

УДК 517.977

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ В L_p ¹****М. И. Гусев**

В работе рассматриваются множества достижимости в заданный момент времени для аффинных по управлению систем с интегральными ограничениями на управление в пространстве L_p при $p > 1$. Целью работы является характеристика управлений, ведущих на границу множеств достижимости, как решений экстремальных задач и исследование необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для данных управлений. Множество достижимости трактуется как образ множества допустимых управлений при нелинейном отображении, определяемом динамической системой. Изучается также применение принципа максимума для описания проекций множества достижимости на подпространство и его сечений гиперплоскостью. Исследована зависимость множества достижимости от ресурса управления. Полученные результаты проиллюстрированы на примере линейных систем. Показано, что в этом случае условия оптимальности для граничных управлений являются необходимыми и достаточными.

Ключевые слова: управляемая система, интегральные ограничения, множество достижимости, граничная точка, нелинейное отображение, принцип максимума.

M. I. Gusev. On some properties of reachable sets for nonlinear systems with control constraints in L_p .

The paper considers reachable sets at a given time for control-affine systems with integral control constraints in the space L_p for $p > 1$. The goal of the paper is to characterize controls leading to the boundary of reachable sets as solutions to extremal problems and to study the necessary optimality conditions in the form of the Pontryagin maximum principle for these controls. A reachable set is interpreted here as the image of the set of admissible controls under a nonlinear mapping defined by a dynamical system. We also study the application of the maximum principle to describe projections of a reachable set onto a subspace and its sections by a hyperplane. The dependence of a reachable set on the control resource is studied. The results obtained are illustrated using the example of linear systems. It is shown that in this case the optimality conditions for boundary controls are necessary and sufficient.

Keywords: control system, integral constraints, reachable set, nonlinear mapping, maximum principle.

MSC: 93B03, 49K15**DOI:** 10.21538/0134-4889-2024-30-3-99-112**Введение**

Множество достижимости состоит из всех состояний, которые могут быть достигнуты в заданный момент времени по допустимым траекториям управляемой системы. В работе рассматриваются системы с интегральными ограничениями на управление, заданными в виде шара в пространстве L_p , где $p > 1$. Для линейных систем с ограничениями в L_2 описание множества достижимости было дано в работе Р.Калмана с соавторами [1]. Свойства множеств достижимости для линейных систем с геометрическими и интегральными ограничениями и их приложение в задачах управления исследовались Н. Н. Красовским [2; 3]. В [4] изучались множества достижимости в задачах управления с интегральными ограничениями для квазилинейных систем. Информационные множества в теории гарантированного оценивания [5]

¹Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

также можно трактовать как множества достижимости при дополнительных ограничениях, вносимых наличием измерений.

Для интегральных ограничений на управление наиболее исследован случай квадратичных ограничений ($p = 2$). В работе [6] была доказана выпуклость множеств достижимости нелинейной системы при малом ресурсе управления. В работах [7; 8] изучалось применение алгоритмов, основанных на принципе максимума Понтрягина, для построения множеств достижимости. В статье [9] предложен приближенный метод оценивания множеств достижимости при совместных квадратичных ограничениях специального вида на неопределенные возмущения и траекторию. Для нелинейных систем с ограничениями в L_p в работе [10] предложены дискретные аппроксимации множеств достижимости. Публикации [11; 12] посвящены проблеме аппроксимаций множеств траекторий и его зависимости от параметра p .

Структура статьи следующая. В первом разделе множество достижимости рассматривается как образ множества допустимых управлений при нелинейном отображении, определяемом динамической системой. Исследованы свойства этого отображения и зависимость множества достижимости от ресурса управления. Во втором и третьем разделах дана характеристика управлений, ведущих на границу множества достижимости или границу его проекции на подпространство как решений экстремальных задач, исследованы условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для данных управлений. В заключительном разделе полученные результаты проиллюстрированы на примере линейных систем. Показано, что в этом случае условия оптимальности для граничных управлений являются необходимыми и достаточными.

1. Основные определения, постановка задачи и вспомогательные утверждения

В статье рассматриваются нелинейные управляемые системы вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.1)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление. Далее мы считаем, что $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ определены на множестве $[t_0, t_1] \times D$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, начальное состояние $x_0 \in D$ фиксировано и является внутренней точкой D . В качестве допустимых управлений мы будем рассматривать вектор-функции $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, из пространства L_p , где $p \geq 1$ задано.

Если функции f_1 и f_2 непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x , то для каждого управления $u(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 существует единственное абсолютно непрерывное решение уравнения (1.1).

Мы будем рассматривать ограничения на управление вида $u(\cdot) \in B_p(0, \mu)$, где $B_p(0, \mu) \subset L_p$ — шар радиуса μ с центром в нуле:

$$B_p(0, \mu) = \left\{ u(\cdot) \in L_p : \|u(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} \leq \mu \right\}.$$

Управление, удовлетворяющее ограничениям, будем называть допустимым. Здесь $\|u\|$ под знаком интеграла — евклидова норма вектора u в $\mathbb{R}^r$. Шар радиуса r с центром в нуле в конечномерном евклидовом пространстве обозначим как $B(0, r)$, $B^0(0, r)$ — внутренность шара.

Далее всюду считаем, что μ не превосходит числа $\bar{\mu}$.

Предположение 1. *Функции $f_1(t, x)$ и $f_2(t, x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные по x на $[t_0, t_1] \times D$. Для каждого $u(\cdot) \in B_p(0, \bar{\mu})$ решение системы (1.1) $x(t, u(\cdot))$ определено на $[t_0, t_1]$ и принадлежит множеству D .*

В силу компактности множества $[t_0, t_1] \times D$ из данного предположения следуют условия Липшица для $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$:

$$\|f_i(t, x) - f_i(t, y)\| \leq l_i \|x - y\|, \quad x, y \in D, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, 2.$$

Множеством достижимости $G(\mu)$ системы (1.1) в момент t_1 будем называть совокупность векторов $x(t_1, u(\cdot))$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающих допустимым управлениям

$$G(\mu) = \{x(t_1, u(\cdot)) : u(\cdot) \in B_p(0, \mu)\}.$$

Определим отображение $F(u(\cdot)) : B_p(0, \bar{\mu}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством $F(u(\cdot)) = x(t_1, u(\cdot))$, тогда $G(\mu) = F(B_p(0, \mu))$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть функции $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$ удовлетворяют условию Липшица на $[t_0, t_1] \times D$. Тогда отображение $F(u(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица на $B_p(0, \bar{\mu})$. Если выполнено предположение 1, то отображение $F(u(\cdot))$ непрерывно дифференцируемо по Фреше на шаре $B_p(0, \mu)$, $\mu < \bar{\mu}$, его производная имеет вид $F'(u(\cdot)) = \delta x(t_1)$, где $\delta x(t)$ — решение линеаризованной вдоль $x(t, u(\cdot))$, $u(t)$ системы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем два управления $u(\cdot), v(\cdot) \in B_p(0, \bar{\mu})$ и оценим разность между отвечающими этим управлениям решениями $x(t)$ и $y(t)$

$$\dot{x}(t) - \dot{y}(t) = f_1(t, x(t)) - f_1(t, y(t)) + (f_2(t, x(t)) - f_2(t, y(t)))u(t) + f_2(t, y(t))(u(t) - v(t)).$$

Интегрируя обе части равенства и учитывая липшицевость f_1 и f_2 по x , получаем неравенство

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_{t_0}^t (a(\tau)\|x(\tau) - y(\tau)\| + C\|u(\tau) - v(\tau)\|)d\tau,$$

где обозначено $a(t) = l_1 + l_2\|u(t)\|$, $C = \max\{\|f_2(t, x)\| : t \in [t_0, t_1], x \in D\}$. Для получившегося неравенства запишем дифференциальное уравнение сравнения

$$\dot{z}(t) = a(t)z(t) + C\|u(t) - v(t)\|, \quad z(t_0) = 0.$$

Применяя теорему сравнения для интегральных неравенств, имеем

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| \leq z(t) &\leq C \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\right) \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau \\ &\leq L\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_p, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $L = C(t_1 - t_0)^{(p-1)/p} \exp(l_1(t_1 - t_0) + l_2(t_1 - t_0)^{(p-1)/p}\bar{\mu})$. Следовательно, $\|F(u(\cdot)) - F(v(\cdot))\| = \|x(t_1) - y(t_1)\| \leq L\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_p$.

Пусть выполняется предположение 1. Возьмем управления $u(\cdot)$ и $\Delta u(\cdot)$ такие, что $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu$ и $\|\Delta u(\cdot)\|_p < \bar{\mu} - \mu$. Обозначим через $x(t)$ и $x(t) + \Delta x(t)$ решения системы (1.1), отвечающие этим управлениям. Тогда $\Delta x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Delta x} = \Delta f_1 + \Delta f_2 u + f_2(t, x + \Delta x) \Delta u,$$

где $\Delta f_1 = f_1(t, x + \Delta x) - f_1(t, x)$, $\Delta f_2 = f_2(t, x + \Delta x) - f_2(t, x)$. Для упрощения записи здесь и далее опускаем зависимость $x, \Delta x, u, \Delta u$ от t .

Пусть скалярная функция $\psi(t, x)$ определена и непрерывна вместе со своей производной по x на $[t_0, t_1] \times D$. Применяя к $\Delta\psi = \psi(t, x + \Delta x) - \psi(t, x)$ теорему о среднем, представим $\Delta\psi$ в виде $\Delta\psi = \partial\psi/\partial x(t, x)\Delta x + R(t, x, \Delta x)$, где

$$R(t, x, \Delta x) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(t, x + \theta(t)\Delta x) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(t, x)\right)\Delta x, \quad 0 \leq \theta(t) \leq 1.$$

Так как $|R(t, x(t), \Delta x(t))|/\|\Delta x(t)\| \rightarrow 0$, $\Delta x(t) \rightarrow 0$, то, учитывая (1.2), можем заключить, что

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} |R(t, x(t), \Delta x(t))| = o(\|\Delta u(\cdot)\|_p).$$

Применяя подобное представление к компонентам вектора $f_1(t, x)$ и матрицы $f_2(t, x)$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t))\Delta x(t) + R_1(t, x(t), \Delta x(t)), \\ \Delta f_2 u &= \sum_1^r \Delta f_2^i u_i = \sum_1^r \frac{\partial f_2^i}{\partial x}(t, x)u_i(t) + \sum_1^r R_2^i(t, x(t), \Delta x(t))u_i(t); \end{aligned}$$

здесь R_1, R_2^i — величины порядка $o(\|\Delta u(\cdot)\|_p)$.

Наконец, учитывая, что f_2 — липшицева относительно x функция, имеем

$$f_2(t, x + \Delta x)\Delta u = f_2(t, x(t))\Delta u(t) + R_3(t, x(t), \Delta x(t))\Delta u(t),$$

где $\|R_3(t, x, \Delta x)\| \leq C_2\|\Delta x\|$. Заметив, что дифференциальное уравнение для Δx можно записать в виде

$$\dot{\Delta x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t) + R(t), \quad \Delta x(t_0) = 0,$$

где $A(t), B(t)$ — матрицы линеаризованной системы, получим

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau)(B(\tau)\Delta u(\tau) + R(\tau))d\tau = \delta(t, \Delta u(\cdot)) + \int_{t_0}^t X(t, \tau)R(\tau)d\tau.$$

Здесь $X(t, \tau)$ — матрица Коши линеаризованной системы и, следовательно, $\delta(t, \Delta u(\cdot))$ — решение этой системы, порожденное управлением $\Delta u(\cdot)$ и нулевым начальным условием.

Из оценок для R_i , $i = 1, 2, 3$, и равномерной ограниченности $X(t, \tau)$ получаем, что

$$\int_{t_0}^t X(t, \tau)R(\tau)d\tau = o(\|\Delta u(\cdot)\|_p)$$

и, значит, $F(u(\cdot) + \Delta u(\cdot)) - F(u(\cdot)) = \delta(t_1, \Delta u(\cdot)) + o(\|\Delta u(\cdot)\|_p)$. Непрерывность производной следует из непрерывной зависимости $X(t, \tau)$ и $B(t)$ от управления $u(\cdot)$ и доказывается по схеме статьи [7]. $\square$

Для случая $p = 2$ варианты леммы 1 при несколько иных предположениях доказаны в [6; 7].

Заметим, что множество траекторий $x(t, u(\cdot))$, порожденных управлениями из $B_p(0, \mu)$ при $p > 1$, является при выполнении предположения 1 равномерно ограниченным и равномерно непрерывным. Этот факт вытекает из оценки $\|x(t, u(\cdot)) - x(\tau, u(\cdot))\| \leq C_1|t - \tau| + C_2|t - \tau|^{(p-1)/p}$, где C_1, C_2 — константы, не зависящие от $u(\cdot)$. Из этого факта и слабой компактности шара в пространстве L_p при $p > 1$ следует компактность множества траекторий в пространстве $C[t_0, t_1]$ и компактность множества достижимости.

При $p = 1$ свойство равномерной непрерывности не имеет места и множество достижимости может не быть замкнутым.

Множество достижимости представимо в виде образа при отображении F шара банахова пространства $X = L_p$ в $\mathbb{R}^n$:

$$G(\mu) = \{F(u(\cdot)) : u(\cdot) \in B_p(0, \mu)\}.$$

Отображение F удовлетворяет условию Люстерника (является регулярным) в точке $u(\cdot)$, если $F'(u(\cdot))$ отображает L_p на все пространство $\mathbb{R}^n$. Из равенства $F'(u(\cdot))\Delta u(\cdot) = \delta x(t_1, \Delta u(\cdot))$

следует, что регулярность отображения эквивалентна полной управляемости линеаризованной в точке $u(\cdot)$ системы.

Обозначим через $h(A, B)$ хаусдорфово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть выполнено предположение 1. Тогда найдется константа $L > 0$ такая, что

$$h(G(\mu_1), G(\mu_2)) \leq L|\mu_1 - \mu_2|$$

для любых $\mu_1, \mu_2 \leq \bar{\mu}$. Если $p > 1$ и отображение F регулярно в любой точке $u(\cdot) \in B(0, \bar{\mu})$, то для любых $\mu_1, \mu_2 \leq \bar{\mu}$, $\mu_1 < \mu_2$ найдется $\varepsilon > 0$ такой, что

$$G(\mu_1) + B(0, \varepsilon) \subset G(\mu_2). \quad (1.3)$$

Доказательство. Первая часть утверждения — прямое следствие леммы 1. Константа L здесь является константой Липшица отображения F .

Допустим, что вторая часть утверждения неверна. Тогда найдутся $\mu_1 < \mu_2$ и последовательности $x_k, y_k \in \mathbb{R}^n$ такие, что $x_k \in G(\mu_1)$, $\|y_k\| \leq 1/k$, $x_k + y_k \notin G(\mu_2)$. Учитывая компактность $G(\mu_1)$, можем считать, что x_k сходится к некоторому $\bar{x} \in G(\mu_1)$, т.е. $\bar{x} = F(\bar{u}(\cdot))$, $\|\bar{u}(\cdot)\| \leq \mu_1$. Так как F регулярно в точке $\bar{u}(\cdot)$, то из теоремы Люстерника ([13], теорема 2) следует, что найдется $s > 0$ такое, что для всех достаточно малых $r > 0$ имеет место включение $B(\bar{x}, sr) \subset F(B_p(\bar{u}(\cdot), r))$. Выберем $r < \mu_2 - \mu_1$, тогда $B_p(\bar{u}(\cdot), r) \subset B_p(0, \mu_2)$ и, значит, $B(\bar{x}, sr) \subset F(B_p(0, \mu_2)) = G(\mu_2)$. Но в этом случае начиная с некоторого номера k $x_k + y_k \in B(\bar{x}, sr) \subset F(B_p(0, \mu_2)) = G(\mu_2)$ в противоречие с предположением. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Соотношение (1.3) означает, что множество достижимости монотонно растет с увеличением доступного ресурса управления μ , если линеаризованная в окрестности любой траектории система вполне управляема. При нарушении условия даже для одной траектории соотношение может не выполняться. Это показывает пример машины Дуббинса [8], где условие нарушается на нулевом управлении и конечная точка траектории, отвечающая этому управлению, лежит на границе $G(\mu)$ при всех μ .

Отметим также, что для управляемой системы, описываемой интегральным уравнением типа Урысона с интегральным ограничением на управляющие функции, липшицевость по μ множества траекторий управляемой системы исследована в работе [14].

2. Условия экстремума для граничных траекторий

В работе [7] для случая $p = 2$ было показано, что управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является решением задачи оптимального управления, если линеаризованная система вполне управляема. Данное утверждение справедливо и в более общем случае; а именно, рассмотрим отображение F банахова пространства X в $\mathbb{R}^n$. Пусть $G = F(U)$, где $U = \{u \in X : \varphi(u) \leq \nu\}$, $\varphi(u)$ — заданный непрерывный функционал на X , $\nu > 0$ — заданное число, $U \neq \emptyset$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 ([15], Theorem 2). Пусть отображение F непрерывно дифференцируемо по Фреше в точке $\hat{u} \in U$ и удовлетворяет условию Люстерника $\text{Im } F'(\hat{u}) = \mathbb{R}^n$. Для выполнения $\hat{x} = F(\hat{u}) \in \partial G$ необходимо, чтобы $\hat{u}$ доставлял локальный экстремум в задаче

$$\varphi(u) \rightarrow \min, \quad F(u) = \hat{x} \quad (2.1)$$

и $\varphi(\hat{u}) = \nu$.

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что экстремум в задаче (2.1) будет глобальным, если условие регулярности F выполнено для всех $u \in U^2$. Действительно, допустим, что это не так. Тогда найдется $u \in X$ такой, что $F(u) = \hat{x}$ и $\varphi(u) < \varphi(\hat{u}) = \nu$. Отсюда получаем, что $u \in U$ и в силу теоремы $\varphi(u) = \nu$. Приходим к противоречию. Если условие регулярности выполнено не для всех u , минимум в (2.1) достигается на множестве тех точек, где F регулярно.

Эту теорему мы можем применить к описанию граничных точек множества достижимости $G(\mu)$, полагая, что $X = L_p$, $p > 1$ и отображение $F : L_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ задано равенством $F(u(\cdot)) = x(t_1)$, где $x(t)$ — решение системы (1.1). Ограничение на управление $u(\cdot) \in B_p(0, \mu)$ нам удобнее записать как $\varphi(u(\cdot)) \leq \nu$, где $\varphi(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^p dt$, $\nu = \mu^p$. Далее считаем, не оговаривая это отдельно, что выполнено предположение 1. Задача (2.1) принимает в нашем случае вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^p dt \rightarrow \min, \quad x(t_1, u(\cdot)) = \hat{x}.$$

Применим принцип максимума Понтрягина [16] для данной задачи.

Вводя гамильтониан

$$H(t, x, u, p, \lambda_0) = -\lambda_0 \|u\|^p + p^\top (f_1(t, x) + f_2(t, x)u),$$

запишем соотношения принципа максимума в виде

$$H(t, x(t), \hat{u}(t), p(t), \lambda_0) = \max_{v \in \mathbb{R}^r} H(t, x(t), v, p(t), \lambda_0), \quad \text{a.e. } t \in [t_0, t_1], \quad (2.2)$$

$$\dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), \hat{u}(t), p(t), \lambda_0), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2.3)$$

Здесь и далее $x(t)$ — решение системы (1.1), отвечающее управлению $\hat{u}(t)$; $\lambda_0 \geq 0$ и $p(\cdot)$ не равны одновременно нулю;

$$A(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}[f_2(t, x(t))\hat{u}(t)], \quad B(t) = f_2(t, x(t));$$

матрицы линеаризованной в окрестности $x(t)$ системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \quad (2.4)$$

Из условия полной управляемости линеаризованной системы следует, что $\lambda_0 > 0$. Действительно, если $\lambda_0 = 0$, то $p(\cdot) \neq 0$, а от v в гамильтониане зависит только слагаемое $p^\top(t)B(t)v$, куда v входит линейно. Следовательно, максимум в (2.2) достигается лишь при условии, если $p^\top(t)B(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Но это невозможно, так как $p(\cdot) \neq 0$, а система (2.4) вполне управляема.

Пусть $p > 1$. Не ограничивая общности, будем далее считать, что $\lambda_0 = 1/p$. Условие (2.2) принимает в этом случае вид

$$\psi'(u) = y. \quad (2.5)$$

Здесь $\psi(u) = 1/p \|u\|^p$ — непрерывно дифференцируемая функция, производная Фреше которой $\psi'(u) = \|u\|^{p-2}u$ при $u \neq 0$, $\psi'(0) = 0$, $u = \hat{u}(t)$, $y = B^\top(t)p(t)$.

Лемма 2. При любом y уравнение (2.5) имеет единственное решение, которое обозначим через $U(y)$. При всех $p > 1$ функция $U(y)$ непрерывна в $\mathbb{R}^r$. Если $1 < p \leq 2$, функция $U(y)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^r$, при $p > 2$ $U(y)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^r \setminus \{0\}$.

²На этот факт обратил внимание автора В. С. Пацко.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, $U(0) = 0$. Если $y \neq 0$, то $u \neq 0$ и уравнение (2.5) запишем как $\|u\|^{p-2}u = y$. Следовательно, $u = \gamma y$, где $\gamma > 0$. Подстановкой в уравнение получаем, что $\gamma = \gamma(y) = \|y\|^{\alpha(p)}$, где обозначено $\alpha(p) = 1/(p-1) - 1$. Таким образом, $U(y) = \gamma(y)y = \|y\|^{\alpha(p)}y$. Функция $U(y)$, очевидно, непрерывна при $y \neq 0$. Из неравенства $\|U(y)\| \leq \|y\|^{\alpha(p)+1}$ следует непрерывность $U(y)$ в нуле.

При $p = 2$ функция $U(y) = y$ непрерывно дифференцируема. Потому далее считаем, что $p \neq 2$, значит, $\alpha(p) \neq 0$. Вычисляя при $y \neq 0$ частные производные $\partial U_i / \partial y_j$, получим

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_j}(y) = \gamma(y)\delta_{ij} + \alpha(p)y_i y_j \|y\|^{(\alpha(p)-2)},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Производные, очевидно, непрерывны при $y \neq 0$. Обозначим $y(\Delta) = (0, \dots, 0, \Delta, 0, \dots, 0)$, где Δ стоит на месте j -й координаты. Так как $U_i(y(\Delta)) = \delta_{ij}\Delta|\Delta|^{\alpha(p)}$, то при $\alpha(p) > 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (U_i(y(\Delta)) - U_i(0)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \delta_{ij} \Delta |\Delta|^{\alpha(p)} = 0,$$

т. е. $\partial U_i / \partial y_j(0) = 0$ для любых $i, j \leq r$. Учитывая, что $|y_i y_j| \leq 1/2 \|y\|^2$, имеем

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_j}(y) \leq \gamma(y)\delta_{ij} + \frac{1}{2}\alpha(p)\|y\|^{(\alpha(p))} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0.$$

Таким образом, частные производные $U(y)$ непрерывны всюду при $\alpha(p) \leq 0$, что эквивалентно неравенству $1 < p \leq 2$. При $p > 2$ производные $\partial U_i / \partial y_j$ не определены в нуле. $\square$

Из приведенных соотношений принципа максимума и леммы 2 получаем

Теорема 2. Пусть ограничения на управление заданы неравенством $\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^p dt \leq \nu = \mu^p$. Если управление $\hat{u}(t)$ переводит систему (1.1) на границу множества достижимости $G(\mu)$ и соответствующая линеаризованная система вполне управляема, то $\hat{u}(t) = U(f_2^\top(t, x(t))p(t))$, где $(x(t), p(t))$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))U(f_2^\top(t, x(t))p(t)), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{p}(t) &= -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t)) + \sum_{i=1}^r \frac{\partial f_2^i}{\partial x}(t, x(t))U_i(f_2^\top(t, x(t))p(t))\right)p(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 3. Так как функции $U(y)$, $f_2(t, x(t))$ и $p(t)$ непрерывны, из приведенной теоремы следует, что управление $\hat{u}(t)$, переводящее систему на границу множества достижимости, является непрерывным при условии полной управляемости линеаризованной системы.

З а м е ч а н и е 4. Если линеаризованная система не является вполне управляемой, то и в этом случае мы можем утверждать, что управление $\hat{u}(t)$ удовлетворяет принципу максимума в форме (2.2), (2.3). Этого можно добиться, если положить $\lambda_0 = 0$, а в качестве $p(t)$ выбрать нетривиальное решение системы $\dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t)$, удовлетворяющее условию $B^\top(t)p(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Такое решение обязательно существует, если система (2.4) не вполне управляема. Таким образом, $\lambda_0 + \|p(\cdot)\| \neq 0$ и условие (2.2), принимающее в этом случае форму $0 \cdot \hat{u}(t) = 0$, выполняется. Но оно не содержит информации об управлении.

3. Граница проекции множества достижимости на подпространство

При численном построении множеств достижимости часто используется вычисление их проекций на координатные плоскости или их сечений плоскостями [17; 18]. Рассмотрим, как

будут выглядеть соответствующие условия оптимальности для граничных управлений в этом случае.

Предположим, что линейное подпространство L заданно равенством $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx = 0\}$, где $C — $m \times n$ матрица полного ранга, $m < n$. Размерность L равна $n - m$. Пусть $P = E - C^\top (CC^\top)^{-1}C$ — матрица ортогонального проектирования на L , E — единичная матрица. Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются условия $Px \in L$, $Px = x$, если $x \in L$ и $P^\top = P$. Проекцию множества достижимости на подпространство L обозначим как$

$$G_L(\mu) = \{y : y = Px, x \in G(\mu)\}.$$

Границей проекции множества достижимости $\partial G_L(\mu)$ будем называть множество ее граничных точек относительно подпространства L . Вектор $y \in L$ является граничной точкой, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $B(y, \varepsilon) \cap L$ содержит как принадлежащие, так и не принадлежащие $G_L(\mu)$ точки.

Рассмотрим линейную систему вида (2.4). Систему назовем вполне управляемой по выходу Px , если для любого $y \in L$ найдется управление $u(\cdot) \in L_p$, которое переводит систему из нулевого начального состояния в состояние $x(t_1) : Px(t_1) = y$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Для того чтобы система (2.4) была вполне управляема по выходу Px , необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $p(t)$ сопряженной однородной системы $\dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t)$ из условия $B^\top(t)p(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$, $Cp(t_1) = 0$ следовало, что $p(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$.*

Доказательство. Обозначим через N подпространство управляемости системы (2.4):

$$N = \{x(t_1, u(\cdot)) : u(\cdot) \in L_p\},$$

где $x(t_1, u(\cdot))$ — решение системы с нулевым начальным условием. Понятно, что $PN \subset L$ и условие управляемости по выходу эквивалентно равенству $PN = L$. Система, таким образом, не является управляемой по выходу Px тогда и только тогда, когда найдется вектор $0 \neq \bar{p} \in L$ такой, что $(\bar{p}, Px(t_1, u(\cdot))) \leq 0$ для всех управлений $u(\cdot)$. Это следует из теоремы об отделимости выпуклых множеств. Последнее неравенство можно записать в виде

$$\bar{p}^\top P \int_{t_0}^{t_1} X(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \leq 0;$$

здесь $X(t, \tau)$ — матрица Коши системы (2.4). Учитывая, что $\bar{p}^\top P = (P^\top \bar{p})^\top = (P\bar{p})^\top = \bar{p}^\top$, последнее неравенство перепишем:

$$\int_{t_0}^{t_1} p^\top(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \leq 0,$$

где $p(\tau)$ — решение сопряженной системы с краевым условием $p(t_1) = \bar{p}$. Неравенство выполняется для всех $u(\tau)$ тогда и только тогда, когда $p^\top(\tau) B(\tau) \equiv 0$. Так как $p(t_1) = \bar{p} \neq 0$ и $\bar{p} \in L$, то $Cp(t_1) = 0$ и мы получаем утверждение леммы. $\square$

Утверждение 2. *Пусть допустимое управление $\hat{u}(\cdot)$ переводит систему (1.1) в точку $\bar{x}$ такую, что $P\bar{x} \in \partial G_L(\mu)$. Если линеаризованная в окрестности $(x(t, \hat{u}(\cdot)), \hat{u}(t))$ система вполне управляема по выходу Px , то существует нетривиальное решение сопряженной системы $\dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t)$ такое, что $Cp(t_1) = 0$, $\hat{u}(t) = U(B^\top(t)p(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ и $\varphi(\hat{u}(\cdot)) = \mu^P$.*

Доказательство. Проекцию множества достижимости на подпространство L можно представить в виде

$$G_L(\mu) = \{\hat{F}(u(\cdot)) : \varphi(u(\cdot)) \leq \mu^p\},$$

где $\hat{F}(u(\cdot)) = PF(u(\cdot)) = Px(t_1, u(\cdot))$. Отображение $\hat{F} : L_p \rightarrow L$ имеет непрерывную производную Фреше $\hat{F}'(u(\cdot)) = P\Delta x(t_1, u(\cdot), \Delta u(\cdot))$, где Δx — решение линеаризованной системы. Если линеаризованная система удовлетворяет условиям управляемости по выходу $P\Delta x$, то $\hat{F}$ регулярно в точке $u(\cdot) : \hat{F}'(u(\cdot))L_p = L$. Следовательно, если управление $\hat{u}(\cdot)$, удовлетворяющее ограничению $\varphi(u(\cdot)) \leq \mu^p$, переводит систему в точку $\bar{x}$ относительной границы $G_L(\mu)$, то это управление решает экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \varphi(u(\cdot)) &\rightarrow \min, \\ x(t_0) &= x^0, \quad Px(t_1) = \bar{x}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

при этом $\varphi(\hat{u}(\cdot)) = \mu^p$.

Пусть x, y — векторы-столбцы, вообще говоря, разной размерности. Далее условимся обозначать через $[x; y]$ вектор-столбец, составленный из векторов x, y , расположенных один над другим. Выберем в $\mathbb{R}^n$ новый ортонормированный базис следующим образом. Первые $n - m$ векторов базиса возьмем в L , а оставшиеся — в ортогональном дополнении L . В новом базисе любой вектор $y \in L$ будет иметь вид $[z; 0]$, где $z \in \mathbb{R}^{n-m}$, 0 — нулевой вектор размерности m . Обозначим через T матрицу перехода от старого базиса к новому: $Ty = [z; 0]$. Умножив равенство $Px(t_1) = \bar{x}$ на T , мы можем заменить его системой из $n - m$ равенств

$$T_i Px(t_1) = T_i \bar{x}, \quad i = 1, \dots, n - m,$$

где T_i — i -я строка матрицы T . Выписывая для задачи (3.1) условия принципа максимума, получим, что найдутся $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^{n-m}$, $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$, и абсолютно непрерывная вектор-функция $p(t)$ такие, что выполнены соотношения (2.2), (2.3) и

$$p(t_1) = -\nabla_x \left[\sum_{i=1}^{n-m} \lambda_i T_i Px \right] (t_1), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}).$$

Последнее условие можно записать в виде $p(t_1) = -P^\top T^{-1}[\lambda, 0]$. Обозначим $l = T^{-1}[\lambda, 0]$, тогда $l \in L$ и $p(t_1) = -P^\top l = -l$. Допустим, что $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda \neq 0$ и, следовательно, $l \neq 0$. Из равенства (2.2) получаем, что $B^\top(t)p(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$, при этом $p(\cdot) \neq 0$ и $Cp(t_1) = 0$. Но по лемме 3 это невозможно.

Поэтому $\lambda_0 > 0$, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_0 = 1/p$. Из условий $p(t_1) = -l$, $l \in L$, следует, что $Cp(t_1) = 0$. Из соотношений (2.2), (2.3) получаем, как и ранее, равенство $\hat{u}(t) = U(B^\top(t)p(t))$. Так как $U(0) = 0$ и $\varphi(\hat{u}(\cdot)) = \mu^p$, то $p(t) \neq 0$. $\square$

З а м е ч а н и е 5. Поскольку размерность подпространства L равна $n - m$, то граница проекции множества достижимости на L является, как правило, многообразием размерности $n - m - 1$, точки которого определяются $n - m - 1$ координатами. Условия $Cp(t_1) = 0$ и $\varphi(\hat{u}(\cdot)) = \mu^p$ дают систему из $m + 1$ уравнения относительно n неизвестных для определения данных точек.

Для построения множества достижимости при $n \geq 3$ также используются его сечения плоскостями (гиперплоскостями), параллельными координатным плоскостям. Как легко убедиться, точки относительной границы сечения гиперплоскостью — это граничные точки множества достижимости в $\mathbb{R}^n$ и для соответствующих управлений при выполнении условий регулярности справедливы соотношения (2.2), (2.3). Здесь, в отличие от случая проекции на подпространство, не появляются дополнительных условий для $p(t_1)$, единственное недостающее условие задается уравнением гиперплоскости $(a, x(t_1)) = \alpha$. Более подробно построение границы сечения плоскостью обсуждается в следующем разделе.

4. Множества достижимости с ограничениями в L_p в линейном случае

Проиллюстрируем применение принципа максимума в задаче построения множества достижимости для линейной системы вида (2.4). Матрицы $A(t), B(t)$ будем считать непрерывно зависящими от t . Не ограничивая общности, начальное состояние можно считать нулевым: $x(t_0) = x^0 = 0$. Управления выбираются из пространства L_p , ограничения на $u(\cdot)$ пусть заданы неравенством $\varphi(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^p dt \leq \nu$, $\nu = \mu^p$. Здесь и далее $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$. Систему далее считаем вполне управляемой на отрезке $[t_0, t_1]$; заметим, что это свойство не зависит от p .

Утверждение 3. *Множество достижимости $G(\mu)$ — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Действительно, $G(\mu) = F(B_p(0, \mu))$ является образом шара $B_p(0, \mu)$ при отображении F , которое линейно и удовлетворяет условию Люстерника. Компактность $G(\mu)$ была установлена ранее, из линейности F следует выпуклость $G(\mu)$. Пусть $\bar{x}, \hat{x} \in \partial G(\mu)$, $\bar{x} \neq \hat{x}$. Тогда $\bar{x} = F(\bar{u})$, $\hat{x} = F(\hat{u})$, где в силу теоремы 1 $\|\bar{u}\|_p = \mu$. Из строгой выпуклости шара в L_p вытекает, что $\|(\bar{u} + \hat{u})/2\|_p < \mu$. Но тогда по теореме Люстерника [13, с. 11] найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $F((\bar{u} + \hat{u})/2) + B(0, \varepsilon) = (\bar{x} + \hat{x})/2 + B(0, \varepsilon) \subset G(\mu)$. Таким образом, полусумма различных точек границы $G(\mu)$ является его внутренней точкой, т. е. $G(\mu)$ строго выпукло. $\square$

Покажем, что в случае линейной системы условия, описываемые теоремой 1, являются не только необходимыми, но и достаточными.

Утверждение 4. *Для того чтобы управление $\hat{u}$ переводило линейную систему в точку $\bar{x}$, лежащую на границе множества достижимости $G(\mu)$, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{u}$ было решением задачи*

$$\begin{aligned} \varphi(u(\cdot)) &\rightarrow \min, \\ x(t_0) &= 0, \quad x(t_1) = \bar{x} \end{aligned} \quad (4.1)$$

и при этом $\varphi(\hat{u}(\cdot)) = \mu^p$.

Доказательство. Необходимость условия следует из теоремы 1, докажем его достаточность. Пусть управление $\hat{u}(\cdot)$ переводит систему в точку $\bar{x}$ и решает задачу (4.1). Из принципа максимума Понтрягина получаем, что управление имеет вид $\hat{u}(\tau) = U(B^\top(\tau)p(\tau))$, где $p(t) = p(t, s)$ — нетривиальное решение сопряженной системы, удовлетворяющее условию $p(t_1, s) = s$. Учитывая определение $U(y)$ (см. лемму 2), имеем равенство

$$\|\hat{u}(\tau)\|^{p-2} \hat{u}(\tau) = v(\tau, s), \quad \text{п.в. } \tau \in [t_0, t_1],$$

где обозначено $v(\tau, s) = B^\top(\tau)p(\tau, s)$. Заметим, что $v(\tau, s)$ — линейная функция s . Так как $\|\hat{u}(\tau)\|^{p-1} = \|v(\tau, s)\|$, то $\|\hat{u}(\tau)\| = \|v(\tau, s)\|^{1/(p-1)}$, следовательно

$$\hat{u}(\tau) = \|v(\tau, s)\|^{-\frac{p-2}{p-1}} v(\tau, s).$$

Возьмем отвечающую $\hat{u}(\cdot)$ траекторию $x(t)$ и рассмотрим скалярное произведение векторов s и $x(t_1) = \bar{x}$. Получим

$$\begin{aligned} (s, \bar{x}) &= (s, x(t_1)) = s^\top \int_{t_0}^{t_1} X(t, \tau) B(\tau) \hat{u}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} v^\top(\tau, s) \hat{u}(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} v^\top(\tau, s) v(\tau, s) \|v(\tau, s)\|^{-\frac{p-2}{p-1}} d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau, s)\|^{2-\frac{p-2}{p-1}} d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau, s)\|^q d\tau. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Далее, учитывая равенства $q = p/(p-1)$, $1/q = 1 - 1/p$ и условие $\varphi(\hat{u}(\cdot)) = \mu^p$, имеем $\|\hat{u}(\tau)\|^p = \|v(\tau, s)\|^{p/(p-1)} = \|v(\tau, s)\|^q$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau, s)\|^q d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|\hat{u}(\tau)\|^p d\tau = \mu^p.$$

Представим μ^p в виде

$$\mu^p = \mu^{p(1/p+1/q)} = \mu \cdot \mu^{p/q} = \mu \left(\int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau, s)\|^q d\tau \right)^{1/q}.$$

Для любого допустимого управления $u(\cdot) \in B_p(0, \mu)$, переводящего систему в некоторую точку $x \in G(\mu)$, применяя интегральное неравенство Гельдера, получим

$$(s, x) = \int_{t_0}^{t_1} v^\top(\tau, s) u(\tau) d\tau \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} \left(\int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau, s)\|^q d\tau \right)^{1/q} \leq \mu \left(\int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau, s)\|^q d\tau \right)^{1/q}.$$

Из (4.2) и последнего неравенства следует, что

$$(s, x) \leq (s, \bar{x}) \quad \forall x \in G(\mu), \quad (4.3)$$

Так как $s \neq 0$, из неравенства (4.3) имеем, что $\bar{x}$ принадлежит границе $G(\mu)$. Это завершает доказательство. $\square$

З а м е ч а н и е 6. При выводе (4.3) из принципа максимума мы использовали нормировку множителей Лагранжа. Поэтому длина вектора s в (4.3) зависит от управления $\hat{u}$. Можно считать $\|s\|$ произвольной, но тогда в формулу для $\hat{u}$ придется внести корректировку и ее запишем как

$$\hat{u}(\tau) = \mu \left(\int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau, s)\|^q d\tau \right)^{-1/p} \|v(\tau, s)\|^{q/p-1} v(\tau, s). \quad (4.4)$$

Так как $G(\mu)$ — выпуклый компакт, то неравенство (4.3) дает необходимое и достаточное условие принадлежности $\bar{x}$ границе множества $G(\mu)$. Правая часть неравенства (4.3) имеет вид

$$(s, \bar{x}) = \psi(s), \text{ где } \psi(s) = \mu \left(\int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau, s)\|^q d\tau \right)^{1/q} \text{ — опорная функция множества достижимости.}$$

При $p = 2$ $\|v(\tau, s)\|^q = (v(\tau, s), v(\tau, s))$ — квадратичная форма от s , поэтому при вычислении интеграла от $\|v(\tau, s)\|^q$ можно s вынести из-под знака интеграла и мы приходим к известной формуле для опорной функции эллипсоида [5].

Обсудим более подробно задачу построения сечений множества достижимости. Пусть $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) = \alpha\}$, $a \neq 0$, — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что число α удовлетворяет неравенству $|\alpha| < \psi(a)$. При этом условии сечение множества достижимости гиперплоскостью $G_H(\mu) = G(\mu) \cap H$ имеет непустую относительную внутренность [19] в H . Действительно, в силу управляемости линейной системы $v(\cdot, s) = B^\top(\cdot)p(\cdot, s) \neq 0$ при $s \neq 0$. Поэтому $\psi(s) > 0$ при $s \neq 0$. Вследствие непрерывности $\psi(s)$ имеем $\bar{\varepsilon} = \min\{\psi(s) : \|s\| = 1\} > 0$. Из положительной однородности функции $\psi(s)$ следует, что $\psi(s) \geq \bar{\varepsilon}\|s\|$ для любого s и, значит, $B(0, \bar{\varepsilon}) \subset G(\mu)$.

Пусть $\alpha > 0$ и пусть вектор $\bar{x} \in G(\mu)$ такой, что $(a, \bar{x}) = \psi(a)$. Выберем $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ так, чтобы $(a, x) < \alpha \forall x \in B^0(0, \varepsilon)$. Тогда шар $B^0(0, \varepsilon)$ и вектор $\bar{x}$ лежат по разные стороны H . Перебирая все отрезки, соединяющие точки $B^0(0, \varepsilon)$ с $\bar{x}$ и взяв точки пересечения этих отрезков с H , мы получим открытое относительно H подмножество $G_H(\mu)$. Это множество содержит точку $(\alpha/\psi(a))\bar{x}$. Аналогично рассматривается случай $\alpha \leq 0$.

Опишем, как можно построить границу множества $G_H(\mu)$ относительно H . Будем далее считать для определенности, что $\alpha > 0$. Обозначим через $H^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) = 0\}$ подпространство, параллельное H . Для любого $s \in H^0$, $s \neq 0$, решение задачи

$$(s, x) \rightarrow \max, \quad (a, x) = \alpha, \quad x \in G(\mu), \quad (4.5)$$

будет граничной точкой $G_H(\mu)$ относительно гиперплоскости H . Перебирая векторы s из единичной сферы в H^0 и решая для каждого s задачу (4.5), мы получим границу $G_H(\mu)$, которая окружает точку $(\alpha/\psi(a))\bar{x}$.

Функция Лагранжа для задачи (4.5) имеет вид $L(x, \lambda) = (s, x) - \lambda(a, x)$. Так как сечение $G_H(\mu)$ строго выпукло, задача (4.5) имеет единственное решение $\hat{x}(s)$ для каждого $\|s\| = 1$. По теореме Куна — Таккера найдется множитель Лагранжа λ такой, что

$$(s - \lambda a, \hat{x}) \geq (s - \lambda a, x) \quad \forall x \in G(\mu). \quad (4.6)$$

Заметим, что $s - \lambda a \neq 0$ в силу того, что $s \in H^0$, $a \perp H^0$. Из (4.6) следует, что множитель λ определяется однозначно. Действительно, допустим, что неравенства (4.6) выполняются для двух различных λ_1 и λ_2 . Пусть $\hat{u}(\cdot) \in B_p(0, \mu)$ — управление, переводящее систему в точку $\hat{x}(s)$. Это управление единственно согласно теореме 1 и ввиду строгой выпуклости нормы в L_p . Неравенство в (4.6) запишем как $(v_i(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \geq (v_i(\cdot), u(\cdot)) \quad \forall u(\cdot) \in B_p(0, \mu)$, $i = 1, 2$, где $v_i(\tau) = B^\top(\tau)p(\tau, s - \lambda_i a)$, $\tau \in [t_0, t_1]$. Поскольку система вполне управляема и $(\lambda_1 - \lambda_2)a \neq 0$, то $v_1(\tau) - v_2(\tau) \neq 0$ на множестве ненулевой меры. Но $\hat{u}(\cdot)$ определяется формулой (4.4) при подстановке в нее вместо $v(\tau, s)$ любой из функций $v_i(\tau)$, что невозможно.

Обозначим через $\hat{u}(\tau, \lambda)$ функцию, получаемую из (4.4) при подстановке $v(\tau) = B^\top(\tau)p(\tau, s - \lambda a)$. Тогда значение множителя λ и соответствующая точка границы $\hat{x} = \hat{x}(s)$ могут быть найдены из равенств

$$(a, \hat{x}) = \int_{t_0}^{t_1} v^\top(\tau, a) \hat{u}(\tau, \lambda) d\tau = \alpha, \quad \hat{x} = \int_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau) B(\tau) \hat{u}(\tau, \lambda) d\tau.$$

Заметим, что уравнение $\int_{t_0}^{t_1} v^\top(\tau, a) \hat{u}(\tau, \lambda) d\tau = \alpha$ имеет единственное решение. Действительно, если λ — решение, то $\hat{x} \in H$ и в силу определения $u(\tau, \lambda)$ $\hat{x}$ удовлетворяет неравенству $L(\hat{x}, \lambda) \geq L(x, \lambda)$ для всех $x \in G(\mu)$. Следовательно, λ — множитель Лагранжа задачи (4.5); с учетом ранее доказанного он определяется однозначно.

Таким образом, для приближенного построения сечения множества достижимости гиперплоскостью следует выбрать конечную ε -сеть векторов s^i в H^0 ; затем для каждого из векторов s^i найти корень λ_i соответствующего уравнения и точку $\hat{x}^i$ границы сечения. Выпуклая оболочка точек $\hat{x}^i$ будет аппроксимировать искомое сечение в метрике Хаусдорфа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalman R.E., Ho Y.C., Narendra K.S. Controllability of linear dynamical systems // Contributions to Differential Equations. 1963. Vol. 1, no. 2. P. 189–213.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Альбрехт Э.Г. О сближении квазилинейных объектов в регулярном случае // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 7. С. 1171–1178.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
6. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Anal. 2004. Vol. 11, no. 2–3. P. 255–267.

7. **Gusev M.I., Zykov I.V.** On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, no. 1. P. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792
8. **Patsko V.S., Trubnikov G.I., Fedotov A.A.** Reachable set of the Dubins car with an integral constraint on control // Dokl. Math. 2023. Vol. 108, suppl. 1. P. S34–S41. doi: 10.1134/S106456242360080X
9. **Rousse P., Garoche P.L., Henrion D.** Parabolic set simulation for reachability analysis of linear time invariant systems with integral quadratic constraint // European J. Control. 2021. Vol. 58. P. 152–167. doi: 10.1016/j.ejcon.2020.08.002
10. **Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N.** The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2007. Vol. 14, no. 1–2. P. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6
11. **Huseyin N., Huseyin A. and Guseinov K.G.** Approximations of the set of trajectories and integral funnel of the non-linear control systems with L_p norm constraints on the control functions // IMA J. Math. Contr. Inform. 2022. Vol. 39. P. 1213–1231. doi: 10.1093/imamci/dnac028
12. **Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S.** On the continuity property of L_p balls and an application // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 335. P. 1347–1359. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.01.109
13. **Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.** Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 6. С. 11–46.
14. **Huseyin N., Huseyin A., Guseinov Kh.G.** On the robustness property of a control system described by an Urysohn type integral equation // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2021. Vol. 27, no. 3. P. 263–270. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-263-270
15. **Gusev Mikhail I.** Computing the reachable set boundary for an abstract control system: revisited // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no 2. P. 99–108. doi: 10.15826/umj.2023.2.008
16. **Понтрягин Л.С., Болтянский В., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
17. **Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.** Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system // J. Comp. Syst. Sci. Intern. 2003. Vol. 42, no. 3. P. 320–328.
18. **Xiao Q., Li L., Zhang J., Xu M.** Two-dimensional reachability of low-thrust spacecraft // IEEE Transact. Aerospace Electr. Syst. 2024. Vol. 60, no. 3. P. 3698–3706. doi: 10.1109/TAES.2024.3356986
19. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973. 472 с.

Поступила 1.06.2024

После доработки 13.06.2024

Принята к публикации 17.06.2024

Гусев Михаил Иванович

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: gmi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kalman R.E., Ho Y.C., Narendra K.S. Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to differential equations*, 1963, vol. 1, no. 2, pp. 189–213.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p.
3. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.
4. Al'brekht E.G. The coming together of quasilinear objects in the regular case. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1971, vol. 7, no. 7, pp. 1171–1178 (in Russian).
5. Kurzanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p.

6. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Math. Anal.*, 2004, vol. 11, no. 2–3, pp. 255–267.
7. Gusev M.I., Zykov I.V. On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, in. 1, pp. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792
8. Patsko V.S., Trubnikov G.I., Fedotov A.A. Reachable set of the Dubins car with an integral constraint on control. *Dokl. Math.*, 2023, vol. 108, suppl. 1, pp. S34–S41. doi: 10.1134/S106456242360080X
9. Rousse P., Garoche P.L., Henrion D. Parabolic set simulation for reachability analysis of linear time-invariant systems with integral quadratic constraint. *European J. Control.*, 2021, vol. 58, pp. 152–167. doi: 10.1016/j.ejcon.2020.08.002
10. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2007, vol. 14, no. 1–2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6
11. Huseyin N., Huseyin A., Guseinov K.G. Approximations of the set of trajectories and integral funnel of the non-linear control systems with L_p norm constraints on the control functions. *IMA J. Math. Contr. Inform.*, 2022, vol. 39, pp. 1213–1231. doi: 10.1093/imamci/dnac028
12. Guseinov K.G., Nazlipinar A.S. On the continuity property of L_p balls and an application. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 335, pp. 1347–1359. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.01.109
13. Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Lyusternik’s theorem and the theory of extrema. *Russian Math. Surv.*, 1980, vol. 35, iss. 6, pp. 11–51. doi: 10.1070/RM1980v035n06ABEH001973
14. Huseyin N., Huseyin A., Guseinov Kh.G. On the robustness property of a control system described by an Urysohn type integral equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 263–270. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-263-270
15. Gusev M.I. Computing the reachable set boundary for an abstract control system: revisited. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 2, pp. 99–108. doi: 10.15826/umj.2023.2.008
16. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. NY, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 978-0470693810. Original Russian text published in Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal’nykh protsessov*, Moscow, Phys. Math. Liter. Publ., 1961, 391 p.
17. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Comp. Syst. Sci. Intern.*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
18. Xiao Q., Li L., Zhang J., Xu M. Two-dimensional reachability of low-thrust spacecraft. *IEEE Transact. Aerospace Electr. Syst.*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 3698–3706. doi: 10.1109/TAES.2024.3356986
19. Rockafellar R.T. *Convex analysis*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1970, 472 p. doi: 10.1515/9781400873173. Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1973, 472 p.

Received June 1, 2024

Revised June 13, 2024

Accepted June 17, 2024

Funding Agency: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

Mikhail Ivanovich Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: gmii@imm.uran.ru.

Cite this article as: M.I. Gusev. On some properties of reachable sets for nonlinear systems with control constraints in L_p . *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 99–112.