

УДК 512.542

О СУЩЕСТВОВАНИИ СПОРАДИЧЕСКОГО КОМПОЗИЦИОННОГО
ФАКТОРА В НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество всех порядков ее элементов (ее спектр). Графом простых чисел (или графом Грюнберга — Кегеля) конечной группы G называется граф $GK(G)$, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq . Графы простых чисел простых неабелевых групп известны. Одним из популярных направлений исследований в теории конечных групп является изучение групп по свойствам их графов простых чисел. Мы исследуем неабелевы композиционные факторы конечных групп с графом простых чисел как у известной простой группы. В 2011 г. А. М. Старолетов изучил конечные группы, имеющие спектр как у конечной простой группы и спорадический композиционный фактор. Обобщая этот результат, мы рассматриваем в статье вопрос о том, может ли композиционный фактор конечной группы с графом простых чисел как у конечной простой группы быть изоморфным спорадической группе. Показано, что конечная группа с графом простых чисел как у простой исключительной группы лиева типа, отличной от $G_2(q)$ и ${}^3D_4(q)$, или как у простых классических групп $L_n(q)$, $U_n(q)$, $O_{2n+1}(q)$, $S_{2n}(q)$ для достаточно большого n не имеет спорадических композиционных факторов, отличных от F_1 . Кроме того, описаны спорадические композиционные факторы S конечных групп G с условиями $GK(G) = GK(H)$ и $\pi(G) = \pi(S)$, где H — простая знакопеременная группа или простая группа лиева типа.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, спорадическая группа, исключительная группа лиева типа, классическая группа, граф простых чисел (граф Грюнберга — Кегеля).

M. R. Zinov'eva. On the existence of a sporadic composition factor in some finite groups.

Assume that G is a finite group, $\pi(G)$ is the set of all prime divisors of its order, and $\omega(G)$ is the set of all orders of its elements (its spectrum). The prime graph (or the Gruenberg–Kegel graph) of a finite group G is a graph $GK(G)$ such that its vertices are the prime divisors of the order of G and two distinct vertices p and q are adjacent in $GK(G)$ if and only if G contains an element of order pq . The prime graphs of nonabelian finite simple groups are known. One of the most popular fields of research in finite group theory is the study of finite groups by the properties of their prime graphs. We study nonabelian composition factors of finite groups whose prime graphs are the same as the prime graphs of known simple groups. In 2011, A.M. Staroletov studied finite groups with a sporadic composition factor whose spectrum is the same as the spectrum of a finite simple group. Generalizing this result, we consider the question of whether a composition factor of a finite group whose prime graph is the same as the prime graph of a finite simple group can be isomorphic to a sporadic group. It is shown that a finite group whose prime graph is the same as the prime graph of a simple exceptional group of Lie type other than $G_2(q)$ and ${}^3D_4(q)$ or the prime graph of simple classical groups $L_n(q)$, $U_n(q)$, $O_{2n+1}(q)$, and $S_{2n}(q)$ for large enough n has no sporadic composition factors other than F_1 . In addition, we describe sporadic composition factors S of finite groups G with the conditions $GK(G) = GK(H)$ and $\pi(G) = \pi(S)$, where H is a simple alternating group or a simple group of Lie type.

Keywords: finite group, simple group, sporadic group, exceptional group of Lie type, classical group, Gruenberg–Kegel graph (prime graph).

MSC: 20D06, 20D20, 20D60, 20C20, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-134-148

Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество всех порядков ее элементов (ее спектр). На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом простых чисел* или *графом Грюнберга — Кегеля* группы G и обозначается через $GK(G)$.

Кокликой графа называется его индуцированный подграф с попарно не смежными вершинами. Мощность (размер) коклики называется ее *порядком*. *Максимальной кокликой* называется коклика, которая не содержится в другой коклике. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(r, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число r .

В теории конечных групп популярным является направление исследования конечных групп по свойствам графа простых чисел. Например, обзор результатов можно найти в [1].

А. М. Старолетов в [2] изучил конечные группы со спектром, как у конечной простой неабелевой группы, имеющие спорадический композиционный фактор.

Мы рассматриваем следующую более общую задачу: может ли конечная группа с графом простых чисел, как у конечной простой неабелевой группы иметь композиционный фактор, изоморфный простой спорадической группе. В рамках этой задачи мы получили следующие результаты.

Далее $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Пусть H — конечная простая исключительная группа лиева типа, отличная от ${}^3D_4(q)$ и $G_2(q)$, G — конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S — композиционный фактор группы G . Тогда S не является спорадической группой.

Заметим, что из [3] следует, что конечная группа с графом простых чисел, как у одной из групп $F_4(q)$, где q четно, ${}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2m+1} > 2$, $E_8(q)$ не имеет спорадических композиционных факторов.

Теорема 2. Пусть $H \in \{L_n(q), U_n(q)\}$ — конечная простая линейная или унитарная группа, $n \geq 12$, G — конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S — композиционный фактор группы G , не изоморфный F_1 . Тогда S не является спорадической группой.

Теорема 3. Пусть $H \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$ — конечная простая группа, $n \geq 9$, G — конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S — композиционный фактор группы G . Тогда S не является спорадической группой.

В теореме 4 мы описываем конечные группы с графом простых чисел, как у конечной простой группы, у которых множество простых делителей ее порядка совпадает со множеством простых делителей ее спорадического фактора.

Теорема 4. Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является простой знакопеременной группой или простой группой лиева типа, S — спорадический композиционный фактор группы G и $\pi(G) = \pi(S)$. Тогда пара (H, S) одна из следующих: (A_9, J_2) , (A_{10}, J_2) , (A_{16}, Fi_{22}) , (A_{16}, Suz) , $(L_2(11), M_{11})$, $(U_5(2), M_{11})$, $(U_6(2), HS)$, $(S_8(2), He)$, $(O_8^+(2), J_2)$, $(S_6(2), J_2)$.

В теореме 5 мы рассматриваем конечные группы с графом простых чисел, как у конечной простой группы, у которых множество простых делителей ее порядка отличается на одно простое число от простых делителей ее спорадического фактора, изоморфного J_2 . Заметим, что группы из условия теоремы 5 являются 5-примарными, а граф простых чисел такой группы содержит треугольник. А.С. Кондратьев в [4] описал конечные 4-примарные группы с несвязным графом простых чисел, содержащим треугольник.

Теорема 5. Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является простой знакопеременной группой или простой группой лиева типа, S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе J_2 ; $\pi(G) = \pi(S) \cup \{r\}$, где r — простое число и $r > 7$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:

- (1) граф $GK(G)$ несвязен и $H \in \{L_2(2401), L_2(4801), U_3(19), U_6(2), S_8(2)\}$;
- (2) граф $GK(G)$ связан и $H \in \{L_4(4), U_4(5)\}$.

Данная статья открывает серию работ автора о возможных композиционных факторах конечных групп, имеющих граф Грюнберга — Кегеля, как у конечной простой группы.

Мы используем стандартные обозначения, которые можно найти, например, в [5].

1. Предварительные результаты

Лемма 1 [6]. Пусть q и n — неединичные натуральные числа. Существует простое число r , делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$. Если r существует, то $r \equiv 1 \pmod{n}$.

Согласно [7], если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r, q) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначается минимальное натуральное число n с $q^n \equiv 1 \pmod{r}$. Если q нечетно, то $e(2, q)$ равно 1 при $q \equiv 1 \pmod{4}$ и 2 при $q \equiv -1 \pmod{4}$. Говорят, что простое число r с $e(r, q) = n$ является примитивным простым делителем числа $q^n - 1$. Через $r_n(q)$ обозначается некоторый примитивный простой делитель числа $q^n - 1$, а через $R_n(q)$ — множество всех таких делителей. По лемме 1 примитивный простой делитель $r_n(q)$ существует за исключением указанных в ней случаев. Если q фиксировано, то $r_n(q)$ обозначается через r_n .

Лемма 2 [8]. Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b . Тогда пара (p^a, q^b) равна $(3^2, 2^3)$, $(p, 2^b)$ или $(2^a, q)$.

Лемма 3 [9]. Пусть p, q — простые числа такие, что $p^m - 2q^n = \pm 1$ для некоторых неединичных натуральных чисел m, n . Тогда пара (p^m, q^n) равна $(3^5, 11^2)$, $(239^2, 13^4)$ или (p^2, q^2) .

Лемма 4 [10, теорема 1]. Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условиям $t(G) \geq 3$ и $t(2, G) \geq 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.

(1) Существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \bar{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G .

(2) Для каждого независимого подмножества ρ множества $\pi(G)$ такого, что $|\rho| \geq 3$, не более чем одно простое число из ρ делит произведение $|K| \cdot |G/S|$. В частности, $t(S) \geq t(G) - 1$.

(3) Выполняется одно из двух утверждений:

(а) каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит произведение $|K| \cdot |G/S|$; в частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$;

(б) существует простое число $r \in \pi(K)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2; в этом случае $t(G) = 3$, $t(2, G) = 2$, и $S \cong \text{Alt}_7$ или $A_1(q)$ для некоторого нечетного числа q .

Лемма 5 [11, Theorem A]. Для группы G с несвязным графом $GK(G)$ верно одно из следующих утверждений:

(а) G — группа Фробениуса;

(б) G — 2-фробениусова группа, т. е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G , а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно;

(в) G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$ -группы посредством группы A , где $\text{Inn}(P) \leq A \leq \text{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с условием $s(G) \leq s(P)$ и $A/\text{Inn}(P)$ — $\pi_1(G)$ -группа.

Лемма 6 [12, теорема 1]. Пусть q — степень простого числа. Справедливо $|\pi(q^2 - 1)| \leq 2$ тогда и только тогда, когда $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$.

Лемма 7 [13, лемма 1.3]. Пусть $q = p^m$, где p — простое число, $m \in \mathbb{N}$ и $|\pi(q^2 - 1)| = 3$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(i) $17 \neq q = p \geq 11$;

(ii) $q \in \{16, 25, 27, 49, 81, 243\}$;

(iii) $p \in \{2, 3\}$, m и $(q - 1)/(2, q - 1)$ — нечетные простые, $|\pi((q + 1)/(p + 1))| = 1$ и m не делит $q(q^2 - 1)$.

Лемма 8. Пусть $q = p^m$, где p — простое число и $m \in \mathbb{N}$. В этом случае

- (1) $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 5\}$ тогда и только тогда, когда $q \in \{11, 19, 31, 49\}$;
- (2) $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 7\}$ тогда и только тогда, когда $q \in \{13, 97, 127\}$.

Доказательство. (1) Пусть $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 5\}$. Так как $(q - 1, q + 1) = 2$, то по лемме 2 выполняется один из следующих случаев:

- 1) $q = p$ — простое число Ферма или Мерсенна;
- 2) $\pi(q - 1) = \{2, 3\}$, $\pi(q + 1) = \{2, 5\}$;
- 3) $\pi(q - 1) = \{2, 5\}$, $\pi(q + 1) = \{2, 3\}$.

Пусть $q = p$ — простое число Ферма, т.е. $q = p = 2^s - 1$, где s — простое число. Тогда $\pi(p - 1) = \pi(2^s - 2) = \{2, 3, 5\}$, поэтому $\pi(2^{s-1} - 1) = \{3, 5\}$. Последнее равенство не выполняется при $s \in \{2, 3, 7\}$. Если $s = 5$, то $p = 31$. При $s \geq 11$ по лемме 1 получаем, что $\pi(2^{s-1} - 1) \neq \{3, 5\}$; противоречие.

Пусть $q = p$ — простое число Мерсенна, т.е. $q = p = 2^{2^n} + 1$, где $n \geq 0$. Тогда $\pi(p + 1) = \pi(2^{2^n} + 2) = \{2, 3, 5\}$, поэтому $\pi(2^{2^n-1} + 1) = \{3, 5\}$. Последнее равенство не выполняется при $n \leq 2$. При $n \geq 3$ по лемме 1 получаем, что $\pi(2^{2^n-1} + 1) \neq \{3, 5\}$; противоречие.

Пусть $q - 1 = 2^a \cdot 3^b$, $q + 1 = 2 \cdot 5^c$, где $a \geq 2$, b, c — натуральные числа. Тогда $q = 2 \cdot 5^c - 1$ и $\pi(5^c - 1) = \{2, 3\}$. Если $c = 1$, то $\{2\} = \{2, 3\}$; противоречие. Если $c = 2$, то $q = 49$. Если $c \geq 3$, то по лемме 1 имеем $\pi(5^c - 1) \neq \{2, 3\}$; противоречие.

Пусть $q - 1 = 2 \cdot 3^b$, $q + 1 = 2^a \cdot 5^c$, где $a \geq 2$, b, c — натуральные числа. Тогда $q = 2 \cdot 3^b - 1$ и $\pi(3^b - 1) = \{2, 5\}$. Если $b = 1$, то $\{2\} = \{2, 5\}$; противоречие. Если $b = 2$, то $q = 19$. Если $b \geq 3$, то по лемме 1 имеем $\pi(3^b - 1) \neq \{2, 5\}$; противоречие.

Пусть $q - 1 = 2^a \cdot 5^b$, $q + 1 = 2 \cdot 3^c$, где $a \geq 2$, b, c — натуральные числа. Тогда $q = 2 \cdot 3^c - 1$ и $\pi(3^c - 1) = \{2, 5\}$. Последнее равенство не выполняется при $c \leq 3$. Если $c = 4$, то $q = 161$ — не степень простого числа; противоречие. Если $c \geq 5$, то по лемме 1 имеем $\pi(3^c - 1) \neq \{2, 5\}$; противоречие.

Пусть $q - 1 = 2 \cdot 5^b$, $q + 1 = 2^a \cdot 3^c$, где $a \geq 2$, b, c — натуральные числа. Тогда $q = 2 \cdot 5^b + 1$ и $\pi(5^b + 1) = \{2, 3\}$. Если $b = 1$, то $q = 11$. Если $b \geq 2$, то по лемме 1 имеем $\pi(5^b + 1) \neq \{2, 3\}$; противоречие.

Случай (2) рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть $q = p^m$, где p — простое число и $m \in \mathbb{N}$ и $|\pi(q^2 - 1)| = 4$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:

- (1) $q \in \{2^6, 2^8, 2^9, 5^3, 5^4, 7^3, 7^4, 17^2\}$;
- (2) $q = 2^m$, где $m \geq 11$ — простое число;
- (3) $q = p \geq 29$;
- (4) $q \in \{11^2, 19^2\}$;
- (5) $p \in \{3, 5, 7, 17\}$ и m не делит $q(q^2 - 1)$.

Доказательство. По [14, теорема 3] выполнено одно из следующих утверждений:

- (1) $q \in \{2^6, 2^8, 2^9, 5^3, 5^4, 7^3, 7^4, 17^2, 17^3\}$;
- (2) $q = 2^m$, где $m \geq 11$ — простое число;
- (3) $q = p \geq 29$;
- (4) $q = p^2$, $p \geq 11$, $|\pi(q^2 - 1)| = 3$ и $\left| \pi\left(\frac{p^2 + 1}{2}\right) \right| = 1$;
- (5) $p \in \{3, 5, 7, 17\}$ и m не делит $q(q^2 - 1)$.

Если $q = 7^7$, то $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 29, 113, 911, 4733\}$. Если $q = 17^3$, то $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 7, 13, 307\}$.

Рассмотрим случай (4). Тогда либо $\pi(p^2 - 1) = \{2, 3, 5\}$ и $\pi\left(\frac{p^2 + 1}{2}\right) = \{t\}$, либо $\pi(p^2 - 1) = \{2, 3, t\}$ и $\pi\left(\frac{p^2 + 1}{2}\right) = \{5\}$, где t — простое число и $t > 5$.

Предположим, что $\pi(p^2 - 1) = \{2, 3, 5\}$ и $\pi\left(\frac{p^2 + 1}{2}\right) = \{t\}$, где t — простое число и $t > 5$. По лемме 8 имеем $q \in \{11, 19, 31, 49\}$. Если $p = 31$, то $(p^2 + 1)/2 = 481 = 13 \cdot 37$; противоречие. Так как q — простое число, $q \neq 49$; противоречие.

Предположим, что $\pi(p^2 - 1) = \{2, 3, t\}$ и $\pi\left(\frac{p^2 + 1}{2}\right) = \{5\}$, где t — простое число и $t > 5$. Тогда $\frac{p^2 + 1}{2} = 5^a$, где a — натуральное число. Отсюда $p^2 - 2 \cdot 5^a = -1$. По лемме 3 либо $a = 1$ и $p = 3$, либо $a = 2$ и $p = 7$. Противоречие с условием $\pi(p^2 - 1) = \{2, 3, t\}$.

Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть $q = p^m$, где p — простое число и $m \in \mathbb{N}$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) если $R_4(q) = \{5\}$, то $q \in \{2, 3, 7\}$;
- 2) $R_{16}(q) \neq \{17\}$.

Доказательство. 1) Пусть $R_4(q) = \{5\}$. Тогда $(q^2 + 1)/(2, q + 1) = 5^a$ для некоторого натурального числа a . Если $(2, q + 1) = 1$, то $q^2 - 5^a = -1$, и по лемме 2 имеем $a = 1$ и $q = 2$. Если $(2, q + 1) = 2$, то $q^2 - 2 \cdot 5^a = -1$, и по лемме 3 либо $a = 1$ и $q = 3$, либо $a = 2$ и $q = 7$.

2) Пусть $R_{16}(q) = \{17\}$. Тогда $(q^8 + 1)/(2, q + 1) = 17^a$ для некоторого натурального числа a . Если $(2, q + 1) = 1$, то $q^8 - 17^a = -1$, и по лемме 2 $a = 1$ и $q^8 = 16$; противоречие. Если $(2, q + 1) = 2$, то $q^4 - 2 \cdot 17^a = -1$, и по лемме 3 имеем $a = 1$ и $q^8 = 33$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть $q = p^m$, где p — простое число, $m \in \mathbb{N}$ и $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 5, 7\}$. Тогда $q = p \geq 29$.

Доказательство. Заметим, что $p \notin \{2, 3, 5, 7\}$. По лемме 9 выполнено одно из следующих утверждений:

- (1) $q = p \geq 29$;
- (2) $q \in \{11^2, 17^2, 19^2\}$;
- (3) $q = 17^m$ и m не делит $q(q^2 - 1)$.

Если $q \in \{11^2, 17^2, 19^2\}$, то $\pi(q^2 - 1) \neq \{2, 3, 5, 7\}$; противоречие. Если $q = 17^r$, то 5 делит $17^{2r} - 1$. Отсюда 4 делит $2r$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 12. Пусть $q = p^m$, где p — простое число, $p \leq 7$, $m \in \mathbb{N}$, r — простое число, $r > 7$ и $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 5, 7, r\} \setminus \{p\}$. Тогда $q \in \{2^6, 5^3, 7^4\}$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 11.

Лемма 13. Пусть $q = p^m$, где p — простое число, $m \in \mathbb{N}$ и $\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. Тогда $q = 9$.

Доказательство. По лемме 1 существует простое число $t \in \pi(q^3 - 1) \setminus \pi(q^2 - 1)$. Отсюда $|\pi(q^2 - 1)| \leq 3$.

Предположим, что $|\pi(q^2 - 1)| = 3$. Если $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 5\}$, то по лемме 8 имеем $q \in \{11, 19, 31, 49\}$, и, следовательно, $\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)) \neq \{2, 3, 5, 7, r\}$; противоречие. Если $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 7\}$, то по лемме 8 имеем $q \in \{13, 97, 127\}$, и, следовательно, $\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)) \neq \{2, 3, 5, 7, r\}$; противоречие. Если $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, r\}$, то по лемме 7 имеем $q = 25$, и, следовательно, $\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)) \neq \{2, 3, 5, 7, r\}$; противоречие.

Если $\pi(q^2 - 1) = \{3, 5, 7\}$ или $\pi(q^2 - 1) = \{3, 5, r\}$, то по лемме 7 имеем $q \in \{16, 2^s\}$, где s — простое число и $2^s - 1 = r$. При $q = 16$ имеем $\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)) = \{2, 3, 5, 7, 13, 17\}$; противоречие. При $q = 2^s$ имеем $\pi(2^s + 1) = \{3, 5\}$; противоречие.

Если $\pi(q^2 - 1) = \{2, 5, 7\}$ или $\pi(q^2 - 1) = \{2, 5, r\}$, то по лемме 7 имеем $q \in \{27, 81, 243, 3^s\}$, где s — простое число, $s \geq 7$ и $(3^s - 1)/2 = r$. При $q \in \{27, 81, 243\}$ имеем $\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)) \neq \{2, 3, 5, 7, r\}$; противоречие. При $q = 3^s$ имеем $\pi(3^s + 1) = \{2, 5\}$; противоречие.

Предположим, что $|\pi(q^2 - 1)| \leq 2$. По лемме 6 имеем $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$. При $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 17\}$ имеем $\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)) \neq \{2, 3, 5, 7, r\}$; противоречие. Итак, $q = 9$.

Лемма доказана.

Лемма 14. Пусть $q = p^m$, где p — простое число, $m \in \mathbb{N}$ и $\pi(q(q^2 - 1)(q^3 + 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$, где $r > 7$. Тогда $q = 19$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 13.

Лемма 15. Пусть $q = p^m$, где p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\pi(q(q^4 - 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$, где $r > 7$. Тогда $q \in \{8, 49\}$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 13.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть H — конечная простая исключительная группа лиева типа, отличная от ${}^3D_4(q)$ и $G_2(q)$, G — конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S — спорадический композиционный фактор группы G . Так как ввиду [5] имеем $3 \notin \pi({}^2B_2(q))$, $5 \notin \pi({}^2G_2(q))$ и $3, 5 \in \pi(S)$, то $H \notin \{{}^2B_2(q), {}^2G_2(q)\}$.

Лемма 16. $S \neq F_1$.

Доказательство. Предположим, что $S = F_1$. Тогда по [5] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71\}.$$

Пусть $H = {}^2F_4(q)'$, где $q = 2^{2m+1}$. Тогда по [5] имеем $q > 2$ и $|H| = q^{12}(q^6 + 1)(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q - 1)$. Имеем $q^6 + 1 = (q^2 + 1)(q^4 - q^2 + 1)$ и $q^4 - q^2 + 1 = (2^{4m+2} + 2^{3m+2} + 2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)(2^{4m+2} - 2^{3m+2} + 2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1)$. Пусть $s_2 \in \pi(2^{4m+2} + 2^{3m+2} + 2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)$, $s_3 \in \pi(2^{4m+2} - 2^{3m+2} + 2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1)$. Тогда $s_2, s_3 \in R_{12}(q)$. По лемме 1 имеем $s_2, s_3 \equiv 1 \pmod{12}$, поэтому $s_2, s_3 \notin \pi(S)$. По [7, табл. 5] имеем: $\{2, s_2, s_3\}$ — коклика в $GK(G)$. По лемме 4 числа s_2, s_3 не лежат в $\pi(K)$, где K — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа в G . Значит, $s_2, s_3 \in \pi(S)$; противоречие.

Пусть $H = E_8(q)$. По [15, табл. 4] имеем: $\{r_9(q), r_{18}(q), r_{24}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{9f}(p)$, $t_2 = r_{18f}(p)$, $t_3 = r_{24f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{9f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{18f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{24f}$. Тогда $t_1 = 19$ или $t_1 \notin \pi(S)$ и $t_2 = 19$ или $t_2 \notin \pi(S)$ и $t_3 \notin \pi(S)$. Значит, либо $t_1, t_3 \notin \pi(S)$, либо $t_2, t_3 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Аналогично получаем противоречие для других групп H .

Лемма доказана.

Лемма 17. $S \neq F_2$.

Доказательство. Предположим, что $S = F_2$. Тогда по [5] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 47\}.$$

Пусть $H = E_8(q)$. По [15, табл. 4] имеем: $\{r_5(q), r_7(q), r_{14}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{5f}(p)$, $t_2 = r_{7f}(p)$, $t_3 = r_{14f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_2 \equiv 1 \pmod{7f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{14f}$. Тогда $t_2, t_3 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Аналогично получаем противоречие для других групп H .

Лемма доказана.

Лемма 18. $S \neq J_4$.

Доказательство. Предположим, что $S = J_4$. Тогда по [5] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 29, 31, 37, 43\}.$$

Пусть $H = {}^2F_4(q)'$, где $q = 2^{2m+1}$. Тогда по [5] имеем $q > 2$ и $|H| = q^{12}(q^6 + 1)(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q - 1)$. Имеем $q^6 + 1 = (q^2 + 1)(q^4 - q^2 + 1)$ и $q^4 - q^2 + 1 = (2^{4m+2} + 2^{3m+2} + 2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)(2^{4m+2} - 2^{3m+2} + 2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1)$. Пусть $s_2 \in \pi(2^{4m+2} + 2^{3m+2} + 2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)$, $s_3 \in \pi(2^{4m+2} - 2^{3m+2} + 2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1)$. Тогда $s_2, s_3 \in R_{12}(q)$. По лемме 1 имеем $s_2, s_3 \equiv 1 \pmod{12}$, поэтому хотя бы одно из чисел s_2 или s_3 не принадлежит $\pi(S)$. По [7, табл. 5] имеем: $\{2, s_2, s_3\}$ — коклика в $GK(G)$. По лемме 4 имеем $s_2, s_3 \notin \pi(K)$, где K — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа в G . Значит, $s_2, s_3 \in \pi(S)$; противоречие.

Пусть $H = E_8(q)$. По [15, табл. 4] имеем: $\{r_8(q), r_{12}(q), r_{18}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{8f}(p)$, $t_2 = r_{12f}(p)$, $t_3 = r_{18f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{12f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{18f}$, поэтому $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 37$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 37$ или $t_3 \notin \pi(S)$. Значит, либо $t_1, t_2 \notin \pi(S)$, либо $t_1, t_3 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Аналогично получаем противоречие для других групп H .

Лемма доказана.

Лемма 19. $S \neq Fi'_{24}$.

Доказательство. Предположим, что $S = Fi'_{24}$. Тогда по [5] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29\}.$$

Как и в доказательстве леммы 16, получаем, что $H \neq {}^2F_4(q)'$, где $q = 2^{2m+1}$.

Пусть $H = E_8(q)$. По [15, табл. 4] имеем: $\{r_5(q), r_9(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{5f}(p)$, $t_2 = r_{9f}(p)$, $t_3 = r_{10f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{5f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{9f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{10f}$, поэтому $t_1 = 11$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 11$ или $t_3 \notin \pi(S)$. Значит, $t_1, t_2 \notin \pi(S)$ или $t_2, t_3 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Аналогично получаем противоречие для других групп H .

Лемма доказана.

Лемма 20. $S \neq LyS$.

Доказательство. Предположим, что $S = LyS$. Тогда по [5] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 31, 37, 67\}.$$

Как и в доказательстве леммы 16, получаем, что $H \neq {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2m+1}$.

Пусть $H = E_8(q)$. По [15, табл. 4] имеем: $\{r_5(q), r_7(q), r_8(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{5f}(p)$, $t_2 = r_{7f}(p)$, $t_3 = r_{8f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{5f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{7f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{8f}$, поэтому $t_2 \notin \pi(S)$ и $t_3 \notin \pi(S)$. Значит, $t_1, t_2 \notin \pi(S)$ или $t_1, t_3 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4. Аналогично получаем противоречие для других групп H .

Лемма доказана.

Лемма 21. Если S — спорадическая группа, отличная от F_1 , F_2 , J_4 , Fi'_{24} и LyS , то S не изоморфна композиционному фактору группы G .

Доказательство. Предположим, что $S = F_3$. Тогда по [5] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 13, 19, 31\}.$$

Как и в доказательстве леммы 16, получаем, что $H \neq {}^2F_4(q)'$, где $q = 2^{2m+1}$.

Пусть $H = F_4(q)$, где $q > 2$. По [15, табл. 4] имеем: $\{r_4(q), r_8(q), r_{12}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{4f}(p)$, $t_2 = r_{8f}(p)$, $t_3 = r_{12f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{4f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{12f}$, поэтому $t_1 \in \{5, 13\}$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 \notin \pi(S)$ и $t_3 = 13$ или $t_3 \notin \pi(S)$. Значит, по лемме 4 имеем $R_4(q) = \{5\}$, $R_{12}(q) = \{13\}$. По лемме 10 имеем $q \in \{3, 7\}$, но $R_{12}(3) = \{73\}$, а $R_{12}(7) = \{13, 181\}$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие для других пар групп S и H .

Лемма доказана.

Теорема 1 следует из лемм 16–21.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $H \in \{L_n(q), U_n(q)\}$, $n \geq 12$, G — конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S — ее спорадический композиционный фактор, отличный от F_1 . Так как $n \geq 12$, то по лемме 4 и [15, табл. 2] имеем $t(S) \geq t(G) - 1 = [(n+1)/2] - 1 \geq 5$, поэтому ввиду [7, табл. 2] имеем

$$S \in \{F_2, J_4, Fi'_{24}, LyS, Fi_{23}, O'N, F_3\}.$$

Покажем, что S не является спорадической группой.

Рассмотрим случай $H = L_n(q)$. Предположим, что $S = F_2$. Тогда по [7, табл. 2] имеем $t(S) = 8$, а по [5] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 47\}.$$

По лемме 4 имеем $t(G) \leq t(S) + 1 = 9$. По [15, табл. 2] имеем $t(G) = [(n+1)/2]$. Значит, $n \leq 18$.

По [15, табл. 2] имеем: $\{r_n(q), r_{n-1}(q), r_{n-2}(q), r_{n-3}(q), r_{n-4}(q), r_{n-5}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{nf}(p)$, $t_2 = r_{(n-1)f}(p)$, $t_3 = r_{(n-2)f}(p)$, $t_4 = r_{(n-3)f}(p)$, $t_5 = r_{(n-4)f}(p)$, $t_6 = r_{(n-5)f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{nf}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{(n-1)f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{(n-2)f}$, $t_4 \equiv 1 \pmod{(n-3)f}$, $t_5 \equiv 1 \pmod{(n-4)f}$, $t_6 \equiv 1 \pmod{(n-5)f}$.

Пусть $n = 18$. Положим $t_1 = r_{18f}(p)$, $t_2 = r_{17f}(p)$, $t_3 = r_{16f}(p)$, $t_4 = r_{15f}(p)$, $t_5 = r_{14f}(p)$, $t_6 = r_{13f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{18f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{17f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{16f}$, $t_4 \equiv 1 \pmod{15f}$, $t_5 \equiv 1 \pmod{14f}$, $t_6 \equiv 1 \pmod{13f}$, $t_7 \equiv 1 \pmod{12f}$, $t_8 \equiv 1 \pmod{11f}$, поэтому $t_2, t_5 \notin \pi(S)$ и, следовательно, коклика $\{t_1, t_2, t_5\}$ содержит не меньше двух чисел из $\pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Пусть $n = 12$. Положим $t_1 = r_{12f}(p)$, $t_2 = r_{11f}(p)$, $t_3 = r_{10f}(p)$, $t_4 = r_{9f}(p)$, $t_5 = r_{8f}(p)$, $t_6 = r_{7f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 = 13$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 23$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 11$ или $t_3 \notin \pi(S)$, $t_4 = 19$ или $t_4 \notin \pi(S)$, $t_5 = 17$ или $t_5 \notin \pi(S)$, $t_6 \notin \pi(S)$. По лемме 10 имеем $R_{16}(q) \neq \{17\}$. Значит, существует элемент $u \in R_{16}(q) \setminus \pi(S)$. Следовательно, коклика $\{t_1, u, t_6\}$ содержит не меньше двух чисел из $\pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Аналогично получаем противоречие для других пар n и S . Случай $H = U_n(q)$ рассматривается аналогично случаю $H = L_n(q)$.

Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Пусть $H \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, $n \geq 9$, G — конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S — ее спорадический композиционный фактор. Так как $n \geq 9$, то по лемме 4 и [15, табл. 3] имеем $t(S) \geq t(G) - 1 = [(3n+5)/4] - 1 \geq 7$, поэтому (см. [15, табл. 2]) влечет, что $S \in \{F_1, F_2, J_4\}$.

Покажем, что S не является спорадической группой.

Предположим, что $S = F_1$. Тогда ввиду [15, табл. 2] имеем $t(S) = 11$, а по [5] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71\}.$$

По лемме 4 имеем $t(G) \leq t(S) + 1 = 12$. По [15, табл. 2] имеем $t(G) = [(3n + 5)/4]$. Значит, $n \leq 15$.

Пусть $n = 15$. По [15, табл. 3] имеем: $\{r_9(q), r_{18}(q), r_{22}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{9f}(p)$, $t_2 = r_{18f}(p)$, $t_3 = r_{22f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{9f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{18f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{22f}$, поэтому $t_1 = 19$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 19$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 \notin \pi(S)$. Значит, $t_1, t_3 \notin \pi(S)$ или $t_2, t_3 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Пусть $n = 9$. По [15, табл. 3] имеем: $\{r_9(q), r_{16}(q), r_{18}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{9f}(p)$, $t_2 = r_{16f}(p)$, $t_3 = r_{18f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{9f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{16f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{18f}$, поэтому $t_1 = 19$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 17$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 19$ или $t_3 \notin \pi(S)$. По лемме 10 имеем $R_{16}(q) \neq \{17\}$. Значит, существует $u \in R_{16}(q) \setminus \pi(S)$. Следовательно, коклика $\{t_1, u, t_3\}$ содержит не меньше двух чисел из $\pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Рассуждая аналогично, получаем противоречие для других пар n и S .

Теорема 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 4

Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является простой знакопеременной группой или простой группой лиева типа, S — спорадический композиционный фактор группы G , $\pi(G) = \pi(S)$. По лемме 4 имеем $S \leq \bar{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G .

Лемма 22. Пусть граф $GK(G)$ несвязен. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) Если $S = M_{22}$ и $3 \in \pi(K)$, то $3 \cdot 7, 3 \cdot 11 \in \omega(G)$.
- 2) Если $S = M_{22}$ и $5 \in \pi(K)$, то $5 \cdot 7, 5 \cdot 11 \in \omega(G)$.
- 3) Если $S = M_{22}$ и $7 \in \pi(K)$, то $7 \cdot 11 \in \omega(G)$.
- 4) Если $S = HS$ и $3 \in \pi(K)$, то $3 \cdot 11 \in \omega(G)$.
- 5) Если $S = HS$ и $7 \in \pi(K)$, то $7 \cdot 5, 7 \cdot 11 \in \omega(G)$.
- 6) Если $S = McL$ и $3 \in \pi(K)$, то $3 \cdot 11 \in \omega(G)$.
- 7) Если $S = McL$ и $7 \in \pi(K)$, то $7 \cdot 11 \in \omega(G)$.
- 8) Если $S = Suz$ и $5 \in \pi(K)$, то $5 \cdot 13 \in \omega(G)$.
- 9) Если $S = Suz$ и $7 \in \pi(K)$, то $7 \cdot 13 \in \omega(G)$.

Доказательство. 1) Пусть $S = M_{22}$ и $3 \in \pi(K)$. Если F — поле характеристики $p = 3$, V — абсолютно неприводимый FS -модуль, то по [16, лемма 4] и [17, с. 93] получаем, что для элемента g_1 порядка 7 и элемента g_2 порядка 11 из S имеем $\dim C_V(g_1) \neq 0$ и $\dim C_V(g_2) \neq 0$. Значит, $3 \cdot 7, 3 \cdot 11 \in \omega(G)$.

Аналогично доказываются пп. 2)–7) леммы.

Если $S = Suz$, то по [5] имеем $G_2(4) < Suz$. Из [16, лемма 4] и [17, с. 272] получаем утверждения 8) и 9) леммы.

Лемма доказана.

Лемма 23. Если H — знакопеременная группа, то $(H, S) \in \{(A_9, J_2), (A_{10}, J_2), (A_{16}, Fi_{22}), (A_{16}, Suz)\}$.

Доказательство. По [18, табл. 1] выполнен один из следующих случаев:

- (1) $S = J_2$ и $H \in \{A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$;
- (2) $S \in \{M_{22}, McL, HS\}$ и $H \in \{A_{11}, A_{12}\}$;
- (3) $S \in \{Suz, Fi_{22}\}$ и $H \in \{A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}\}$.

Пусть $S = J_2$ и $H \in \{A_7, A_8\}$. Вершины 2, 3 и 5 в графе $GK(H)$ не образуют треугольник; противоречие с тем, что в графе $GK(J_2)$ эти вершины образуют треугольник. Значит, $H \in \{A_9, A_{10}\}$.

Пусть $S = M_{22}$ и $H = A_{11}$. Тогда $3 \cdot 5 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Поэтому либо $3 \in \pi(K)$, либо $5 \in \pi(K)$. Если $3 \in \pi(K)$, то по п. 1) леммы 22 имеем $3 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие. Если $5 \in \pi(K)$, то по п. 2) леммы 22 имеем $5 \cdot 7 \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $S = McL$ и $H \in \{A_{11}, A_{12}\}$. Тогда $3 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Поэтому либо $3 \in \pi(K)$, либо $7 \in \pi(K)$. Если $3 \in \pi(K)$, то по п. 6) леммы 22 имеем $3 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие. Если $7 \in \pi(K)$, то по п. 7) леммы 22 имеем $7 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $S = HS$ и $H = A_{11}$. Тогда $3 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Поэтому либо $3 \in \pi(K)$, либо $7 \in \pi(K)$. Если $3 \in \pi(K)$, то по п. 4) леммы 22 имеем $3 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие. Если $7 \in \pi(K)$, то по п. 5) леммы 22 имеем $7 \cdot 5 \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $S = M_{22}$ и $H = A_{12}$. Тогда $3 \cdot 5 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Поэтому либо $3 \in \pi(K)$, либо $5 \in \pi(K)$. Если $3 \in \pi(K)$, то по п. 1) леммы 22 имеем $3 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие. Если $5 \in \pi(K)$, то по п. 2) леммы 22 имеем $5 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $S = HS$ и $H = A_{12}$. Тогда $3 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Поэтому либо $3 \in \pi(K)$, либо $7 \in \pi(K)$. Если $3 \in \pi(K)$, то по п. 4) леммы 22 имеем $3 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие. Если $7 \in \pi(K)$, то по п. 5) леммы 22 имеем $7 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $S = Fi_{22}$ и $H \in \{A_{13}, A_{14}\}$. Вершины 2 и 11 в графе $GK(S)$ смежны, а в графе $GK(H)$ несмежны; противоречие.

Пусть $S = Fi_{22}$ и $H = A_{15}$. Тогда $3 \cdot 11, 5 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Поэтому либо $3, 5 \in \pi(K)$, либо $3, 7 \in \pi(K)$, либо $5, 11 \in \pi(K)$, либо $7, 11 \in \pi(K)$. Заметим, что $\{5, 11, 13\}$, $\{7, 11, 13\}$ — коклики в графе $GK(H)$. Если $5, 11 \in \pi(K)$ или $7, 11 \in \pi(K)$, то получаем противоречие с леммой 4. По [5] имеем $M_{22} < Fi_{22}$. Если $5 \in \pi(K)$, то по п. 2) леммы 22 имеем $5 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие. Если $7 \in \pi(K)$, то по п. 3) леммы 22 имеем $7 \cdot 11 \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $S = Suz$ и $H \in \{A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$. Тогда $5 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Поэтому либо $5 \in \pi(K)$, либо $7 \in \pi(K)$. Если $5 \in \pi(K)$, то по п. 8) леммы 22 имеем $5 \cdot 13 \in \omega(G)$; противоречие. Если $7 \in \pi(K)$, то по п. 8) леммы 22 имеем $7 \cdot 13 \in \omega(G)$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 24. Если H — конечная простая группа лиева типа, то $(H, S) \in \{(L_2(11), M_{11}), (U_5(2), M_{11}), (U_6(2), HS), (S_8(2), He), (O_8^+(2), J_2), (S_6(2), J_2)\}$.

Доказательство. По [18, табл. 1] выполнен один из следующих случаев:

- (1) $S = J_2$ и $H \in \{L_2(49), U_3(5), L_3(4), L_4(2), U_4(3), S_4(7), S_6(2), O_8^+(2)\}$;
- (2) $S \in \{M_{11}, M_{12}\}$ и $H \in \{U_5(2), L_2(11)\}$;
- (3) $S \in \{M_{22}, McL, HS\}$ и $H = U_6(2)$;
- (4) $S \in \{Suz, Fi_{22}\}$ и $H = L_6(3)$;
- (5) $S = He$ и $H \in \{O_8^-(2), L_4(4), S_8(2)\}$;
- (6) $S \in \{J_1, HN\}$ и $H = L_3(11)$;

Пусть $S = J_2$ и $H \in \{L_2(49), U_3(5), L_3(4), L_4(2), U_4(3), S_4(7)\}$. Вершины 2, 3 и 5 в графе $GK(H)$ не образуют треугольник; противоречие с тем, что в графе $GK(J_2)$ эти вершины образуют треугольник. Значит, $H \in \{S_6(2), O_8^+(2)\}$.

Пусть $S = M_{12}$ и $H \in \{U_5(2), L_2(11)\}$. Вершины 2 и 5 в графе $GK(S)$ смежны, а в графе $GK(H)$ несмежны; противоречие.

Пусть $S = McL$ и $H = U_6(2)$. Вершины 2 и 7 в графе $GK(S)$ смежны, а в графе $GK(H)$ несмежны; противоречие.

Пусть $S = M_{22}$ и $H = U_6(2)$. Тогда $3 \cdot 5 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Поэтому либо $3 \in \pi(K)$, либо $5 \in \pi(K)$. Если $3 \in \pi(K)$, то по п. 1) леммы 22 имеем $3 \cdot 7 \in \omega(G)$; противоречие. Если $5 \in \pi(K)$, то по п. 2) леммы 22 имеем $5 \cdot 7 \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $S \in \{Suz, Fi_{22}\}$ и $H = L_6(3)$. Вершины 3 и 7 в графе $GK(S)$ смежны, а в графе $GK(H)$ несмежны; противоречие.

Пусть $S = He$ и $H \in \{O_8^-(2), L_4(4)\}$. Вершины 2 и 7 в графе $GK(S)$ смежны, а в графе $GK(H)$ несмежны; противоречие.

Пусть $S = HN$ и $H = L_3(11)$. Вершины 2 и 7 в графе $GK(S)$ смежны, а в графе $GK(H)$ несмежны; противоречие.

Пусть $S = J_1$ и $H = L_3(11)$. По [7, табл. 4] множества $\{11, 3, 7\}$ и $\{11, 3, 19\}$ образуют коклики в графе $GK(H)$. По [7, предложение 4.1] пары вершин 5 и 7, 5 и 19 несмежны в $GK(H)$. Так как $7 \cdot 19 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, то $7 \in \pi(K)$ или $19 \in \pi(K)$. Если $7 \in \pi(K)$, то по лемме 4 имеем $11 \notin \pi(K)$. По [5] в S есть подгруппа Фробениуса вида 11:10. По [19, лемма 1] имеем $5 \cdot 7 \in \omega(H)$; противоречие. Если $19 \in \pi(K)$, то по лемме 4 имеем $11 \notin \pi(K)$. По [5] в S есть подгруппа Фробениуса вида 11:10. По [19, лемма 1] имеем $5 \cdot 19 \in \omega(H)$; противоречие.

Лемма доказана.

Теорема 4 следует из лемм 23 и 24.

6. Доказательство теоремы 5

Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является простой знакопеременной группой или простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число, $f \in \mathbb{N}$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе J_2 ; $\pi(G) = \pi(S) \cup \{r\}$, где r — простое число, $r > 7$. По лемме 4 имеем $S \leq \bar{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G .

По [5] в $GK(J_2)$ вершины 2, 3 и 5 образуют треугольник.

Лемма 25. *H не является знакопеременной группой.*

Доказательство. Пусть H — знакопеременная группа. Тогда $H \in \{A_{11}, A_{12}\}$ и $r = 11$. Граф $GK(H)$ не связан. Так как $11 \notin \pi(S)$, то $11 \in \pi(K)$. Так как $3 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, то $3 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Значит, $3 \cdot 11 \in \pi(K)$ или $7 \cdot 11 \in \pi(K)$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 26. *Если $H = L_2(q)$, то $H \in \{L_2(2401), L_2(4801)\}$.*

Доказательство. По [5] имеем $\pi(H) = \pi(q(q^2 - 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. Если $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, то по лемме 12 имеем $q \in \{2^6, 5^3, 7^4\}$. Если $p > 7$, то по лемме 11 имеем $q = p \geq 29$. Если $q = 2^6$, то по [7, табл. 4] в $GK(H)$ вершины 2 и 3 несмежны; противоречие. Если $q = 5^3$, то $\pi(q - 1) = \{2, 31\}$ и $\pi(q + 1) = \{2, 3, 19\}$, следовательно, в графе $GK(H)$ вершины 2, 3 и 5 не образуют треугольник; противоречие. Если $q = 7^4$, то выполняется утверждение леммы.

Пусть $q = p \geq 29$ и $p \equiv \epsilon \pmod{4}$, где $\epsilon = \pm 1$. По [20, табл. 2] имеем $\pi(q - \epsilon)$, $\{p\}$ и $\pi((q + \epsilon)/2)$ — связанные компоненты графа $GK(H)$. Если $\pi(q - \epsilon) \neq \{2, 3, 5\}$, то в $GK(H)$ вершины 2, 3 и 5 не образуют треугольник; противоречие. Значит, $\pi(q - \epsilon) = \{2, 3, 5\}$, $p = r$ и $\pi((q + \epsilon)/2) = \{7\}$.

Имеем $r - \epsilon = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ и $r + \epsilon = 2 \cdot 7^d$, где a, b, c, d — натуральные числа. Тогда $r = 2 \cdot 7^d - \epsilon$. Отсюда $7^d - \epsilon = 2^{a-1} \cdot 3^b \cdot 5^c$. Так как $7^d \equiv 1 \pmod{3}$ и $7^d \equiv \epsilon \pmod{3}$, то $\epsilon = 1$. Поэтому $7^d - 1 = 2^{a-1} \cdot 3^b \cdot 5^c$. Так как $7^d \equiv 1 \pmod{5}$, то 4 делит d . Если $d = 4$, то $r = 2 \cdot 7^4 - 1 = 4801$. При $d > 4$ по лемме 1 существует $t \in \pi(7^d - 1) \setminus \{2, 3, 5\}$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 27. *Если $H = L_n(q)$, где $n \geq 3$, то $H = L_4(4)$.*

Доказательство. Пусть $n = 3$. По [5] имеем $\pi(H) = \pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. По лемме 13 имеем $q = 9$. По [7, табл. 4] в графе $GK(L_3(9))$ вершины 3 и 5 несмежны; противоречие.

Пусть $n = 4$. По [5] $\pi(H) = \pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. По лемме 1 существуют простые числа t_1, t_2 такие, что $t_1 \neq t_2$, $t_1 \in \pi(q^4 - 1) \setminus (\pi(q^3 - 1) \cup \pi(q^2 - 1))$ и $t_2 \in \pi(q^3 - 1) \setminus (\pi(q^2 - 1))$. Отсюда $|\pi(q^2 - 1)| \leq 2$. По лемме 6 имеем $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$. Если

$q \in \{2, 3, 5, 8, 9, 17\}$, то $\pi(H) \neq \{2, 3, 5, 7, r\}$; противоречие. Итак, $q \in \{4, 7\}$. По [7, предложение 4.1] в графе $GK(L_4(7))$ вершины 3 и 5 несмежны; противоречие. Значит, $q = 4$, и утверждение леммы выполнено.

Пусть $n = 5$. По [5] $\pi(H) = \pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. По лемме 1 существуют простые числа t_1, t_2, t_3 такие, что $t_1 \neq t_2 \neq t_3$, $t_1 \in \pi(q^5 - 1) \setminus (\pi(q^4 - 1) \cup \pi(q^3 - 1))$, $t_2 \in \pi(q^4 - 1) \setminus (\pi(q^3 - 1) \cup \pi(q^2 - 1))$ и $t_3 \in \pi(q^3 - 1) \setminus (\pi(q^2 - 1))$. Отсюда $|\pi(q^2 - 1)| \leq 1$. По лемме 6 имеем $q \in \{2, 3\}$. Если $q = 3$, то $\pi(H) = \{2, 3, 5, 11, 13\}$; противоречие. Итак, $q = 2$. Но по [5] в $GK(L_5(2))$ вершины 2 и 5 несмежны; противоречие.

Пусть $n = 6$. По [5] $\pi(H) = \pi(q(q^4 - 1)(q^5 - 1)(q^6 - 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. По лемме 1 при $q > 2$ существуют простые числа t_1, t_2, t_3, t_4 такие, что $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq t_4$, $t_1 \in \pi(q^6 - 1) \setminus (\pi(q^5 - 1) \cup \pi(q^4 - 1) \cup \pi(q^3 - 1))$, $t_2 \in \pi(q^5 - 1) \setminus (\pi(q^4 - 1) \cup \pi(q^3 - 1))$, $t_3 \in \pi(q^4 - 1) \setminus (\pi(q^3 - 1) \cup \pi(q^2 - 1))$, и $t_4 \in \pi(q^3 - 1) \setminus (\pi(q^2 - 1))$. Отсюда $|\pi(q(q^2 - 1))| \leq 1$; противоречие. Итак, $q = 2$ и $H = L_6(2)$.

По [20, табл. 1] граф $GK(L_6(2))$ не связан. Так как $31 \notin \pi(S)$, то $31 \in \pi(K)$. Поскольку $2 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, то $2 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Значит, $2 \cdot 31 \in \pi(K)$ или $7 \cdot 31 \in \pi(K)$; противоречие.

Пусть $n \geq 7$. По [5] имеем $\pi(H) = \pi(q \prod_{i=1}^n (q^i - 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. По лемме 1 при $(n, q) \notin \{(7, 2), (8, 2), (9, 2)\}$ существуют простые числа t_1, t_2, t_3, t_4 такие, что $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq t_4$, $t_1 \in \pi(q^n - 1) \setminus (\pi(\prod_{i=1}^{n-1} (q^i - 1)))$, $t_2 \in \pi(q^{n-1} - 1) \setminus (\pi(\prod_{i=1}^{n-2} (q^i - 1)))$, $t_3 \in \pi(q^{n-2} - 1) \setminus (\pi(\prod_{i=1}^{n-3} (q^i - 1)))$ и $t_4 \in \pi(q^{n-3} - 1) \setminus (\pi(\prod_{i=1}^{n-4} (q^i - 1)))$. Отсюда $|\pi(q(q^2 - 1))| \leq 1$; противоречие. Если $(n, q) \in \{(7, 2), (8, 2), (9, 2)\}$, то $\pi(H) \neq \{2, 3, 5, 7, r\}$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 28. Если $H = U_n(q)$, где $n \geq 3$, то $H \in \{U_3(19), U_4(5), U_6(2)\}$.

Доказательство. Пусть $n = 3$. По [5] имеем $\pi(H) = \pi(q(q^2 - 1)(q^3 + 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. По лемме 14 имеем $q = 19$.

При $n \geq 4$ доказательство аналогично доказательству леммы 27. Получаем, что $H \in \{U_4(5), U_4(7), U_6(2)\}$.

Пусть $H = U_4(7)$. По [15, табл. 2] имеем: $\{2, 5, 43\}$ — коклика в $GK(H)$. Вершины 2 и 5 в графе $GK(S)$ смежны, а в графе $GK(H)$ несмежны; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 29. Если $H \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, где $n \geq 2$, то $H = S_8(2)$.

Доказательство. Пусть $n = 2$. По [5] имеем $\pi(H) = \pi(q(q^2 - 1)(q^3 + 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. По лемме 15 имеем $q \in \{8, 49\}$. По [7, табл. 4] в $GK(S_4(8))$ вершины 3 и 5 несмежны. Значит, $q = 49$.

Пусть $H = S_4(49)$. По [20, табл. 1] граф $GK(S_4(49))$ не связан. Так как $1201 \notin \pi(S)$, то $1201 \in \pi(K)$. Так как $2 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, то $2 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Значит, $2 \cdot 1201 \in \pi(K)$ или $7 \cdot 1201 \in \pi(K)$; противоречие.

При $n \geq 3$ доказательство аналогично доказательству леммы 27. Получаем, что $H \in \{S_6(3), S_8(2), O_7(3)\}$.

Пусть $H \in \{S_6(3), O_7(3)\}$. По [15, предложение 2.4] имеем $GK(S_6(3)) = GK(O_7(3))$. Будем рассматривать группу $S_6(3)$. По [20, табл. 1] граф $GK(S_6(3))$ не связан. Так как $13 \notin \pi(S)$, то $13 \in \pi(K)$. Так как $2 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, то $2 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Значит, $2 \cdot 13 \in \pi(K)$ или $7 \cdot 13 \in \pi(K)$; противоречие. Итак, $H = S_8(2)$.

Лемма доказана.

Лемма 30. $H \notin \{O_{2n}^+(q), O_{2n}^-(q)\}$, где $n \geq 4$.

Доказательство. Предположим, что $H \in \{O_{2n}^+(q), O_{2n}^-(q)\}$, где $n \geq 4$. Рассуждая как при доказательстве леммы 27, получаем, что $H \in \{O_8^+(3), O_8^-(2)\}$.

Пусть $H = O_8^+(3)$. Так как по [15, предложение 2.4, 2.5] имеем $GK(S_6(3)) = GK(O_8^+(3))$, то приходим к противоречию, как в предыдущей лемме.

Пусть $H = O_8^-(2)$. По [20, табл. 1] граф $GK(O_8^-(2))$ не связан. Так как $17 \notin \pi(S)$, то $17 \in \pi(K)$. Так как $3 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, то $3 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Значит, $3 \cdot 17 \in \pi(K)$ или $7 \cdot 17 \in \pi(K)$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 31. *H не является группой исключительного лиева типа.*

Доказательство. Пусть $H = G_2(q)$, где $q > 2$. По [5] имеем $\pi(H) = \pi(q(q^6 - 1)) = \{2, 3, 5, 7, r\}$. По лемме 1 существуют простые числа t_1, t_2 такие, что $t_1 \neq t_2$, $t_1 \in \pi(q^6 - 1) \setminus (\pi(q^3 - 1) \cup \pi(q^2 - 1))$ и $t_2 \in \pi(q^3 - 1) \setminus (\pi(q^2 - 1))$. Отсюда $|\pi(q^2 - 1)| \leq 2$. По лемме 6 имеем $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$. Если $q \in \{2, 3, 7, 8, 9, 17\}$, то $\pi(H) \neq \{2, 3, 5, 7, r\}$; противоречие. Итак, $q \in \{4, 5\}$.

Пусть $H = G_2(4)$. По [20, табл. 1] граф $GK(G_2(4))$ не связан. Так как $13 \notin \pi(S)$, то $13 \in \pi(K)$. Поскольку $3 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, то $3 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Значит, $3 \cdot 13 \in \pi(K)$ или $7 \cdot 13 \in \pi(K)$; противоречие.

Пусть $H = G_2(5)$. По [20, табл. 1] граф $GK(G_2(5))$ не связан. Так как $31 \notin \pi(S)$, то $31 \in \pi(K)$. Поскольку $3 \cdot 7 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, то $3 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Значит, $3 \cdot 31 \in \pi(K)$ или $7 \cdot 31 \in \pi(K)$; противоречие.

Пусть $H = {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2m+1}$. Но $5 \notin \pi({}^2G_2(q))$; противоречие.

Пусть $H = {}^2B_2(q)$, где $q = 2^{2m+1}$. Но $3 \notin \pi({}^2B_2(q))$; противоречие.

Если $H \in \{F_4(q), E_6(q), {}^2E_6(q), E_7(q), E_8(q)\}$, то, как и в доказательстве леммы 27, в случае $H = L_6(q)$ получаем противоречие.

Если $H = {}^3D_4(q)$, то, как и в доказательстве леммы 27, в случае $H = L_5(q)$ получаем, что $q \in \{2, 3\}$. Но тогда имеем $\pi(H) \neq \{2, 3, 5, 7, r\}$; противоречие.

Если $H = {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2m+1}$, то, как и в доказательстве леммы 27, в случае $H = L_5(q)$ получаем, что $q = 2$. Но тогда имеем $\pi(H) = \{2, 3, 5, 13\}$; противоречие.

Лемма доказана.

Теорема 5 следует из лемм 25–31. По [20, табл. 1–3] графы Грюнберга — Кегеля групп $L_4(4)$, $U_4(5)$ связны, а графы Грюнберга — Кегеля остальных групп из заключений лемм не связны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кондратьев А. С.** Конечные группы с заданными свойствами их графов простых чисел // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 1. С. 113–120. doi: 10.17377/alglog.2016.55.108
2. **Staroletov A.M.** Sporadic composition factors of finite groups isospectral to simple groups // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. № 8. С. 268–272.
3. **Maslova N.V., Panshin V.V., Staroletov A.M.** On characterization by Gruenberg–Kegel graph of finite simple exceptional groups of Lie type // European J. Math. 2023. Vol. 9, no. 78. doi: 10.1007/s40879-023-00672-7
4. **Кондратьев А.С.** Конечные 4-примарные группы с несвязным графом Грюнберга–Кегеля, содержащим треугольник // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 1. С. 76–92. doi: 10.33048/alglog.2023.62.105
5. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.
7. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
8. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 69–471.
9. **Crescenzo P.** A diophantine equation which arises in the theory of finite groups // Adv. in Math. 1975. Vol. 17. P. 25–29.
10. **Васильев А.В., Горшков И.Б.** О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 292–299.
11. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.

12. Herzog M. On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. 1968. Vol. 10, no. 3. P. 383–388.
13. Кондратьев А.С., Храмцов И.В. О конечных четырехпримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Vol. 17, № 4. С. 142–159.
14. Kondrat'ev A.S. Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. № 11. С. 634–674.
15. Васильев А.В., Вдовин Е.П. Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
16. Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М.С. C55-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
17. Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R. An atlas of Brauer characters. Oxford: Clarendon Press, 1995. 252 p. (Lond. Math. Soc. Monogr., New Ser., 11).
18. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elec. Math. Rep. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
19. Мазуров В.Д. Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
20. Кондратьев А.С., Мазуров В.Д. Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.

Поступила 26.06.2024

После доработки 21.10.2024

Принята к публикации 28.10.2024

Зиновьева Марианна Рифхатовна

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

доцент

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

REFERENCES

1. Kondrat'ev A.S. Finite groups with given properties of their prime graphs. *Algebra and logic*, 2016, vol. 55, iss. 1, pp. 77–82. doi: 10.17377/alglog.2016.55.108
2. Staroletov A.M. Sporadic composition factors of finite groups isospectral to simple groups. *Sib. Elektr. Mat. Izv.*, 2011, vol. 8, pp. 268–272.
3. Maslova N.V., Panshin V.V., Staroletov A.M. On characterization by Gruenberg — Kegel graph of finite simple exceptional groups of Lie type. *European J. Math.*, 2023, vol. 9, no. 78. doi: 10.1007/s40879-023-00672-7
4. Kondrat'ev A.S. Finite 4-primary groups with disconnected Gruenberg — Kegel graph containing a triangle. *Algebra and logic*, 2023, vol. 62, no. 1, pp. 54–65. doi: 10.1007/s10469-023-09724-z
5. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups*. Oxford, Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 978-0-19-853199-9.
6. Zsigmondy K. Zur theorie der potenzreste. *Monatsh. Math. Phys.*, 1892, bd. 3, s. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444
7. Vasiliev A.V., Vdovin E.P. Adjacency criterion in the graph of prime numbers. *Algebra and logic*, 2005, vol. 44, iss. 6, pp. 381–406. doi: 10.1007/s10469-005-0037-5
8. Gerono G.C. Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$. *Nouv. Ann. Math.*, ser. 2, 1870, vol. 9, pp. 469–471.
9. Crescenzo P. A diophantine equation which arises in the theory of finite groups. *Adv. Math.*, 1975, vol. 17, iss. 1, pp. 25–29. doi: 10.1016/0001-8708(75)90083-3
10. Vasil'ev A.V., Gorshkov I.B. On recognition of finite simple groups with connected prime graph. *Sib. Math. J.*, 2009, vol. 50, iss. 2, pp. 233–238. doi: 10.1007/s11202-009-0027-2

11. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, iss. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0
12. Herzog M. On finite simple groups of order divisible by three primes only. *J. Algebra*, 1968, vol. 10, iss. 3, pp. 383–388. doi: 10.1016/0021-8693(68)90088-4
13. Kondrat'ev A.S., Khramtsov I.V. On finite tetraprimary groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 279, iss. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543812090040
14. Kondrat'ev A.S. Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg — Kegel graphs. *Sib. Elektr. Mat. Izv.*, 2014, vol. 11, pp. 634–674.
15. Vasil'ev A.V., Vdovin E.P. Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group. *Algebra and logic*, 2011, vol. 50, iss. 4, pp. 291–322. doi: 10.1007/s10469-011-9143-8
16. Dolfi S., Jabara E., Lucido M.S. C55-Groups. *Sib. Math. J.*, 2004, vol. 45, iss. 6, pp. 1053–1062. doi: 10.1023/B:SIMJ.0000048920.62281.61
17. Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R. *An atlas of Brauer characters*. (London Math. Soc. Monogr. Vol. 11), Oxford, Clarendon Press, 1995, 327 p. ISBN: 0198514816.
18. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Electr. Math. Izv.*, 2009., vol. 6, pp. 1–12.
19. Mazurov V.D. Characterizations of finite groups by sets of orders of their elements. *Algebra and logic*, 1997, vol. 36, iss. 1, pp. 23–32. doi: 10.1007/BF02671951
20. Kondrat'ev A.S., Mazurov V.D. Recognition of alternating groups of prime degree from their element orders. *Sib. Math. J.*, 2000, vol. 41, iss. 2, pp. 294–302. doi: 10.1007/BF02674599

Received June 26, 2024

Revised October 21, 2024

Accepted October 28, 2024

Marianna Rifkhatovna Zinovieva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru.

Cite this article as: M. R. Zinov'eva. On the existence of a sporadic composition factor in some finite groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 134–148.