$ не является $p'$-числом. Тогда, поскольку

$$|G_{j+1}R/R : /G_jR/R| = |G_{j+1}R : /G_jR)| = |(G_{j+1} : /G_j| : |(G_{j+1} \cap R : /G_j \cap R|,$$

то индекс $|(G_{j+1} : /G_j|$ также не является $p'$-числом, и поэтому решетка $[G_{j+1}/G_j]$ является модулярной (соответственно, дистрибутивной).

Подгруппа $R$, очевидно, является модулярной в $G$ (см. пример 1(i)), и поэтому решетки $[G_{j+1}/G_j]$ и $[(G_{j+1}R/R)/(G_jR/R)]$ изоморфны ввиду леммы 1(6). Таким образом, решетка $[(G_{j+1}R/R)/(G_jR/R)]$ является модулярной (соответственно, дистрибутивной) для всех $j = 0, \dots, t-1$. Следовательно, условия (i) и (ii) выполнены в $G/R$, и поэтому $G/R$ является $p$-разрешимой (соответственно, $p$-сверхразрешимой) группой по выбору $G$. Более того, выбор $G$ означает, что подгруппа $R$ не является абелевой (соответственно, циклической) $p'$-группой.

(2) Если $V$ — $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа в $G$ и $V \leq R$, то либо $V = 1$, либо $V = R$.

Предположим, что $1 < V < R$. Тогда $V_G = 1$ и $V^G = R$ ввиду минимальности $R$. Значит, $R$ — циклическая группа, что противоречит утверждению (1). Таким образом, имеем (2).

(3) $G_j$ $R$-модулярна в $G$ для всех $j$. Поскольку $R \leq N$, то это вытекает из леммы 4.

*Заключительное противоречие.* Пусть $G_i \leq T$, где $T$ — модулярная в $G$ подгруппа и $R \cap T = R \cap (G_i)_{mG}$. Предположим, что $V := R \cap (G_i)_{mG} \neq 1$. С учетом лемм 1(5) и 2(1) $(G_i)_{mG}$ — $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа в $G$. Следовательно, $V$ — $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа в $G$ по лемме 5. Но тогда $V = R$ ввиду утверждения (2), поскольку $V \neq 1$. Следовательно, $R \leq (G_i)_{mG} \leq G_i$, что противоречит определению индекса i. Таким образом, $V = 1$, и поэтому

$$R \cap G_i \leq R \cap T = R \cap (G_i)_{mG} = 1.$$

Значит, решетки $[R/1] = [R/(R \cap G_i)]$ и $[G_iR/G_i]$ изоморфны в силу леммы 1(6), так как каждая нормальная подгруппа является модулярной в группе ввиду примера 1(i). Понятно также, что $[G_iR/G_i]$ является подрешеткой в $[G_{i+1}/G_i]$.

Таким образом, если решетка $[G_{i+1}/G_i]$ модулярна, то модулярна решетка $[R/1]$, что влечет разрешимость группы $R$ по теореме 2.4.4 из [1]. И в этом случае группа $G$ разрешима ввиду утверждения (1). Если же решетка $[G_{i+1}/G_i]$ дистрибутивна, то дистрибутивна и решетка $[R/1]$, что влечет цикличность группы $R$ по теореме 1.2.3 [1]. И в этом случае группа $G$ сверхразрешима снова в силу утверждения (1). В обоих случаях получаем противоречие с выбором группы $G$.

Теорема доказана.

## 3. Доказательство теорем 2 и 3

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Достаточно лишь доказать, что если каждая 2-максимальная подгруппа группы $G$ является $N$-модулярной в $G$ для некоторой нормальной в $G$ подгруппы $N$ с $p$-разрешимым (соответственно, $p$-сверхразрешимым) фактором $G/N$, то $G$ $p$-разрешима (соответственно, $p$-сверхразрешима).

Предположим, что это неверно, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Тогда $N \neq 1$.

Если в $G/R$ нет 2-максимальных подгрупп, то $|G/R|$ — простое число, и поэтому $G/R$ $p$-сверхразрешима. Если же в $G/R$ имеются 2-максимальные подгруппы, то гипотеза сохраняется на $G/R$ для любой минимальной нормальной подгруппы $R$ группы $G$ по лемме 3. Поэтому $G/R$ $p$-разрешима (соответственно, $p$-сверхразрешима) ввиду выбора $G$. Следовательно, $R$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$, $R \leq N$ и $R \nleq \Phi(G)$. Понятно также, что $R$ не является $p'$-группой и циклической группой.

Покажем, что $M_{mG} = 1$ для любой максимальной в $G$ подгруппы $M$, не содержащей $R$. Прежде заметим, что $(M_{mG})_G \leq M_G = 1$, и поэтому каждый главный фактор $G$ ниже $(M_{mG})^G$ цикличен ввиду лемм 1(5) и 2(1). Если $(M_{mG})^G \neq 1$, то $R \leq (M_{mG})^G$, и, значит, $R$ является циклической группой. Это противоречие показывает, что $(M_{mG})^G = 1$, и поэтому $M_{mG} = 1$.

Пусть теперь $L$ — произвольная максимальная подгруппа в $M$, и пусть $T$ — модулярная в $G$ подгруппа, где $L \leq T$ и $R \cap T = R \cap L_{mG} = 1$. Тогда $T_G = 1$. Предположим, что $T^G \neq 1$.

Тогда $R \leq T^G$, и, значит, $|R| = p$ по лемме 1(5). Это противоречие показывает, что $T^G = 1$, и поэтому $L = 1$. Следовательно, $|M| = q$ для некоторого простого $q$. Таким образом, группа $G$ разрешима, и поэтому $|R| = p^n$, где $n > 1$.

Пусть $V$ — максимальная подгруппа группы $R$. Тогда $V$ — 2-максимальная подгруппа группы $G$. Пусть $T$ — модулярная в $G$ подгруппа, где $V \leq T$, и $R \cap T = R \cap V_{mG} = V_{mG}$, где $(V_{mG})_G = 1$ и $(V_{mG})^G \leq R$. Следовательно, $(V_{mG})^G = 1$ ввиду лемм 1(5) и 2(1), поскольку $|R| > p$. Следовательно, $V = 1$ и $|R| = p$; противоречие.

Теорема доказана.

Следующая лемма может быть доказана аналогично теореме 2.

**Лемма 6.** *Группа $G$ $p$-разрешима в том и только том случае, когда каждая максимальная подгруппа группы $G$ является $N$-модулярной в $G$ для некоторой нормальной в $G$ подгруппы $N$ с $p$-разрешимым фактором $G/N$.*

Доказательство теоремы 3. Достаточно показать, что если в каждой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы $G$ длины 3 хотя бы одна из подгрупп $M_3$, $M_2$ или $M_1$ $N$-модулярна в $G$, то $G$ $p$-разрешима. Предположим, что это неверно, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Тогда $N \neq 1$.

Ввиду теоремы Томпсона — Фейта о разрешимости групп нечетного порядка достаточно рассмотреть случай, когда $p > 2$.

(1) $G/R$ $p$-разрешима для любой минимальной нормальной подгруппы $R$ группы $G$. Следовательно, $R$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$, $R$ — неабелева группа и $R \leq N$. В частности, каждая $N$-модулярная подгруппа $G$ является $R$-модулярной в $G$ и $R$ не является $p'$-группой.

Понятно, что если в $G/R$ нет максимальных цепей длины 3, то $G/R$ разрешима. Пусть теперь $M_3/R < M_2/R < M_1/R < M_0/R = G/R$ — произвольная максимальная цепь длины 3 в $G/R$. Тогда $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ — максимальная цепь длины 3 в $G$, и поэтому для некоторого $i > 0$ подгруппа $M_i$ $N$-модулярна в $G$. Тогда $M_i/R$ $(NR/R)$-модулярна в $G/R$ по лемме 3, где $(G/R)/(NR/R) \simeq G/NR \simeq (G/N)/(NR/R)$ $p$-разрешима. Значит, гипотеза справедлива для $G/R$. Таким образом, имеем (1) по выбору $G$.

Пусть $R_2$ — силовская 2-подгруппа $R$ и $R_p$ — силовская $p$-подгруппа $R$. Лемма Фраттини подразумевает, что в $G$ существуют максимальные подгруппы $L$ и $M$ такие, что $R_2 \leq G_2 \leq N_G(R_2) \leq L$, $R_p \leq G_p \leq N_G(R_p) \leq M$ и $G = RL = RM$ для некоторых силовской 2-подгруппы $G_2$ и силовской $p$-подгруппы $G_p$ группы $G$. Кроме того, $L_G = 1 = M_G$ по утверждению (1).

(2) $L$ и $M$ не являются $R$-модулярными в $G$, и $L_{mG} = 1 = M_{mG}$. В частности, $N \neq G$.

Предположим, например, что $L_{mG} \neq 1$ и $L$ $R$-модулярна в $G$. Пусть $L \leq T \leq G$, где $T$ модулярна в $G$ и $R \cap T = R \cap L_{mG}$. Тогда $(L_{mG})_G \leq L_G = 1$, и поэтому каждый главный фактор $G$ ниже $(L_{mG})^G$ цикличен ввиду лемм 1(5) и 2(1), что противоречит утверждению (1). Таким образом, $L_{mG} = 1$, и поэтому $R \cap T = R \cap L_{mG} = 1$. Следовательно, $R \cap L = R \cap T = 1$, что невозможно, так как $1 < R_2 \leq R \cap L$. Значит, $L$ и $M$ не являются $R$-модулярными в $G$ и $L_{mG} = 1 = M_{mG}$.

Предположим, что $N = G$. Тогда $L = G \cap L = G \cap T = T$ — модулярная в $G$ подгруппа, и поэтому $L$ $R$-модулярна в $G$; противоречие. Таким образом, $N < G$.

(3) $R < G$ и $|G : R|$ не является простым числом.

В силу утверждений (1) и (2) $R < G$.

Предположим, что $|G : R|$ является простым числом. В этом случае $R = N$, и с учетом [4, IV, 2.8] имеет место $|R_2| > 2$, поскольку $R$ неабелева по утверждению (1). Следовательно, для максимальной подгруппы $V$ группы $R_2$ имеем $V \neq 1$.

Покажем, что $G$ имеет максимальную цепь $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ длиной 3, где $M_1 = L$ и $W \leq M_3$ для некоторой неединичной подгруппы $W$ группы $V$. Действительно, если $R_2 < L$, то это очевидно. С другой стороны, если $R_2 = L$, то $|R_2| > 2^2$ по [4, IV, 7.4], и поэтому для любой максимальной подгруппы $W$ группы $V$ имеем $1 < W < V < R_2 = L < G$.

Существует $i > 0$ такое, что $M_i$ $R$-модулярна в $G$ ввиду утверждения (1). Пусть $M_i \leq T \leq G$, где $T$ модулярна в $G$ и $R \cap T = R \cap (M_i)_{mG}$. Тогда $(L_{mG})_G \leq L_G = 1$, и, значит,

$$1 < W \leq R \cap T = R \cap (M_i)_{mG} = R \cap 1 = 1$$

по утверждению (2); противоречие. Следовательно, имеет место (3).

(4) $D := R \cap M$ ненильпотентна.

Предположим, что $D$ нильпотентна. В этом случае $R_p$ является нормальной в $M$. Следовательно, $Z(J(R_p))$ нормален в $M$. Поскольку $M_G = 1$, то $N_G(Z(J(R_p))) = M$, и поэтому $N_R(Z(J(R_p))) = D$ нильпотентен. Отсюда следует, что $R$ $p$-нильпотентна по теореме Глаубермана — Томпсона о нормальных $p$-дополнениях. Но тогда $R$ — $p$-группа; противоречие. Значит, верно (4).

(5) $D < V$ для некоторой максимальной подгруппы $V$ группы $M$ (поскольку $D$ нормальна в $M$, это следует из утверждения (3)).

(6) $V$ не $R$-модулярна в $G$.

Предположим, что $V$ $R$-модулярна в $G$, и пусть $V \leq U \leq G$, где $U$ модулярна в $G$ и $R \cap U = R \cap V_{mG}$.

Тогда, поскольку $V_{mG} = 1$ ввиду (2), то $1 < D \leq R \cap U = R \cap V_{mG} = 1$; противоречие. Таким образом, имеет место (6).

(7) $D \nleq \Phi(V)$. Следовательно, для некоторой максимальной подгруппы $S$ группы $V$ имеем $V = DS$ (это следует из утверждения (4)).

(8) $S \cap D = 1$, поэтому $D$ — минимальная нормальная подгруппа в $V$ и $V = D \rtimes S$.

Пусть $A = S \cap D$. Ясно, что $A < R$. Допустим, что $A \neq 1$. В силу (2) и (6) подгруппа $S$ $R$-модулярна в $G$, т. е. для некоторой модулярной подгруппы $U$ из $G$ имеет место $S \leq U$ и

$$1 < A < R \cap U = R \cap S_{mG} \leq R \cap M_{mG} = 1;$$

противоречие. Значит, $S \cap D = 1$, поэтому $V = D \rtimes S$, где $S$ — максимальная подгруппа в $V$. Следовательно, $D$ — минимальная нормальная подгруппа в $V$.

(9) $V$ $p$-разрешима (это вытекает из условия теоремы, лемм 4, 6 и пп. (2) и (6)).

*Заключительное противоречие.* Из утверждений (8) и (9) следует, что $|T : S| = |D| = p^n$ для некоторого $n$, так как $p$ делит $|D|$. Значит, $D$ нильпотентна вопреки утверждению (4).

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Schmidt R.** Subgroup lattices of groups. Berlin; Walter de Gruyter, 1994. 564 p.
2. **Schmidt R.** Endliche Gruppen mit vielen modularen Untergruppen // Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1969. Vol. 34, iss. 1-2. P. 115–125.
3. **Skiba A.N.** On sublattices of the subgroup lattice defined byformation Fitting sets // J. Algebra. 2020. Vol. 550. P. 69–85.
4. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1967. 796 p.

Поступила 13.05.2024
После доработки 12.06.2024
Принята к публикации 17.06.2024

А-Мин Лю
канд. физ.-мат. наук, доцент
Школа математики и статистики, Хайнаньский университет, Хайкоу, КНР

e-mail: amliu@hainanu.edu.cn

Сичэ Ван
аспирант
Школа математики и статистики, Хайнаньский университет, Хайкоу, КНР;
Школа математики, Тяньцзиньский университет, Тяньцзинь, КНР
e-mail: 169518909@QQ.com

Сафонов Василий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь
e-mail: vgsafonov@im.bas-net.by

Скиба Александр Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
факультет математики и технологий программирования
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель, Беларусь;
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь
e-mail:alexander.skiba49@gmail.com

**REFERENCES**

1. Schmidt R. *Subgroup Lattices of Groups*, Berlin, Walter de Gruyter, 1994, 564 p.
2. Schmidt R. Endliche Gruppen mit vielen modularen Untergruppen. *Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg*, 1969, vol. 34, iss. 1-2, pp. 115–125.
3. Skiba A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined byformation Fitting sets. *J. Algebra*, 2020, vol. 550, pp. 69–85.
4. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1967, 796 p.

Received May 13, 2024
Revised June 12, 2024
Accepted June 17, 2024

**Funding Agency:** This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (project nos. 12101165 and 12171126) as well as jointly by the National Natural Science Foundation of China and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. 12311530761). The research of V.G. Safonov and A.N. Skiba was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. F24KI-021).

*A-Ming Liu,* Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assistant professor, School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou, Hainan, 570228 P.R. China, e-mail: amliu@hainanu.edu.cn .

*Sizhe Wang,* graduate student, School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou, Hainan, 570228 P.R. China; School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin, 300072 China, e-mail: 169518909@QQ.com .

*Vasily Grigorievich Safonov,* Dr. Phys.-Math. Sci., Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: vgsafonov@im.bas-net.by .

*Alexander Nikolaevich Skiba,* Dr. Phys.-Math. Sci., Professor, Department of Mathematics and Programming Technologies, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019 Belarus; Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: alexander.skiba49@gmail.com .

Cite this article as: A-Ming Liu, Sizhe Wang, V. G. Safonov, A. N. Skiba. Lattice characterizations of $p$-soluble and $p$-supersoluble finite groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 180–187 .