

УДК 517.9

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННОЙ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛЕЙ

А. И. Короткий, И. А. Цепелев

Рассмотрена экстремальная (вариационная) задача на минимум некоторого функционала невязки. Экстремальная задача имеет отношение к обратной задаче нахождения коэффициента температуропроводности в модели стационарной диффузии-адвекции-реакции. Функционал невязки представляет собой разность в некоторой метрике между моделируемым и наблюдаемым состояниями модели. Исследуются различные аспекты вариационной задачи. Показано, что множество точек минимума в вариационной задаче может оказаться пустым. Приведены также некоторые условия разрешимости вариационной задачи, когда множество точек минимума непусто. Указаны некоторые условия единственности минимизирующего элемента. Сформулированы понятия слабой и сильной корректности экстремальной задачи. Приведены примеры задач, в которых отсутствуют та и другая корректности, имеет место слабая, но не сильная корректность, указаны некоторые условия сильной корректности. Сформулировано необходимое условие минимума в форме интегрального и локального принципа максимума.

Ключевые слова: уравнение диффузии-адвекции-реакции, коэффициент температуропроводности, обратная задача, функционал невязки, экстремальная задача, вариационный метод, точка минимума.

A. I. Korotkii, I. A. Tsepelev. On the correctness of one extreme problem related to inverse coefficient problems.

An extremal (variational) problem on the minimum of a certain residual functional is considered. The extremal problem is related to the inverse problem of finding the thermal diffusivity coefficient in the stationary diffusion–advection–reaction model. The residual functional is the difference in some metric between the simulated and observed state of the model. Various aspects of the variational problem are studied. It is shown that the set of minimum points in a variational problem may turn out to be empty. Some conditions for the solvability of the variational problem are also given when the set of minimum points is nonempty. Some conditions for the uniqueness of a minimizing element are indicated. The concepts of weak and strong correctness of an extremal problem are formulated. Examples of problems are given in which both weak and strong correctness is absent, or there is weak correctness but no strong correctness. Some conditions of strong correctness for extreme problem are specified. A necessary minimum condition is formulated in the form of the integral and local maximum principle.

Keywords: diffusion–advection–reaction equation, thermal diffusivity coefficient, inverse problem, residual functional, extremal problem, variational method, minimum point.

MSC: 35Q30, 76D05, 76T10, 76T15

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-170-179

Введение

Решение многих обратных задач математической физики и анализа сводится к минимизации некоторых функционалов невязки, представляющих собой рассогласование между результатами реальных наблюдений (измерений) за какими-либо характеристиками объекта (процесса) и результатами моделирования соответствующих характеристик [1–4]. В статье рассматривается стационарная модель диффузии-адвекции-реакции [5; 6]. Для этой модели рассматривается обратная задача, состоящая в восстановлении (нахождении) коэффициента температуропроводности по результатам наблюдения (измерения) за состоянием модели. Решение обратной задачи сводится к экстремальной (вариационной) задаче на минимум подходящего функционала невязки. В статье изучаются некоторые аспекты этой экстремальной задачи. Построен пример отсутствия точек минимума в экстремальной задаче (точная нижняя грань не достигается). Приведены также некоторые условия разрешимости вариационной задачи, при

которых множество точек минимума непусто (или состоит из одного элемента). Сформулированы понятия слабой и сильной корректности экстремальной задачи. Приведены примеры задач, в которых отсутствуют одна и другая корректности; имеет место слабая, но не сильная корректность; указаны некоторые условия сильной корректности экстремальной задачи. Сформулировано необходимое условие минимума в вариационной задаче в форме интегрального и локального принципов максимума. В статье продолжаются совместные с А. Т. Исмаил-Заде и с Ю. В. Стародубцевой исследования авторов 2022–2024 гг., опубликованные в журнале (см., например, [7] и список литературы в ней).

1. Постановка задачи

В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, содержащей неоднородную теплопроводную сплошную среду (жидкость), рассматривается стационарное распределение температуры. Математическая модель распределения температуры в области Ω представляет собой краевую задачу для уравнения диффузии-адвекции-реакции [5; 6; 8]

$$\operatorname{div}(k \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla T) - qT = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial \Omega, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — точка пространства $\mathbb{R}^m$; $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$ — вектор скорости движения среды в точках $\mathbf{x}$ области Ω ; $T = T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ — температура среды в Ω ; $k = k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ — коэффициент температуропроводности в Ω ; $q = q(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ — коэффициент поглощения в Ω ; $f = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ — интенсивность образования или стока тепла в Ω .

Задача состоит в том, чтобы по некоторым измерениям (наблюдениям) за состоянием модели в области Ω определить априори не известный коэффициент температуропроводности k в области Ω . Эту задачу будем называть обратной задачей. Задачу, состоящую в нахождении распределения температуры T в области Ω в результате решения краевой задачи (1.1), (1.2) при всех известных и заданных параметрах модели, будем называть прямой задачей.

Уточним постановки прямой и обратной задач. Будем считать, что Ω является ограниченной строго липшицевой областью в $\mathbb{R}^m$ [9, с. 212, 30]. Далее будут использоваться пространства Лебега $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \geq 1$, $l \geq 1$, [8–12], а также их векторные аналоги $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$, нормы в которых определяются обычным образом [8, с. 41; 9, с. 467]. Будут использоваться также гильбертовы пространства [8, с. 41, 112; 9, с. 467; 10, с. 62]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega\},$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Пусть для определенности

$$k \in K, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad q \in Q, \quad f \in L_2(\Omega);$$

$$K = \{k \in L_\infty(\Omega) : 0 < \mu_1 \leq k(\mathbf{x}) \leq \mu_2, \mathbf{x} \in \Omega\}, \quad \mu_1 = \operatorname{const} \leq \mu_2 = \operatorname{const};$$

$$Q = \{q \in L_\infty(\Omega) : 0 \leq q(\mathbf{x}) \leq \mu_3, \mathbf{x} \in \Omega\}, \quad \mu_3 = \operatorname{const} \geq 0.$$

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1), (1.2) она имеет единственное обобщенное решение из пространства $H_0^1(\Omega)$ [8–11]. Поскольку далее будет важна зависимость решения прямой задачи от параметра $k \in K$, то это решение будем обозначать символом $T = T[k]$.

Решение обратной задачи можно свести к решению вариационной задачи

$$J(k) \rightarrow \min : k \in K, \quad (1.3)$$

$$J(k) = \|T[k] - T_*\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (T[k] - T_*)^2 dx, \quad (1.4)$$

где T_* — заданная функция, характеризующая результаты наблюдения за температурным полем модели в области Ω .

Пусть

$$J_* = \inf \{J(k) : k \in K\}, \quad K_* = \{k \in K : J(k) = J_*\}.$$

Ясно, что $J_* \geq 0$. Всякий коэффициент $k \in K$, удовлетворяющий условию $J(k) = J_*$, можно считать решением обратной задачи.

Исследуем некоторые свойства экстремальной (вариационной) задачи (1.3).

2. О разрешимости экстремальной задачи

Вариационная задача (1.3) не всегда имеет решение. Возможны случаи, когда $K_* = \emptyset$. Приведем соответствующий пример.

Рассмотрим частный случай модели (1.1), в которой $u = 0$, $q = 0$, и пусть $m = 2$; $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$; $\mu_1 = 1 - \sqrt{2}/2$; $\mu_2 = 1 + \sqrt{2}/2$; $T_* = 0$, если $r \triangleq \|x\| \geq 1$, $T_* = (r^2 - 1)^2$, если $r < 1$; $f = 2^{-1} \partial^2 T_*/\partial x_1^2 + \partial^2 T_*/\partial x_2^2$.

Теорема 2.1. В условиях примера $K_* = \emptyset$.

Доказательство. Докажем сначала, что $J_* = 0$. Предварительно установим равенство нулю точной нижней грани для случая, когда минимизация ведется по подмножеству $K_1 \subset K$, где $K_1 = \{k \in K : k(x) = k(x_1), x = (x_1, x_2) \in \Omega\}$. Обозначим $J_{1*} = \inf \{J(k) : k \in K_1\}$, $K_{1*} = \{k \in K_1 : J(k) = J_{1*}\}$. Построим последовательность элементов $\{k_s\} \subset K_1$ такую, что $k_s \rightarrow 1$ слабо в $L_2(-2, 2)$, $k_s^{-1} \rightarrow 2$ слабо в $L_2(-2, 2)$ при $s \rightarrow \infty$. Заметим, что из слабых в $L_2(-2, 2)$ сходимостей $k_s \rightarrow k_0$ и $k_s^{-1} \rightarrow k_*$, вообще говоря, не следует равенство $k_* = k_0^{-1}$. Например, подойдет последовательность кусочно-постоянных функций: $k_s(x_1) = \mu_2$, если $-2 + (4i/s) < x_1 \leq -2 + 2(2i+1)/s$; $k_s(x_1) = \mu_1$, если $-2 + 2(2i+1)/s < x_1 \leq -2 + 4(i+1)/s$, $i = 0, \dots, s-1$. Можно показать, что $T[k_s] \rightarrow T_0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, где T_0 — обобщенное решение краевой задачи

$$2^{-1} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = f, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$T = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.2)$$

В силу единственности решения краевой задачи (2.1), (2.2) имеем $T_0 = T_*$. Отсюда следует, что $J_{1*} = 0$. Действительно,

$$0 \leq J_{1*} \leq \lim_{s \rightarrow \infty} J(k_s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \|T[k_s] - T_*\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0 \implies J_{1*} = 0.$$

Далее имеем

$$0 \leq J_* \leq J_{1*} = 0 \implies J_* = 0.$$

Докажем теперь, что $K_* = \emptyset$. Предположим, что существует $k \in K$, при котором $J(k) = 0$, или, другими словами, $T(k) = T_*$. Таким образом, T_* является обобщенным решением краевых задач (1.1), (1.2) и (2.1), (2.2). Записав соответствующие интегральные тождества, определяющие обобщенные решения, в первом и втором случаях и вычитая одно тождество из другого, получим, что для любой функции $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (k-1) \left(\frac{\partial T_*}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial T_*}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial T_*}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx.$$

Однако на самом деле это равенство выполняется не при всех $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Действительно, при $\varphi = \varphi(\mathbf{x}) = \eta(r) \cos(2\vartheta)$, где η — достаточно гладкая функция такая, что $\eta(r) = 1$, если $r \leq 1$; $\eta(r) = 0$, если $r \geq 2$; $\vartheta = \arccos(x_1/r)$, имеем

$$0 = 2 \int_{B_1[0]} (1 - r^2) \sin^2(2\vartheta) d\mathbf{x} > 0;$$

интегрирование осуществляется по замкнутому кругу (замкнутому шару) $B_1[0]$ из $\mathbb{R}^2$ единичного радиуса с центром в начале координат (в нуле).

Полученное противоречие доказывает, что $K_* = \emptyset$.

Теорема доказана.

Сформулируем некоторые утверждения о разрешимости экстремальной задачи.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(k) \rightarrow \min: k \in V, \quad J_V = \inf \{J(k): k \in V\}, \quad (2.3)$$

где V — компактное в $L_2(\Omega)$ подмножество множества K .

Теорема 2.2. Множество $V_* = \{k \in V: J(k) = J_V\}$ непусто и компактно в $L_2(\Omega)$.

Доказательство следует из теоремы Вейерштрасса и непрерывности функционала J на V в $L_2(\Omega)$.

Теорема 2.3. Существует плотное подмножество $W \subset L_2(\Omega)$ такое, что для каждого $w \in W$ и любых $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ функционал $I(k) = J(k) + \alpha \|k - w\|_{L_2(\Omega)}^\beta$ достигает точной нижней грани на K . Если $\beta > 1$, то минимизирующий элемент единственный.

Доказательство теоремы следует из результатов работы [13].

3. О единственности решения экстремальной задачи

Рассмотрим вопрос о единственности точки минимума в задаче (1.3).

Решение задачи (1.3) может оказаться неединственным. Действительно, пусть $f = 0$. Тогда для любого $k \in K$ имеем $T[k] = 0$. Отсюда следует, что $K_* = K$, т.е. точек минимума в этом случае бесконечно много.

Теорема 3.1. Если $J_* = 0$, то две точки минимума $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$ экстремальной задачи (1.3) совпадают почти всюду на множестве $\Omega^* = \{\mathbf{x} \in \Omega: \nabla T_*(\mathbf{x}) \neq 0\}$. Если $J_* = 0$, $k^{(1)} \in K_{1*}$, $k^{(2)} \in K_{1*}$, $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, то $k^{(1)}(x_1) = k^{(2)}(x_1)$ для почти всех $x_1 \in S$, где

$$S = \left\{ x_1 \in (0, l_1): \int_0^{l_2} \nabla T_*(x_1, x_2) dx_2 \neq 0 \right\}.$$

Доказательство. Допустим, что задача (1.3) имеет две точки минимума $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$. Тогда из равенств

$$J(k^{(1)}) = \|T[k^{(1)}] - T_*\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0 \quad \text{и} \quad J(k^{(2)}) = \|T[k^{(2)}] - T_*\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0$$

следует, что $T[k^{(1)}] = T_* = T[k^{(2)}]$. Запишем интегральные равенства, определяющие обобщенные решения $T[k^{(1)}]$ и $T[k^{(2)}]$, а затем вычтем одно из другого. В результате получим

$$\int_{\Omega} (k^{(1)} - k^{(2)}) (\nabla T_*, \nabla g) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall g \in H_0^1(\Omega) \implies$$

$$(k^{(1)}(x) - k^{(2)}(x)) \nabla T_*(x) = 0, \text{ п. в. } x \in \Omega, \implies k^{(1)}(x) = k^{(2)}(x), \text{ п. в. } x \in \Omega^*.$$

Пусть теперь $J_* = 0$, $k^{(1)} \in K_{1*}$, $k^{(2)} \in K_{1*}$, $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$. Рассуждая, как в предыдущем случае, получаем

$$\int_{\Omega} (k^{(1)} - k^{(2)}) (\nabla T_*, \nabla g) dx = 0 \quad \forall g \in H_0^1(\Omega) \implies$$

$$(k^{(1)}(x_1) - k^{(2)}(x_1)) \nabla T_*(x_1, x_2) = 0, \text{ п. в. } x = (x_1, x_2) \in \Omega, \implies k^{(1)}(x_1) = k^{(2)}(x_1), \text{ п. в. } x_1 \in S.$$

Теорема доказана.

4. О корректности экстремальной задачи

Экстремальную задачу (1.3) назовем сильно (слабо) корректной, если $K_* \neq \emptyset$ и любая минимизирующая последовательность сильно (слабо) в $L_2(\Omega)$ сходится к множеству K_* [1; 14].

Из теоремы 2.1 следует, что задача (1.3) может быть некорректной ни в сильном, ни в слабом смыслах, поскольку в условиях задачи возможны случаи $K_* = \emptyset$. Ясно, что из сильной корректности следует слабая корректность. Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, рассмотрим следующий пример.

Пусть $u = 0$; $q = 0$; $m = 2$; $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$; $\mu_1 = \sqrt{2} - 1$; $\mu_2 = \sqrt{2} + 1$; $k(x) = k(x_1)$; $f = f^* \sin(x_2)$, $f^* = -\sqrt{2}$.

Решение краевой задачи (1.1), (1.2) тогда можно представить в виде

$$T = Z(x_1) \sin(x_2), \quad (4.1)$$

где функция $Z = Z(x_1)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению и краевым условиям

$$(k Z')' - k Z = f^*, \quad 0 < x_1 < \pi, \quad Z(0) = 0 = Z(\pi). \quad (4.2)$$

Для каждого $k \in K_2 = \{k \in L_{\infty}(0, \pi) : \mu_1 \leq k(x_1) \leq \mu_2, x_1 \in (0, \pi)\}$ задача (4.2) имеет единственное обобщенное решение $Z = Z[k]$ из пространства $H_0^1(0, \pi)$. Рассмотрим последовательность кусочно-постоянных функций $\{k_s\} \subset K_2$: $k_s(x_1) = \mu_2$, если $\pi(2i/2s) < x_1 \leq \pi(2i+1)/2s$; $k_s(x_1) = \mu_1$, если $\pi(2i+1)/2s < x_1 \leq \pi(2i+2)/2s$, $i = 0, \dots, s-1$. Можно проверить, что $k_s \rightarrow \sqrt{2}$ слабо в $L_2(0, \pi)$, $k_s^{-1} \rightarrow \sqrt{2}$ слабо в $L_2(0, \pi)$ при $s \rightarrow \infty$. Можно показать, что $Z[k_s] \rightarrow Z_0$ слабо в $H_0^1(0, \pi)$ и сильно в $L_2(0, \pi)$ и $C[0, \pi]$, где Z_0 — обобщенное решение из пространства $H_0^1(0, \pi)$ задачи

$$(\sqrt{2} Z')' - \sqrt{2} Z = f^*, \quad 0 < x_1 < \pi, \quad Z(0) = 0 = Z(\pi). \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что $Z_0 = Z[k^*]$, где $k^* = \sqrt{2} \in K_2$. Положим теперь $T_* = Z_0(x_1) \sin(x_2)$ и тогда имеем

$$J(k) = \int_{\Omega} (T[k] - T_*)^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (Z[k] - Z_0)^2 dx_1; \quad (4.4)$$

последовательность $\{k_s\} \subset K_2$ является минимизирующей для вариационной задачи

$$J(k) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (Z[k] - Z_0)^2 dx_1 \rightarrow \min: k \in K_2; \quad (4.5)$$

кроме того, $J_* = 0$, $k^* \in K_{2*} = \{k \in K_2 : J(k) = J_*\} \neq \emptyset$. Далее, из (4.1), (4.3) и второй части теоремы 3.1 следует, что множество точек минимума K_{2*} состоит из одного элемента k^* .

Из (4.1) и (4.4) следует, что рассматриваемая экстремальная задача (1.1)–(1.4) в определенном смысле эквивалентна экстремальной задаче (4.2), (4.5).

Заметим еще, что минимизирующая последовательность $\{k_s\}$ не сходится сильно в $L_2(0, \pi)$ к элементу $k^* \in K_{2*}$. Это означает, что рассматриваемая экстремальная задача не может быть сильно корректной в $L_2(0, \pi)$.

Для завершения примера остается показать, что любая минимизирующая последовательность в вариационной задаче (4.5) сходится слабо в $L_2(0, \pi)$ к элементу k^* . Для этого достаточно показать, что любая слабо сходящаяся подпоследовательность минимизирующей последовательности сходится слабо в $L_2(0, \pi)$ к этому элементу k^* . Рассмотрим произвольную минимизирующую последовательность $\{k_n\} \subset K_2$. Учитывая слабую компактность множества K_2 в $L_2(0, \pi)$, из последовательности $\{k_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{k_{n_p}\} \subseteq \{k_n\}$, которая при $p \rightarrow \infty$ сходится слабо в $L_2(0, \pi)$ к некоторому элементу $k_0 \in K_2$. Не нарушая общности рассуждений и переходя при необходимости к подпоследовательности, можем считать, что сама последовательность $\{k_n\}$ слабо в $L_2(0, \pi)$ сходится к элементу k_0 . Из минимизируемости следует, что $Z[k_n] \rightarrow Z_0 = Z[k^*]$ сильно в $L_2(0, \pi)$.

Из ограниченности последовательности решений $Z[k_n]$ задачи (4.2) в гильбертовом пространстве $H_0^1(0, \pi)$ следует, что из нее можно выделить подпоследовательность, которая слабо в $H_0^1(0, \pi)$ будет сходиться к некоторому элементу $Z^* \in H_0^1(0, \pi)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что сама последовательность сходится к этому элементу. Из компактности вложения $H_0^1(0, \pi) \subset L_2(0, \pi)$ имеем: $Z[k_n] \rightarrow Z^*$ сильно в $L_2(0, \pi)$. В силу единственности предела $Z^* = Z_0 = Z[k^*]$ как элементы пространств $L_2(0, \pi)$ и $H_0^1(0, \pi)$. Поскольку последовательность $\{k_n^{-1}\}$ ограничена $\sqrt{2} - 1 \leq k_n^{-1}(x_1) \leq \sqrt{2} + 1$, $x_1 \in (0, \pi)$, то, не нарушая общности рассуждений и переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можем считать, что $k_n^{-1} \rightarrow k_+^{-1}$ слабо в $L_2(0, \pi)$. Тогда слабый в $H_0^1(0, \pi)$ предел Z^* последовательности $\{Z[k_n]\}$ является обобщенным решением задачи

$$(k_+ Z')' - k_0 Z = f^*, \quad 0 < x_1 < \pi, \quad Z(0) = 0 = Z(\pi). \quad (4.6)$$

Вычтем из (4.6) равенство (4.3), умножим получившееся равенство на пробную функцию $Y \in H_0^1(0, \pi)$ и проинтегрируем по $(0, \pi)$, в результате получим

$$\int_0^\pi [(k_+ - k^*) Z'_0 Y' + (k_0 - k^*) Z_0 Y] dx_1 = 0 \quad \forall Y \in H_0^1(0, \pi).$$

Выбирая соответствующим образом функцию Y , получим, что почти всюду на $(0, \pi)$

$$k_+ = k^* = k_0.$$

Таким образом, любая слабо сходящаяся подпоследовательность минимизирующей последовательности сходится слабо в $L_2(0, \pi)$ к элементу k^* . Отсюда следует, что любая минимизирующая последовательность в вариационной задаче (4.5) сходится слабо в $L_2(0, \pi)$ к элементу k^* . Задача (4.5) является слабо корректной, но не сильно корректной. Что и требовалось показать.

Теорема 4.1. *Экстремальная задача (2.3) сильно корректна в $L_2(\Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сильная корректность задачи (2.3) следует из теоремы 2.2, компактности множества V в $L_2(\Omega)$ и непрерывности функционала J на V в $L_2(\Omega)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(k) \rightarrow \min: k \in W_C, \quad J_{W_C} = \inf \{J(k): k \in W_C\}, \quad W_C = \{k \in K_2: \text{Var}[k] \leq C\}, \quad (4.7)$$

где $\text{Var}[k]$ — полная вариация функции k на $[-2, 2]$ [15, гл. 6, § 2], $C = \text{const} \geq 0$.

Теорема 4.2. Множество $W_C^* = \{k \in W_C : J(k) = J_{W_C}\}$ непусто и компактно в $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$. Экстремальная задача (4.7) сильно корректна в $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично доказательствам теоремы 2.2 и теоремы 4.1. Нужно только учесть компактность множества W_C в $L_p(\Omega)$ при $1 < p < +\infty$ [15, гл. 6, § 6, п. 5; 14, гл. 9, § 3, с. 634], непрерывность функционала J на W_C в $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, и обобщенную теорему Вейерштрасса [8, с. 41, 112; 9, с. 467; 10, с. 62].

Теорема доказана.

5. Необходимое условие минимума

Сформулируем необходимое условие минимума функционала невязки (1.3) на множестве K . Найдем сначала градиент функционала Лагранжа с множителем Z

$$L(k) = J(k) + G(k),$$

где

$$G(k) = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla T) - qT - f) Z \, dx.$$

Найдем приращение функционала Лагранжа при каком-либо допустимом приращении аргумента. Выделим в этом приращении градиент функционала и соответствующую сопряженную систему. Дадим приращение δk аргументу в точке $k \in K$, $k + \delta k \in K$, и обозначим соответствующее приращение решения краевой задачи символом $y \equiv T[k + \delta k] - T[k]$.

Функция y удовлетворяет краевой задаче

$$\operatorname{div}(k \nabla y) + \operatorname{div}(\delta k \nabla T[k]) - (\mathbf{u}, \nabla y) - qy = -\operatorname{div}(\delta k \nabla y), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Для составляющих функционала Лагранжа имеем

$$\begin{aligned} J(k + \delta k) - J(k) &= \|T[k + \delta k] - T_*\|_{L_2(\Omega)}^2 - \|T[k] - T_*\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= \langle T[k + \delta k] - T[k], T[k + \delta k] + T[k] - 2T_* \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle y, 2(T[k] - T_*) + y \rangle_{L_2(\Omega)} \\ &= 2 \langle y, T[k] - T_* \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle y, y \rangle_{L_2(\Omega)}; \\ G(k + \delta k) - G(k) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla y) + \operatorname{div}(\delta k \nabla T[k]) + \operatorname{div}(\delta k \nabla y) - (\mathbf{u}, \nabla y) - qy) Z \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla Z) y - \delta k (\nabla T[k], \nabla Z) + (\mathbf{u}, \nabla Z) y - qZy) \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} y Z \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\delta k \nabla y) Z \, dx + \int_{\Gamma} (k (\nabla y, \mathbf{n}) Z - k (\nabla Z, \mathbf{n}) y + \delta k (\nabla T[k], \mathbf{n}) Z - Z (\mathbf{u}, \mathbf{n}) y) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия $y = 0$, $Z = 0$ на Γ , условие $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, малость величин $\|\operatorname{div}(\delta k \nabla y)\|_{L_2(\Omega)} = o(\|\delta k\|_{L_2(\Omega)})$ и $\|y\|_{L_2(\Omega)}^2 = o(\|\delta k\|_{L_2(\Omega)})$, приращение функционала Лагранжа можно записать в виде

$$\begin{aligned} L(k + \delta k) - L(k) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(k \nabla Z) y - \delta k (\nabla T[k], \nabla Z) + (\mathbf{u}, \nabla Z) y - qZy) \, dx \\ &+ 2 \langle y, T[k] - T_* \rangle_{L_2(\Omega)} + o(\|\delta k\|_{L_2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Пусть функция Z удовлетворяет краевой задаче, которую будем называть сопряженной задачей

$$\operatorname{div}(k \nabla Z) + (\mathbf{u}, \nabla Z) - q Z = -2(T[k] - T_*), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$Z = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (5.2)$$

Из (5.1) следует, что градиент функционалов Лагранжа и невязки имеет вид

$$\nabla L(k) = \nabla J(k) = -(\nabla T[k], \nabla Z), \quad (5.3)$$

где $T[k]$ — решение краевой задачи (1.1), (1.2), соответствующее параметру модели $k \in K$, Z — решение сопряженной краевой задачи (5.1), (5.2).

Сформулируем теперь необходимое условие минимума.

Теорема 5.1. *Если $k_* \in K_*$, то*

$$\langle (\nabla T[k_*], \nabla Z), k_* - k \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla T[k_*], \nabla Z) (k_* - k) d\mathbf{x} \geq 0 \quad \forall k \in K. \quad (5.4)$$

Необходимое условие минимума в форме (5.4) можно переформулировать в виде интегрального или локального (поточечного) принципа максимума

$$\int_{\Omega} (\nabla T[k_*], \nabla Z) k_* d\mathbf{x} = \max_{k \in K} \int_{\Omega} (\nabla T[k_*], \nabla Z) k d\mathbf{x},$$

$$(\nabla T[k_*](\mathbf{x}), \nabla Z(\mathbf{x})) k_*(\mathbf{x}) = \max_{\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2} (\nabla T[k_*](\mathbf{x}), \nabla Z(\mathbf{x})) \mu, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы аналогично доказательству теоремы 3 из [14, с. 524]. $\square$

Из принципа максимума находим $k_*(\mathbf{x}) = \mu_2$, если

$$(\nabla T[k_*](\mathbf{x}), \nabla Z(\mathbf{x})) > 0;$$

$k_*(\mathbf{x})$ — любое значение из отрезка $[\mu_1, \mu_2]$, если

$$(\nabla T[k_*](\mathbf{x}), \nabla Z(\mathbf{x})) = 0;$$

$k_*(\mathbf{x}) = \mu_1$, если

$$(\nabla T[k_*](\mathbf{x}), \nabla Z(\mathbf{x})) < 0.$$

Заключение

В статье изучались некоторые свойства экстремальной (вариационной) задачи, связанной с обратными коэффициентными задачами для моделей механики сплошной среды. В частности, в приведенное рассмотрение вкладывается задача о восстановлении старшего коэффициента (коэффициента температуропроводности) в стационарной модели диффузии-адвекции-реакции. Показано, что экстремальная задача на минимум может не иметь решения (множество точек минимума пусто). Приведены также некоторые условия разрешимости вариационной задачи. Указаны некоторые условия, при которых вариационная задача имеет единственное решение (единственную точку минимума). Показано, что рассматриваемая задача может быть некорректной, приведены также некоторые условия корректности экстремальной задачи. Приведено необходимое условие минимума в вариационной задаче как в интегральной, так и в локальной поточечной формах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и их приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: УРСС, 2004. 480 с.
5. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Короткий А.И., Стародубцева Ю.В. Восстановление коэффициента поглощения в модели стационарной реакции-конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 166–181. doi: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-166-181
8. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ФМ, 1961. 203 с.
9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
11. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
12. Adams R.A. Sobolev spaces. NY: Academic Press, 1975. 268 p.
13. Goebel M. On existence of optimal control // Mathematische Nachrichten. 1979. No. 93. P. 67–73.
14. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Поступила 01.08.2024

После доработки 24.09.2024

Принята к публикации 28.10.2024

Короткий Александр Илларионович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Цепелев Игорь Анатольевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: tsepelev@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solutions of ill-posed problems*. Transl. from the 2nd Russian ed., NY, Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240. Original Russian text published in Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p.
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*. In: *Inverse and ill-posed problems series*, vol. 36. Utrecht etc., VSP, 2002, 281 p. doi: 10.1515/9783110944822. Original Russian text published in Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p.
3. Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems*, Berlin, Boston, De Gruyter, 2011, 475 p. doi: 10.1515/9783110224016. Original Russian text published in Kabanikhin S.I., *Obratnye i nekorrektnye zadachi*, Novosibirsk, Sibirskoe Nauchnoe Izd., 2009, 458 p. ISBN: 5-98365-003-3.

4. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics*. Berlin, Walter de Gruyter, 2007, 438 p. doi: 10.1515/9783110205794. Original Russian text published in Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoi fiziki*, Moscow, URSS Publ., 2004, 478 p. ISBN: 5-354-00156-0.
5. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford, Clarendon Press, 1961, 652 p.
6. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics*. Oxford, Pergamon Press, 1987, 539 p. ISBN: 9781483161044. Original Russian text published in Landau L. D., Lifshits E. M. *Gidrodinamika*, Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p.
7. A. I. Korotkii, Yu. V. Starodubtseva. Reconstruction of the absorption coefficient in a model of stationary reaction–convection–diffusion. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 166–181 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-166-181
8. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. NY, Gordon and Breach, 1987, 224 p. ISBN: 0677207603. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O. A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neshimaemoi zhidkosti*, Moscow, Nauka Publ., 1970, 288 p.
9. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear elliptic equations*. NY, London, Academic Press, 1968, 495 p.
10. Ladyzhenskaya O.A. *The boundary value problems of mathematical physics*. Berlin, Heidelberg, NY, Springer-Verlag, 1985, 322 p. doi: 10.1007/978-1-4757-4317-3
11. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 392 p.
12. Adams R.A. *Sobolev spaces*. NY, Academic Press, 1975, 268 p.
13. Goebel M. On existence of optimal control. *Mathematische Nachrichten*, 1979, no. 93, pp. 67–73.
14. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002, 824 p. ISBN: 5-88688-056-9.
15. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of function theory and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 496 p.

Received August 1, 2024

Revised September 24, 2024

Accepted October 28, 2024

Alexander Illarionovich Korotkii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: korotkii@imm.uran.ru .

Igor Anatolievich Tsepelev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tsepelev@imm.uran.ru .

Cite this article as: Korotkii A.I., Tsepelev I.A. On the correctness of one extreme problem, related to inverse coefficient problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 170–179 .