ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 4 2024

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К СТАТЬЕ О НОРМАЛЬНЫХ ВЫВОДАХ В ИНТУИЦИОНИСТСКОМ НАТУРАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ

О. А. Охотников

Формулируемые ниже теоремы 1.1–1.5 и леммы 1.1–1.2 описывают некоторые свойства отношения выводимости в двух односукцедентных исчислениях секвенций: минимальном $\mathfrak{S}_1$ и интуиционистском $\mathfrak{S}_2$. Они требуются для того, чтобы доказать теорему о допустимости правила сечения в $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$, а также теорему о нормализации выводов в исчислениях натуральной дедукции $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ в в указанной статье. Обоснования теорем 1.1–1.5 и лемм 1.1–1.2 довольно элементарны, но отдельные утверждения представляют самостоятельный интерес, и для полноты изложения их доказательства вынесены в данные дополнительные материалы.

Лемма 1.1. *Если* $\vdash_n \Gamma \to C$, *то* $\vdash_n D\,\Gamma \to C$ *для любых формул* C *и* D.

Доказательство проведем индукцией по высоте вывода n.

База индукции. Пусть $n = 0$. Тогда секвенция $\Gamma \to C$ есть аксиома. Но тогда и $\Gamma D \to C$ будет аксиомой.

Шаг индукции. Предположим, что указанное правило ослабления допустимо для выводов с высотой $\leq n$. И пусть $\vdash_{n+1} \Gamma \to C$. Покажем, что тогда $\vdash_{n+1} \Gamma D \to C$.

Все случаи рассматриваются подобным образом.

Пусть, например, последнее примененное правило в выводе секвенции $\Gamma \to C$ есть $(\& \to)$:

$$\frac{A,\, B,\, A\,\&\,B,\, \Delta \to C}{A\,\&\,B,\, \Delta \to C}$$

Пусть высота h вывода секвенции $(A\,\&\,B)\,A\,B\,\Delta \to C$ удовлетворяет неравенству $h \leq n$. Тогда по индуктивному предположению у секвенции $D\,(A\,\&\,B)\,A\,B\,\Delta \to C$ высота вывода $\leq n$. Тогда применение $(\& \to)$ дает $D\,(A\,\&\,B)\,\Delta \to C$ с высотой вывода $\leq n+1$. $\square$

Теорема 1.1. *Правила вывода* $(\supset\to)$, $(\& \to)$, $(\vee \to)$, $(\forall \to)$ *и* $(\exists \to)$ *допустимы для произвольной формулы в сукцеденте в каждом исчислении* $\mathfrak{S}_i$:

1. *Если* $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to A$ *и* $\vdash (A \supset B)\,B\,\Gamma \to C$, *то также и* $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to C$.
2. *Если* $\vdash (A\&B)\,A\,B\,\Gamma \to C$, *то* $\vdash (A\&B)\,\Gamma \to C$.
3. *Если* $\vdash (A \vee B)\,A\,\Gamma \to C$ *и* $\vdash (A \vee B)\,B\,\Gamma \to C$, *то* $\vdash (A \vee B)\,\Gamma \to C$.
4. *Если* $\vdash (\forall x\, A(x))\,A(x/t)\,\Gamma \to C$, *то* $\vdash (\forall x\, A(x))\,\Gamma \to C$.
5. *Если* $\vdash (\exists x\, A(x))\,A(x/y)\,\Gamma \to C$, *то* $\vdash (\exists x\, A(x))\,\Gamma \to C$.

Доказательство проведем индукцией по количеству логических связок и кванторов в C. Если C — атомарная формула, дизъюнкция, $\perp$ или вида $\exists x\, D(x)$, то каждое из утверждений 1–5 просто совпадает с формулировкой соответствующего правила $(\supset\to)$, $(\& \to)$, $(\vee \to)$, $(\forall \to)$, $(\exists \to)$. Рассмотрим остальные случаи индукции. $\square$

1. (а) Пусть $C = \top$. Тогда $(A \supset B)\,\Gamma \to C$ есть аксиома.

(б) Пусть $C = D \,\&\, E$, $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to A$ и $\vdash (A \supset B)\,B\,\Gamma \to D \,\&\, E$. Секвенция $(A \supset B)\,B\,\Gamma \to D \,\&\, E$ может быть получена только по правилу $(\to \&)$ из секвенций $(A \supset B)\,B\,\Gamma \to D$ и $(A \supset B)\,B\,\Gamma \to E$. По индуктивному предположению тогда $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to D$ и $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to E$. Отсюда по правилу $(\to \&)$ получаем $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to C$.

(в) Пусть $C = D \supset E$, а также $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to A$ и $\vdash (A \supset B)\,B\,\Gamma \to D \supset E$. Тогда $\vdash (A \supset B)\,B\,\Gamma\,D \to E$. Также $\vdash (A \supset B)\,\Gamma\,D \to A$ по лемме 1.1. По индуктивному предположению тогда $\vdash (A \supset B)\,\Gamma\,D \to E$. Отсюда по правилу $(\to\supset)$ получаем $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to C$.

(г) Пусть $C = \forall x\, D(x)$. Предположим также, что $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to A$ и $\vdash (A \supset B)\,B\,\Gamma \to \forall x\, D(x)$. Секвенция $(A \supset B)\,B\,\Gamma \to \forall x\, D(x)$ получена по правилу $(\to \forall)$ из секвенции $(A \supset B)\,B\,\Gamma \to D(y)$. По индуктивному предположению тогда $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to D(y)$. Отсюда по правилу $(\to \forall)$ получаем $\vdash (A \supset B)\,\Gamma \to C$.

2. (а) Если $C = \top$, то $(A \,\&\, B)\,\Gamma \to C$ есть аксиома.

(б) Пусть $C = D \,\&\, E$. Предположим, что $\vdash (A \,\&\, B)\,A\,B\,\Gamma \to D \,\&\, E$. Такая секвенция может быть получена только по правилу $(\to \&)$ из секвенций $(A \,\&\, B)\,A\,B\,\Gamma \to D$ и $(A \,\&\, B)\,A\,B\,\Gamma \to E$. По индуктивному предположению $\vdash (A \,\&\, B)\,\Gamma \to D$ и $\vdash (A \,\&\, B)\,\Gamma \to E$. Отсюда по правилу $(\to \&)$ получаем $\vdash (A \,\&\, B)\,\Gamma \to D \,\&\, E$.

(в) Пусть $C = D \supset E$. Предположим, что $\vdash (A \,\&\, B)\,A\,B\,\Gamma \to D \supset E$. Такая секвенция может быть получена только по правилу $(\to\supset)$. Тогда $\vdash (A \,\&\, B)\,A\,B\,\Gamma\,D \to E$. По индуктивному предположению $\vdash (A \,\&\, B)\,\Gamma\,D \to E$. Отсюда по правилу $(\to\supset)$ получаем $\vdash (A \,\&\, B)\,\Gamma \to D \supset E$.

(г) Пусть $C = \forall x\, D(x)$ и $\vdash (A \,\&\, B)\,A\,B\,\Gamma \to \forall x\, D(x)$. Тогда имеет место $\vdash (A \,\&\, B)\,A\,B\,\Gamma \to D(y)$. По индуктивному предположению $\vdash (A \,\&\, B)\,\Gamma \to D(y)$. Отсюда по правилу $(\to \forall)$ получаем $\vdash (A \,\&\, B)\,\Gamma \to C$.

3. (а) Пусть $C = \top$. Тогда $(A \vee B)\,\Gamma \to C$ — аксиома.

(б) Пусть $C = D \,\&\, E$, $\vdash (A \vee B)\,A\,\Gamma \to D \,\&\, E$ и $\vdash (A \vee B)\,B\,\Gamma \to D \,\&\, E$. Тогда $\vdash (A \vee B)\,A\,\Gamma \to D$, $\vdash (A \vee B)\,A\,\Gamma \to E$, $\vdash (A \vee B)\,B\,\Gamma \to D$ и $\vdash (A \vee B)\,B\,\Gamma \to E$. По индуктивному предположению $\vdash (A \vee B)\,\Gamma \to D$ и $\vdash (A \vee B)\,\Gamma \to E$. Отсюда по правилу $(\to \&)$ получаем $\vdash (A \vee B)\,\Gamma \to C$.

(в) Пусть $C = D \supset E$. Предположим, что $\vdash (A \vee B)\,A\,\Gamma \to D \supset E$ и $\vdash (A \vee B)\,B\,\Gamma \to D \supset E$. Тогда $\vdash (A \vee B)\,A\,\Gamma\,D \to E$ и $\vdash (A \vee B)\,B\,\Gamma\,D \to E$. По индуктивному предположению $\vdash (A \vee B)\,\Gamma\,D \to E$. Отсюда по правилу $(\to\supset)$ получаем $\vdash (A \vee B)\,\Gamma \to C$.

(г) Пусть $C = \forall x\, D(x)$, а также $\vdash (A \vee B)\,A\,\Gamma \to \forall x\, D(x)$ и $\vdash (A \vee B)\,B\,\Gamma \to \forall x\, D(x)$. Тогда $\vdash (A \vee B)\,A\,\Gamma \to D(y)$ и $\vdash (A \vee B)\,B\,\Gamma \to D(y)$. По индуктивному предположению $\vdash (A \vee B)\,\Gamma \to D(y)$. Отсюда по правилу $(\to \forall)$ получаем $\vdash (A \vee B)\,\Gamma \to C$.

4. (а) Пусть $C = \top$. Тогда $(\forall x\, A(x))\,\Gamma \to C$ есть аксиома.

(б) Пусть $C = D \,\&\, E$. Предположим, что $\vdash (\forall x\, A(x))\,A(t)\,\Gamma \to D \,\&\, E$. Тогда $\vdash (\forall x\, A(x))\,A(t)\,\Gamma \to D$ и $\vdash (\forall x\, A(x))\,A(t)\,\Gamma \to E$. По индуктивному предположению $\vdash (\forall x\, A(x))\,\Gamma \to D$ и $\vdash (\forall x\, A(x))\,\Gamma \to E$. Отсюда по правилу $(\to \&)$ получаем $\vdash (\forall x\, A(x))\,\Gamma \to C$.

(в) Пусть $C = D \supset E$. Предположим, что $\vdash (\forall x\, A(x))\,A(t)\,\Gamma \to D \supset E$. Тогда $\vdash (\forall x\, A(x))\,A(t)\,\Gamma\,D \to E$. По индуктивному предположению $\vdash (\forall x\, A(x))\,\Gamma\,D \to E$. Отсюда по правилу $(\to\supset)$ получаем $\vdash (\forall x\, A(x))\,\Gamma \to C$.

(г) Пусть $C = \forall z\, D(z)$. Предположим, что $\vdash (\forall x\, A(x))\,A(t)\,\Gamma \to \forall z\, D(z)$. Тогда $\vdash (\forall x\, A(x))\,A(t)\,\Gamma \to D(y)$. По индуктивному предположению $\vdash (\forall x\, A(x))\,\Gamma \to D(y)$. Отсюда по правилу $(\to \forall)$ получаем $\vdash (\forall x\, A(x))\,\Gamma \to C$.

5. (а) Если $C = \top$, то $(\exists x\, A(x))\,\Gamma \to C$ — аксиома.

(б) Пусть $C = D \,\&\, E$. Предположим, что $\vdash (\exists x\, A(x))\,A(y)\,\Gamma \to D \,\&\, E$. Тогда $\vdash (\exists x\, A(x))\,A(y)\,\Gamma \to D$ и $\vdash (\exists x\, A(x))\,A(y)\,\Gamma \to E$. По индуктивному предположению $\vdash (\exists x\, A(x))\,\Gamma \to D$ и $\vdash (\exists x\, A(x))\,\Gamma \to E$. Отсюда по правилу $(\to \&)$ получаем $\vdash (\exists x\, A(x))\,\Gamma \to C$.

(в) Пусть $C = D \supset E$, а также $\vdash (\exists x\, A(x))\, A(y)\, \Gamma \to D \supset E$. Тогда $\vdash (\exists x\, A(x))\, A(y)\, \Gamma\, D \to E$. По индуктивному предположению $\vdash (\exists x\, A(x))\, \Gamma\, D \to E$. Отсюда по правилу $(\to\supset)$ получаем $\vdash (\exists x\, A(x))\, \Gamma \to C$.

(г) Пусть $C = \forall z\, D(z)$. Предположим, что $\vdash (\exists x\, A(x))\, A(y)\, \Gamma \to \forall z\, D(z)$. Тогда $\vdash (\exists x\, A(x))\, A(y)\, \Gamma \to D(v)$, где переменная v не входит свободно в секвенцию $(\exists x\, A(x))\, A(y)\, \Gamma \to \forall z\, D(z)$. По индуктивному предположению $\vdash (\exists x\, A(x))\, \Gamma \to D(v)$. Отсюда по правилу $(\to \forall)$ получаем $\vdash (\exists x\, A(x))\, \Gamma \to C$. □

Теорема 1.2. *Секвенция $\Gamma A \to A$ выводима для произвольной формулы A в каждом исчислении $\mathfrak{S}_i$.*

Доказательство проведем индукцией по количеству логических связок и кванторов в A. Если A — атомарная формула, $\bot$ или $\top$, то наша секвенция является аксиомой. Рассмотрим остальные случаи индукции.

Пусть $A = B \,\&\, C$. По индуктивному предположению $\vdash (B \,\&\, C)\, B\, C\, \Gamma \to B$ и $\vdash (B \,\&\, C)\, B\, C\, \Gamma \to C$. Тогда по правилу $(\to \&)$ имеем $\vdash (B \,\&\, C)\, B\, C\, \Gamma \to B \,\&\, C$ и затем по теореме 1.1.2 получаем $\vdash (B \,\&\, C)\, \Gamma \to B \,\&\, C$.

Пусть $A = B \supset C$. По индуктивному предположению $\vdash (B \supset C)\, B\, \Gamma \to B$ и $\vdash (B \supset C)\, B\, C\, \Gamma \to C$. Тогда по теореме 1.1.1 имеем $\vdash (B \supset C)\, B\, \Gamma \to C$ и затем по правилу $(\to\supset)$ получаем $\vdash (B \supset C)\, \Gamma \to B \supset C$.

Пусть $A = B_1 \vee B_2$. По индуктивному предположению $\vdash (B_1 \vee B_2)\, B_1\, \Gamma \to B_1$ и $\vdash (B_1 \vee B_2)\, B_2\, \Gamma \to B_2$. Тогда по правилу $(\to \vee)$ имеем $\vdash (B_1 \vee B_2)\, B_1\, \Gamma \to B_1 \vee B_2$ и $\vdash (B_1 \vee B_2)\, B_2\, \Gamma \to B_1 \vee B_2$. Затем по теореме 1.1.3 получаем $\vdash (B_1 \vee B_2)\, \Gamma \to B_1 \vee B_2$.

Пусть $A = \forall x\, B(x)$. Пусть z — переменная, не входящая свободно в секвенцию $\vdash (\forall x\, B(x))\, \Gamma \to \forall x\, B(x)$. По индуктивному предположению $\vdash B(z)\, (\forall x\, B(x))\, \Gamma \to B(z)$. По теореме 1.1.4 отсюда имеем $\vdash (\forall x\, B(x))\, \Gamma \to B(z)$ и затем по правилу $(\to \forall)$ получаем $\vdash (\forall x\, B(x))\, \Gamma \to \forall x\, B(x)$.

Пусть $A = \exists x\, B(x)$. Пусть z — переменная, не входящая свободно в секвенцию $\vdash (\exists x\, B(x))\, \Gamma \to \exists x\, B(x)$. По индуктивному предположению $\vdash B(z)\, (\exists x\, B(x))\, \Gamma \to B(z)$. По правилу $(\to \exists)$ отсюда имеем $\vdash B(z)\, (\exists x\, B(x))\, \Gamma \to \exists x\, B(x)$. Наконец по теореме 1.1.5 получаем $\vdash (\exists x\, B(x))\, \Gamma \to \exists x\, B(x)$. □

Теорема 1.3. *Правило вывода $(\bot_\mathbf{i})$ допустимо в $\mathfrak{S}_2$ для произвольной формулы в сукцеденте: если $\vdash \Gamma \to \bot$, то $\vdash \Gamma \to C$ для всякой формулы C.*

Доказательство проведем индукцией по количеству логических связок и кванторов в C. Если C — атомарная формула, дизъюнкция или имеет вид $\exists x\, H(x)$, то утверждение совпадает с формулировкой правила $(\bot_\mathbf{i})$. Рассмотрим остальные случаи индукции.

Пусть $C = D \,\&\, E$, а также $\vdash \Gamma \to \bot$. Тогда по предположению индукции $\vdash \Gamma \to D$ и $\vdash \Gamma \to E$. Отсюда по правилу $(\to \&)$ получаем $\vdash \Gamma \to D \,\&\, E$.

Пусть $C = D \supset E$. Предположим, что $\vdash \Gamma \to \bot$. Тогда $\vdash \Gamma D \to \bot$. Отсюда по предположению индукции имеем $\vdash \Gamma D \to E$. Наконец по правилу $(\to\supset)$ получаем $\vdash \Gamma \to D \supset E$.

Пусть $C = \forall x\, D(x)$. Предположим, что $\vdash \Gamma \to \bot$. Тогда по предположению индукции имеем $\vdash \Gamma \to D(y)$, где y не входит свободно в $\Gamma \to \forall x\, D(x)$. Отсюда по правилу $(\to \forall)$ получаем $\vdash \Gamma \to \forall x\, D(x)$. □

Теорема 1.4. *Если $\vdash_n S$, z — переменная и t — терм, то $\vdash_n S(z/t)$.*

Доказательство. Пусть дан вывод высоты $\leq n$ секвенции S. Произведем в этом выводе замену свободных вхождений параметра z на терм t. При этом мы в случае необходимости должны переименовать переменные, которые используются явно в правилах $(\to \forall)$ и $(\exists \to)$. Индукцией по построению вывода нетрудно убедиться, что в результате получится вывод высоты $\leq n$ секвенции $S(z/t)$. □

Теорема 1.5. *В исчислении секвенций $\mathfrak{S}_i$ обратимы правила вывода $(\to\&)$, $(\to\supset)$ и $(\to\forall)$:*

1. *Если $\vdash \Gamma_n \to A \,\&\, B$, то $\vdash_n \Gamma \to A$ и $\vdash_n \Gamma \to B$.*

2. *Если* $\vdash_n \Gamma \to A \supset B$, *то* $\vdash_n A\,\Gamma \to B$.

3. *Если* $\vdash_n \Gamma \to \forall x\, A(x)$, *то* $\vdash_n \Gamma \to A(x/y)$.

Доказательство проведем индукцией по высоте вывода n.

1. Пусть $\vdash_n \Gamma \to A \,\&\, B$. Тогда у секвенции $\Gamma \to A \,\&\, B$ существует вывод с высотой $\leq n$. Секвенция может быть получена только по правилу $(\to \&)$ из секвенций $\Gamma \to A$ и $\Gamma \to B$, у которых высота вывода $\leq n-1$. Отсюда получаем $\vdash_n \Gamma \to A$ и $\vdash_n \Gamma \to B$.

2. Пусть $\vdash_n \Gamma \to A \supset B$. Тогда у секвенции $\Gamma \to A \supset B$ существует вывод с высотой $\leq n$. Секвенция $\Gamma \to A \supset B$ может быть получена только по правилу $(\to\supset)$ из секвенции $\Gamma A \to B$, у которой высота вывода $\leq n-1$. Отсюда получаем $\vdash_n \Gamma A \to B$.

3. Пусть $\vdash_n \Gamma \to \forall x\, A(x)$. Тогда у секвенции $\Gamma \to \forall x\, A(x)$ существует вывод с высотой $\leq n$. Секвенция $\Gamma \to \forall x\, A(x)$ может быть получена только по правилу $(\to \forall)$ из секвенции $\Gamma \to A(y)$, у которой высота вывода $\leq n-1$. Отсюда получаем $\vdash_n \Gamma \to A(y)$. □

Лемма 1.2. *Если* $\vdash_n \top\,\Gamma \to A$, *то* $\vdash_n \Gamma \to A$.

Доказательство проведем индукцией по высоте вывода n.

База индукции. Пусть $n = 0$. Тогда секвенция $\top\,\Gamma \to C$ есть аксиома. Но тогда и $\Gamma \to C$ будет аксиомой.

Шаг индукции. Предположим, что указанное правило допустимо для выводов с высотой $\leq n$. И пусть $\vdash_{n+1} \top\,\Gamma \to C$. Покажем, что тогда $\vdash_{n+1} \Gamma \to C$.

Все случаи рассматриваются подобным образом.

Пусть, например, последнее примененное правило в выводе секвенции $\top\,\Gamma \to C$ есть $(\& \to)$:

$$\frac{\top,\ A,\ B,\ A \,\&\, B,\ \Delta \to C}{\top,\ A \,\&\, B,\ \Delta \to C}$$

Пусть высота h вывода секвенции $\top\,(A \,\&\, B)\,A\,B\,\Delta \to C$ удовлетворяет неравенству $h \leq n$. Тогда по индуктивному предположению у секвенции $(A \,\&\, B)\,A\,B\,\Delta \to C$ высота вывода $\leq n$. Тогда применение $(\& \to)$ дает секвенцию $(A \,\&\, B)\,\Delta \to C$ с высотой вывода $\leq n+1$. Что и требовалось доказать. □

Статья поступила 20.09.2024
После доработки 15.10.2024
Принята к публикации 21.10.2024

Охотников Олег Алиевич
старший преподаватель
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: oleg.okhotnikov@gmail.com