

УДК 515.162

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФИБОНАЧЧИ ГРУППЫ КОС¹

Ф. Г. Кораблёв

В работе строится семейство представлений группы кос B_n . Векторные пространства, на которых действует группа кос, задаются как результат отождествления пространств, порожденных правильными раскрасками регулярных деревьев степени 3 с одной отмеченной вершиной. Это отождествление осуществляется с помощью семейства канонических изоморфизмов. Размерности получающихся пространств составляют последовательность чисел Фибоначчи. Далее показывается, как построенные представления могут быть продолжены до инвариантов неориентированных узлов и зацеплений в трехмерной сфере.

Ключевые слова: группа кос, представление, инвариант узлов, инвариант типа Решетихина — Тураева

F. G. Korablev. Fibonacci representations of braid groups.

A family of representations is constructed for the braid group B_n . The vector spaces on which the braid group acts are defined as the result of identifying the spaces generated by proper colorings of regular trees of degree 3 with a marked vertex. This identification is done using a family of canonical isomorphisms. The dimensions of the resulting spaces form the sequence of Fibonacci numbers. We then show how the constructed representations can be extended to invariants of unoriented knots and links in a 3-sphere.

Keywords: braid group, representation, knot invariant, Reshetikhin–Turaev type invariant.

MSC: 57M27, 57M25

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-149-169

Введение

Инварианты типа Решетихина — Тураева представляют собой широкий класс инвариантов замкнутых трехмерных многообразий и узлов. Универсальный подход к описанию этих инвариантов предполагает использование теории модулярных категорий (см., например, [12; 14]). Классические инварианты Решетихина — Тураева [9] получаются в результате реализации этого подхода для категории представлений квантовых групп.

В работе [5] универсальный категорный подход реализован для случая одной из простейших модулярных фьюжн-категорий ранга 2. В результате получен инвариант tr_ϵ для неориентированных зацеплений и замкнутых трехмерных многообразий. Этот инвариант для многообразий является, в частности, обобщением более простого ϵ -инварианта [8].

Целью настоящей работы является прямое независимое описание того же самого инварианта tr_ϵ для неориентированных зацеплений без использования категорного подхода. Примененный нами подход является более простым для конкретных вычислений. Получающийся в результате инвариант обозначается φ .

Основная идея построения инварианта φ состоит в следующем. Каждому бинарному корневому дереву t порядка n (все точные определения даются в следующем разделе) сопоставляются два векторных пространства $V_\circ^t$ и $V_\bullet^t$, порожденные раскрасками этого дерева двумя цветами (белым и черным). F -преобразования деревьев индуцируют канонические изоморфизмы $\mathcal{I}_\circ: V_\circ^{t_1} \rightarrow V_\circ^{t_2}$ и $\mathcal{I}_\bullet: V_\bullet^{t_1} \rightarrow V_\bullet^{t_2}$ между пространствами, соответствующими деревьям t_1 и t_2 . Векторные пространства $V_\circ^n$ и $V_\bullet^n$ определяются как результат отождествления

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-10014, <https://rscf.ru/project/23-21-10014/>).

этих пространств посредством канонических изоморфизмов. Далее строятся два представления $\rho_{\circ}^n: B_n \rightarrow \text{Aut}(V_{\circ}^n)$ и $\rho_{\bullet}^n: B_n \rightarrow \text{Aut}(V_{\bullet}^n)$ группы кос B_n .

Представления $\rho_{\circ}^n$ при $n \geq 2$ продолжаются до инварианта неориентированных зацеплений следующим образом. Диаграмма любого зацепления на плоскости может быть разбита конечным семейством параллельных прямых на элементарные слои четырех видов: $c_{n,i}$, $c_{n,i}^{-1}$, $b_{n,i}$ и $d_{n,i}$ (они изображены на рис. 14 в разд. 4). Чтобы задать продолжение представлений $\rho_{\circ}^n$ до инварианта зацеплений достаточно определить линейные отображения $\rho_{\circ}(c_{n,i}^{\pm 1}): V_{\circ}^n \rightarrow V_{\circ}^n$, $\rho_{\circ}(b_{n,i}): V_{\circ}^{n-2} \rightarrow V_{\circ}^n$ и $\rho_{\circ}(d_{n,i}): V_{\circ}^n \rightarrow V_{\circ}^{n-2}$. Тогда значение инварианта φ определяется композицией этих отображений.

Использованный подход к построению представлений $\rho_{\circ}^n$ и $\rho_{\bullet}^n$ группы кос B_n аналогичен подходам из работ [4; 15]. В этих работах он используется для реализации топологических квантовых вычислений. В настоящей статье основной интерес представляет продолжение построенных представлений до инварианта неориентированных зацеплений.

Исследование свойств представлений $\rho_{\circ}^n$ и $\rho_{\bullet}^n$ имеет независимый интерес с точки зрения изучения линейных представлений групп. Оказывается, что они не являются точными, так как образ каждой элементарной косы σ_i , $i = 1, \dots, n-1$, является изоморфизмом порядка 10. Естественный вопрос состоит в полном описании ядра этих представлений. Помимо этого возникают и другие естественные вопросы: являются ли представления $\rho_{\circ}^n$ и $\rho_{\bullet}^n$ неприводимыми, и как они связаны с такими известными классическими представлениями группы кос, как представление Бурау (см., например, [11] или оригинальную работу [2]) и представление Лоуренса — Крамера — Бигелоу (см. [1; 6; 7]).

Структура работы следующая. В разд. 1 определяются бинарные корневые деревья и их правильные раскраски. Раздел 2 посвящен построению двух семейств пространств $V_{\circ}^n$ и $V_{\bullet}^n$ для всех $n \geq 2$. В разд. 3 строятся представления $\rho_{\circ}^n$ и $\rho_{\bullet}^n$ группы кос B_n на пространствах $V_{\circ}^n$ и $V_{\bullet}^n$ соответственно. Раздел 4 посвящен продолжению представлений $\rho_{\circ}^n$ до комплекснозначного инварианта неориентированных зацеплений. Этот инвариант обозначается φ . В разд. 5 приводится пример вычисления инварианта φ для узла “трилистник”.

1. Бинарные корневые деревья

Пусть $n \geq 2$. *Бинарным корневым деревом* порядка n называется связный граф без циклов, имеющий ровно $n+1$ вершин степени 1 и $n-1$ вершин степени 3, в котором одна из вершин степени 1 отмечена. Неотмеченные вершины степени 1 называются *концевыми*, единственная отмеченная вершина степени 1 называется *корневой*, все остальные вершины графа называются *внутренними*. В дальнейшем все бинарные корневые деревья рассматриваются вложенными в плоскость так, чтобы все концевые вершины были расположены сверху на одной горизонтальной прямой, а корневая вершина снизу.

Пример 1. На рис. 1 изображены примеры бинарных корневых деревьев порядка 4 и 5.

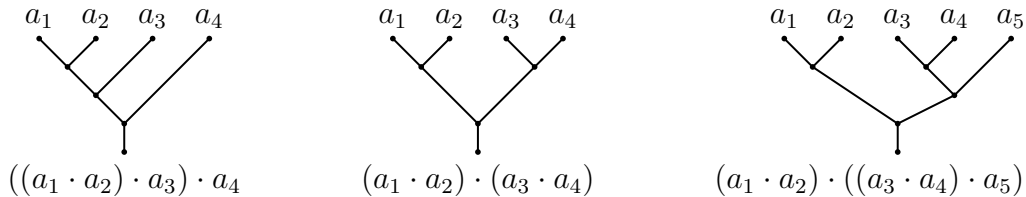


Рис. 1. Бинарные корневые деревья порядка 4 (слева и в центре) и бинарное корневое дерево порядка 5 (справа).

Бинарные корневые деревья можно записывать алгебраически в виде произведений конечного числа упорядоченных множителей относительно неассоциативного умножения. Для

деревьев, изображенных на рис. 1, эти алгебраические записи имеют вид $((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4$, $(a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4)$ и $(a_1 \cdot a_2) \cdot ((a_3 \cdot a_4) \cdot a_5)$ слева-направо соответственно. Можно считать, что множители $a_1, \dots, a_n$ отвечают концевым вершинам, занумерованным по порядку вдоль горизонтальной прямой.

З а м е ч а н и е 1. Хорошо известно (см., например, [10]), что число различных бинарных корневых деревьев порядка n в точности равно числу Каталана c_{n-1} .

Пусть t — бинарное корневое дерево порядка n , и пусть $E(t)$ — множество его ребер. *Раскраской* дерева t называется отображение $\xi: E(t) \rightarrow \{0, 1\}$. Элементы 0 и 1 играют роль цветов, которыми раскрашиваются ребра дерева t . Для определенности будем считать, что 0 — белый цвет, а 1 — черный. Графически ребра черного цвета будем изображать сплошной линией, а ребра белого цвета — пунктирной.

Раскраска $\xi: E(t) \rightarrow \{0, 1\}$ дерева t называется *правильной*, если

- 1) для каждого ребра $e \in E(t)$, инцидентного концевой вершине, $\xi(e) = 1$;
- 2) для каждой внутренней вершины дерева t три инцидентных ей ребра либо имеют одинаковый цвет, либо ровно два из них черные (имеют цвет 1) и одно белое (имеет цвет 0).

П р и м е р 2. На рис. 2 изображены пять различных правильных раскрасок бинарного корневого дерева порядка 4, имеющего алгебраическую запись $((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4$.

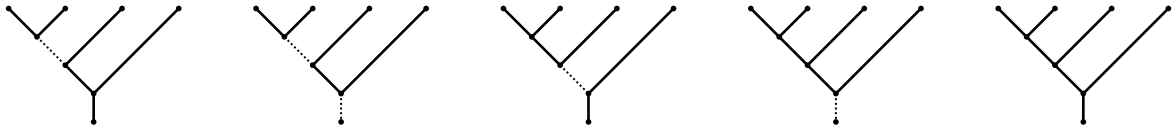


Рис. 2. Пять правильных раскрасок бинарного корневого дерева порядка 4.

Пусть $C(t)$ — множество правильных раскрасок бинарного корневого дерева t порядка n . Это множество является дизъюнктивным объединением двух множеств $C_\circ(t)$ и $C_\bullet(t)$, где $C_\circ(t)$ — множество правильных раскрасок дерева t , для которых ребро, инцидентное корневой вершине, имеет белый цвет, а $C_\bullet(t)$ — множество раскрасок, где это ребро имеет черный цвет. Легко доказать, что если t — бинарное корневое дерево порядка n , то $|C_\circ(t)| = f_{n-1}$ и $|C_\bullet(t)| = f_n$, где f_n — n -е число Фибоначчи ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$ и т. д.).

2. Пространства $V_\circ^n$ и $V_\bullet^n$

Цель этого раздела — явное описание векторных пространств $V_\circ^n$ и $V_\bullet^n$, определенных для $n \geq 2$. Представления Фибоначчи группы кос являются представлениями на этих пространствах.

2.1. Пространства $V_\circ^t$ и $V_\bullet^t$

Пусть t — бинарное корневое дерево порядка n . Определим векторное пространство $V_\circ^t$ как конечномерное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, базисными векторами которого являются все правильные раскраски дерева t , принадлежащие множеству $C_\circ(t)$. Аналогичным образом определим пространство $V_\bullet^t$ — его базисом являются все правильные раскраски из множества $C_\bullet(t)$.

Если t_1 и t_2 — два бинарных корневых дерева порядка n , то $\dim V_\circ^{t_1} = \dim V_\circ^{t_2} = f_{n-1}$ и $\dim V_\bullet^{t_1} = \dim V_\bullet^{t_2} = f_n$.

2.2. Преобразования $F^{\pm 1}$

Пусть t — бинарное корневое дерево порядка n , и пусть $e \in E(t)$ — ребро, инцидентное двум внутренним вершинам дерева t , окрестность которого имеет вид, изображенный на рис. 3 сле-

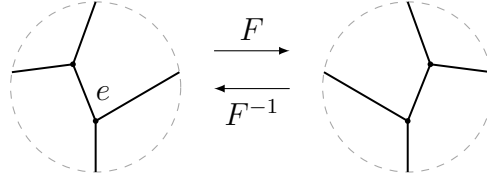


Рис. 3. F -преобразование бинарного корневого дерева (слева-направо) и обратное ему F^{-1} -преобразование (справа-налево).

ва. В результате замены окрестности ребра e на окрестность, изображенную на рис. 3 справа, получим новое дерево t' , совпадающее с t всюду вне окрестности ребра e . Будем говорить, что дерево t' получается из t с помощью F -преобразования вдоль ребра e . В обратную сторону дерево t получается из дерева t' с помощью F^{-1} -преобразования.

Если бинарное корневое дерево t имеет алгебраическую запись $(X \cdot Y) \cdot Z$, где X, Y, Z — какие-то алгебраические записи для поддеревьев дерева t , то в результате F -преобразования получается дерево с алгебраической записью $X \cdot (Y \cdot Z)$. Легко заметить, что любое бинарное корневое дерево порядка n преобразуется в любое другое бинарное корневое дерево того же порядка с помощью конечной последовательности $F^{\pm 1}$ -преобразований.

2.3. Изоморфизмы $\mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_2}$ и $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}$

Для описания изоморфизмов $\mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_2}: V_{\circ}^{t_1} \rightarrow V_{\circ}^{t_2}$ и $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}: V_{\bullet}^{t_1} \rightarrow V_{\bullet}^{t_2}$ сначала рассмотрим простейший случай, когда дерево t_2 получается из дерева t_1 с помощью ровно одного F -преобразования вдоль ребра $e \in E(t_1)$. Обозначим $x_1, x_2 \in E(t_1)$ два ребра, инцидентные одной вершине ребра e , и $x_3, x_4 \in E(t_1)$ — ребра, инцидентные другой вершине ребра e (см. рис. 4 слева). Обозначим $e' \in E(t_2)$ новое ребро дерева t_2 , на которое заменяется ребро e дерева t_1 . Тогда в дереве t_2 одной вершине ребра e' инцидентны ребра x_1, x_4 , а другой вершине — ребра x_2, x_3 (см. рис. 4 справа).

Пусть $C_{\circ}(t_1) = \{\xi_1, \dots, \xi_{f_{n-1}}\}$ — базис пространства $V_{\circ}^{t_1}$, и пусть $C_{\circ}(t_2) = \{\eta_1, \dots, \eta_{f_{n-1}}\}$ — базис пространства $V_{\circ}^{t_2}$. Пусть ξ_i — правильная раскраска дерева t_1 , причем найдется такое $j \in \{1, \dots, 4\}$, что $\xi_i(x_j) = 0$ (то есть среди ребер $x_1, \dots, x_4$ есть хотя бы одно белое). В этом случае значение $\xi_i(e)$ однозначно определяется значениями $\xi_i(x_1), \xi_i(x_2), \xi_i(x_3), \xi_i(x_4)$. Пусть η_i — правильная раскраска дерева t_2 , в которой цвета всех ребер, кроме ребра e' , совпадают с цветами ребер дерева t_1 , а значение $\eta_i(e')$ однозначно определяется значениями $\eta_i(x_j)$, $j \in \{1, \dots, 4\}$. Положим $\mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_2}(\xi_i) = \eta_i$.

Пусть теперь ξ_{k_1}, ξ_{k_2} — две такие правильные раскраски дерева t_1 , что

- 1) $\xi_{k_1}(h) = \xi_{k_2}(h)$ для всех ребер $h \in E(t_1)$, отличных от ребер $x_1, \dots, x_4, e$;
- 2) $\xi_{k_1}(x_j) = \xi_{k_2}(x_j) = 1$ для всех $j \in \{1, \dots, 4\}$;
- 3) $\xi_{k_1}(e) = 0$ и $\xi_{k_2}(e) = 1$.

Выберем две такие правильные раскраски η_{k_1} и η_{k_2} дерева t_2 , что $\eta_{k_1}(h) = \eta_{k_2}(h) = \xi_{k_1}(h)$ для всех $h \in E(t_2) \setminus \{e'\}$ и $\eta_{k_s}(e') = \xi_{k_s}(e)$ для $s = 1, 2$. Положим (ε — любой корень уравнения

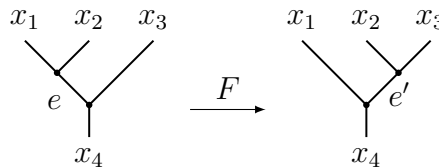


Рис. 4. Ребра дерева t_1 в окрестности ребра e (слева) и ребра дерева t_2 в окрестности ребра e' (справа).



Рис. 5. Два бинарных корневых дерева порядка 4 (t_1 — слева, t_2 — справа).

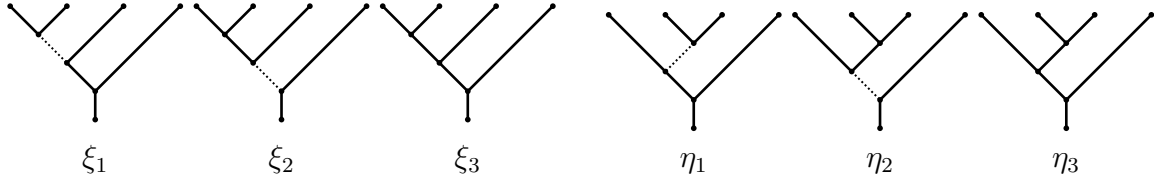


Рис. 6. Базисы пространств $V_{\bullet}^{t_1}$ и $V_{\bullet}^{t_2}$.

$$\varepsilon^2 = \varepsilon + 1)$$

$$\mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_2}(\xi_{k_1}) = \frac{1}{\varepsilon} \eta_{k_1} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta_{k_2}, \quad \mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_2}(\xi_{k_2}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta_{k_1} - \frac{1}{\varepsilon} \eta_{k_2},$$

Изоморфизм $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}$ для двух деревьев t_1 и t_2 , отличающихся на одно F -преобразование, определяется точно так же. Единственное отличие состоит в размерности пространств $V_{\bullet}^{t_1}$ и $V_{\bullet}^{t_2}$.

Если дерево t_1 получается из дерева t_2 с помощью одного F^{-1} -преобразования, то естественно обозначить $\mathcal{I}_{\circ}^{t_2 \rightarrow t_1} = (\mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_2})^{-1}$ и $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_2 \rightarrow t_1} = (\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2})^{-1}$.

Пример 3. Пусть t_1 — бинарное корневое дерево порядка 4, изображенное на рис. 5 слева, и пусть t_2 — другое бинарное корневое дерево порядка 4, изображенное на рис. 5 справа.

Пусть $C_{\bullet}(t_1) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ — базис пространства $V_{\bullet}^{t_1}$ (первые три раскраски на рис. 6), и пусть $C_{\bullet}(t_2) = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ — базис пространства $V_{\bullet}^{t_2}$ (последние три раскраски на рис. 6).

Тогда

$$\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}(\xi_1) = \frac{1}{\varepsilon} \eta_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta_3, \quad \mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}(\xi_2) = \eta_2, \quad \mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}(\xi_3) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta_1 - \frac{1}{\varepsilon} \eta_3.$$

Матрица этого изоморфизма в базисах $C_{\bullet}(t_1)$ и $C_{\bullet}(t_2)$ имеет следующий вид:

$$[\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Как это обычно делается в линейной алгебре, столбцами матрицы линейного отображения являются координаты образов базисных векторов первого пространства в базисе второго пространства.

Теорема 1. Пусть t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 — бинарные корневые деревья порядка 4, изображенные на рис. 7. Тогда

1. $\mathcal{I}_{\circ}^{t_3 \rightarrow t_4} \circ \mathcal{I}_{\circ}^{t_2 \rightarrow t_3} \circ \mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_2} = \mathcal{I}_{\circ}^{t_5 \rightarrow t_4} \circ \mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_5}$.
2. $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_3 \rightarrow t_4} \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{t_2 \rightarrow t_3} \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2} = \mathcal{I}_{\bullet}^{t_5 \rightarrow t_4} \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_5}$.

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Все пространства $V_{\circ}^{t_i}$, $i = 1, \dots, 5$, двумерны. Зафиксируем базисы $C_{\circ}(t_1) = \{\xi_1, \xi_2\}$, $C_{\circ}(t_2) = \{\eta_1, \eta_2\}$, $C_{\circ}(t_3) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, $C_{\circ}(t_4) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ и $C_{\circ}(t_5) = \{\mu_1, \mu_2\}$, изображенные на рис. 8.

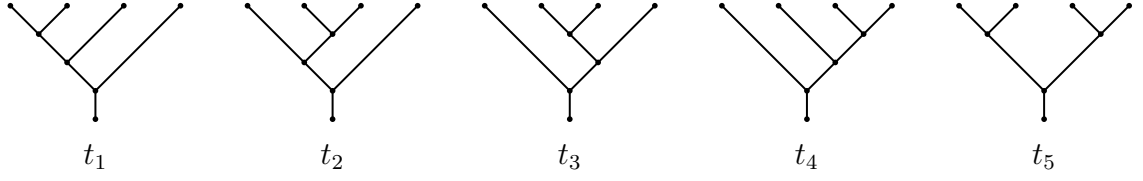
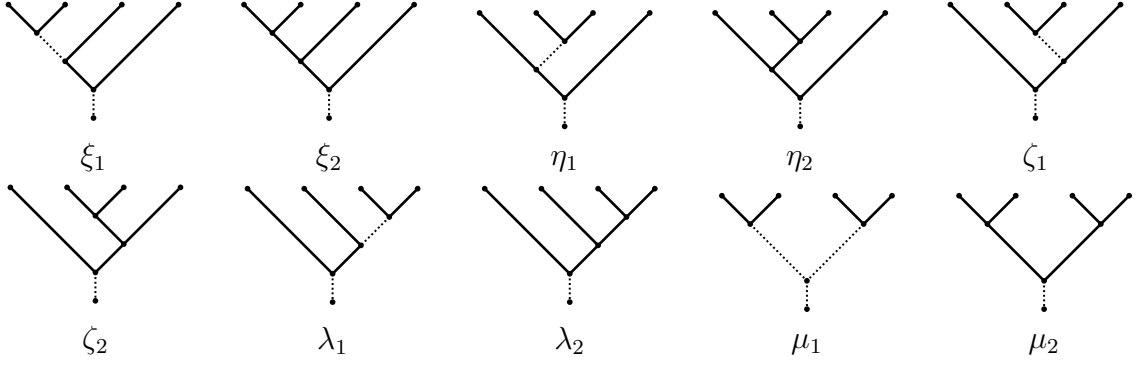


Рис. 7. Все различные бинарные корневые деревья порядка 4.

Рис. 8. Базисы пространств $V_o^{t_1}, V_o^{t_2}, V_o^{t_3}, V_o^{t_4}, V_o^{t_5}$.

Тогда

$$[\mathcal{I}_o^{t_1 \rightarrow t_2}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{I}_o^{t_2 \rightarrow t_3}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{I}_o^{t_3 \rightarrow t_4}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$[\mathcal{I}_o^{t_1 \rightarrow t_5}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{I}_o^{t_5 \rightarrow t_4}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$[\mathcal{I}_o^{t_3 \rightarrow t_4} \circ \mathcal{I}_o^{t_2 \rightarrow t_3} \circ \mathcal{I}_o^{t_1 \rightarrow t_2}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [\mathcal{I}_o^{t_5 \rightarrow t_4} \circ \mathcal{I}_o^{t_1 \rightarrow t_5}].$$

При вычислении произведения матриц использовался тот факт, что $\varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} = 1$.

Подход к доказательству второго утверждения теоремы аналогичен. В этом случае все пространства $V_{\bullet}^{t_i}$, $i = 1 \dots, 5$, трехмерны. Зафиксируем базисы $C_{\bullet}(t_1) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, $C_{\bullet}(t_2) = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, $C_{\bullet}(t_3) = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$, $C_{\bullet}(t_4) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, $C_{\bullet}(t_5) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, изображенные на рис. 9.

Тогда

$$[\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{I}_{\bullet}^{t_2 \rightarrow t_3}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{I}_{\bullet}^{t_3 \rightarrow t_4}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$[\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_5}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{I}_{\bullet}^{t_5 \rightarrow t_4}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

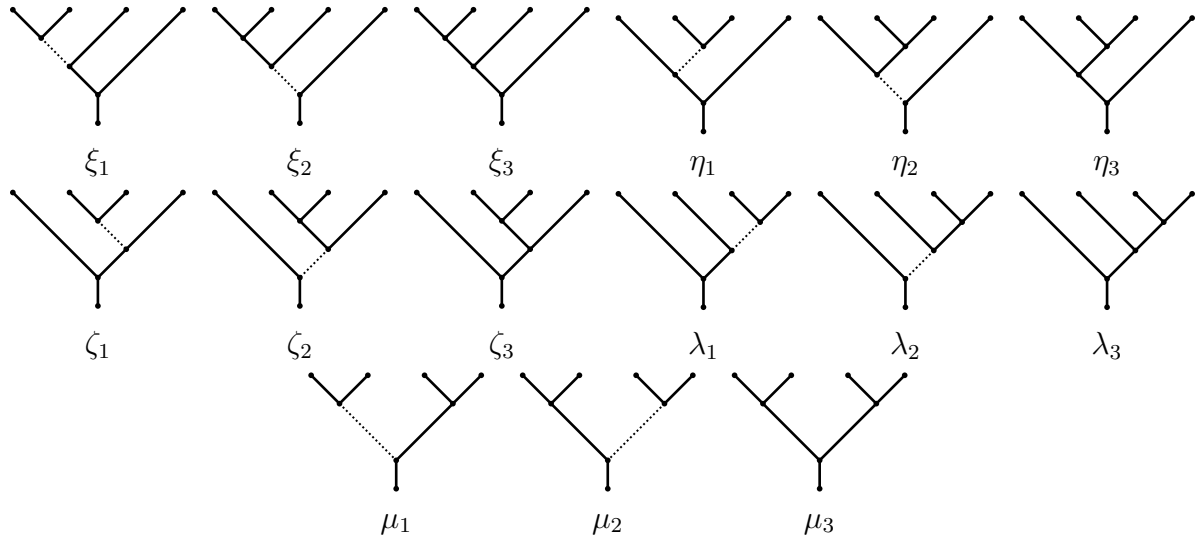


Рис. 9. Базисы пространств $V_{\bullet}^{t_1}, V_{\bullet}^{t_2}, V_{\bullet}^{t_3}, V_{\bullet}^{t_4}, V_{\bullet}^{t_5}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{I}_{\bullet}^{t_3 \rightarrow t_4} \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{t_2 \rightarrow t_3} \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}] &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\varepsilon^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = [\mathcal{I}_{\bullet}^{t_5 \rightarrow t_4} \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_5}].
 \end{aligned}$$

При вычислении произведений использовались соотношения $\varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} = 1$ и $\varepsilon - \varepsilon^{-1} = 1$. Теорема доказана.

Пусть t_1, t_2 — два бинарных корневых дерева порядка n . Тогда изоморфизмы $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}$ и $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}$ определяются следующим образом. Зафиксируем произвольную последовательность таких бинарных корневых деревьев $h_1, h_2, \dots, h_k$ порядка n , что

- 1) $h_1 = t_1, h_k = t_2$;
- 2) для каждого $i = 2, \dots, k$ дерево h_i получается из h_{i-1} с помощью одного $F^{\pm 1}$ -преобразования.

Положим

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_2} &= \mathcal{I}_{\circ}^{h_{k-1} \rightarrow t_2} \circ \mathcal{I}_{\circ}^{h_{k-2} \rightarrow h_{k-1}} \circ \dots \circ \mathcal{I}_{\circ}^{h_2 \rightarrow h_3} \circ \mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow h_2}, \\
 \mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2} &= \mathcal{I}_{\bullet}^{h_{k-1} \rightarrow t_2} \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{h_{k-2} \rightarrow h_{k-1}} \circ \dots \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{h_2 \rightarrow h_3} \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow h_2}.
 \end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует, что изоморфизмы $\mathcal{I}_{\circ}^{t_1 \rightarrow t_2}$ и $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}$ определены корректно, они не зависят от выбора последовательности промежуточных деревьев $h_2, \dots, h_{k-1}$.

2.4. Пространства $V_{\circ}^n$ и $V_{\bullet}^n$.

Пусть $t_1, \dots, t_{c_{n-1}}$ — все различные бинарные корневые деревья порядка n . Тогда пространство $V_{\circ}^n$ получается отождествлением пространств $V_{\circ}^{t_1}, \dots, V_{\circ}^{t_{c_{n-1}}}$ с помощью изоморфизмов $\mathcal{I}_{\circ}^{t_i \rightarrow t_j}$, $i, j = 1, \dots, c_{n-1}$, а пространство $V_{\bullet}^n$ получается отождествлением пространств



Рис. 10. Левое и правое регулярные бинарные корневые деревья t_l^n и t_r^n порядка n .

$V_{\bullet}^{t_1}, \dots, V_{\bullet}^{t_{c_{n-1}}}$ с помощью изоморфизмов $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_i \rightarrow t_j}$, $i, j = 1, \dots, c_{n-1}$. Это означает следующее. Чтобы выбрать элемент x пространства $V_{\bullet}^n$ (или пространства $V_{\bullet}^n$), надо выбрать семейство элементов $x_1 \in V_{\bullet}^{t_1}, \dots, x_{c_{n-1}} \in V_{\bullet}^{t_{c_{n-1}}}$ так, что для любых $i, j \in \{1, \dots, c_{n-1}\}$: $x_j = \mathcal{I}_{\bullet}^{t_i \rightarrow t_j}(x_i)$ (аналогично для $y \in V_{\bullet}^n$ и соответствующего ему семейства элементов $y_1 \in V_{\bullet}^{t_1}, \dots, y_{c_{n-1}} \in V_{\bullet}^{t_{c_{n-1}}}$).

Линейное отображение $\varphi: V_{\bullet}^n \rightarrow V_{\bullet}^n$ задается таким семейством линейных отображений $\varphi_1: V_{\bullet}^{t_1} \rightarrow V_{\bullet}^{t_1}, \dots, \varphi_{c_{n-1}}: V_{\bullet}^{t_{c_{n-1}}} \rightarrow V_{\bullet}^{t_{c_{n-1}}}$, что для любых $i, j \in \{1, \dots, c_{n-1}\}$

$$\varphi_j = \mathcal{I}_{\bullet}^{t_i \rightarrow t_j} \circ \varphi_i \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{t_j \rightarrow t_i}.$$

Линейное отображение $\psi: V_{\bullet}^n \rightarrow V_{\bullet}^n$ аналогичным образом задается таким семейством линейных отображений $\psi_1: V_{\bullet}^{t_1} \rightarrow V_{\bullet}^{t_1}, \dots, \psi_{c_{n-1}}: V_{\bullet}^{t_{c_{n-1}}} \rightarrow V_{\bullet}^{t_{c_{n-1}}}$, что для любых $i, j \in \{1, \dots, c_{n-1}\}$

$$\psi_j = \mathcal{I}_{\bullet}^{t_i \rightarrow t_j} \circ \psi_i \circ \mathcal{I}_{\bullet}^{t_j \rightarrow t_i}.$$

С вычислительной точки зрения удобно зафиксировать какое-нибудь одно конкретное бинарное корневое дерево t порядка n и рассматривать базис и линейные отображения соответствующего пространства $V_{\bullet}^t$ (или $V_{\bullet}^t$). В дальнейшем мы по большей части будем стараться проводить все вычисления в пространстве, которое отвечает *левому регулярному бинарному корневому дереву порядка n* , которое обозначим t_l^n . Это дерево изображено на рис. 10 слева и имеет алгебраическую запись $(\dots(((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4) \cdot \dots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n$. Подобным образом можно проводить все вычисления в пространстве, отвечающем *правому регулярному бинарному корневому дереву порядка n* , которое обозначим t_r^n . Это дерево изображено на рис. 10 справа, и имеет алгебраическую запись $a_1 \cdot (a_2 \cdot (a_3 \cdot \dots \cdot (a_{n-1} \cdot a_n) \dots))$.

3. Представления $\rho_{\bullet}^n$ и $\rho_{\bullet}^n$ группы кос B_n

Пусть $n \geq 2$. Группа кос B_n — это группа, которая может быть задана образующими и соотношениями следующим образом (см., например, [3]):

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ если } |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ для всех } i \in \{1, \dots, n-2\} \rangle.$$

Образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ имеют наглядный геометрический смысл. Каждая образующая σ_i соответствует элементарной косе на n нитях, в которой нити с номерами i и $i+1$ перекрещиваются и образуют перекресток на диаграмме (см. рис. 11 слева). Элементарная коса, соответствующая элементу σ_i^{-1} , изображена на рис. 11 справа. Косы изображаются горизонтально слева-направо, а не снизу-вверх, как это часто делается, чтобы все диаграммы, возникающие в следующем разделе, были вытянуты по горизонтали, а не по вертикали.

Напомним, что константа ε — это любой из корней уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$. Обозначим $\alpha = e^{(\pi i)/5}$ первообразный корень из единицы степени 10. Тогда положительный корень уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$ представляется в виде $\varepsilon = \alpha + \alpha^{-1}$, а отрицательный корень — в виде $\varepsilon = \alpha^3 + \alpha^{-3}$. Определим константы β_{ε}^{+} и β_{ε}^{-} следующим образом: если $\varepsilon = \alpha + \alpha^{-1}$, то $\beta_{\varepsilon}^{+} = \alpha^3$ и $\beta_{\varepsilon}^{-} = \alpha^{-3}$, а если $\varepsilon = \alpha^3 + \alpha^{-3}$, то $\beta_{\varepsilon}^{+} = \alpha$ и $\beta_{\varepsilon}^{-} = \alpha^{-1}$. Через β_{ε} будем обозначать любую из констант β_{ε}^{+} или β_{ε}^{-} . Во всех дальнейших случаях в качестве β_{ε} можно выбирать как β_{ε}^{+} , так и β_{ε}^{-} .

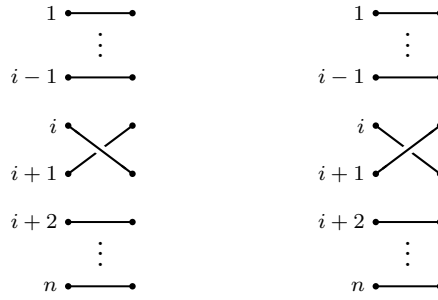


Рис. 11. Элементарные косы σ_i (слева) и σ_i^{-1} (справа).

Опишем представления $\rho_\circ^n: B_n \rightarrow \text{Aut}(V_\circ^n)$ и $\rho_\bullet^n: B_n \rightarrow \text{Aut}(V_\bullet^n)$. Как упоминалось ранее, для этого достаточно определить линейные отображения $\rho_\circ^n(\sigma_i) \in \text{Aut}(V_\circ^t)$ и $\rho_\bullet^n(\sigma_i) \in \text{Aut}(V_\bullet^t)$, $i = 1, \dots, n-1$, для какого-нибудь конкретного бинарного корневого дерева t порядка n и продолжить это отображение на группы автоморфизмов других пространств $V_\circ^{t'}$ и $V_\bullet^{t'}$ с помощью изоморфизмов $\mathcal{I}_\circ^{t \rightarrow t'}$ и $\mathcal{I}_\bullet^{t \rightarrow t'}$ для всех других бинарных корневых деревьев $t' \neq t$ порядка n .

Пусть t — бинарное корневое дерево порядка n , у которого в алгебраической записи множители a_i и a_{i+1} стоят в одной самой внутренней паре скобок (то есть эта алгебраическая запись имеет вид $\dots (a_i \cdot a_{i+1}) \dots$). Обозначим через $x, y \in E(t)$ ребра, инцидентные концевым вершинам с номерами a_i, a_{i+1} соответственно, и через $z \in E(t) \setminus \{x, y\}$ ребро, инцидентное общей вершине ребер x и y . Пусть $\xi \in C_\circ(t)$ — базисный вектор пространства $V_\circ^t$ (то есть правильная раскраска дерева t). Определим значение $\rho_\circ^n(\sigma_i)(\xi)$ следующим образом:

$$\rho_\circ^n(\sigma_i)(\xi) = \begin{cases} \beta_\varepsilon^2 \xi, & \text{если } \xi(z) = 0, \\ \beta_\varepsilon \xi, & \text{если } \xi(z) = 1. \end{cases}$$

Для каждого $\xi \in C_\bullet(t)$ образ $\rho_\bullet^n(\sigma_i)(\xi)$ определим с помощью той же самой формулы.

З а м е ч а н и е 2. Определение линейных отображений $\rho_\circ^n(\sigma_i)$ и $\rho_\bullet^n(\sigma_i)$ нуждается в проверке корректности. Пусть t и t' — два бинарных корневых дерева порядка n , у которых концевые ребра x, y (с номерами $i, i+1$) инцидентны одной вершине. Тогда для базисов $C_\circ(t) = \{\xi_1, \dots, \xi_{f_{n-1}}\}$, $C_\circ(t') = \{\eta_1, \dots, \eta_{f_{n-1}}\}$ пространств $V_\circ^t, V_\circ^{t'}$ соответственно выполняется соотношение

$$[\rho_\circ^n(\sigma_i)]_{C_\circ(t)} = [\rho_\circ^n(\sigma_i)]_{C_\circ(t')}$$

для всех $i = 1, \dots, n-1$.

В самом деле, пусть для определенности дерево t' получается из дерева t с помощью одного F -преобразования вдоль ребра $e \in E(t) \setminus \{x, y, z\}$. Здесь, как и ранее, z — это ребро, инцидентное общей вершине ребер x и y . Упорядочим векторы базиса $C_\circ(t)$ (то есть раскраски дерева t) так, чтобы каждые две раскраски, совпадающие всюду, кроме ребра e , были соседними. Базисные векторы $C_\circ(t')$ упорядочим соответствующим образом. Тогда матрица перехода $[\mathcal{I}_\circ^{t \rightarrow t'}] = [\mathcal{I}_\circ^{t' \rightarrow t}]$ имеет блочно-диагональный вид, где каждый из блоков является либо единичной матрицей, либо матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Матрица $[\rho_\circ^n(\sigma_i)]_{C_\circ(t)}$ является диагональной, составленной из элементов β_ε и β_ε^2 . Ключевое наблюдение состоит в том, что блоки матрицы $[\rho_\circ^n(\sigma_i)]_{C_\circ(t)}$, соответствующие нетривиальным блокам матрицы $[\mathcal{I}_\circ^{t \rightarrow t'}]$, составлены только из элементов β . Это следует из того, что в раскрасках дерева t , соответствующего этим блокам, цвет ребра z является черным. Следовательно,

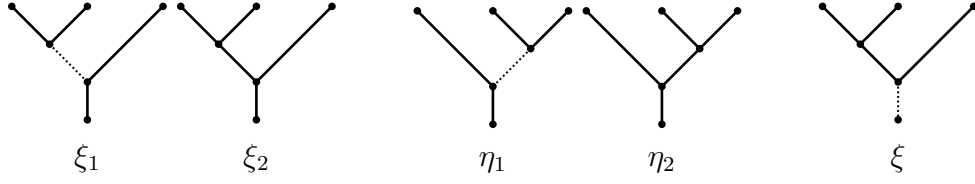


Рис. 12. Два базисных вектора ξ_1, ξ_2 пространства $V_{\bullet}^{t_1^3}$ (слева), два базисных вектора η_1, η_2 пространства $V_{\bullet}^{t_r^3}$ (в центре) и единственный базисный вектор ξ пространства $V_{\circ}^{t_i^3}$ (справа).

матрица $[\mathcal{I}_{\circ}^{t \rightarrow t'}]$ перестановочна с матрицей $[\rho_{\circ}^n(\sigma_i)]_{C_{\circ}(t)}$, и, значит,

$$[\rho_{\circ}^n(\sigma_i)]_{C_{\circ}(t')} = [\mathcal{I}_{\circ}^{t \rightarrow t'}] \cdot [\rho_{\circ}^n(\sigma_i)]_{C_{\circ}(t)} \cdot [\mathcal{I}_{\circ}^{t' \rightarrow t}] = [\rho_{\circ}^n(\sigma_i)]_{C_{\circ}(t)}.$$

Корректность линейных отображений $\rho_{\bullet}^n(\sigma_i)$ устанавливается аналогично.

Пример 4. Пусть σ_1, σ_2 — образующие группы кос B_3 . Вычислим матрицы линейных отображений $\rho_{\bullet}^3(\sigma_1)$ и $\rho_{\bullet}^3(\sigma_2)$ в базисе $C_{\bullet}(t_l^3) = \{\xi_1, \xi_2\}$ пространства $V_{\bullet}^{t_l^3}$ (см. рис. 12 слева).

По определению

$$[\rho_{\bullet}^3(\sigma_1)]_{C_{\bullet}(t_l^3)} = \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Матрица отображения $\rho_{\bullet}(\sigma_2)$ не является диагональной в базисе $C_{\bullet}(t_l^3)$, однако она диагональна в базисе $C_{\bullet}(t_r^3) = \{\eta_1, \eta_2\}$ пространства $V_{\bullet}^{t_r^3}$ (см. рис. 12 в центре):

$$[\rho_{\bullet}^3(\sigma_2)]_{C_{\bullet}(t_r^3)} = \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу перехода, соответствующую изоморфизму $\mathcal{I}_{\bullet}^{t_l^3 \rightarrow t_r^3}$, находим, что

$$[\rho_{\bullet}^3(\sigma_2)]_{C_{\bullet}(t_l^3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \frac{\beta_{\varepsilon}}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\beta_{\varepsilon}}{\varepsilon} + 1 & \frac{\beta_{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{\beta_{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon}} & \beta_{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — образующие группы B_4 . Вычислим матрицы отображений $\rho_{\bullet}^4(\sigma_1), \rho_{\bullet}^4(\sigma_2)$ и $\rho_{\bullet}^4(\sigma_3)$ в базисе $C_{\bullet}(t_1) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ пространства $V_{\bullet}^{t_1}$ (дерево t_1 изображено на рис. 7, а раскраски ξ_1, ξ_2, ξ_3 — на рис. 9). По определению

$$[\rho_{\bullet}^4(\sigma_1)]_{C_{\bullet}(t_1)} = \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим базисы $C_{\bullet}(t_2) = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ и $C_{\bullet}(t_5) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ пространств $V_{\bullet}^{t_2}$ и $V_{\bullet}^{t_5}$ соответственно (деревья t_2 и t_5 изображены на рис. 7, а их раскраски — на рис. 9). Аналогично предыдущему

$$[\rho_{\bullet}^4(\sigma_2)]_{C_{\bullet}(t_2)} = \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad [\rho_{\bullet}^4(\sigma_3)]_{C_{\bullet}(t_5)} = \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что элемент β_{ε}^2 в матрице $[\rho_{\bullet}^4(\sigma_3)]_{C_{\bullet}(t_5)}$ стоит во второй строке, а не в первой, так как раскраске дерева t_5 , у которой белым цветом раскрашено ребро, инцидентное общей вершине третьего и четвертого концевых ребер, соответствует базисный вектор μ_2 .

Используя матрицы переходов $[T_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_2}]$ и $[T_{\bullet}^{t_1 \rightarrow t_3}]$, вычисленные в доказательстве теоремы 1, находим, что

$$[\rho_{\bullet}^4(\sigma_2)]_{C_{\bullet}(t_1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \frac{\beta_{\varepsilon}}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\beta_{\varepsilon}}{\varepsilon} + 1 & 0 & \frac{\beta_{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \frac{\beta_{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} & 0 & \beta_{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$[\rho_{\bullet}^4(\sigma_3)]_{C_{\bullet}(t_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \frac{\beta_{\varepsilon}}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{\varepsilon}}{\varepsilon} + 1 & \frac{\beta_{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{\beta_{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} & \beta_{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

В частности, заметим, что $[\rho_{\bullet}^4(\sigma_3)]_{C_{\bullet}(t_1)} \cdot [\rho_{\bullet}^4(\sigma_1)]_{C_{\bullet}(t_1)} = [\rho_{\bullet}^4(\sigma_1)]_{C_{\bullet}(t_1)} \cdot [\rho_{\bullet}^4(\sigma_3)]_{C_{\bullet}(t_1)}$. Следовательно, $\rho_{\bullet}^4(\sigma_3) \circ \rho_{\bullet}^4(\sigma_1) = \rho_{\bullet}^4(\sigma_1) \circ \rho_{\bullet}^4(\sigma_3)$.

Теорема 2. Для всех $n \geq 3$

1. $\rho_{\circ}^n(\sigma_j) \circ \rho_{\circ}^n(\sigma_i) = \rho_{\circ}^n(\sigma_i) \circ \rho_{\circ}^n(\sigma_j)$ при $|i - j| > 1$.
2. $\rho_{\bullet}^n(\sigma_j) \circ \rho_{\bullet}^n(\sigma_i) = \rho_{\bullet}^n(\sigma_i) \circ \rho_{\bullet}^n(\sigma_j)$ при $|i - j| > 1$.

Доказательство. Пусть t — бинарное корневое дерево порядка n , у которого концевые ребра с номерами i и $i + 1$ инцидентны одной общей вершине, и концевые ребра с номерами j и $j + 1$ инцидентны другой общей вершине. Пусть $C_{\circ}(t)$ — базис пространства $V_{\circ}^t$. По определению обе матрицы $[\rho_{\circ}(\sigma_i)]_{C_{\circ}(t)}$ и $[\rho_{\circ}(\sigma_j)]_{C_{\circ}(t)}$ являются диагональными, поэтому $[\rho_{\circ}(\sigma_j)]_{C_{\circ}(t)} \cdot [\rho_{\circ}(\sigma_i)]_{C_{\circ}(t)} = [\rho_{\circ}(\sigma_i)]_{C_{\circ}(t)} \cdot [\rho_{\circ}(\sigma_j)]_{C_{\circ}(t)}$.

Это означает, что $\rho_{\circ}^n(\sigma_j) \circ \rho_{\circ}^n(\sigma_i) = \rho_{\circ}^n(\sigma_i) \circ \rho_{\circ}^n(\sigma_j)$ при $|i - j| > 1$. Доказательство второго утверждения теоремы аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 3. Для всех $n \geq 2$

1. $\rho_{\circ}^n(\sigma_i) \circ \rho_{\circ}^n(\sigma_{i+1}) \circ \rho_{\circ}^n(\sigma_i) = \rho_{\circ}^n(\sigma_{i+1}) \circ \rho_{\circ}^n(\sigma_i) \circ \rho_{\circ}^n(\sigma_{i+1})$.
2. $\rho_{\bullet}^n(\sigma_i) \circ \rho_{\bullet}^n(\sigma_{i+1}) \circ \rho_{\bullet}^n(\sigma_i) = \rho_{\bullet}^n(\sigma_{i+1}) \circ \rho_{\bullet}^n(\sigma_i) \circ \rho_{\bullet}^n(\sigma_{i+1})$.

Доказательство. В случае $n = 2$ оба утверждения теоремы справедливы, так как $\dim V_{\circ}^2 = \dim V_{\bullet}^2 = 1$. Рассмотрим простейший нетривиальный случай $n = 3$ и $i = 1$.

Докажем сначала первое утверждение $\rho_{\circ}^3(\sigma_1) \circ \rho_{\circ}^3(\sigma_2) \circ \rho_{\circ}^3(\sigma_1) = \rho_{\circ}^3(\sigma_2) \circ \rho_{\circ}^3(\sigma_1) \circ \rho_{\circ}^3(\sigma_2)$. Все вычисления будем проводить в пространстве $V_{\circ}^{t_1^3}$. Это пространство одномерно, его базис состоит из единственной правильной раскраски ξ дерева t_1^3 , изображенной на рис. 12 справа.

По определению находим, что $\rho_{\circ}^3(\sigma_1)(\xi) = \beta_{\varepsilon}\xi$ и $\rho_{\circ}^3(\sigma_2)(\xi) = (\mathcal{I}_{\circ}^{t_r^3 \rightarrow t_l^3} \circ \rho_{\circ}^3(\sigma_2) \circ \mathcal{I}_{\circ}^{t_l^3 \rightarrow t_r^3})(\xi) = \beta_{\varepsilon}\xi$. Следовательно, $(\rho_{\circ}^3(\sigma_1) \circ \rho_{\circ}^3(\sigma_2) \circ \rho_{\circ}^3(\sigma_1))(\xi) = \beta_{\varepsilon}^3\xi = (\rho_{\circ}^3(\sigma_2) \circ \rho_{\circ}^3(\sigma_1) \circ \rho_{\circ}^3(\sigma_2))(\xi)$.

Докажем теперь второе утверждение $\rho_{\bullet}^3(\sigma_1) \circ \rho_{\bullet}^3(\sigma_2) \circ \rho_{\bullet}^3(\sigma_1) = \rho_{\bullet}^3(\sigma_2) \circ \rho_{\bullet}^3(\sigma_1) \circ \rho_{\bullet}^3(\sigma_2)$.

Обе матрицы $[\rho_{\bullet}^3(\sigma_1)]_{C_{\bullet}(t_1^3)}$ и $[\rho_{\bullet}^3(\sigma_2)]_{C_{\bullet}(t_1^3)}$ в базисе $C_{\bullet}(t_1^3)$ пространства $V_{\bullet}^{t_1^3}$ (см. рис. 12 слева) были вычислены в одном из примеров перед теоремой 2. Используя формулы для вычисления этих матриц, непосредственно находим, что

$$[\rho_{\bullet}^3(\sigma_1) \circ \rho_{\bullet}^3(\sigma_2) \circ \rho_{\bullet}^3(\sigma_1)]_{C_{\bullet}(t_1^3)} = \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{\varepsilon} \end{pmatrix}$$



Рис. 13. Окрестность вершин с номерами i , $i+1$ и $i+2$ у деревьев t (слева) и t' (справа).

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \\
 &= [\rho_\bullet^3(\sigma_2) \circ \rho_\bullet^3(\sigma_1) \circ \rho_\bullet^3(\sigma_2)]_{C_\bullet(t_i^3)}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что справедливость утверждений теоремы в случае, когда $n > 3$, следует из простейшего случая $n = 3$ и $i = 1$. В самом деле, пусть t — бинарное корневое дерево порядка n , у которого окрестность концевых вершин с номерами i , $i+1$ и $i+2$ имеет вид, изображенный на рис. 13 слева. Обозначим $e \in E(t)$ ребро, инцидентное общей вершине концевых ребер с номерами i и $i+1$. Упорядочим базис $C_o(t)$ пространства V_o^t так, чтобы каждые две раскраски, отличающиеся только цветом ребра e , были соседними (сначала шла раскраска ребра e белым цветом, а потом — черным).

Пусть дерево t' получается из дерева t одним F -преобразованием вдоль ребра e . Окрестность концевых вершин с номерами i , $i+1$ и $i+2$ дерева t' изображена на рис. 13 справа. Выберем порядок на базисе $C_o(t')$ пространства $V_o^{t'}$, индуцированный порядком на базисе $C_o(t)$.

В выбранных базисах матрицы $[\rho_o(\sigma_i)]_{C_o(t)}$ и $[\rho_o(\sigma_{i+1})]_{C_o(t')}$ имеют блочно-диагональный вид и состоят из блоков (β_ε) и $\begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix}$. Матрица перехода $[\mathcal{I}_o^{t \rightarrow t'}]$ тоже имеет блочно-диагональный вид и состоит из блоков

$$(1) \text{ и } \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

причем блоки размера 2×2 в матрицах $[\rho_o(\sigma_i)]_{C_o(t)}$, $[\rho_o(\sigma_{i+1})]_{C_o(t')}$ и $[\mathcal{I}_o^{t \rightarrow t'}]$ стоят на одинаковых местах.

Таким образом, справедливость соотношения $[\rho_o^n(\sigma_i)]_{C_o(t)} \cdot [\rho_o^n(\sigma_{i+1})]_{C_o(t)} \cdot [\rho_o^n(\sigma_i)]_{C_o(t)} = [\rho_o^n(\sigma_{i+1})]_{C_o(t)} \cdot [\rho_o^n(\sigma_i)]_{C_o(t)} \cdot [\rho_o^n(\sigma_{i+1})]_{C_o(t)}$ следует из уже рассмотренного случая $n = 3$ и $i = 1$. Доказательство второго утверждения теоремы аналогично.

Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 следует, что построенные гомоморфизмы ρ_o^n и $\rho_\bullet^n$ действительно являются представлениями группы кос B_n на пространствах V_o^n и $V_\bullet^n$ соответственно.

З а м е ч а н и е 3. Так как элемент β_ε является одним из комплексных корней степени 10 из единицы, то все изоморфизмы $\rho_o^n(\sigma_i): V_o^n \rightarrow V_o^n$, $i = 1, \dots, n-1$, имеют порядок 10. Следовательно, представления ρ_o и $\rho_\bullet$ не являются точными.

4. Продолжение представлений ρ_o^n до инварианта зацеплений

Целью этого раздела является построение продолжения представлений ρ_o^n на множество диаграмм зацеплений на двумерной сфере. В результате каждой диаграмме L неориентированного зацепления будет сопоставлено значение инварианта $\varphi(L) \in \mathbb{C}$.

4.1. Разбиения диаграмм на слои $c_{n,i}^{\pm 1}$, $b_{n,i}$ и $d_{n,i}$

Пусть L — диаграмма неориентированного зацепления на двумерной сфере. Конечным семейством параллельных прямых, пересекающихся с диаграммой трансверсально, она разбивается на слои следующего вида:

- 1) $c_{n,i}$ и $c_{n,i}^{-1}$ (первые две диаграммы на рис. 14). Слой $c_{n,i}$ — это в точности элементарная коса $\sigma_i \in B_n$, а слой $c_{n,i}^{-1}$ — это обратная к ней коса $\sigma_i^{-1} \in B_n$;
- 2) $b_{n,i}$ (третья диаграмма на рис. 14). Левая сторона слоя $b_{n,i}$ пересекается с диаграммой в $n-2$ точках, а правая — в n ;
- 3) $d_{n,i}$ (четвертая диаграмма на рис. 14). Левая сторона слоя $d_{n,i}$ пересекается с диаграммой в n точках, а правая — в $n-2$.

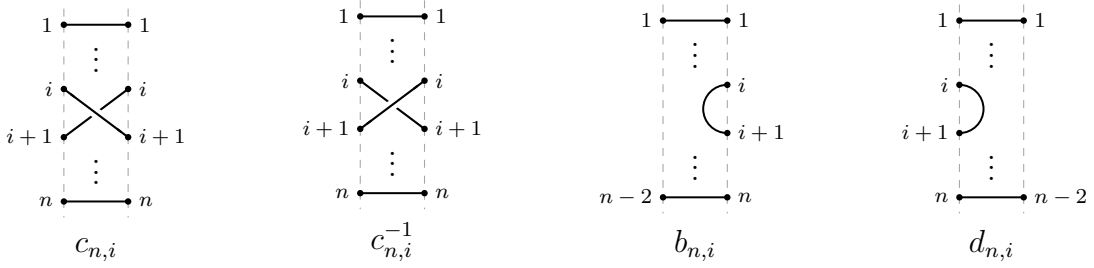


Рис. 14. Слои, на которые диаграмма зацепления разбивается конечным набором параллельных прямых.

4.2. Отображения $\rho_o(c_{n,i}^{\pm 1})$, $\rho_o(b_{n,i})$ и $\rho_o(d_{n,i})$

Пространства V_o^n определены при $n \geq 2$. Положим $V_o^0 = V_o^1 = \mathbb{C}$. Определим следующее семейство линейных отображений:

$$\rho_o(c_{n,i}^{\pm 1}): V_o^n \rightarrow V_o^n, \rho_o(b_{n,i}): V_o^{n-2} \rightarrow V_o^n \text{ и } \rho_o(d_{n,i}): V_o^n \rightarrow V_o^{n-2}.$$

Положим $\rho_o(c_{n,i}) = \rho_o^n(\sigma_i)$ и $\rho_o(c_{n,i}^{-1}) = \rho_o^n(\sigma_i)^{-1}$.

Пусть t — бинарное корневое дерево порядка $n-2$, $n \geq 4$, и пусть $C_o(t) = \{\xi_1, \dots, \xi_{f_{n-3}}\}$ — базис пространства V_o^t . Зададим образ $\rho_o(b_{n,i})(\xi_j)$, $j = 1, \dots, f_{n-3}$, следующим образом. Построим дерево t' , которое получается из дерева t приклеиванием бинарного корневого дерева порядка 2 либо к $i-1$ -му концевому ребру справа, либо к i -му концевому ребру слева по корневой вершине (см. рис. 15). Тогда $\rho_o(b_{n,i})(\xi_j) = \sqrt{\varepsilon} \xi'_j$, где ξ'_j — такая правильная раскраска дерева t' , при которой ребро, инцидентное общей вершине двух новых концевых ребер (которые добавляются к дереву t), раскрашено в белый цвет, а цвета всех остальных ребер совпадают с цветами дерева t . В случае $n=2$ исходное дерево t является пустым. Тогда новое дерево t' — это просто единственное бинарное корневое дерево порядка 2.

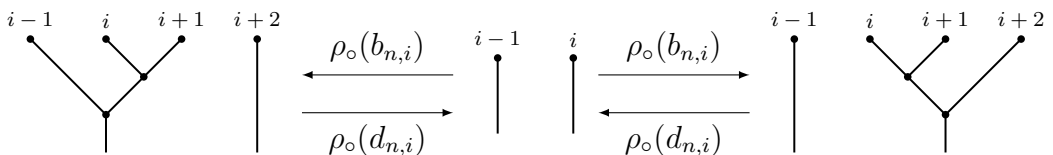


Рис. 15. Преобразование дерева под действием $\rho_o(b_{n,i})$ и $\rho_o(d_{n,i})$.

Пусть t — бинарное корневое дерево порядка n , $n \geq 4$, у которого концевые ребра с номерами i и $i+1$ инцидентны общей вершине. Пусть $C_o(t) = \{\xi_1, \dots, \xi_{f_{n-1}}\}$ — базис пространства V_o^t . Зададим образ $\rho_o(d_{n,i})(\xi_j)$, $j = 1, \dots, f_{n-1}$, следующим образом. Построим дерево t' удалением из t двух ребер $x, y \in E(t)$, инцидентных концевым вершинам с номерами i и $i+1$ соответственно, а также ребра $z \in E(t)$, инцидентного их общей вершине (см. рис. 15). Полученное дерево t' является бинарным корневым деревом порядка $n-2$. Тогда

$$\rho_o(d_{n,i})(\xi_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_j(z) = 1, \\ \sqrt{\varepsilon} \xi'_j, & \text{если } \xi_j(z) = 0, \end{cases}$$

где раскраска ξ'_j дерева t' совпадает с раскраской ξ_j дерева t на всех оставшихся ребрах $E(t) \setminus \{x, y, z\}$. В случае $n = 2$ результатом действия отображения $\rho_o(d_{n,i})$ является константа $\sqrt{\varepsilon}$.

Пример 6. На рис. 16 сверху изображен результат действия отображения $\rho_o(b_{6,3})$, а снизу — результат действия отображения $\rho_o(d_{5,2})$:

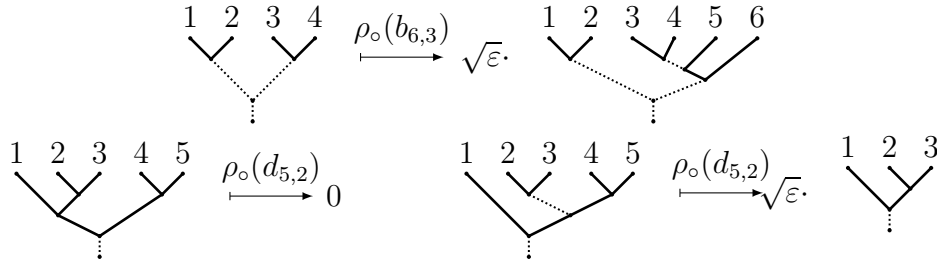


Рис. 16. Пример действия $\rho_o(b_{6,3})$ (сверху) и $\rho_o(d_{5,2})$ (снизу).

Лемма 1. Для всех $n \geq 4$ и $i = 1, \dots, n-2$ справедливы следующие соотношения:

1. $\rho_o(d_{n,i}) \circ \rho_o(b_{n,i+1}) = id.$
2. $\rho_o(d_{n,i+1}) \circ \rho_o(b_{n,i}) = id.$
3. $\rho_o(d_{n,i+1}) \circ \rho_o(c_{n,i}) = \rho_o(d_{n,i}) \circ \rho_o(c_{n,i+1}^{-1}).$
4. $\rho_o(d_{n,i+1}) \circ \rho_o(c_{n,i}^{-1}) = \rho_o(d_{n,i}) \circ \rho_o(c_{n,i+1}).$

Замечание 4. Диаграммы, соответствующие соотношениям из утверждения леммы 1, изображены на рис. 17. Первые два изображены сверху, третье и четвертое — снизу слева и справа соответственно.

Доказательство. Заметим, что аналогично доказательству теоремы 3, каждое из утверждений леммы достаточно доказать лишь в простейшем случае $n = 4$.

Обозначим t_1 бинарное корневое дерево порядка 2 (рис. 18 слева), t_2 — левое регулярное бинарное корневое дерево порядка 4 (рис. 18 в центре), t_3 — бинарное корневое дерево порядка 4, изображенное на рис. 18 справа.

Зафиксируем базис $C_o(t_1) = \{\xi\}$ пространства $V_o^{t_1}$ (рис. 19 слева), $C_o(t_2) = \{\eta_1, \eta_2\}$ пространства $V_o^{t_2}$ (рис. 19 в центре), $C_o(t_3) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ пространства $V_o^{t_3}$ (рис. 19 справа).

Первое утверждение $\rho_o(d_{4,1}) \circ \rho_o(b_{4,2}) = id$ (оно соответствует случаю $n = 4$ и $i = 1$) доказывается непосредственными вычислениями:

$$\begin{aligned} \rho_o(b_{4,2})(\xi) &= \sqrt{\varepsilon} \zeta_1, \\ \mathcal{I}_o^{t_3 \rightarrow t_2}(\sqrt{\varepsilon} \zeta_1) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta_1 + \eta_2, \\ \rho_o(d_{4,1})\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta_1 + \eta_2\right) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} \xi + 0 = \xi. \end{aligned}$$

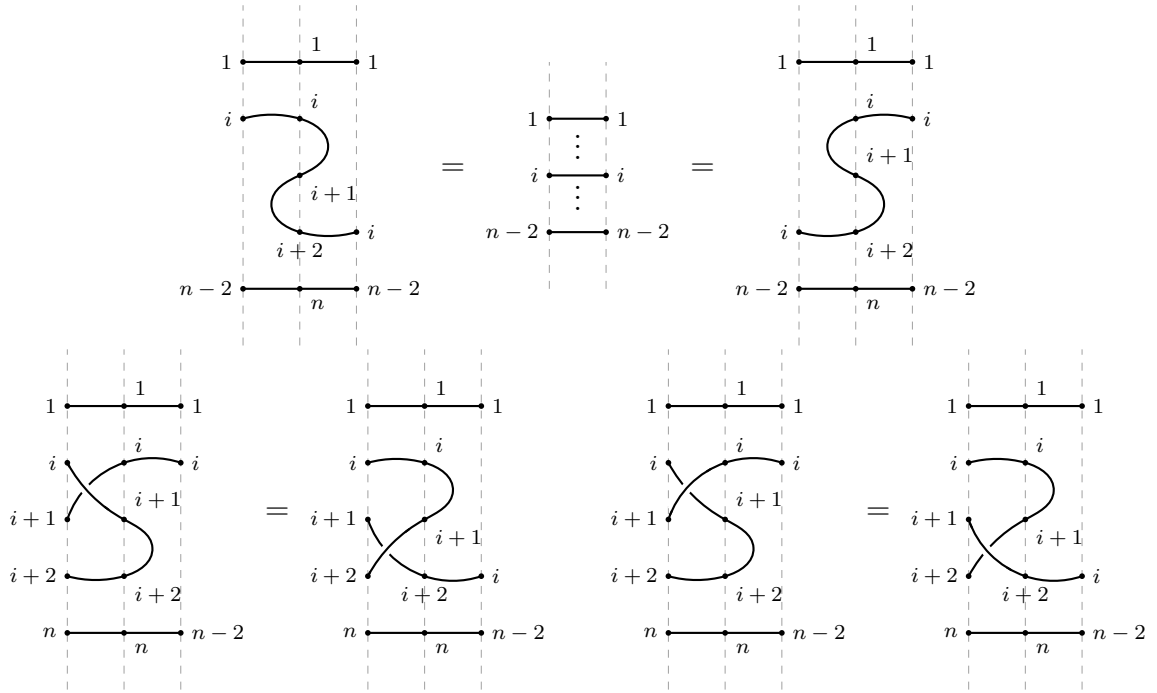


Рис. 17. Локальные преобразования диаграмм зацеплений.

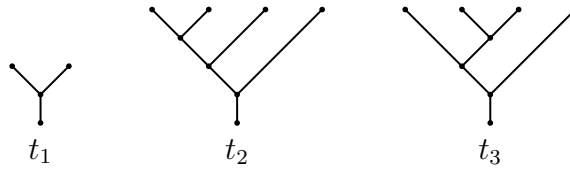


Рис. 18. Три бинарных коревых дерева (порядка 2 слева и порядка 4 в центре и справа).

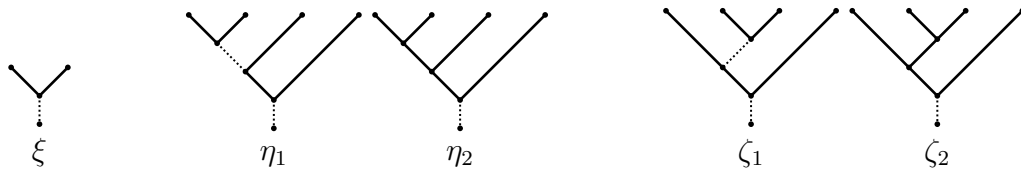


Рис. 19. Базисы пространств $V_o^{t_1}$ (слева), $V_o^{t_2}$ (в центре) и $V_o^{t_3}$ (справа).

Изоморфизм $\mathcal{I}_o^{t_3 \rightarrow t_2}$ на втором шаге применяется для того, чтобы на третьем шаге можно было использовать определение линейного отображения $\rho_o(d_{4,1})$. Вычисления для случая $i = 2$ аналогичны.

Второе утверждение леммы $\rho_o(d_{4,2}) \circ \rho_o(b_{4,1}) = id$ доказываем аналогично.

Докажем третье утверждение леммы $\rho_o(d_{4,2}) \circ \rho_o(c_{4,1}) = \rho_o(d_{4,1}) \circ \rho_o(c_{4,2}^{-1})$ (оно соответствует случаю $n = 4$ и $i = 1$). Отображение $\rho_o(c_{4,1})$ в базисе $C_o(t_2)$ имеет матрицу

$$[\rho_o(c_{4,1})]_{C_o(t_2)} = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Матрица изоморфизма $\mathcal{I}_o^{t_2 \rightarrow t_3}$ в базисах $C_o(t_2)$ и $C_o(t_3)$ имеет вид

$$[\mathcal{I}_o^{t_2 \rightarrow t_3}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Отображение $\rho_o(d_{4,2})$ в базисах $C_o(t_3)$ и $C_o(t_1)$ имеет матрицу $[\rho_o(d_{4,2})]_{C_o(t_3), C_o(t_1)} = (\sqrt{\varepsilon} \ 0)$. Следовательно, матрица линейного отображения, которое задает левую часть требуемого соотношения, в базисах $C_o(t_2)$ и $C_o(t_1)$ имеет вид

$$[\rho_o(d_{4,2}) \circ \rho_o(c_{4,1})]_{C_o(t_2), C_o(t_1)} = (\sqrt{\varepsilon} \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon}} & \beta_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом вычисляем матрицу линейного отображения, которое задает правую часть требуемого соотношения, в тех же самых базисах $C_o(t_2)$ и $C_o(t_1)$:

$$\begin{aligned} [\rho_o(d_{4,1}) \circ \rho_o(c_{4,2}^{-1})]_{C_o(t_2), C_o(t_1)} &= [\rho_o(d_{4,1})]_{C_o(t_2), C_o(t_1)} \cdot [\mathcal{I}_o^{t_3 \rightarrow t_2}] \cdot [\rho_o(c_{4,2}^{-1})]_{C_o(t_3)} \cdot [\mathcal{I}_o^{t_2 \rightarrow t_3}] \\ &= (\sqrt{\varepsilon} \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_\varepsilon^2 \varepsilon \sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\beta_\varepsilon \sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\beta_\varepsilon^2 \varepsilon} - \frac{1}{\beta_\varepsilon \varepsilon} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\frac{\beta_\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\beta_\varepsilon^2 \varepsilon \sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\beta_\varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \beta_\varepsilon = \frac{1}{\beta_\varepsilon^2 \varepsilon} - \frac{1}{\beta_\varepsilon \varepsilon}.$$

Это следует из того, что $\beta_\varepsilon^4 = \beta_\varepsilon + \varepsilon - 1$ и $\beta_\varepsilon^3 = (1 - \beta_\varepsilon)\varepsilon^{-1}$. Вычисления для случая $i = 2$ аналогичны.

Четвертое утверждение леммы $\rho_o(d_{4,2}) \circ \rho_o(c_{4,1}^{-1}) = \rho_o(d_{4,1}) \circ \rho_o(c_{4,2})$ доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 2. Для всех $n \geq 4$ и $i = 2, \dots, n-1$

1. $\rho_o(d_{n,i}) \circ \rho_o(c_{n,i-1}) \circ \rho_o(b_{n,i}) = \beta_\varepsilon^{-2} id$.
2. $\rho_o(d_{n,i}) \circ \rho_o(c_{n,i-1}^{-1}) \circ \rho_o(b_{n,i}) = \beta_\varepsilon^2 id$.

З а м е ч а н и е 5. Диаграмма, соответствующая первому соотношению из утверждения леммы 2, изображена на рис. 20 слева, а второму — справа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подобно доказательствам теоремы 3 и леммы 1 утверждения достаточно доказать для простейшего случая $n = 4$.

Докажем первое утверждение $\rho_o(d_{4,2}) \circ \rho_o(c_{4,1}) \circ \rho_o(b_{4,2}) = \beta_\varepsilon^{-2} id$ (оно соответствует случаю $i = 2$).

Как и в доказательстве леммы 1 зафиксируем бинарные корневые деревья t_1 (порядка 2), t_2 и t_3 (порядка 4), изображенные на рис. 18. Зафиксируем базисы $C_o(t_1) = \{\xi\}$ пространства $V_o^{t_1}$,

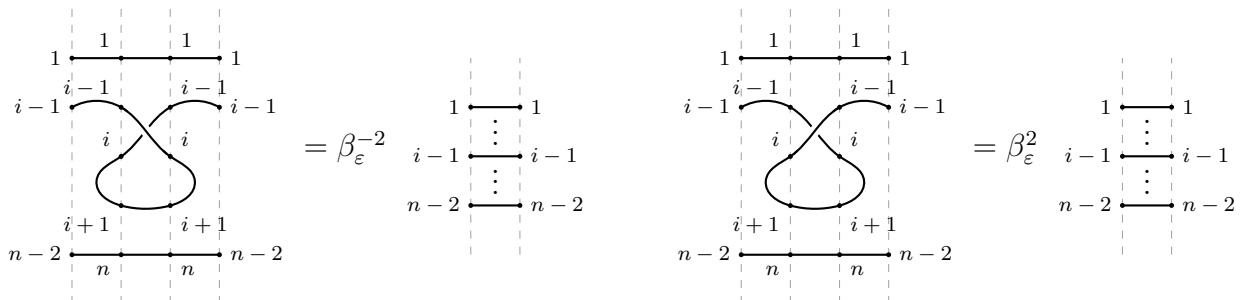


Рис. 20. Преобразования скручивания диаграммы зацепления.

$C_o(t_2) = \{\eta_1, \eta_2\}$ пространства $V_o^{t_2}$, и $C_o(t_3) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ пространства $V_o^{t_3}$ (соответствующие правильные раскраски изображены на рис. 19).

По определению находим, что матрица отображения $\rho_o(b_{4,2})$ в базисах $C_o(t_1)$ и $C_o(t_3)$ может быть представлена как $[\rho_o(b_{4,2})]_{C_o(t_1), C_o(t_3)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix}$, матрица отображения $\rho_o(c_{4,1})$ в базисе $C_o(t_2)$ — как $[\rho_o(c_{4,1})]_{C_o(t_2)} = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix}$, и матрица отображения $\rho_o(d_{4,2})$ в базисах $C_o(t_3)$ и $C_o(t_1)$ — как $[\rho_o(d_{4,2})]_{C_o(t_3), C_o(t_1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица отображения, соответствующего левой части требуемого соотношения, в базисе $C_o(t_1)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & [\rho_o(d_{4,2}) \circ \rho_o(c_{4,1}) \circ \rho_o(b_{4,2})]_{C_o(t_1)} \\ &= [\rho_o(d_{4,2})]_{C_o(t_3), C_o(t_1)} [I_o^{t_2 \rightarrow t_3}] [\rho_o(c_{4,1})]_{C_o(t_2)} [I_o^{t_3 \rightarrow t_2}] [\rho_o(b_{4,2})]_{C_o(t_1), C_o(t_3)} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \beta_\varepsilon = (\beta_\varepsilon^{-2}). \end{aligned}$$

Первое утверждение леммы для случая $n = 4$ и $i = 3$, а также второе утверждение леммы доказываются аналогично.

Лемма доказана.

4.3. Инвариант φ

Пусть L — диаграмма неориентированного зацепления на двумерной сфере, и пусть конечным набором параллельных прямых, пересекающихся с L трансверсально, она разбивается на слои $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, где каждый из слоев λ_j , $j = 1, \dots, k$, имеет тип $c_{n,i}^{\pm 1}$, $b_{n,i}$ или $d_{n,i}$ для подходящих $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Определим

$$\mathcal{S}(L) = \rho_o(\lambda_k) \circ \rho_o(\lambda_{k-1}) \circ \dots \circ \rho_o(\lambda_1).$$

Результатом этой композиции является линейное отображение из $\mathbb{C}$ в себя, которое однозначно задается одним комплексным числом. Это число отождествляется со значением $\mathcal{S}(L)$.

Пусть $L = L_1 \cup \dots \cup L_s$ — диаграмма неориентированного зацепления на двумерной сфере. Для каждой компоненты L_i , $i = 1, \dots, s$, обозначим $w(L_i)$ разность числа положительных и отрицательных двойных точек диаграммы L_i . Отметим, что величина $w(L_i)$ определена корректно, для ее вычисления можно выбрать любую ориентацию компоненты L_i , результат от этого не зависит. Положим

$$w(L) = \sum_{i=1}^s w(L_i).$$

Определим

$$\varphi(L) = \frac{\beta_\varepsilon^{2w(L)}}{\varepsilon} \mathcal{S}(L).$$

Теорема 4. Пусть L_1 и L_2 — две диаграммы одного зацепления. Тогда $\varphi(L_1) = \varphi(L_2)$.

Доказательство. Хорошо известно, что любые две диаграммы неориентированного зацепления связаны конечной последовательностью движений Редемейстера $R_1^\pm, R_2, R_3$ (см. рис. 21) и обратных к ним. Помимо этого любые две диаграммы, разбитые наборами параллельных прямых на слои вида $c_{n,i}^{\pm 1}, b_{n,i}$ и $d_{n,i}$, связаны дополнительными локальными движениями, изображенными на рис. 17 (см., например, [13]). Поэтому теорему достаточно доказать для случая, когда диаграмма L_2 получается из диаграммы L_1 одним из этих движений.

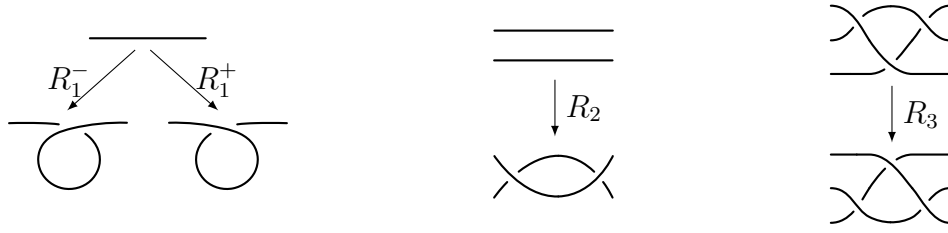


Рис. 21. Три движения Рейдемейстера.

Из теоремы 3 и леммы 1 следует, что, во-первых, значение $\mathcal{S}(L)$ не зависит от выбора семейства прямых, разбивающих диаграмму на слои $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, и, во-вторых, это значение не меняется при движениях R_2 и R_3 . Величина $w(L)$ также не меняется при этих движениях, поэтому если диаграмма L_2 получается из диаграммы L_1 с помощью движения R_2 или R_3 , то $\varphi(L_1) = \varphi(L_2)$.

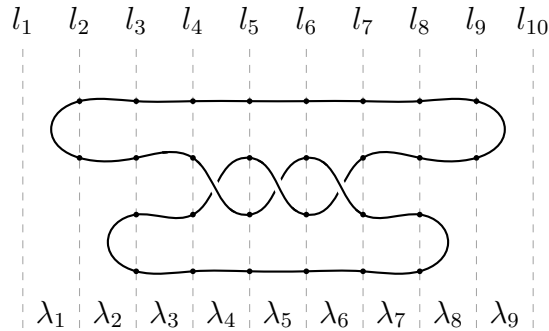
Из леммы 2 следует, что если диаграмма L_2 получается из диаграммы L_1 с помощью движения R_1^+ , то $\mathcal{S}(L_2) = \beta_\varepsilon^{-2} \mathcal{S}(L_1)$. Но в этом случае $w(L_2) = w(L_1) + 1$. Следовательно, $\varphi(L_2) = \varphi(L_1)$. Аналогичным образом, если диаграмма L_2 получается из диаграммы L_1 с помощью движения R_1^- , то из леммы 2 следует, что $\mathcal{S}(L_2) = \beta_\varepsilon^2 \cdot \mathcal{S}(L_1)$. Но так как в этом случае $w(L_2) = w(L_1) - 1$, то $\varphi(L_2) = \varphi(L_1)$.

Теорема доказана.

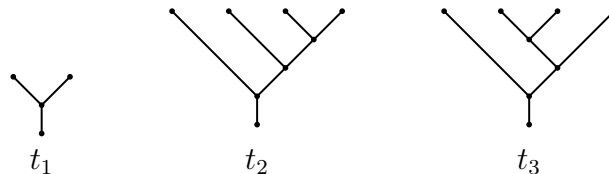
З а м е ч а н и е 6. Коэффициент ε^{-1} в определении инварианта φ выбран так, чтобы значение инварианта для тривиального узла равнялось 1.

5. Пример вычисления инварианта φ

Вычислим значение инварианта φ для узла “трилистник” $\mathcal{T}$, диаграмма T которого изображена на рис. 22.

Рис. 22. Диаграмма T узла “трилистник” $\mathcal{T}$, разбитая на слои.

Зафиксируем бинарные корневые деревья t_1 , t_2 и t_3 , изображенные на рис. 23, и базисы $C_o(t_1) = \{\xi\}$, $C_o(t_2) = \{\eta_1, \eta_2\}$, $C_o(t_3) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, изображенные на рис. 24.

Рис. 23. Деревья t_1, t_2 и t_3 .

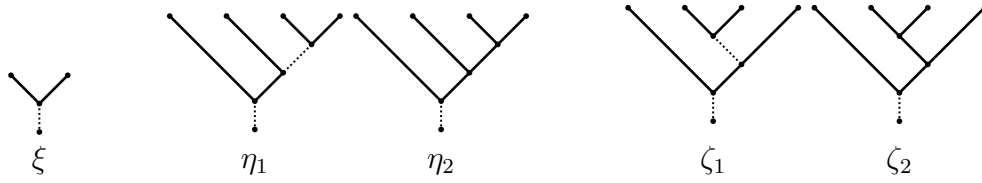


Рис. 24. Базисные элементы пространств $V_0^{t_1}$, $V_0^{t_2}$ и $V_0^{t_3}$.

Набор параллельных прямых $l_1, \dots, l_{10}$ разбивает диаграмму T на девять слоев $\lambda_1, \dots, \lambda_9$ (см. рис. 22), где $\lambda_1 = b_{2,1}$, $\lambda_2 = b_{4,3}$, $\lambda_3 = \mathcal{I}_0^{t_2 \rightarrow t_3}$, $\lambda_4 = c_{4,2}$, $\lambda_5 = c_{4,2}$, $\lambda_6 = c_{4,2}$, $\lambda_7 = \mathcal{I}_0^{t_3 \rightarrow t_2}$, $\lambda_8 = d_{4,3}$, $\lambda_9 = d_{2,1}$.

Вычисляем, что

$$\mathcal{S}(T) = \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 1 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 1 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} = \beta_\varepsilon^6 + \varepsilon \beta_\varepsilon^3 = 1 - 2\beta_\varepsilon.$$

При вычислениях использовался тот факт, что $\beta_\varepsilon^5 = -1$ и $\beta_\varepsilon^3 = \varepsilon(1 - \beta_\varepsilon)$.

Так как $w(T) = 3$, то окончательно находим

$$\varphi(T) = \frac{\beta_\varepsilon^6}{\varepsilon} \mathcal{S}(T) = \beta_\varepsilon(\varepsilon - 1)(2\beta_\varepsilon - 1).$$

Таким образом, значение инварианта φ для узла “трилистник” равно $\beta_\varepsilon(\varepsilon - 1)(2\beta_\varepsilon - 1)$. Конкретное комплексное значение получается выбором значений параметров ε и β_ε .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bigelow S.L.** Braid groups are linear // J. American Math. Soc. 2001. Vol. 14, no. 2. P. 471–486. doi: 10.1090/S0894-0347-00-00361-1
2. **Burau W.** Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1935. Vol. 11. P. 179–186. doi: 10.1007/BF02940722
3. **Kassel C., Turaev V.** Braid groups. Ser. Graduate Texts in Math. Vol. 247. 2008. 348 p. doi: 10.1007/978-0-387-68548-9
4. **Kauffman L.H., Lomanco S.J.** The Fibonacci model and the Temperley–Lieb algebra // Internat. J. Modern Phys. B. 2009. Vol. 22, no. 29. P. 5065–5080. doi: 10.1142/S0217979208049303
5. **Korablev Ph.** Invariants for links and 3-manifolds from the modular category with two simple objects. Preprint arXiv:2305.00733 [math.GT]. 28 p. URL: <https://arxiv.org/abs/2305.00733>. doi: 10.48550/arXiv.2305.00733
6. **Krammer D.** The braid group B_4 is linear // Inventiones Mathematicae. 2000. Vol. 142. P. 451–486. doi: 10.1007/s002220000088
7. **Lawrence R.J.** Homological representations of the Hecke algebra // Communic. Math. Phys. 1990. Vol. 135, no. 1. P. 141–191. doi: 10.1007/BF02097660
8. **Matveev S.V., Ovchinnikov M.A., Sokolov M.V.** Construction and properties of the t -invariant // J. Math. Sci. 2003. Vol. 113, no. 6. P. 849–855. doi: 10.1023/A:1021247621259
9. **Reshetikhin N., Turaev V.** Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups // Inventiones mathematicae. 1991. Vol. 103, no. 3. P. 547–597. doi: 10.1007/BF01239527
10. **Stanley R.P.** Catalan numbers. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. 215 p. doi: 10.1017/CBO9781139871495
11. **Turaev V.** Faithful linear representations of the braid groups // Seminaire Bourbaki. 1999–2000. Vol. 42. P. 389–409.
12. **Turaev V.G.** Quantum invariants of knots and 3-manifolds. Ser. De Gruyter Studies in Math. 2016. 596 p. doi: 10.1515/9783110435221

13. **Turaev V.** Operator invariants of tangles, and R -matrices // *Math. USSR Izvestiya*. 1990. Vol. 35. P. 411–444. doi: 10.1070/IM1990v035n02ABEH000711
14. **Turaev V., Virelizier A.** Monoidal categories and topological field theory. Cham: Birkhäuser, 2017. 513 p. doi: 10.1007/978-3-319-49834-8
15. **Wang Z.** Topological quantum computation. CBMS Regional Conference Ser. in Math. 2010. Vol. 112. 115 p. doi: 10.1090/cbms/112

Поступила 10.02.2024

После доработки 28.07.2024

Принята к публикации 5.08.2024

Кораблев Филипп Глебович

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург;

доцент

Челябинский государственный университет

г. Челябинск

e-mail: korablev@csu.ru

REFERENCES

1. Bigelow S.L. Braid groups are linear. *J. American Math. Soc.*, 2001, vol. 14, no. 2, pp. 471–486. doi: 10.1090/S0894-0347-00-00361-1
2. Burau W. Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 1935, vol. 11, pp. 179–186. doi: 10.1007/BF02940722
3. Kassel C., Turaev V. *Braid groups*. Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 247, 2008, 348 p. doi: 10.1007/978-0-387-68548-9
4. Kauffman L.H., Lomanco S.J. The Fibonacci model and the Temperley–Lieb algebra. *Internat. J. Modern Phys. B*, 2009, vol. 22, no. 29, pp. 5065–5080. doi: 10.1142/S0217979208049303
5. Korablev Ph. *Invariants for links and 3-manifolds from the modular category with two simple objects*. Preprint arXiv:2305.00733 [math.GT]. 28 p. Available at: <https://arxiv.org/abs/2305.00733>. doi: 10.48550/arXiv.2305.00733
6. Krammer D. The braid group B_4 is linear. *Inventiones Mathematicae*, 2000, vol. 142, pp. 451–486. doi: 10.1007/s002220000088
7. Lawrence R.J. Homological representations of the Hecke algebra. *Communic. Math. Phys.*, 1990, vol. 135, no. 1, pp. 141–191. doi: 10.1007/BF02097660
8. Matveev S.V., Ovchinnikov M.A., Sokolov M.V. Construction and properties of the t -invariant. *J. Math. Sci.*, 2003, vol. 113, no. 6, pp. 849–855. doi: 10.1023/A:1021247621259
9. Reshetikhin N., Turaev V. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Inventiones mathematicae*, 1991, vol. 103, no. 3, pp. 547–597. doi: 10.1007/BF01239527
10. Stanley R.P. *Catalan numbers*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015, 215 p. doi: 10.1017/CBO9781139871495
11. Turaev V. Faithful linear representations of the braid groups. *Seminaire Bourbaki*, 1999–2000, vol. 42, pp. 389–409.
12. Turaev V.G. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. Ser. De Gruyter Studies in Mathematics, 2016, 596 p. doi: 10.1515/9783110435221
13. Turaev V. Operator invariants of tangles, and R -matrices. *Math. USSR Izvestiya*, 1990, vol. 35, pp. 411–444. doi: 10.1070/IM1990v035n02ABEH000711

-
14. Turaev V., Virelizier A. *Monoidal categories and topological field theory*. Cham, Birkhäuser, 2017, 513 p. doi: 10.1007/978-3-319-49834-8
 15. Wang Z. *Topological quantum computation*. CBMS Regional Conference Ser. in Math, 2010, vol. 112, 115 p. doi: 10.1090/cbms/112

Received February 10, 2024

Revised July 28, 2024

Accepted August 5, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-10014, <https://rscf.ru/en/project/23-21-10014/>).

Philipp Glebovich Korablev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: korablev@csu.ru.

Cite this article as: F.G.Korablev. Fibonacci representations of braid groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 149–169.