

УДК 517.977

**ЦЕНА И ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ПОЗИЦИОННОЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА¹****М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов**

На конечном промежутке времени рассматривается дифференциальная игра на минимакс-максимин заданного показателя качества, в которой движение конфликтно управляемой динамической системы описывается функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Хейла. При более общих по сравнению с рассматриваемыми ранее предположениях доказывается теорема о существовании цены и седловой точки игры в классах позиционных стратегий управления игроков с памятью истории движения. Доказательство задействует технику соответствующих наследственных уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными и теорию минимаксных (обобщенных) решений таких уравнений. При этом для построения оптимальных стратегий, составляющих седловую точку игры, используется недавний результат о существовании и единственности подходящего минимаксного решения и специальный функционал Ляпунова — Красовского.

Ключевые слова: дифференциальная игра, уравнение нейтрального типа, цена игры, оптимальные стратегии, наследственное уравнение Гамильтона — Якоби, коинвариантные производные, минимаксное решение.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. The value and optimal strategies in a positional differential game for a neutral-type system.

On a finite time interval, a differential game for the minimax–maximin of a given cost functional is considered. In this game, the motion of a conflict-controlled dynamical system is described by functional differential equations of neutral type in Hale’s form. Under assumptions more general than those considered previously, a theorem on the existence of the value and saddle point of the game in classes of players’ closed-loop control strategies with memory of the motion history is proved. The proof involves the technique of the corresponding path-dependent Hamilton–Jacobi equations with coinvariant derivatives and the theory of minimax (generalized) solutions of such equations. In order to construct optimal strategies, which constitute a saddle point of the game, a recent result on the existence and uniqueness of a suitable minimax solution and a special Lyapunov–Krasovskii functional are used.

Keywords: differential game, neutral-type equation, game value, optimal strategies, path-dependent Hamilton–Jacobi equation, coinvariant derivatives, minimax solution.

MSC: 49N70, 49L20, 34K40**DOI:** 10.21538/0134-4889-2024-30-3-86-98**Введение**

Статья касается развития теории позиционных дифференциальных игр [1–3] для динамических систем нейтрального типа. На конечном промежутке времени рассматривается дифференциальная игра на минимакс-максимин заданного показателя качества, в которой движение конфликтно управляемой системы описывается функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Хейла (см., например, [4–6]). Изучается вопрос существования цены и седловой точки игры в классах позиционных стратегий управления игроков с памятью истории движения.

Статья продолжает исследования [7–11]. В работе [8] данный вопрос изучался при нескольких других, вообще говоря, более ограничительных предположениях. А именно, требовалось, чтобы функционал, определяющий первое слагаемое в показателе качества (см. формулу (1.3)

¹Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

ниже), и отображение, стоящее под знаком производной в левой части уравнений движения (см. формулу (1.1) ниже), удовлетворяли условию Липшица, причем последнее — с константой, меньшей единицы. В работах [7;9] рассматривались классы стратегий управления с поводирем и, в частности, предполагалось, что второе (интегральное) слагаемое в показателе качества отсутствует. В работах [10;11] исследовался случай постоянных сосредоточенных запаздываний.

Доказательство основного результата статьи — теоремы о существовании цены и оптимальных стратегий в рассматриваемой игре, проводится по схеме из работы [12] и схеме доказательства теоремы 12.3 из [13] (см. также, например, теорему 15.1 из [14] для систем запаздывающего типа). В том числе, задействуется техника подходящих [15] (см. также [16]) наследственных уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными (см., например, [14;17]) и привлекается теория минимаксных (обобщенных) решений таких уравнений [18–21]. Случай предположений, более общих по сравнению с рассматриваемыми ранее, удается охватить благодаря использованию специального функционала Ляпунова — Красовского [21], конструкция которого восходит к [13] и [22;23] (см. также, например, [24]), а также недавнего результата [21] о существовании и единственности минимаксных решений наследственных уравнений Гамильтона — Якоби.

1. Дифференциальная игра

Пусть $h > 0$, $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $\text{Lip} = \text{Lip}([-h, T], \mathbb{R}^n)$ — линейное пространство функций $x: [-h, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию Липшица, с нормой $\|x(\cdot)\|_\infty = \max_{\tau \in [-h, T]} \|x(\tau)\|$, $x(\cdot) \in \text{Lip}$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Для числа $\mu > 0$ обозначим

$$X_\mu = \{x(\cdot) \in \text{Lip}: \|x(\cdot)\|_\infty \leq \mu, \|x(\tau_1) - x(\tau_2)\| \leq \mu|\tau_1 - \tau_2|, \tau_1, \tau_2 \in [-h, T]\}.$$

Для пары $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$ положим

$$\text{Lip}(t, x(\cdot)) = \{y(\cdot) \in \text{Lip}: y(\tau) = x(\tau), \tau \in [-h, t]\}$$

и определим функцию $x(\cdot \wedge t) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$ равенством $x(\tau \wedge t) = x(\tau)$, $\tau \in (t, T]$.

Рассмотрим конфликтно управляемую динамическую систему, движение которой описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Хейла

$$\frac{d}{d\tau}(y(\tau) - g(\tau, y(\cdot))) = f(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)). \quad (1.1)$$

Здесь $\tau \in [0, T]$ — время, $y(\tau) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент времени τ ; $u(\tau) \in P$ и $v(\tau) \in Q$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно; $P \subset \mathbb{R}^{n_P}$ и $Q \subset \mathbb{R}^{n_Q}$ — компактные множества; $n_P, n_Q \in \mathbb{N}$. Отображения $g: [0, T] \times \text{Lip} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $f: [0, T] \times \text{Lip} \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ заданы и удовлетворяют следующим условиям:

(A.1) отображения g и f непрерывны;

(A.2) существует число $h_0 \in (0, h]$ такое, что для всякого числа $\mu > 0$ найдется число $\lambda_g > 0$, для которого при всех $(\tau_1, y_1(\cdot)), (\tau_2, y_2(\cdot)) \in [0, T] \times X_\mu$ выполнено неравенство

$$\|g(\tau_1, y_1(\cdot)) - g(\tau_2, y_2(\cdot))\| \leq \lambda_g(|\tau_1 - \tau_2| + \|y_1(\cdot \wedge (\tau_1 - h_0)) - y_2(\cdot \wedge (\tau_2 - h_0))\|_\infty);$$

(A.3) для любого числа $\mu > 0$ существует число $\lambda_f > 0$ такое, что

$$\|f(\tau, y_1(\cdot), u, v) - f(\tau, y_2(\cdot), u, v)\| \leq \lambda_f \|y_1(\cdot \wedge \tau) - y_2(\cdot \wedge \tau)\|_\infty$$

при всех $\tau \in [0, T]$, $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in X_\mu$, $u \in P$, $v \in Q$;

(A.4) существует число $c_f > 0$ такое, что

$$\|f(\tau, y(\cdot), u, v)\| \leq c_f(1 + \|y(\cdot \wedge \tau)\|_\infty), \quad \tau \in [0, T], \quad y(\cdot) \in \text{Lip}, \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Отметим, что из условия (А.3) вытекает, в частности, неупреждаемость отображения f : для любых $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$ и $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$ равенство $f(t, y(\cdot), u, v) = f(t, x(\cdot), u, v)$ справедливо при всех $u \in P$ и $v \in Q$, а из условия (А.2) — более сильное по сравнению с неупреждаемостью свойство отображения g : для любых $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$ и $y(\cdot) \in \text{Lip}$, если $y(\tau) = x(\tau)$ при всех $\tau \in [-h, t - h_0]$, то $g(t, y(\cdot)) = g(t, x(\cdot))$.

Для системы (1.1) задана начальная позиция $(t, x(\cdot)) \in [0, T) \times \text{Lip}$, определяющая соответствующее начальное условие

$$y(\tau) = x(\tau), \quad \tau \in [-h, t]. \quad (1.2)$$

Допустимыми управлениями первого и второго игроков на промежутке $[t, T]$ считаем произвольные измеримые (по Лебегу) функции $u: [t, T] \rightarrow P$ и $v: [t, T] \rightarrow Q$ соответственно. Через $\mathcal{U}[t, T]$ и $\mathcal{V}[t, T]$ обозначим множества всех таких управлений. Движением системы (1.1), порожденным из начальной позиции $(t, x(\cdot))$ управлениями $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]$, назовем функцию $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$, которая вместе с $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при почти всех (п.в.) $\tau \in [t, T]$. Учитывая предположения (А.1)–(А.4) и рассуждая, например, по схеме доказательства теорем 1 и 2 из § 1 [25] (см. также [4] и теорему P1.1 [14]), можно проверить, что такое движение $y(\cdot) = y(\cdot; t, x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ существует и единственно.

Для системы (1.1) при начальном условии (1.2) рассмотрим дифференциальную игру, в которой целью первого (соответственно второго) игрока является минимизация (соответственно максимизация) показателя качества

$$J(t, x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma(y(\cdot)) - \int_t^T \chi(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) d\tau. \quad (1.3)$$

Здесь $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]$ и $y(\cdot) = y(\cdot; t, x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$. Отображения $\sigma: \text{Lip} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\chi: [0, T] \times \text{Lip} \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ заданы и удовлетворяют следующим условиям:

(А.5) отображения σ и χ непрерывны;

(А.6) для любого числа $\mu > 0$ существует число $\lambda_\chi > 0$ такое, что

$$|\chi(\tau, y_1(\cdot), u, v) - \chi(\tau, y_2(\cdot), u, v)| \leq \lambda_\chi \|y_1(\cdot \wedge \tau) - y_2(\cdot \wedge \tau)\|_\infty$$

при всех $\tau \in [0, T]$, $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in X_\mu$, $u \in P$, $v \in Q$.

Кроме того, предположим, что выполняется условие седловой точки в маленькой игре (см., например, § 8 [2] и § 11.1 [13]):

(А.7) для любых $\tau \in [0, T]$, $y(\cdot) \in \text{Lip}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} (\langle s, f(\tau, y(\cdot), u, v) \rangle - \chi(\tau, y(\cdot), u, v)) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} (\langle s, f(\tau, y(\cdot), u, v) \rangle - \chi(\tau, y(\cdot), u, v)),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

2. Позиционные стратегии управления игроков и цена игры

Пусть зафиксирована начальная позиция $(t, x(\cdot)) \in [0, T) \times \text{Lip}$. Следуя [2; 3] (см. также, например, [14]), позиционной стратегией управления первого игрока в дифференциальной игре (1.1)–(1.3) назовем произвольное неупреждающее отображение

$$[t, T] \times \text{Lip}(t, x(\cdot)) \times (0, +\infty) \ni (\tau, y(\cdot), \varepsilon) \mapsto U(\tau, y(\cdot), \varepsilon) \in P,$$

где число ε имеет смысл параметра точности. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\Delta = \{\tau_j\}_{j=1}^{k+1}$ — разбиение промежутка $[t, T]$, т.е. $\tau_1 = t$, $\tau_j < \tau_{j+1}$ для всех $j \in \overline{1, k}$ и $\tau_{k+1} = T$. Тройку (U, ε, Δ) назовем

законом управления первого игрока. Этот закон последовательно по шагам разбиения Δ формирует кусочно-постоянное управление первого игрока $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$ по принципу обратной связи согласно пошаговому правилу

$$u(\tau) = U(\tau_j, y(\cdot), \varepsilon), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j \in \overline{1, k}, \quad (2.1)$$

и, формально, $u(T) = U(T, y(\cdot), \varepsilon)$. Осуществимость правила (2.1) обеспечивается неупреждаемостью отображения U : значение $U(\tau_j, y(\cdot), \varepsilon)$ зависит только от уже реализовавшихся к моменту τ_j значений $y(\tau)$, $\tau \in [-h, \tau_j]$. В паре с управлением второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]$ закон (U, ε, Δ) однозначно определяет соответствующие управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$, движение $y(\cdot) = y(\cdot; t, x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ системы (1.1) и значение показателя качества (1.3), которое обозначим через $J(t, x(\cdot), (U, \varepsilon, \Delta), v(\cdot))$. Исходя из самых неблагоприятных с точки зрения первого игрока обстоятельств, определим величину гарантированного результата стратегии U при начальной позиции $(t, x(\cdot))$:

$$\rho_u(t, x(\cdot), U) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\Delta \in \Pi_\delta[t, T]} \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]} J(t, x(\cdot), (U, \varepsilon, \Delta), v(\cdot)), \quad (2.2)$$

где $\Pi_\delta[t, T]$ — множество разбиений $\Delta = \{\tau_j\}_{j=1}^{k+1}$ промежутка $[t, T]$, удовлетворяющих условию $\tau_{j+1} - \tau_j \leq \delta$ для всех $j \in \overline{1, k}$. Тогда оптимальным гарантированным результатом управления первого игрока будет величина

$$\rho_u^\circ(t, x(\cdot)) = \inf_U \rho_u(t, x(\cdot), U), \quad (2.3)$$

где инфимум вычисляется по всем позиционным стратегиям U . Если этот инфимум достигается на некоторой стратегии U° , то стратегию U° называем оптимальной.

Симметричным образом, с точки зрения второго игрока, рассматриваем позиционную стратегию управления V — неупреждающее отображение

$$[t, T] \times \text{Lip}(t, x(\cdot)) \times (0, +\infty) \ni (\tau, y(\cdot), \varepsilon) \mapsto V(\tau, y(\cdot), \varepsilon) \in Q,$$

закон управления (V, ε, Δ) , формирующий управление $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]$ по правилу

$$v(\tau) = V(\tau_j, y(\cdot), \varepsilon), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j \in \overline{1, k},$$

и $v(T) = V(T, y(\cdot), \varepsilon)$, величину гарантированного результата стратегии V

$$\rho_v(t, x(\cdot), V) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\Delta \in \Pi_\delta[t, T]} \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]} J(t, x(\cdot), u(\cdot), (V, \varepsilon, \Delta)) \quad (2.4)$$

и величину оптимального гарантированного результата управления второго игрока

$$\rho_v^\circ(t, x(\cdot)) = \sup_V \rho_v(t, x(\cdot), V). \quad (2.5)$$

Если супремум в данном выражении достигается на некоторой стратегии V° , то стратегию V° называем оптимальной.

Заметим, что по построению функционалы ρ_u , ρ_u° и ρ_v , ρ_v° являются неупреждающими, а стратегии U° и V° , оптимальные для пары $(t, x(\cdot))$, будут оптимальными и для всякой пары $(t, y(\cdot))$ при $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$.

Непосредственно из соотношений (2.2)–(2.5) вытекает неравенство $\rho_u^\circ(t, x(\cdot)) \geq \rho_v^\circ(t, x(\cdot))$ (в этой связи см., например, лемму 8.1 из [2]). В случае равенства будем говорить, что дифференциальная игра, задаваемая соотношениями (1.1)–(1.3), имеет цену $\rho(t, x(\cdot)) = \rho_u^\circ(t, x(\cdot)) = \rho_v^\circ(t, x(\cdot))$. Основная цель настоящей статьи — доказательство существования цены и оптимальных позиционных стратегий управления игроков при предположениях (A.1)–(A.7). Для этого привлекаются результаты из теории обобщенных (минимаксных) решений отвечающих рассматриваемой дифференциальной игре наследственных уравнений Гамильтона — Якоби.

3. Наследственное уравнение Гамильтона — Якоби

Напомним (см., например, [14; 17]), что функционал $\varphi: [0, T] \times \text{Lip} \rightarrow \mathbb{R}$ называется коинвариантно дифференцируемым (*ci*-дифференцируемым) в точке $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$, если существуют число $\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и вектор $\nabla \varphi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ такие, что для любой функции $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$ выполняется соотношение

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) = \partial_t \varphi(t, x(\cdot))(\tau - t) + \langle \nabla \varphi(t, x(\cdot)), y(\tau) - x(t) \rangle + o(\tau - t), \quad \tau \in (t, T],$$

где $o(\cdot)$ может зависеть от $y(\cdot)$ и $o(\delta)/\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0^+$. Величины $\partial_t \varphi(t, x(\cdot))$ и $\nabla \varphi(t, x(\cdot))$ называются *ci*-производными φ в точке $(t, x(\cdot))$. Функционал $\varphi: [0, T] \times \text{Lip} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ci*-гладким, если он непрерывен, *ci*-дифференцируем во всех точках $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$ и *ci*-производные $\partial_t \varphi: [0, T] \times \text{Lip} \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla \varphi: [0, T] \times \text{Lip} \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны.

Следуя [15] (см. также [16]), дифференциальной игре для системы (1.1) и показателя качества (1.3) сопоставим задачу Коши для наследственного уравнения Гамильтона — Якоби с *ci*-производными

$$\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) + \langle \partial_t g(t, x(\cdot)), \nabla \varphi(t, x(\cdot)) \rangle + H(t, x(\cdot), \nabla \varphi(t, x(\cdot))) = 0, \quad (t, x(\cdot)) \in X_*, \quad (3.1)$$

при краевом условии на правом конце

$$\varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in \text{Lip}. \quad (3.2)$$

Здесь неизвестным является неупреждающий функционал $\varphi: [0, T] \times \text{Lip} \rightarrow \mathbb{R}$; X_* — множество точек $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$, в которых все координаты $g_i: [0, T] \times \text{Lip} \rightarrow \mathbb{R}$; $i \in \overline{1, n}$; отображения $g = (g_1, \dots, g_n)$ *ci*-дифференцируемы; $\partial_t g(t, x(\cdot)) = (\partial_t g_1(t, x(\cdot)), \dots, \partial_t g_n(t, x(\cdot)))$; гамильтониан H определяется равенством (см. также предположение (A.7))

$$H(t, x(\cdot), s) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} (\langle s, f(t, x(\cdot), u, v) \rangle - \chi(t, x(\cdot), u, v)) \quad (3.3)$$

для всех $t \in [0, T]$, $x(\cdot) \in \text{Lip}$, $s \in \mathbb{R}^n$.

Для каждой точки $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$ через $Y(t, x(\cdot))$ обозначим множество функций $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$ таких, что при п.в. $\tau \in [t, T]$

$$\left\| \frac{d}{d\tau} (y(\tau) - g(\tau, y(\cdot))) \right\| \leq c_f (1 + \|y(\cdot \wedge \tau)\|_\infty), \quad (3.4)$$

где c_f — число из предположения (A.4). Отметим (см. в этой связи утверждение 1 из [18]), что множество $Y(t, x(\cdot))$ непусто и компактно в пространстве Lip , и, кроме того, можно выбрать число $\mu > 0$ так, чтобы выполнялось включение $Y(t, x(\cdot)) \subset X_\mu$.

В согласии с [18–20] (см. также [16; 21]) минимаксным решением задачи Коши (3.1), (3.2) называем неупреждающий непрерывный функционал $\varphi: [0, T] \times \text{Lip} \rightarrow \mathbb{R}$, который удовлетворяет краевому условию (3.2) и обладает следующим свойством: для любых $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$, $\vartheta \in (t, T]$, $s \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ существуют функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$ такие, что

$$\begin{aligned} \varphi(\vartheta, y_1(\cdot)) - \int_t^\vartheta \left(\left\langle s, \frac{d}{d\tau} (y_1(\tau) - g(\tau, y_1(\cdot))) \right\rangle - H(\tau, y_1(\cdot), s) \right) d\tau &\leq \varphi(t, x(\cdot)) + \varepsilon, \\ \varphi(\vartheta, y_2(\cdot)) - \int_t^\vartheta \left(\left\langle s, \frac{d}{d\tau} (y_2(\tau) - g(\tau, y_2(\cdot))) \right\rangle - H(\tau, y_2(\cdot), s) \right) d\tau &\geq \varphi(t, x(\cdot)) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Применяя теорему 1 из [21] с учетом предположений (A.1)–(A.6), получаем, что минимаксное решение задачи Коши (3.1), (3.2) существует и единственно.

4. Функционал Ляпунова — Красовского

Следуя [22; 23] (см. также [16; 24]), рассмотрим функционал

$$\gamma(\tau, w(\cdot)) = \begin{cases} \frac{(\|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty^2 - \|w(\tau)\|^2)^2}{\|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty^2} + \|w(\tau)\|^2, & \text{если } \|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty > 0, \\ 0, & \text{если } \|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty = 0, \end{cases}$$

и отображение

$$q(\tau, w(\cdot)) = \begin{cases} \left(2 - 4 \frac{\|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty^2 - \|w(\tau)\|^2}{\|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty^2}\right) w(\tau), & \text{если } \|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty > 0, \\ 0, & \text{если } \|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty = 0, \end{cases}$$

где $(\tau, w(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$. Отметим, что функционал γ является ci -гладким, причем

$$\partial_t \gamma(\tau, w(\cdot)) = 0, \quad \nabla \gamma(\tau, w(\cdot)) = q(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}, \quad (4.1)$$

отображение q непрерывно, и имеют место неравенства

$$\varkappa \|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty^2 \leq \gamma(\tau, w(\cdot)) \leq 2 \|w(\cdot \wedge \tau)\|_\infty^2, \quad \|q(\tau, w(\cdot))\| \leq 2 \|w(\tau)\|, \quad (4.2)$$

где $(\tau, w(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$ и $\varkappa = (3 - \sqrt{5})/2$.

Зафиксируем $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$. Возьмем число $\mu > 0$, для которого $Y(t, x(\cdot)) \subset X_\mu$, и выберем числа λ_g , λ_f и λ_χ в соответствии с условиями (A.2), (A.3) и (A.6). Для любых $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$ определим функцию $w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot)) \in \text{Lip}$ следующим образом:

$$w(\tau; y_1(\cdot), y_2(\cdot)) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau \in [-h, t), \\ y_1(\tau) - g(\tau, y_1(\cdot)) - y_2(\tau) + g(\tau, y_2(\cdot)), & \text{если } \tau \in [t, T]. \end{cases}$$

Далее, по числу h_0 из условия (A.2) выберем число $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $(T - t)/m \leq h_0$, и положим $\lambda_g^* = (1 + \lambda_g)^{m-1}$. Заметим, что для любых $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$ и $\tau \in [t, T]$ справедливо неравенство (см. также формулу (4.5) [9])

$$\|y_1(\cdot \wedge \tau) - y_2(\cdot \wedge \tau)\|_\infty \leq \lambda_g^* \|w(\cdot \wedge \tau; y_1(\cdot), y_2(\cdot))\|_\infty. \quad (4.3)$$

Наконец, обозначим $\lambda_0 = (\lambda_f + \lambda_\chi) \lambda_g^* / \varkappa$ и зафиксируем число $\varepsilon_0 \in (0, e^{-\lambda_0(T-t)})$.

Для каждого числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского

$$\nu_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot)) = \frac{e^{-\lambda_0(\tau-t)} - \varepsilon}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^4 + \gamma(\tau, w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot)))}, \quad (4.4)$$

а также отображение

$$s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot)) = \frac{e^{-\lambda_0(\tau-t)} - \varepsilon}{2\varepsilon \sqrt{\varepsilon^4 + \gamma(\tau, w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot)))}} q(\tau, w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot))), \quad (4.5)$$

где $\tau \in [t, T]$, $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$. Приведем необходимые для доказательства основного результата статьи свойства отображений ν_ε и s_ε .

Лемма 1. Пусть $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) отображения ν_ε и s_ε , $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, являются неупреждающими и непрерывными;
- (ii) для любого числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функционал ν_ε неотрицателен и $\nu_\varepsilon(\tau, y(\cdot), y(\cdot)) \leq \varepsilon$ для всех $\tau \in [t, T]$ и $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$;

(iii) для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$ функция $\theta(\tau) = \nu_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\tau \in [t, T]$, удовлетворяет условию Литшица и при п.в. $\tau \in [t, T]$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(\tau) \leq & H(\tau, y_2(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot))) - H(\tau, y_1(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot))) \\ & + \langle s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot)), \dot{w}(\tau; y_1(\cdot), y_2(\cdot)) \rangle, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\dot{\theta}(\tau) = d\theta(\tau)/d\tau$ и, соответственно, $\dot{w}(\tau; y_1(\cdot), y_2(\cdot)) = dw(\tau; y_1(\cdot), y_2(\cdot))/d\tau$, а гамильтониан H определяется согласно (3.3);

(iv) для любых чисел $K > 0$ и $\zeta > 0$ существует число $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что, каковы бы ни были $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$, если $\nu_\varepsilon(T, y_1(\cdot), y_2(\cdot)) \leq K$, то $\|y_1(\cdot) - y_2(\cdot)\|_\infty \leq \zeta$.

Доказательство. Свойства (i) и (ii) проверяются непосредственным образом. Докажем свойство (iii). Поскольку функционал γ является C^1 -гладким, то с учетом соотношений (4.1) и (4.2) из леммы 2.1 [14] вытекает, что $\theta(\cdot) \in \text{Lip}([0, T], \mathbb{R})$ и

$$\dot{\theta}(\tau) = -\frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0(\tau-t)}}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^4 + \gamma(\tau, w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot)))} + \langle s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot)), \dot{w}(\tau; y_1(\cdot), y_2(\cdot)) \rangle \quad (4.7)$$

при п.в. $\tau \in [t, T]$. Для каждого $\tau \in [t, T]$ имеем

$$\begin{aligned} & H(\tau, y_1(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot))) - H(\tau, y_2(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot))) \\ & \leq (\lambda_f + \lambda_\chi)(1 + \|s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot))\|) \|y_1(\cdot \wedge \tau) - y_2(\cdot \wedge \tau)\|_\infty. \end{aligned}$$

Принимая во внимание неравенства (4.2) и (4.3), выводим

$$\begin{aligned} \|y_1(\cdot \wedge \tau) - y_2(\cdot \wedge \tau)\|_\infty & \leq \frac{\lambda_g^*}{\sqrt{\varkappa}} \sqrt{\varepsilon^4 + \gamma(\tau, w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot)))}, \\ \|s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot))\| & \leq \frac{e^{-\lambda_0(\tau-t)} - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\|w(\tau; y_1(\cdot), y_2(\cdot))\|}{\sqrt{\varepsilon^4 + \gamma(\tau, w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot)))}} \leq \frac{e^{-\lambda_0(\tau-t)} - \varepsilon}{\sqrt{\varkappa}\varepsilon}. \end{aligned}$$

Стало быть, замечая также, что $\varkappa < 1$, по выбору числа λ_0 получаем

$$\begin{aligned} & H(\tau, y_1(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot))) - H(\tau, y_2(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y_1(\cdot), y_2(\cdot))) \\ & \leq \frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0(\tau-t)}}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^4 + \gamma(\tau, w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot)))}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Справедливость доказываемого неравенства (4.6) следует из соотношений (4.7) и (4.8).

Проверим свойство (iv). Выберем число $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0]$ исходя из условий $\varepsilon_* \leq e^{-\lambda_0(T-t)}/2$ и $\varepsilon_* \leq \sqrt{\varkappa} e^{-\lambda_0(T-t)} \zeta / (2K\lambda_g^*)$. Зафиксируем число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$, для которых $\nu_\varepsilon(T, y_1(\cdot), y_2(\cdot)) \leq K$. Тогда, учитывая неравенства (4.2), (4.3) и

$$\sqrt{\varepsilon^4 + \gamma(T, w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot)))} \leq 2K e^{\lambda_0(T-t)} \varepsilon,$$

ВЫВОДИМ

$$\|y_1(\cdot) - y_2(\cdot)\|_\infty \leq \frac{\lambda_g^*}{\sqrt{\varkappa}} \sqrt{\varepsilon^4 + \gamma(T, w(\cdot; y_1(\cdot), y_2(\cdot)))} \leq \frac{2K\lambda_g^* e^{\lambda_0(T-t)} \varepsilon}{\sqrt{\varkappa}} \leq \zeta.$$

Лемма доказана.

5. Основной результат и его доказательство

Зафиксируем $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$. Определим отображения ν_ε и s_ε , $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, согласно (4.4) и (4.5). Возьмем минимаксное решение φ задачи Коши (3.1), (3.2) и для каждого числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ рассмотрим вспомогательный функционал

$$\varphi_\varepsilon^{(u)}(\tau, y(\cdot)) = \min_{z(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))} (\varphi(\tau, z(\cdot)) + \nu_\varepsilon(\tau, y(\cdot), z(\cdot))), \quad \tau \in [t, T], \quad y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot)). \quad (5.1)$$

Минимум в данном выражении достигается благодаря компактности множества $Y(t, x(\cdot))$ и непрерывности функционалов φ и ν_ε . Затем, для всех $\tau \in [t, T]$ и $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$, выбирая

$$z^{(u)}(\cdot; \tau, y(\cdot), \varepsilon) \in \operatorname{argmin}_{z(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))} (\varphi(\tau, z(\cdot)) + \nu_\varepsilon(\tau, y(\cdot), z(\cdot))), \quad (5.2)$$

положим

$$s^{(u)}(\tau, y(\cdot), \varepsilon) = s_\varepsilon(\tau, y(\cdot), z^{(u)}(\cdot; \tau, y(\cdot), \varepsilon)). \quad (5.3)$$

Симметричным образом, с точки зрения второго игрока, определим

$$s^{(v)}(\tau, y(\cdot), \varepsilon) = s_\varepsilon(\tau, z^{(v)}(\cdot; \tau, y(\cdot), \varepsilon), y(\cdot)),$$

где

$$z^{(v)}(\cdot; \tau, y(\cdot), \varepsilon) \in \operatorname{argmax}_{z(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))} (\varphi(\tau, z(\cdot)) - \nu_\varepsilon(\tau, z(\cdot), y(\cdot))).$$

Рассмотрим следующие позиционные стратегии управления первого и второго игроков:

$$\begin{aligned} U^\circ(\tau, y(\cdot), \varepsilon) &\in \operatorname{argmin}_{u \in P} \max_{v \in Q} (\langle s^{(u)}(\tau, y(\cdot), \varepsilon), f(\tau, y(\cdot), u, v) \rangle - \chi(\tau, y(\cdot), u, v)), \\ V^\circ(\tau, y(\cdot), \varepsilon) &\in \operatorname{argmax}_{v \in Q} \min_{u \in P} (\langle s^{(v)}(\tau, y(\cdot), \varepsilon), f(\tau, y(\cdot), u, v) \rangle - \chi(\tau, y(\cdot), u, v)) \end{aligned} \quad (5.4)$$

для всех $\tau \in [t, T]$, $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Отметим, что возможность неупреждающего выбора значений $U^\circ(\tau, y(\cdot), \varepsilon)$ и $V^\circ(\tau, y(\cdot), \varepsilon)$ обеспечивается неупреждаемостью отображений f , χ , φ , ν_ε и s_ε .

Теорема 1. Пусть выполнены предположения (A.1)–(A.7) и пусть $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times \text{Lip}$. Тогда, во-первых, дифференциальная игра (1.1)–(1.3) имеет цену, причем $\rho(t, x(\cdot)) = \varphi(t, x(\cdot))$, где φ — минимаксное решение задачи Коши (3.1), (3.2), а во-вторых, позиционные стратегии управления игроков U° и V° , определяемые согласно (5.4), являются оптимальными.

Доказательство. Заметим, что для доказательства теоремы достаточно показать справедливость следующих неравенств:

$$\rho_u(t, x(\cdot), U^\circ) \leq \varphi(t, x(\cdot)) \leq \rho_v(t, x(\cdot), V^\circ). \quad (5.5)$$

Проверим первое из неравенств (5.5). Для этого в соответствии с определением величины $\rho_u(t, x(\cdot), U^\circ)$ (см. (2.2)) зададимся произвольным числом $\zeta > 0$ и докажем, что можно выбрать число $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$ и функцию $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, таким образом, чтобы для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\Delta \in \Pi_{\delta^*(\varepsilon)}[t, T]$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]$ выполнялось неравенство

$$J(t, x(\cdot), (U^\circ, \varepsilon, \Delta), v(\cdot)) \leq \varphi(t, x(\cdot)) + \zeta. \quad (5.6)$$

Учитывая компактность множества $Y(t, x(\cdot))$ и непрерывность функционала σ , определим число $M > 0$ из условия $|\sigma(y(\cdot))| \leq M$, $y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$, и в соответствии с утверждением (iv) леммы 1 возьмем число $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что $|\sigma(y_1(\cdot)) - \sigma(y_2(\cdot))| \leq \zeta/3$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$, удовлетворяющих неравенству $\nu_\varepsilon(T, y_1(\cdot), y_2(\cdot)) \leq 2M + \zeta/3$.

Положим $\varepsilon^* = \min\{\zeta/3, \varepsilon_*\}$. Для каждого числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, принимая во внимание непрерывность отображений s_ε (см. утверждение (i) леммы 1) и функций f, χ , выберем число $\delta^*(\varepsilon) > 0$ так, чтобы для всех $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$, $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$, $u \in P$ и $v \in Q$ из неравенства $|\tau_1 - \tau_2| \leq \delta^*(\varepsilon)$ следовали неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \langle s_\varepsilon(\tau_1, y_1(\cdot), y_2(\cdot)), f(\tau_1, y_1(\cdot), u, v) \rangle - \chi(\tau_1, y_1(\cdot), u, v) \right. \\ & \left. - \langle s_\varepsilon(\tau_2, y_1(\cdot), y_2(\cdot)), f(\tau_2, y_1(\cdot), u, v) \rangle + \chi(\tau_2, y_1(\cdot), u, v) \right| \leq \zeta/(24T) \end{aligned}$$

и

$$c_f(1 + \mu) \|s_\varepsilon(\tau_1, y_1(\cdot), y_2(\cdot)) - s_\varepsilon(\tau_2, y_1(\cdot), y_2(\cdot))\| \leq \zeta/(24T),$$

где, напомним, число μ выбрано из условия $Y(t, x(\cdot)) \subset X_\mu$, а c_f — число из условия (A.4).

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\Delta = \{\tau_j\}_{j=1}^{k+1} \in \Pi_{\delta^*(\varepsilon)}[t, T]$ и рассмотрим движение $y(\cdot)$ системы (1.1) при начальном условии (1.2), порожденное законом управления первого игрока $(U^\circ, \varepsilon, \Delta)$ в паре с управлением второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t, T]$. Пусть $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, T]$ — реализовавшееся управление первого игрока. Заметим, что $y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$.

Определим вспомогательную функцию

$$\omega(\tau) = \varphi_\varepsilon^{(u)}(\tau, y(\cdot)) - \int_t^\tau \chi(\xi, y(\cdot), u(\xi), v(\xi)) d\xi, \quad \tau \in [t, T],$$

где $\varphi_\varepsilon^{(u)}$ — функционал (5.1). В силу утверждения (ii) леммы 1 и определения числа ε^* имеем $\nu_\varepsilon(t, y(\cdot), y(\cdot)) \leq \varepsilon \leq \varepsilon^* \leq \zeta/3$ и, следовательно,

$$\omega(t) = \varphi_\varepsilon^{(u)}(t, y(\cdot)) \leq \varphi(t, y(\cdot)) + \nu_\varepsilon(t, y(\cdot), y(\cdot)) \leq \varphi(t, y(\cdot)) + \zeta/3 = \varphi(t, x(\cdot)) + \zeta/3. \quad (5.7)$$

Рассуждая аналогичным образом, с учетом краевого условия (3.2) и выбора числа M выводим

$$\varphi_\varepsilon^{(u)}(T, y(\cdot)) \leq \sigma(y(\cdot)) + \nu_\varepsilon(T, y(\cdot), y(\cdot)) \leq M + \zeta/3. \quad (5.8)$$

С другой стороны, принимая во внимание выбор функции $z^{(u)}(\cdot; T, y(\cdot), \varepsilon)$ (см. (5.2)), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon^{(u)}(T, y(\cdot)) &= \sigma(z^{(u)}(\cdot; T, y(\cdot), \varepsilon)) + \nu_\varepsilon(T, y(\cdot), z^{(u)}(\cdot; T, y(\cdot), \varepsilon)) \\ &\geq -M + \nu_\varepsilon(T, y(\cdot), z^{(u)}(\cdot; T, y(\cdot), \varepsilon)). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из соотношений (5.8) и (5.9) вытекает неравенство $\nu_\varepsilon(T, y(\cdot), z^{(u)}(\cdot; T, y(\cdot), \varepsilon)) \leq 2M + \zeta/3$, а значит, $\sigma(z^{(u)}(\cdot; T, y(\cdot), \varepsilon)) \geq \sigma(y(\cdot)) - \zeta/3$ в согласии с выбором числа ε_* . Тогда, учитывая неотрицательность функционала ν_ε (см. утверждение (i) леммы 1), приходим к неравенству $\varphi_\varepsilon^{(u)}(T, y(\cdot)) \geq \sigma(y(\cdot)) - \zeta/3$. Стало быть (см. (1.3)),

$$\omega(T) \geq J(t, x(\cdot), (U^\circ, \varepsilon, \Delta), v(\cdot)) - \zeta/3. \quad (5.10)$$

Итак, в силу соотношений (5.7) и (5.10) для доказательства неравенства (5.6) остается проверить, что $\omega(T) - \omega(t) \leq \zeta/3$. Покажем, что для каждого $j \in \overline{1, k}$ справедливо неравенство

$$\omega(\tau_{j+1}) - \omega(\tau_j) \leq \zeta(\tau_{j+1} - \tau_j)/(3T). \quad (5.11)$$

Обозначим $z_j(\cdot) = z^{(u)}(\cdot; \tau_j, y(\cdot), \varepsilon)$ и $s_j = s^{(u)}(\tau_j, y(\cdot), \varepsilon) = s_\varepsilon(\tau_j, y(\cdot), z_j(\cdot))$ (см. (5.2) и (5.3)). Функционал φ — минимаксное решение задачи Коши (3.1), (3.2). Следовательно, найдется функция $y_j(\cdot) \in Y(\tau_j, z_j(\cdot))$, для которой

$$\begin{aligned} \varphi(\tau_{j+1}, y_j(\cdot)) &- \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left(\left\langle s_j, \frac{d}{d\tau} (y_j(\tau) - g(\tau, y_j(\cdot))) \right\rangle - H(\tau, y_j(\cdot), s_j) \right) d\tau \\ &\leq \varphi(\tau_j, z_j(\cdot)) + \zeta(\tau_{j+1} - \tau_j)/(6T). \end{aligned}$$

Поскольку $y_j(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$, имеем $\varphi_\varepsilon^{(u)}(\tau_{j+1}, y(\cdot)) \leq \varphi(\tau_{j+1}, y_j(\cdot)) + \nu_\varepsilon(\tau_{j+1}, y(\cdot), y_j(\cdot))$. Таким образом, выводим

$$\begin{aligned} \omega(\tau_{j+1}) - \omega(\tau_j) &\leq \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left(\left\langle s_j, \frac{d}{d\tau}(y_j(\tau) - g(\tau, y_j(\cdot))) \right\rangle - H(\tau, y_j(\cdot), s_j) \right) d\tau \\ &\quad + \theta(\tau_{j+1}) - \theta(\tau_j) + \zeta(\tau_{j+1} - \tau_j)/(6T), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\theta(\tau) = \nu_\varepsilon(\tau, y(\cdot), y_j(\cdot)) - \int_{\tau_j}^{\tau} \chi(\xi, y(\cdot), u(\xi), v(\xi)) d\xi, \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}].$$

В согласии с утверждением (iii) леммы 1 имеем $\theta(\cdot) \in \text{Lip}([\tau_j, \tau_{j+1}], \mathbb{R})$ и при п.в. $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(\tau) &\leq H(\tau, y_j(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y(\cdot), y_j(\cdot))) - H(\tau, y(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y(\cdot), y_j(\cdot))) \\ &\quad + \left\langle s_\varepsilon(\tau, y(\cdot), y_j(\cdot)), f(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) - \frac{d}{d\tau}(y_j(\tau) - g(\tau, y_j(\cdot))) \right\rangle - \chi(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)). \end{aligned}$$

Заметим, что по выбору числа $\delta^*(\varepsilon)$ при $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ справедливы неравенства

$$\left\langle s_j - s_\varepsilon(\tau, y(\cdot), y_j(\cdot)), \frac{d}{d\tau}(y_j(\tau) - g(\tau, y_j(\cdot))) \right\rangle \leq \zeta/(24T)$$

и

$$\begin{aligned} &\left\langle s_\varepsilon(\tau, y(\cdot), y_j(\cdot)), f(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) \right\rangle - \chi(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) \\ &- \left\langle s_j, f(\tau_j, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) \right\rangle + \chi(\tau_j, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) \leq \zeta/(24T), \end{aligned}$$

а также (см. (3.3) и (3.4))

$$\begin{aligned} H(\tau, y_j(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y(\cdot), y_j(\cdot))) - H(\tau, y_j(\cdot), s_j) &\leq \zeta/(24T), \\ H(\tau_j, y(\cdot), s_j) - H(\tau, y(\cdot), s_\varepsilon(\tau, y(\cdot), y_j(\cdot))) &\leq \zeta/(24T). \end{aligned}$$

В соответствии с (2.1) имеем $u(\tau) = U^\circ(\tau_j, y(\cdot), \varepsilon)$, $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. Следовательно, из определений (5.4) стратегии U° и (3.3) гамильтониана H вытекает, что для всех $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$

$$\begin{aligned} &\left\langle s_j, f(\tau_j, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) \right\rangle - \chi(\tau_j, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) \\ &\leq \max_{v \in Q} (\left\langle s_j, f(\tau_j, y(\cdot), u(\tau), v) \right\rangle - \chi(\tau_j, y(\cdot), u(\tau), v)) = H(\tau_j, y(\cdot), s_j). \end{aligned}$$

Собирая вместе полученные выше оценки, приходим к неравенству (5.11).

Итак, доказано первое из неравенств (5.5). Справедливость второго из этих неравенств проверяется аналогично с понятными изменениями.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. Krasovskii N.N., Krasovskii A.N. Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p. ISBN: 0-8176-3698-6.
4. Hale J.K., Cruz M.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems // Ann. Mat. Pura Appl. 1970. Vol. 85, no. 1. P. 63–81. doi: 10.1007/BF02413530

5. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н. Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. Т. 19. М.: ВИНТИ, 1982. С. 55–126.
6. Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to functional differential equations. NY: Springer, 1993. 447 p. doi: 10.1007/978-1-4612-4342-7
7. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Дифференциальные игры для систем нейтрального типа: аппроксимационная модель // Тр. МИАН. 2015. Т. 291, № 4. С. 202–214. doi: 10.1134/S0371968515040159
8. Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 101–112. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112
9. Гомоюнов М.И., Плаксин А.Р. Об основном уравнении дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82, № 6. С. 675–689. doi: 10.31857/S003282350002733-6
10. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. К теории позиционных дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 118–128. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-118-128
11. Plaksin A.R. Optimal positional strategies in differential games for neutral-type systems // Dyn. Games Appl. 2024. doi: 10.1007/s13235-024-00565-8
12. Гарнышева Г.Г., Субботин А.И. Стратегия минимаксного прицеливания в направлении квази-градиента // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 5–11.
13. Subbotin A.I. Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1
14. Лукоянов Н.Ю. Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, 2011. 243 с.
15. Плаксин А.Р. Об уравнении Гамильтона — Якоби — Айзекса — Беллмана для систем нейтрального типа // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27, № 2. С. 222–237. doi: 10.20537/vm170206
16. Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю. Минимаксные решения уравнений Гамильтона — Якоби в задачах динамической оптимизации наследственных систем // Успехи мат. наук. 2024. Т. 79, № 2. С. 43–144. doi: 10.4213/rm10166
17. Kim A.V. Functional differential equations. Application of i -smooth calculus. Dordrecht: Springer, 1999. 168 p. doi: 10.1007/978-94-017-1630-7
18. Плаксин А.Р. О минимаксном решении функциональных уравнений Гамильтона — Якоби для систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 11. С. 1519–1527. doi: 10.1134/S0374064119110086
19. Плаксин А.Р. О минимаксном решении уравнений Гамильтона — Якоби для систем нейтрального типа: случай неоднородного гамильтониана // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 11. С. 1536–1545. doi: 10.31857/S0374064121110108
20. Plaksin A.R. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations for neutral-type systems // Appl. Math. Optim. 2023. Vol. 88, no. 1. Art. no. 6. 29 p. doi: 10.1007/s00245-023-09980-6
21. Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю. О минимаксном решении наследственных уравнений Гамильтона — Якоби для систем нейтрального типа // Успехи мат. наук. 2024. Т. 79, № 4 (478). Р. 177–178.
22. Zhou J. Viscosity solutions to first order path-dependent HJB equations. 2020. 25 p. <http://Arxiv.org/abs/2004.02095>. doi: 10.48550/arXiv.2004.02095
23. Zhou J. Viscosity solutions to first order path-dependent Hamilton–Jacobi–Bellman equations in Hilbert space // Automatica. 2022. Vol. 142. Art. 110347. 15 p. doi: 10.1016/j.automatica.2022.110347
24. Gomoynov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Path-dependent Hamilton–Jacobi equations: the minimax solutions revised // Appl. Math. Optim. 2021. Vol. 84, suppl. 1. P. S1087–S1117. doi: 10.1007/s00245-021-09794-4
25. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Поступила 26.06.2024

После доработки 11.07.2024

Принята к публикации 15.07.2024

Гомоюнов Михаил Игоревич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург;

науч. сотрудник

научная лаборатория математической теории управления

Удмуртский государственный университет

г. Ижевск

e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич

д-р физ.-мат. наук, академик РАН

директор

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: nyul@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 520 p.
3. Krasovskii N.N., Krasovskii A.N. *Control under lack of information*. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p. ISBN: 0-8176-3698-6.
4. Hale J.K., Cruz M.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1970, vol. 85, no. 1, pp. 63–81. doi: 10.1007/BF02413530
5. Akhmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskii B.N. Theory of equations of neutral type. *J. Soviet Math.*, 1984, vol. 24, no. 6, pp. 674–719. doi: 10.1007/BF01305757
6. Hale J.K., Lunel S.M.V. *Introduction to functional differential equations*. NY: Springer, 1993, 447 p. doi: 10.1007/978-1-4612-4342-7
7. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Differential games for neutral-type systems: An approximation model. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 190–202. doi: 10.1134/S0081543815080155
8. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Existence of a value and a saddle point in positional differential games for neutral-type systems. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. S37–S48. doi: 10.1134/S0081543817090061
9. Gomoyunov M.I., Plaksin A.R. On basic equation of differential games for neutral-type systems. *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 131–143. doi: 10.3103/S0025654419030099
10. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. On the theory of positional differential games for neutral-type systems. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2020, vol. 309, suppl. 1, pp. S83–S92. doi: 10.1134/S0081543820040100
11. Plaksin A.R. Optimal positional strategies in differential games for neutral-type systems. *Dyn. Games Appl.*, 2024. doi: 10.1007/s13235-024-00565-8
12. Garnysheva G.G., Subbotin A.I. Strategies of minimax aiming in the direction of the quasigradient. *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 575–581. doi: 10.1016/0021-8928(94)90134-1
13. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective*. Boston: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1
14. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* [Functional Hamilton–Jacobi equations and control problems with hereditary information]. Yekaterinburg: Ural Federal University Publ., 2011, 243 p.
15. Plaksin A.R. On Hamilton–Jacobi–Isaacs–Bellman equation for neutral type systems. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 222–237 (in Russian). doi: 10.20537/vm170206

16. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. Minimax solutions of Hamiltoni–Jacobi equations in dynamical optimization problems for hereditary systems. *Uspekhi Mat. Nauk*, 2024, vol. 79, no. 2, pp. 43–144 (in Russian). doi: 10.4213/rm10166
17. Kim A.V. *Functional differential equations. Application of i -smooth calculus*. Dordrecht: Springer, 1999, 168 p. doi: 10.1007/978-94-017-1630-7
18. Plaksin A.R. Minimax solution of functional Hamilton–Jacobi equations for neutral type systems. *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 11. pp. 1475–1484. doi: 10.1134/S0012266119110077
19. Plaksin A.R. On the minimax solution of the Hamilton–Jacobi equations for neutral-type systems: the case of an inhomogeneous Hamiltonian. *Diff. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1516–1526. doi: 10.1134/S0012266121110100
20. Plaksin A.R. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations for neutral-type systems. *Appl. Math. Optim.*, 2023, vol. 88, no. 1, art. no 6. 29 p. doi: 10.1007/s00245-023-09980-6
21. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. Minimax solution of hereditary Hamilton–Jacobi equations for neutral type systems. *Uspekhi Mat. Nauk*, 2024, vol. 79, no. 4, pp. 177–178 (in Russian). doi: 10.4213/rm10182
22. Zhou J. *Viscosity solutions to first order path-dependent HJB equations*. 2020. 25 p. <http://Arxiv.org/abs/2004.02095>. doi: 10.48550/arXiv.2004.02095
23. Zhou J. Viscosity solutions to first order path-dependent Hamilton–Jacobi–Bellman equations in Hilbert space. *Automatica*, 2022, vol. 142, art. no. 110347. 15 p. doi: 10.1016/j.automatica.2022.110347
24. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Path-dependent Hamilton–Jacobi equations: the minimax solutions revised. *Appl. Math. Optim.*, 2021, vol. 84, suppl. 1, pp. S1087–S1117. doi: 10.1007/s00245-021-09794-4
25. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Dordrecht, Kluwer, 304 p. ISBN: 90-277-2699-X. Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoi pravoï chast’yu*, Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p.

Received June 26, 2024

Revised July 11, 2024

Accepted July 15, 2024

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within a state contract (project FEWS-2024-0009).

Mikhail Igorevich Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com.

Nikolai Yur’evich Lukoyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Academician, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: nyul@imm.uran.ru.

Cite this article as: M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. The value and optimal strategies in a positional differential game for a neutral-type system. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 86–98.