ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 3 2024

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ЦЕПОЧКИ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Е. Ю. Воронина, А. В. Дмитрук

Рассматривается задача о наискорейшем переводе трехмерной управляемой цепочки из произвольной точки в начало координат при наличии ограничений на управление и на одну из фазовых компонент. На основе принципа максимума в форме Дубовицкого — Милютина построен синтез оптимального управления.

Ключевые слова: управляемая система, быстродействие, фазовое ограничение, принцип максимума, точки переключения, мера Лебега — Стилтьеса, оптимальный синтез.

E. Yu. Voronina, A. V. Dmitruk. An optimal synthesis for a triple integrator with a state constraint.

The time-optimal problem of steering a triple integrator from an arbitrary point to the origin is considered under constraints on the input control and on one of the state variables. An optimal control is synthesized based on the maximum principle in the Dubovitskii–Milyutin form.

Keywords: control system, time optimality, state constraint, maximum principle, switching points, Lebesgue–Stieltjes measure, optimal synthesis.

MSC: 49N75, 49N70, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-68-85

1. Постановка задачи

Для трехмерной управляемой цепочки рассматривается задача быстродействия из произвольной точки в начало координат при наличии ограничений на управление и на одну из фазовых переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \\ \dot{y} = x, \quad y(0) = y_0, \quad y(T) = 0, \\ \dot{z} = y, \quad z(0) = z_0, \quad z(T) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

$$|u(t)| \leqslant 1, \quad J = T \to \min, \tag{1.2}$$

$$x(t) \geqslant -1. \tag{1.3}$$

Как обычно, считаем, что фазовые переменные $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ липшицевы, управление $u(t)$ измеримо и существенно ограничено на отрезке $[0, T]$.

Наша цель — дать полное описание всех оптимальных траекторий и построить синтез оптимального управления.

Отметим, что двумерный аналог этой задачи (без переменной z) хорошо изучен уже давно. При отсутствии фазового ограничения (1.3) это — простейшая задача Фельдбаума о наискорейшей остановке материальной точки, которая была одним из первых примеров демонстрации эффективности принципа максимума Понтрягина (см. [1]); ее решение при наличии ограничения (1.3) приведено, например, в книге А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [2]. В случае линейного фазового ограничения общего вида $ax + by \geqslant -1$ полное решение (оптимальный синтез) дано в работе [3].

Для трехмерной задачи (1.1), (1.2) без фазовых ограничений оптимальный синтез был впервые построен в статье А. А. Фельдбаума [4] (см. также его книгу [5, гл. III], книги А. А. Павлова [6, гл. V] и работу Э. Б. Ли и Л. Маркуса [7, гл. 2]). В статье [8] построен синтез для случая, когда на правом конце зануляются лишь компоненты $y(T) = z(T) = 0$, а компонента $x(T)$ свободна. В [9] построен синтез для случая несимметричного ограничения на управление $-a \leqslant u \leqslant b$ при произвольных $a, b > 0$.

Трехмерная задача с фазовыми ограничениями, насколько нам известно, рассматривалась только в недавней работе [10], где присутствовали ограничения сразу на все три фазовые переменные: $|x| \leqslant a,\ \ |y| \leqslant b,\ \ |z| \leqslant c$. Авторы построили оптимальный синтез, однако их рассуждения не вполне обоснованы, что не удивительно с учетом сложности полученной задачи. По нашему мнению (и согласно общепринятой методологии), сначала следует изучить с возможной полной строгостью случай одного ограничения.

В настоящей работе мы рассматриваем простейшее линейное фазовое ограничение $x \geqslant -1$, имеющее "глубину" 1 (т. е. при его первом дифференцировании в силу системы возникает ненулевой коэффициент при управлении).

2. Задача без фазового ограничения

Рассмотрим сначала случай, когда фазовое ограничение (1.3) отсутствует. Назовем его задачей I. Поскольку система (1.1) линейна, автономна и очевидно управляема на любом отрезке времени, то, как известно, для любого $T > 0$ множество достижимости этой системы с ограничением $|u| \leqslant 1$ на отрезке $[0, T]$ содержит некоторую окрестность нуля. Отсюда вытекает, что множество допустимых траекторий задачи I всегда непусто, и тогда по теореме Филиппова решение этой задачи, т. е. траектория, доставляющая *глобальный минимум*, существует. Тем более, эта траектория доставляет и локальный *сильный минимум*. Обозначим через ее через $(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t), \widehat{z}(t), \widehat{u}(t))$, $t \in [0, T]$.

Для ее нахождения применим принцип максимума Понтрягина [1], согласно которому существует нетривиальный (т. е. не тождественно нулевой) набор, состоящий из числа $\alpha_0 \geqslant 0$ и липшицевых функций ψ_x, ψ_y, ψ_z (сопряженных переменных), которые порождают *функцию Понтрягина*

$$H(x, y, z, u) \,= \psi_x\, u + \psi_y\, x + \psi_z\, y,$$

так что при этом выполняются следующие условия:

а) *сопряженные уравнения*

$$\begin{cases} \dot\psi_x = -\widehat{H}_x = -\psi_y, \\ \dot\psi_y = -\widehat{H}_y = -\psi_z, \\ \dot\psi_z = -\widehat{H}_z \,= 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

(все производные берутся на оптимальном процессе);

б) *условие постоянства функции Понтрягина* ("закон сохранения энергии"): для почти всех $t \in [0, T]$

$$H(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}, \widehat{u}) \,\equiv\, \mathrm{const} \,= \alpha_0 \geqslant 0;$$

в) *условие максимума*: для всех $t \in [0, T]$

$$\max_{|u|\,\leqslant\,1} H(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t), \widehat{z}(t), u) = \alpha_0.$$

Условия трансверсальности мы не выписываем, так как в задаче с фиксированными концами они не несут никакой информации и не влияют на нетривиальность указанного набора.

2.1. Анализ принципа максимума

Из системы (2.1) вытекает общий вид сопряженных переменных:

$$\psi_x = c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 t + c_3, \quad \psi_y = c_1 t + c_2, \quad \psi_z = c_1,$$

а из условия максимума — общий вид управления:

$$\widehat{u} \in \mathrm{Sign}(\psi_x) = \begin{cases} +1, & \text{если } \psi_x > 0, \\ -1, & \text{если } \psi_x < 0, \\ [-1,+1], & \text{если } \psi_x = 0. \end{cases}$$

Так как функция $\psi_x(t)$ квадратична, она равна нулю не более чем в двух точках на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ и, следовательно, имеет не более трех интервалов постоянного знака. Тогда функция $\widehat{u}(t)$ кусочно-постоянна, почти всюду $\widehat{u}(t) = \pm 1$ и имеет не более двух точек переключения.

В дальнейшем крышку над оптимальными переменными не пишем. Будем пользоваться обозначением $u = (u_1,\, u_2)$, если $u(t) = u_1$ на интервале $(0, t_1)$ и $u(t) = u_2$ на интервале $(t_1,\, T)$ при некотором $t_1 \in (0, T)$. Аналогично для трех участков постоянства пишем $u = (u_1,\, u_2,\, u_3)$.

Итак, в зависимости от числа переключений имеется три возможных типа управления, в каждом из которых — два симметричных случая.

A) Точек переключения нет: $u(t) \equiv +1$ и $u(t) \equiv -1$.

B) Одна точка переключения: $u(t) = (-1, +1)$ и $u(t) = (+1, -1)$.

C) Две точки переключения: $u(t) = (+1, -1, +1)$ и $u(t) = (-1, +1, -1)$.

Рассмотрим каждый из этих типов.

2.2. Тип A – точки переключения отсутствуют

Найдем все начальные точки (x_0, y_0, z_0), из которых можно перейти в ноль за некоторое время T, двигаясь с постоянным управлением $u \equiv 1$. Это те точки, которые можно достигнуть за время T, перемещаясь из нуля в обратном направлении (сделав замену $t = T - \tau$), т. е. согласно системе уравнений

$$\dot{x} = -1, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -y.$$

Отсюда $x_0 = -T$, $y_0 = T^2/2$, $z_0 = -T^3/6$. Переобозначив для удобства параметр T как s, приходим к следующей кривой, которую обозначим через Γ_1:

$$x = -s, \quad y = \frac{s^2}{2}, \quad z = -\frac{s^3}{6}, \quad s > 0. \tag{2.2}$$

Аналогично строится кривая Γ_2, соответствующая управлению $u = -1$; она симметрична Γ_1 и задается соотношениями

$$x = s, \quad y = -\frac{s^2}{2}, \quad z = \frac{s^3}{6}, \quad s > 0.$$

Таким образом, если начальная точка лежит на кривой Γ_1 или Γ_2, то траектория, соответствующая управлению $u \equiv 1$ или $u \equiv -1$ на отрезке $[0, s]$, удовлетворяет принципу максимума. Заметим, что эти кривые не имеют общих точек. Объединение данных кривых и начала координат обозначим через Γ.

2.3. Тип B – одна точка переключения

Рассмотрим множество тех точек, из которых система переходит в ноль под действием управления $u = (-1, +1)$, т. е. попадает в кривую Γ_1 с управлением $u = -1$. Эти точки образуют поверхность, которую мы обозначим как S_1. Чтобы ее описать, зафиксируем произвольную точку на кривой Γ_1 и, опять двигаясь в обратном времени $\tau = T - t$, получим систему уравнений

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -y,$$

общее решение которой имеет вид

$$x = \tau + c_1, \quad y = -\frac{\tau^2}{2} - c_1\,\tau + c_2, \quad z = \frac{\tau^3}{6} + c_1\frac{\tau^2}{2} - c_2\,\tau + c_3.$$

Так как в момент $\tau = 0$ мы находимся в точке, лежащей на кривой Γ_1 с некоторым параметром s, то с учетом (2.2) получаем

$$\begin{cases} x = \tau - s, \\ y = -\dfrac{\tau^2}{2} + \tau s + \dfrac{s^2}{2}, \\ z = -\dfrac{s^3}{6} - \dfrac{\tau^2}{2}\,s - \dfrac{s^2}{2}\,\tau + \dfrac{\tau^3}{6}, \end{cases} \qquad \tau,\ s > 0. \tag{2.3}$$

Эти формулы описывают множество S_1 тех начальных точек, из которых можно попасть в 0 за время $\tau + s$, двигаясь с управлением $u = (-1, 1)$. Отметим, что оба параметра, τ и s, положительны, т. е. $(\tau, s) \in \mathbb{R}^2_{++}$. Первые две формулы в (2.3) задают отображение открытого квадранта $\mathbb{R}^2_{++}$ в плоскость (x, y), образ которого — проекция поверхности S_1 на эту плоскость — есть некоторая область Ω_1.

Когда один из параметров стремится к нулю, в пределе получаем две кривые, γ_1 и γ_2, ограничивающие эту область:

$$\begin{cases} \tau = 0, \quad s > 0, \\ x = -s, \\ y = \dfrac{1}{2}\,s^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} s = 0, \quad \tau > 0, \\ x = \tau, \\ y = -\dfrac{1}{2}\,\tau^2. \end{cases}$$

Первая кривая γ_1 есть половина параболы $y = x^2/2$ при $x < 0$, а вторая γ_2 — половина параболы $y = -x^2/2$ при $x > 0$. Эти кривые суть проекции кривых Γ_1 и Γ_2. Вместе с точкой (0,0) они образуют кривую γ, разделяющую всю плоскость (x, y) на две симметричные друг другу области, Ω_1 и Ω_2. Поверхность S_1 проектируется в ту часть плоскости, в которой лежит точка $(0, 1/2)$, соответствующая параметрам $\tau = s = 1$. Поэтому область Ω_1 (см. рис. 1) лежит выше и правее кривой γ, а область Ω_2 — ниже и левее этой кривой; точнее,

$$\Omega_1 = \Big(x < 0,\ y > \frac{x^2}{2}\Big) \cup \Big(x > 0,\ y > -\frac{x^2}{2}\Big), \quad \Omega_2 = \Big(x < 0,\ y < \frac{x^2}{2}\Big) \cup \Big(x > 0,\ y < -\frac{x^2}{2}\Big).$$

Если в обеих областях время τ считать соответствующим управлению $u = -1$, а время s — управлению $u = +1$, то их очередность меняется: в области Ω_1 сначала идет время τ и затем s, а в области Ω_2, наоборот, сначала s и затем τ.

Нетрудно убедиться, что обратное отображение к проекции $S_1 \to \Omega_1$ задается формулами

$$s = \sqrt{\frac{x^2}{2} + y}, \quad \tau = x + \sqrt{\frac{x^2}{2} + y}, \quad (x, y) \in \Omega_1. \tag{2.4}$$

Подставив их в последнее уравнение из (2.3), определяющее переменную z, получим уравнение поверхности S_1:

$$z = g_1(x, y) := \frac{x^3}{6} - \Big(x + \sqrt{\frac{x^2}{2} + y}\Big)\Big(\frac{x^2}{2} + y\Big), \quad (x, y) \in \Omega_1. \tag{2.5}$$

Таким образом, координата z на этой поверхности есть функция от x, y, определенная на области Ω_1.

Случай, когда движение происходит с управлением $u = (+1, -1)$ в течение времени $s + \tau$, аналогичен рассмотренному. Здесь, меняя местами s и τ в формулах (2.4) и заменяя (x, y) на $(-x, -y)$, получаем

$$\tau = \sqrt{\frac{x^2}{2} - y}, \quad s = -x + \sqrt{\frac{x^2}{2} - y}, \quad (x, y) \in \Omega_2.$$

Соответствующие траектории симметричны рассмотренным выше траекториям (относительно нуля в $\mathbb{R}^3$), а соответствующая поверхность S_2 проектируется в область Ω_2 и задается уравнением

$$z = g_2(x, y) := \frac{x^3}{6} + \Big(-x + \sqrt{\frac{x^2}{2} - y} \Big) \Big(\frac{x^2}{2} - y \Big), \quad (x, y) \in \Omega_2. \tag{2.6}$$

Заметим, что обе функции, g_1 и g_2, гладкие внутри областей Ω_1 и Ω_2 соответственно, а на кривой γ (общей границе этих областей) они совпадают: $g_1 = g_2$, но склеенная из них функция g (равная g_1 на $\overline{\Omega}_1$ и g_2 на $\overline{\Omega}_2$) нигде на γ не дифференцируема, кроме нуля.

Таким образом, на поверхностях S_1 и S_2 синтез оптимального управления имеет следующий вид:

$$u = u(x, y, z) = \begin{cases} -1, & (x, y) \in \Omega_1, \\ +1, & (x, y) \in \gamma_1, \end{cases} \qquad (x, y, z) \in S_1, \tag{2.7}$$

$$u = u(x, y, z) = \begin{cases} +1, & (x, y) \in \Omega_2, \\ -1, & (x, y) \in \gamma_2, \end{cases} \qquad (x, y, z) \in S_2\,. \tag{2.8}$$

2.4. Тип C — две точки переключения

Рассмотрим случай управления $u = (+1, -1, +1)$ с некоторыми точками переключения $0 < t_1 < t_2 < T$. Здесь после движения с управлением $u = +1$ на первом интервале мы должны в момент t_1 попасть на поверхность S_1, после чего переключиться на $u = -1$ и двигаться вдоль S_1 с управлением типа B.

Точно так же в случае управления $u = (-1, +1, -1)$ с точками переключения $0 < t_1 < t_2 < T$ после начального движения с $u = -1$ мы должны в момент t_1 попасть на поверхность S_2, затем переключиться на $u = +1$ и двигаться вдоль S_2 с управлением типа B.

Согласно (2.5) поверхность S_1 задается равенством $\Phi_1(x, y, z) = 0$, где

$$\Phi_1(x, y, z) := z - g_1(x, y) = z + \frac{x^3}{3} + xy + \Big(\frac{x^2}{2} + y \Big)^{3/2}, \quad (x, y) \in \Omega_1,$$

и ввиду (2.6) поверхность S_2 задается равенством $\Phi_2(x, y, z) = 0$; здесь

$$\Phi_2(x, y, z) := z - g_2(x, y) = z + \frac{x^3}{3} - xy - \Big(\frac{x^2}{2} - y \Big)^{3/2}, \quad (x, y) \in \Omega_2. \tag{2.9}$$

Поскольку обе эти поверхности непрерывно стыкуются вдоль их общей границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{0\}$, для удобства введем объединенную поверхность $S = S_1 \cup S_2 \cup \Gamma$, разделяющую все пространство $\mathbb{R}^3$ на две симметричные области. Эта поверхность задается формулой $\Phi(x, y, z) = 0$, где функция $\Phi(x, y, z) = z - g(x, y)$ равна Φ_1 в области Ω_1 и равна Φ_2 в области Ω_2, а на общей границе этих областей равна им обеим.

Оптимальная траектория, двигаясь из начальной точки с постоянным управлением $u = 1$ или $u = -1$, должна в некоторый момент t_1 попасть на поверхность S. Мы хотим установить, какое управление надо выбрать, находясь вне этой поверхности.

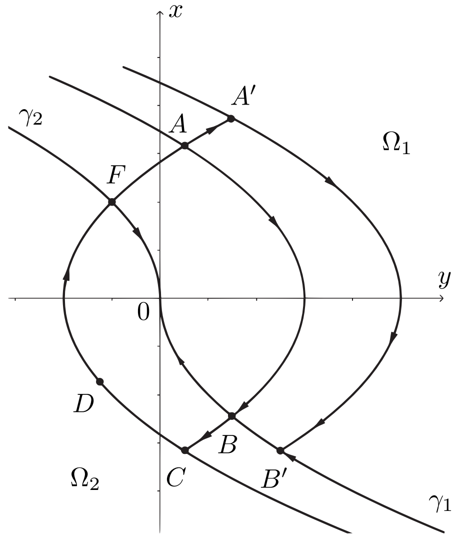

Рис. 1. Траектории задачи I.

Для этого посмотрим, как меняются функции Φ_1 и Φ_2 при движении с управлениями $u=\pm 1$. Градиент функции Φ_1 в области Ω_1 — это вектор

$$\Phi_1' = (\Phi_{1x}', \Phi_{1y}', \Phi_{1z}') = \Big(x^2+y+\frac{3}{2}\,x\sqrt{\frac{x^2}{2}+y},\; x+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x^2}{2}+y},\; 1\Big),$$

так что при управлении $u=1$ скалярное произведение этого градиента с вектором скорости $\rho_+ = (1, x, y)$ есть

$$(\Phi_1', \rho_+) = x^2+y+\frac{3}{2}\,x\sqrt{\frac{x^2}{2}+y}+\Big(x+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x^2}{2}+y}\Big)x+y = 2x^2+2y+3x\sqrt{\frac{x^2}{2}+y}\,.$$

Обозначим эту величину как $f(x,y)$ и оценим ее минимальное значение в области Ω_1. Если $x>0$, то $y \geqslant -x^2/2$ и минимум f по y будет при $y=-x^2/2$; он равен $x^2>0$. Если $x=-a<0$, то $y=a^2/2+v$, где $v\geqslant 0$, и тогда $f(x,y)=\varphi(a,v)=3a^2+2\,v\,-3a\sqrt{a^2+v}$. При любом $a>0$ эта функция выпукла по v, и поскольку $\varphi(a,0)=0$ и $\varphi_v'(a,0)=1/2$, то $\varphi(a,v)>0$ при всех $a,v>0$. В случае $x=0$ имеем $\varphi(0,v)=2v>0$ при любом $v=y>0$. Таким образом, $f(x,y)$ всюду положительна, кроме кривой $\gamma_1=\{x\leqslant 0,\ y=a^2/2\}$, где $f(x,y)=0$.

Итак, при $u=1$ всюду в области Ω_1, кроме кривой γ_1, функция Φ_1 возрастает, причем, как легко заметить, неограниченно, а на этой кривой $\Phi_1=\mathrm{const}$.

При движении с $u=-1$ скорость будет $\rho_-=(-1,x,y)$, и тогда, как нетрудно подсчитать, $(\Phi_1',\,\rho_-)\,=0$, т. е. значение Φ_1 при нахождении в области Ω_1 остается постоянным. Если мы начинаем из точки A на рис. 1, то движемся вниз по параболе AB и приходим в зону Ω_2 с тем же значением $\Phi_2(B)=\Phi_1(B)<0$.

Таким образом, в области Ω_1 можно лишь повысить значение Φ_1 (полагая $u=1$) или сохранить его (полагая $u=-1$) до вхождения в зону Ω_2.

Для области Ω_2 в силу симметрии справедливы аналогичные свойства: при движении с $u=-1$ всюду, кроме кривой γ_2, будет $(\Phi_2',\,\rho_-)\,<0$, т. е. Φ_2 убывает, а при $u=+1$ значение Φ_2 остается постоянным. Следовательно, в зоне Ω_2 можно лишь понизить значение Φ_2 (полагая $u=-1$) или сохранить его (полагая $u=+1$) до вхождения в зону Ω_1.

Теперь мы можем для любой точки вне поверхности S найти управление, которое без переключений приведет систему на поверхность S. (А далее надо будет двигаться вдоль этой поверхности в соответствии с формулами (2.7), (2.8).)

Рассмотрим трехмерную область $\Phi_1(x,y,z)<0$ при $(x,y)\in\Omega_1$. Пусть система находится в точке A на рис. 1. Мы утверждаем, что здесь надо полагать $u=+1$ и держать его до тех пор, пока не достигнем уровня $\Phi_1=0$, т. е. поверхности S_1.

Действительно, если положить $u = -1$ (а другого варианта у нас нет), то на такой траектории $\Phi_1 = \text{const} < 0$, мы движемся по параболе AB и приходим в зону Ω_2 с тем же значением $\Phi_2(B) = \Phi_1(B) = \Phi_1(A) < 0$. При дальнейшем движении по параболе ABC значение Φ_2 понижается, так что тем более $\Phi_2(C) < \Phi_1(B) < 0$, поэтому мы не сможем попасть на уровень $\Phi = 0$, т. е. на поверхность S. Тем самым наше утверждение доказано.

Таким образом, если $\Phi_1(A) < 0$, то надо полагать $u = (1, -1, 1)$ и двигаться по ломаной $AA'B'O$, где точка A' лежит на поверхности S_1, т. е. $\Phi_1(A') = 0$.

Рассмотрим теперь область $\Phi_2 < 0$ при $(x, y) = D \in \Omega_2$. Если здесь положить $u = -1$, то мы навсегда останемся в зоне Ω_2, еще больше понижая Φ_2, и опять попасть без переключений на уровень $\Phi = 0$ не сможем. Отсюда следует, что в этой области тоже надо полагать $u = +1$. При этом значение $\Phi_2 = \text{const} < 0$ будет сохраняться до тех пор, пока мы остаемся в зоне Ω_2. Как только в некоторой точке F мы попадаем на кривую γ_2 (а это неизбежно, ибо мы движемся по параболе с ветвями вправо, причем координата x возрастает с постоянной скоростью 1), мы затем входим в зону Ω_1. Поскольку в точке F имеем $\Phi_2 = \Phi_1 < 0$, то в ее правой полуокрестности будет $\Phi_1 < 0$, и тогда, как уже было установлено, мы должны по-прежнему держать $u = +1$, пока Φ_1, возрастая, не достигнет уровня $\Phi_1 = 0$ в некоторой точке A, т. е. пока мы не попадем на поверхность S_1. После этого надо переключиться на $u = -1$ и двигаться вдоль этой поверхности с управлением типа B.

Итак, в области $\Phi < 0$ и при $(x, y) \in \Omega_1$, и при $(x, y) \in \Omega_2$ следует полагать $u = +1$. По соображениям симметрии в области $\Phi > 0$ как при $(x, y) \in \Omega_1$, так и при $(x, y) \in \Omega_2$ следует полагать $u = -1$.

Отметим, что при движении с $u = +1$ в области $\Phi_1 < 0$ существует *единственный* момент пересечения уровня $\Phi_1 = 0$ (ибо далее Φ_1 будет только расти), поэтому здесь мы обязаны переключиться на $u = -1$ и двигаться по поверхности S_1. Аналогично при движении с $u = -1$ в области $\Phi_2 > 0$ существует *единственный* момент пересечения уровня $\Phi_2 = 0$, где мы обязаны переключиться на $u = +1$ и двигаться по поверхности S_2.

С учетом (2.7), (2.8) получаем итоговый вид оптимального синтеза в задаче I:

$$u(x, y, z) = +1, \quad \text{если} \begin{cases} \Phi(x, y, z) < 0 \quad \text{или} \\ \Phi(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad (x, y) \in \gamma_1 \cup \Omega_2, \end{cases}$$

$$u(x, y, z) = -1, \quad \text{если} \begin{cases} \Phi(x, y, z) > 0 \quad \text{или} \\ \Phi(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad (x, y) \in \gamma_2 \cup \Omega_1. \end{cases}$$

2.5. Единственность оптимальной траектории

Покажем, что при любых начальных данных $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ оптимальная траектория единственна. Действительно, как мы знаем, оптимальное управление всегда имеет вид $u = \pm 1$ не более чем с двумя переключениями. Рассмотрим, например, управление типа $u = (1, -1, 1)$ на отрезках длины $s_1, \tau, s_2 > 0$. Как показано выше, именно такой тип имеет оптимальное управление для любой начальной точки из области $\Phi(x, y, z) < 0$. С другой стороны, каждой тройке времени $s_1, \tau, s_2 > 0$ очевидно соответствует некоторая начальная точка (x_0, y_0, z_0) из области $\Phi < 0$. Нетрудно убедиться, что при отображении $(s_1, \tau, s_2) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^3_+ \longrightarrow \{\Phi < 0\}$ разные точки переходят в разные, т. е. это отображение взаимно-однозначно, и, значит, для каждой начальной точки соответствующая тройка (s_1, τ, s_2) определяется единственным образом. Другими словами, она представляет собой координаты точки (x_0, y_0, z_0) в указанной области. Точно так же происходит и с управлением типа $u = (-1, +1, -1)$ на отрезках длины $\tau_1, s, \tau_2 > 0$; последние тоже определяются единственным образом и представляют собой координаты начальной точки в области $\Phi > 0$.

Для точек поверхности $\Phi(x,y,z)=0$ оптимальное управление имеет вид $u=\pm 1$ не более чем с одним переключением. Здесь можно игнорировать компоненту z, а в плоскости (x,y) единственность оптимальной траектории очевидна.

2.6. Время оптимального движения

Рассмотрим сначала случай не более одного переключения, т. е. когда начальная точка лежит на поверхности $S=\overline{S}_1\cup\overline{S}_2$. Ясно, что время движения $T=\tau+s$ из любой точки $(x,y,z)\in\overline{S}_1$ до начала координат есть

$$T_1(x,y)=x+2\sqrt{\frac{x^2}{2}+y},\quad (x,y)\in\overline{\Omega}_1, \tag{2.10}$$

а время движения $T=s+\tau$ из любой точки $(x,y,z)\in\overline{S}_2$ есть

$$T_2(x,y)=-x+2\sqrt{\frac{x^2}{2}-y},\quad (x,y)\in\overline{\Omega}_2. \tag{2.11}$$

(В обоих случаях оно совпадает со временем быстродействия в двумерной задаче на плоскости (x,y) без учета переменной z, ибо она выражается через x,y.)

На кривой $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\{0\}$ обе эти формулы дают один и тот же результат: $T=|x|$.

В случае двух точек переключения $0<t_1<t_2<T$ достаточно рассмотреть движение до первой из них, т. е. до момента времени t_1. Если мы начинаем из области $\Phi<0$, то в ней движение происходит с управлением $u=+1$ при $0\leqslant t\leqslant t_1$ и описывается системой

$$x=t+c_1,\quad y=\frac{t^2}{2}+c_1t+c_2,\quad z=\frac{t^3}{6}+c_1\frac{t^2}{2}+c_2t+c_3.$$

С учетом начальных значений в момент t_1 имеем

$$x(t_1)=t_1+x_0,\quad y(t_1)=\frac{t_1^2}{2}+t_1x_0+y_0,\quad z(t_1)=\frac{t_1^3}{6}+\frac{t_1^2}{2}x_0+t_1y_0+z_0.$$

Так как в этой точке происходит переключение, она принадлежит поверхности S_1 и, значит, удовлетворяет уравнению $\Phi_1(x,y,z)=0$, т. е.

$$\Big(\frac{t_1^3}{6}+\frac{t_1^2}{2}x_0+t_1y_0+z_0\Big)+\frac{(t_1+x_0)^3}{3}+(t_1+x_0)\Big(\frac{t_1^2}{2}+t_1x_0+y_0\Big)$$
$$+\Big(\frac{(t_1+x_0)^2}{2}+\frac{t_1^2}{2}+t_1x_0+y_0\Big)^{3/2}=0.$$

Решение этого уравнения относительно $t_1>0$ и будет являться временем до первого переключения. Как было отмечено выше, это решение существует и единственно. Как только оно найдено, остающееся время движения находится по формуле (2.10) для точки $(x(t_1),y(t_1))$.

Если мы начинаем из области $\Phi>0$, то в ней $u=-1$ при $0\leqslant t\leqslant t_1$, и в момент t_1 имеем

$$x(t_1)=x_0-t_1,\quad y(t_1)=-\frac{t_1^2}{2}+t_1x_0+y_0,\quad z(t_1)=-\frac{t_1^3}{6}+\frac{t_1^2}{2}x_0+t_1y_0+z_0.$$

Так как в этой точке происходит переключение, она принадлежит поверхности S_2 и, значит, удовлетворяет уравнению $\Phi_2(x,y,z)=0$, т. е.

$$\Big(-\frac{t_1^3}{6}+\frac{t_1^2}{2}x_0+t_1y_0+z_0\Big)+\frac{(x_0-t_1)^3}{3}-(x_0-t_1)\Big(-\frac{t_1^2}{2}+t_1x_0+y_0\Big)$$
$$-\Big(\frac{(x_0-t_1)^2}{2}+\frac{t_1^2}{2}-t_1x_0-y_0\Big)^{3/2}=0.$$

Решение этого уравнения относительно $t_1>0$ также существует и единственно. Как только оно найдено, остающееся время движения находится по формуле (2.11) для точки $(x(t_1),y(t_1))$.

Нетрудно показать, что общее время движения гладким образом зависит от начальной точки в обеих областях $\Phi<0$ и $\Phi>0$, но имеет изломы на поверхности $\Phi=0$.

3. Задача с фазовым ограничением

Рассмотрим теперь задачу I с фазовым ограничением (1.3). Назовем ее задачей II.

Прежде всего, установим существование допустимых траекторий при любых начальных данных $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, где $x_0 \geqslant -1$ (т. е. полную управляемость в этой задаче). Для этого удобно ввести параметр

$$\xi = -z_0 = \int\limits_0^T y(t)\,dt.$$

Поскольку от переменной z, в задаче ничего не зависит, требование $z(0) = z_0$ и $z(T) = 0$ означает лишь, что интеграл $\int_0^T y(t)\,dt = -z_0$ принимает заданное значение. Поэтому для доказательства управляемости данной трехмерной системы достаточно убедиться, что из любой точки (x_0, y_0) на плоскости, в которой $x_0 \geqslant -1$, можно попасть в начало координат, набрав при этом заданное значение $\xi_0 = \int_0^T y(t)\,dt$.

Рассмотрим оптимальную траекторию двумерной задачи быстродействия, переводящую данную начальную точку (x_0, y_0) в ноль без учета ограничения $x \geqslant -1$. Как мы знаем, такая траектория всегда существует и состоит из движения по двум параболам (см. [1]). Траектория с управлением $u = (1, -1)$ не выйдет за фазовую границу, так что мы оставляем ее без изменений. Траектория с управлением $u = (-1, +1)$ может выйти за фазовую границу. Если $x(t) < -1$ на некотором интервале (t', t'') и $x(t') = x(t'') = -1$, то заменим движение по параболам на этом интервале с управлением $u = (-1, +1)$ на движение по отрезку $[x(t'), x(t'')]$ с управлением $u = 0$ на некотором другом (немного большем) отрезке времени. (То есть заменим ломаную $BC'C$ на отрезок BC, см. рис. 3 в подразд. 3.3.) Ясно, что такая замена возможна и что эта подправленная траектория допустима в двумерной задаче с ограничением $x \geqslant -1$. Построенные таким образом траектории для всех начальных точек (x_0, y_0) (одна для каждой точки) будем называть *базовыми*. Вычислим для каждой из них значение $\xi^* = \int_0^T y(t)\,dt$ и сравним его с требуемым ξ_0.

Если $\xi^* = \xi_0$, то мы получили желаемое. Если $\xi^* < \xi_0$, то нам надо увеличить $\int_0^T y(t)\,dt$. Для этого в самом конце движения вставим отрезок длины 4ε с управлением $u = (+1, -1, +1)$ на отрезках длины ε, 2ε, ε при некотором $\varepsilon \in (0, 1]$. Точка (x, y) при этом опишет дополнительный цикл в виде лунки и вернется в ноль (см. рис. 2). Так как $\varepsilon \leqslant 1$, это дополнение не

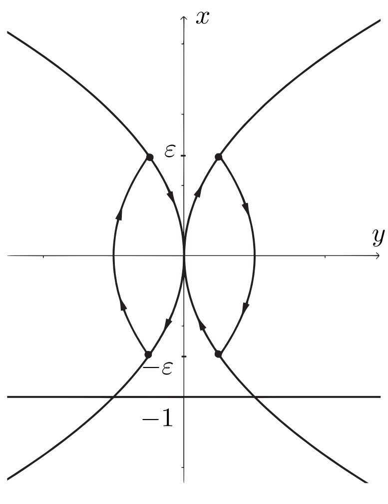

Рис. 2. Дополнительные циклы.

нарушает фазовое ограничение, и поэтому вся продолженная траектория будет допустимой. Поскольку на добавленном цикле все время $y > 0$ (кроме концов этого цикла), то на нем мы наберем дополнительный $\int y(t)\,dt > 0$. Если этого недостаточно, еще раз добавим такой цикл. При подходящем числе циклов и $\varepsilon \in (0,1]$ мы добьемся любого желаемого значения $\xi_0 > \xi^*$.

Если же $\xi^* > \xi_0$, то нам надо уменьшить $\int_0^T y(t)\,dt$. По аналогии с предыдущим для этого в самом конце движения вставим отрезок длины 4ε с управлением $u = (-1,+1,-1)$ на отрезках длины ε, 2ε, ε при некотором $\varepsilon \in (0,1]$. На таком цикле все время будет $y < 0$ (кроме концов цикла), поэтому на нем мы наберем дополнительный $\int y(t)\,dt < 0$ и при подходящем числе циклов и $\varepsilon \in (0,1]$ добьемся любого желаемого значения $\xi < \xi^*$.

Таким образом, допустимая траектория задачи II существует при любых начальных значениях (x_0, y_0) и $\xi_0 = -z_0$, а тогда по теореме Филиппова существует и траектория, доставляющая *глобальный минимум* в задаче. Тем более, эта траектория доставляет и локальный *сильный минимум.* Обозначим ее как $(\widehat{x}(t),\ \widehat{y}(t),\ \widehat{z}(t),\ \widehat{u}(t))$, $t \in [0,T]$.

3.1. Принцип максимума

Будем пока предполагать, что $\widehat{x}(0) > -1$, т. е. что начальная точка не лежит на фазовой границе. (Позже мы рассмотрим и случай $\widehat{x}(0) = -1$.)

Применим для оптимальной траектории принцип максимума в форме Дубовицкого — Милютина (см. [11–13]), согласно которому найдутся число $\alpha_0 \geqslant 0$, функции ограниченной вариации $\psi_x(t)$, $\psi_y(t)$, $\psi_z(t)$ (сопряженные переменные) и неубывающая функция $\mu(t)$ со значением $\mu(0) = 0$; набор их нетривиален, т. е. не тождественно нулевой, и они порождают *функцию Понтрягина*

$$H(x,y,z,u) = \psi_x\, u + \psi_y\, x + \psi_z\, y$$

и *расширенную функцию Понтрягина*

$$\overline{H}(x,y,z,u) = \psi_x\, u + \psi_y\, x + \psi_z\, y + \dot{\mu}(x+1),$$

так что при этом выполняются следующие условия:

а) дополняющая нежесткость

$$\dot{\mu}\,(\widehat{x}+1) = 0; \tag{3.1}$$

б) сопряженные уравнения

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = -\overline{H}_x = -\psi_y - \dot{\mu}, \\ \dot{\psi}_y = -\overline{H}_y = -\psi_z, \\ \dot{\psi}_z = -\overline{H}_z = 0; \end{cases} \tag{3.2}$$

в) “закон сохранения энергии”: для почти всех $t \in [0,T]$

$$H(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t), \widehat{z}(t), \widehat{u}(t)) \;\equiv\; \alpha_0 \geqslant 0;$$

г) условие максимума: для всех $t \in [0,T]$

$$\max_{|u|\,\leqslant\,1} H(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t), \widehat{z}(t), u) \;=\alpha_0. \tag{3.3}$$

Условия трансверсальности по-прежнему не выписываем, так как они не несут никакой информации и не влияют на нетривиальность указанного набора.

Поясним, что функция $\mu(t)$ порождает неотрицательную меру Лебега — Стилтьеса $d\mu(t)$; при этом $\dot{\mu}$ есть обобщенная производная функции μ. Условие (3.1) означает, что $d\mu(t) = 0$

на любом интервале, на котором $x(t) > -1$, а первое уравнение в (3.2) означает равенство мер: $d\psi_x = -\psi_y\, dt - d\mu$ или, в интегральной форме, что при некотором c

$$\psi_x(t) = c - \int_0^t \psi_y(\tau)\, d\tau - \mu(t) \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{3.4}$$

3.2. Анализ принципа максимума

Из условия максимума получаем:

$$\widehat{u}(t) \in \operatorname{Sign}(\psi_x(t)) := \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \psi_x > 0, \\ -1, & \text{если} \quad \psi_x < 0, \\ [-1, +1], & \text{если } \psi_x = 0. \end{cases}$$

В области $\widehat{x}(t) > -1$ из условия (3.1) следует $\dot{\mu} = 0$ и все уравнения становятся такими же, как и в задаче I. Отсюда вытекает, что если траектория не контактирует с границей, она строится так же, как и в задаче I. Поэтому далее будем рассматривать случай, когда оптимальная траектория имеет контакт с фазовой границей на некотором (очевидно замкнутом) множестве $M = \{\, t \mid \widehat{x}(t) = -1\}$.

Далее крышку над оптимальными переменными писать не будем.

Поскольку ψ_x — это функция ограниченной вариации, она может иметь скачки в счетном числе точек, и при любом t ее скачок есть $\Delta\psi_x(t) = -\Delta\mu(t)$. Так как $x(0) > -1$ и $x(T) = 0$, то в некоторых окрестностях точек 0 и T в силу (3.1) $d\mu = 0$ и, значит, функции μ и ψ_x там непрерывны. Ввиду того что $\mu(0) = 0$, в равенстве (3.4) $\psi_x(0) = c$.

Утверждение 1. *Не существует интервала (t', t''), на котором $d\mu = 0$ и $\psi_y = 0$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда в силу сопряженной системы (3.2) $\psi_y = \psi_z = 0$ на интервале (t', t''). Так как функция ψ_z постоянна, а ψ_y линейна, то они равны нулю на всем отрезке $[0, T]$. Согласно (3.3) $H = |\psi_x| = \alpha_0$ на всем отрезке $[0, T]$, при этом $\dot{\psi}_x = -\dot{\mu}$. Из условия нетривиальности следует, что $\alpha_0 > 0$. Тогда функция $\psi_x \neq 0$ либо постоянна, либо кусочно-постоянна: $\psi_x = (\alpha_0, -\alpha_0)$ со скачком вниз в некоторой точке t^*. При этом управление имеет вид: либо $u = 1$, либо $u = -1$, либо $u = (1, -1)$. Но, как легко заметить, при любом таком управлении $x(t)$ не выходит на границу, т. е. $M = \varnothing$, что противоречит нашему предположению. □

Поскольку у нас $M \neq [0, T]$ (ибо точки 0 и T не лежат в M), то из утверждения 1 следует, что ψ_y есть линейная ненулевая функция на отрезке $[0, T]$, и тогда в силу (3.2) на любом интервале вне M функция ψ_x квадратичная с одним и тем же коэффициентом кривизны, возможно нулевым.

Утверждение 2. *В любой точке $t^* \in M$ функции ψ_x и μ непрерывны, причем $\psi_x(t^*) = 0$.*

Доказательство. В левой полуокрестности точки t^* не может быть $\psi_x > 0$, иначе там $u = 1$, и, значит, попадание в точку $x(t^*)$ произошло при возрастании x, т. е. из запрещенной зоны $x < -1$. Аналогично в правой полуокрестности точки t^* не может быть $\psi_x < 0$, иначе там $u = -1$, и, значит, опять $x < -1$. Таким образом, $\psi_x(t^* - 0) \leqslant 0$ и $\psi_x(t^* + 0) \geqslant 0$, и тогда $\Delta\psi_x(t^*) = \psi_x(t^* + 0) - \psi_x(t^* - 0) \geqslant 0$.

С другой стороны, из сопряженного уравнения (3.2) для ψ_x следует $\Delta\psi_x(t^*) = -\Delta\mu(t^*) \leqslant 0$, и поэтому $\Delta\psi_x(t^*) = 0$, т. е. мера не имеет атома, а функции ψ_x и μ непрерывны в t^*.

Далее, если $\psi_x(t^*) > 0$, то в силу непрерывности имеем $\psi_x(t^* - 0) > 0$, чего не может быть, ибо $\psi_x(t^* - 0) \leqslant 0$. Аналогично, если $\psi_x(t^*) < 0$, то $\psi_x(t^* + 0) < 0$, что противоречит неравенству $\psi_x(t^* + 0) \geqslant 0$. Остается единственный вариант: $\psi_x(t^*) = 0$. □

Утверждение 3. *Множество M есть отрезок или точка.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся точки $t' < t''$ такие, что $t', t'' \in M$, т. е. $x(t') = x(t'') = -1$ и $x(t) > -1$ при $t \in (t', t'')$. В силу (3.1) на интервале (t', t'') имеем $\dot{\mu} = 0$ и, как мы знаем, ψ_x есть квадратичная функция.

Согласно утверждению 2, $\psi_x(t') = \psi_x(t'') = 0$. Возможны следующие три случая:

a) $\psi_x(t) > 0$ при $t \in (t', t'')$, т. е. парабола лежит выше оси абсцисс и соединяет две точки, в которых $x = -1$. Но тогда на этом интервале $u = +1$, поэтому $x(t'') > x(t')$; противоречие.

b) $\psi_x(t) < 0$ при $t \in (t', t'')$, т. е. парабола лежит ниже оси абсцисс и соединяет две точки, в которых $x = -1$. Но тогда на этом интервале $u = -1$, поэтому $x(t'') < x(t')$; противоречие.

c) $\psi_x = 0$ на (t', t''). Но тогда из (3.2) следует, что на этом интервале $\psi_y = -\dot{\psi}_x = 0$, что противоречит утверждению 1. □

Итак, множество M может быть либо отрезком, либо точкой, либо оказывается пустым. При этом если M состоит из одной точки t^*, то $\Delta\mu(t^*) = 0$, т. е. мера не оказывает никакого влияния на траекторию, так что последняя строится так же, как и в задаче I.

Рассмотрим основной случай, когда траектория выходит на границу на невырожденном отрезке $M = [t_1, t_2]$, при $t_1 < t_2$. Так как на этом отрезке $x = -1$, то $u = 0$.

Утверждение 4. *Оптимальное управление имеет не более трех точек переключения.*

Доказательство. Поскольку $x(0) > -1$ и $x(T) = 0 > -1$ (начальное и конечное значения не лежат на границе), то $0 < t_1 < t_2 < T$. На отрезках $[0, t_1]$ и $[t_2, T]$ из уравнений (2.1) следует, что $\ddot{\psi}_x = \psi_z = \text{const} := a$, т.е. сопряженная переменная $\psi_x(t)$ есть ненулевая квадратичная функция, в силу утверждения 2 равная нулю в точках t_1 и t_2. Поэтому на каждом из этих отрезков возможно не более одной смены знака ψ_x, а значит, $u(t) = \operatorname{sign}\psi_x(t) = \pm 1$ имеет не более одного переключения. Учтем, что как выйти на границу с управлением $u = 1$, так и сойти с нее с управлением $u = -1$ невозможно. Поэтому если и слева, и справа от $[t_1, t_2]$ есть переключения (в некоторых точках t_0 и t_3), то управление имеет тип $u = (+1, -1, 0, +1, -1)$ с априорно максимально возможными четырьмя переключениями. Покажем, однако, что на самом деле этот случай не реализуется.

Действительно, если есть четыре переключения, то на левом отрезке функция ψ_x меняет знак с плюса на минус, и ее график — это парабола с ветвями вверх: $\psi_z = \ddot{\psi}_x = a > 0$. (При $a = 0$ функция ψ_x линейна и переключение невозможно.) Аналогично на правом отрезке получаем $\psi_z = a < 0$; противоречие. □

Итак, любая траектория, удовлетворяющая принципу максимума, имеет один из следующих *экстремальных* типов:

0) $u = +1$ или $u = -1$ (без переключений);
1) $u = (-1, +1)$ или $u = (+1, -1)$ (одно переключение);
2) $u = (-1, 0, +1)$, или $u = (-1, +1, -1)$, или $u = (+1, -1, +1)$ (два переключения);
3) $u = (+1, -1, 0, +1)$ или $u = (-1, 0, +1, -1)$ (три переключения).

Поскольку для любой начальной точки оптимальная траектория существует, а она удовлетворяет принципу максимума, то существует и экстремальная траектория одного из этих типов.

3.3. Построение оптимальных траекторий

Рассмотрим на плоскости (x, y) построенные выше области Ω_1 и Ω_2 вместе с разделяющей их кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{0\}$, ограниченные теперь снизу прямой $\pi : x = -1$ (рис. 3). Пусть C есть точка пересечения кривой γ и этой прямой. Построим параболу β, проходящую через точку C с управлением $u = -1$ и вершиной на оси y. Эта парабола разделяет область Ω_1 на две подобласти Ω_1^a и Ω_1^b, лежащие слева и справа от β соответственно.

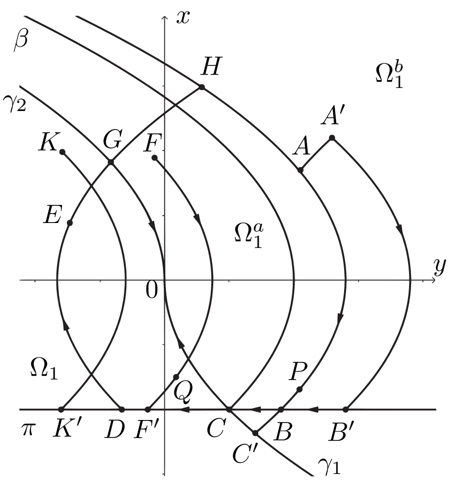

Рис. 3. Траектории задачи II.

Наша ближайшая цель — для любой начальной точки (x_0, y_0, z_0) с $x_0 \geqslant -1$ построить траекторию одного из указанных экстремальных типов. Будем рассуждать по той же схеме, что и в разд. 2.

Для произвольной начальной точки $(x_0, y_0) \in \Omega_2$ имеется базовая траектория типа $u = (1, -1)$, для начальной точки $(x_0, y_0) \in \Omega_1^a$ — базовая траектория типа $u = (-1, 1)$, а для начальной точки $(x_0, y_0) \in \Omega_1^b$ — базовая траектория типа $u = (-1, 0, 1)$, приводящая систему в ноль на некотором (каждый раз своем) отрезке.

Вычислим каждый раз величину $\xi^* = \displaystyle\int_0^T y\,dt$ и положим $\widetilde{g}(x_0, y_0) = -\xi$. Если начальное значение $z_0 = \widetilde{g}(x_0, y_0)$, то данная базовая траектория и есть экстремальная траектория задачи II для данной точки. По аналогии с разд. 2 введем функцию $\widetilde{\Phi} = z - \widetilde{g}(x, y)$. В областях Ω_2 и Ω_1^a она совпадает с прежними функциями Φ_2 и Φ_1 соответственно, а в области Ω_1^b немного отличается от Φ_1; обозначим ее как $\widetilde{\Phi}_1$. На разделительных линиях γ и β соответствующие функции стыкуются непрерывным образом. Равенство $\widetilde{\Phi}(x, y, z) = 0$ задает поверхность $\widetilde{S}$, состоящую из начальных точек базовых траекторий. Нам надо построить экстремальные траектории для начальных точек и вне этой поверхности.

Оценим знак производной функции $\widetilde{\Phi}$ при управлении $u = 1$ в области Ω_1^b. (Для точек из областей Ω_1^a и Ω_2 он был установлен ранее.)

Несложно подсчитать, что для точек $(x, y) \in \Omega_1^b$ эта функция имеет вид

$$\widetilde{\Phi}_1(x, y, z) = z + \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} + \frac{x^2}{4} + xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}, \tag{3.5}$$

ее градиент есть

$$\widetilde{\Phi}_1'(x, y, z) = \Big(\frac{x^3}{2} + x^2 + xy + y + \frac{x}{2},\ \frac{x^2}{2} + x + y + \frac{1}{2},\ 1\Big),$$

и скалярное произведение градиента и вектора скорости $\rho_+ = (1, x, y)$

$$(\widetilde{\Phi}_1',\, \rho_+) = \frac{x^3}{2} + x^2 + xy + y + \frac{x}{2} + x\Big(\frac{x^2}{2} + x + y + \frac{1}{2}\Big) + y$$

$$= x^3 + 2x^2 + x + 2xy + 2y\ = x(x+1)^2 + 2y(x+1).$$

Поскольку всегда $x + 1 \geqslant 0$, то при каждом x минимум этого выражения достигается при минимальном y, а так как область Ω_1^b задается неравенством $y \geqslant 1 - \dfrac{1}{2}\,x^2$, то, положив $y = 1 - \dfrac{1}{2}\,x^2$, приходим к неравенству $(\widetilde{\Phi}_1',\, \rho_+) = (x+1)(x+2)\ >\ 0$ при $x > -1$ и, значит, вне фазовой границы функция $\widetilde{\Phi}_1$ в области Ω_1^b при $u = 1$ возрастает. В этой области при $\widetilde{\Phi}_1 > 0$ невозможно попасть на поверхность $\widetilde{S}$ с управлением $u = 1$. Здесь следует выбрать $u = -1$, чему соответствует вектор скорости $\rho_- = (-1, x, y)$. Для него $(\widetilde{\Phi}_1', \rho_-) = 0$, т. е. $\widetilde{\Phi}_1 = \mathrm{const}$ (что неудивительно, ибо значение $\widetilde{\Phi}_1$ и вычислялось вдоль движения с $u = -1$), и это значение будет сохраняться до попадания на границу π.

На самой этой границе при $(x, y) \in \Omega_1^b$ и управлении $u = 0$ трехмерный вектор скорости есть $\rho_0 = (0, -1, y)$, поэтому $(\widetilde{\Phi}_1', \rho_0) = 0$, так что значение $\widetilde{\Phi}_1$ при движении вдоль границы влево вплоть до точки C сохраняется.

Оценим скорость изменения функции $\widetilde{\Phi}$ при движении вдоль границы π в области Ω_2. Поскольку здесь $y \leqslant \dfrac{1}{2}$, то согласно (2.9)

$$(\Phi_2', \rho_0) = -1 + y - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2} - y} \leqslant -\frac{1}{2}, \tag{3.6}$$

поэтому при движении вдоль π левее точки C функция $\widetilde{\Phi} = \Phi_2$ строго убывает.

Теперь построим экстремальные траектории. Начнем с области $(x_0, y_0) \in \Omega_1$.

1. Пусть $z_0 < \widetilde{g}_1(x_0, y_0)$, т. е. $\widetilde{\Phi}_1(x_0, y_0, z_0) < 0$. Тогда, как и в разд. 2, двигаемся сначала на некотором отрезке $[0, t^*]$ с управлением $u = 1$. Поскольку здесь $\widetilde{\Phi}_1$ возрастает, найдется единственный момент $t^* > 0$, для которого $\widetilde{\Phi}_1(x(t^*), y(t^*), z(t^*)) = 0$, причем мы остаемся в зоне Ω_1. После этого переходим на базовую траекторию точки $x(t^*), y(t^*), z(t^*)$, т. е. включаем $u = (-1, 1)$ или, если нарушили фазовую границу, $u = (-1, 0, 1)$, и приходим в ноль. Таким образом, мы получили траекторию экстремального типа $u = (1, -1, 1)$ или $u = (1, -1, 0, 1)$.

2. Пусть $(x_0, y_0) = F \in \Omega_1^a$ и $\widetilde{\Phi}_1(x_0, y_0, z_0) > 0$. Полагаем $u = -1$ и двигаемся вниз по параболе, сохраняя значение $\widetilde{\Phi}_1 > 0$. Не доходя до границы, пересекаем кривую γ_1 и выходим в область Ω_2. В точке пересечения имеем $\Phi_2 = \widetilde{\Phi}_1$, и далее Φ_2 убывает. Если при этом убывании мы достигли значения $\Phi_2 = 0$, не пересекая фазовой границы, значит, мы на поверхности S_2 и далее двигаемся по ней с управлением $u = (+1, -1)$, пока не придем в ноль. Таким образом, мы обошлись без выхода на границу и в итоге получили не просто экстремальную, а оптимальную траекторию задачи I. Тем более, она будет оптимальной и в задаче II.

Если же при убывании Φ_2 мы достигли границы в точке F', но по-прежнему $\Phi_2 > 0$, то далее двигаемся влево по границе с $u = 0$. Согласно (3.6) при этом Φ_2 продолжает убывать, так что в некоторой единственной точке $D \in \pi$ получим $\Phi_2 = 0$, т. е. попадем на поверхность S_2 и далее будем двигаться по ней с управлением $u = (+1, -1)$ до попадания в ноль. Таким образом, здесь мы получаем экстремальную траекторию типа $u = (-1, 0, +1, -1)$.

3. Пусть теперь $(x_0, y_0) = A \in \Omega_1^b$ и $\widetilde{\Phi}_1(x_0, y_0, z_0) > 0$ и, двигаясь с $u = -1$ и сохраняя значение $\widetilde{\Phi}_1 > 0$, мы достигли границы в некоторой точке $B > C$. Тогда дальше двигаемся влево по границе с $u = 0$ до пересечения с кривой γ_1 в точке C. Значение $\widetilde{\Phi}_1 > 0$ при этом все время сохраняется и в точке C передается функции $\Phi_2 : \Phi_2(C) = \widetilde{\Phi}_1(C) > 0$. Далее продолжаем движение влево по границе, но теперь уже значение $\widetilde{\Phi}_2$ убывает, и найдется единственная точка $D < C$, в которой будет $\Phi_2(D) = 0$, где мы включаем управление $u = (+1, -1)$ и попадаем в ноль. В итоге мы опять получаем экстремальную траекторию типа $u = (-1, 0, +1, -1)$. Отличие от предыдущего случая в том, что здесь мы перешли в область Ω_2 по границе, а не внутри допустимой фазовой области, как было там.

Итак, для всех $(x_0, y_0) \in \Omega_1$ экстремальные траектории построены. Рассмотрим теперь случай $(x_0, y_0) = E \in \Omega_2$.

4. Пусть $\Phi_2(x_0, y_0, z_0) < 0$. Двигаемся с $u = 1$, сохраняя $\Phi_2 = \mathrm{const}$, но, достигнув кривой γ_2 в некоторой точке G, не переключаемся на $u = -1$, а продолжаем держать $u = 1$, находясь уже в зоне Ω_1. Так как $\Phi_2(G) = \widetilde{\Phi}_1(G) < 0$, а в зоне Ω_1 при $u = 1$ функция $\widetilde{\Phi}_1$ возрастает, то в некоторый единственный момент она достигает значения $\widetilde{\Phi}_1 = 0$, т. е. мы находимся в некоторой точке H поверхности $\widetilde{S}_1$. Дальше переключаемся на базовую

траекторию этой точки и в итоге получаем экстремальную траекторию типа $u = (+1, -1, +1)$ или $u = (+1, -1, 0, +1)$.

5. Наконец, пусть $\Phi_2(x_0, y_0, z_0) > 0$ в начальной точке $K \in \Omega_2$. Тогда полагаем $u = -1$, при этом Φ_2 убывает. Если в некоторой точке мы достигли значения $\Phi_2 = 0$, не пересекая границу π, то далее переходим на базовую траекторию этой точки и в итоге получаем экстремальную траекторию типа $u = (-1, 1, -1)$. Если же мы вышли на π в точке K', но по-прежнему $\Phi_2 > 0$, то включаем $u = 0$ и двигаемся по границе влево. В силу (3.6) здесь Φ_2 убывает, поэтому доходим до некоторой точки, в которой $\Phi_2 = 0$, и далее переходим на базовую траекторию $u = (1, -1)$ этой точки. В итоге получаем экстремальную траекторию типа $u = (-1, 0, 1, -1)$.

Итак, для всех $(x_0, y_0) \in \Omega_2$ экстремальные траектории также построены.

Как и в подразд. 2.5, нетрудно убедиться, что для любой допустимой начальной точки (x_0, y_0, z_0) существует лишь единственная экстремальная траектория одного из указанных типов, а поскольку при $x_0 > -1$ согласно принципу максимума оптимальная траектория должна быть в числе этих типов, то построенная экстремальная траектория и есть оптимальная.

Рассмотрим теперь случай, когда начальная точка лежит на фазовой границе: $x_0 = -1$.

1. Если $(x_0, y_0) = B \in \Omega_1$ и $\widetilde{\Phi}_1(B) < 0$, то базовая траектория начинается с $u = +1$. Тогда фазовое ограничение в окрестности точки B можно игнорировать, при этом экстремальное управление $u = (1, -1, 0, 1)$ будет оптимальным.

Если же $\widetilde{\Phi}_1(B) \geqslant 0$, то возьмем в качестве начальной любую точку P на нисходящей параболе AB. Тогда $\widetilde{\Phi}_1(P) = \widetilde{\Phi}_1(B)$ и оптимальная траектория из точки P типа $u = (-1, 0, 1)$ или $u = (-1, 0, 1, -1)$ будет проходить через точку B, а так как "хвост" оптимальной траектории оптимален, то и траектория типа $u = (0, 1)$ или $u = (0, 1, -1)$, начинающаяся с точки B, тоже будет оптимальной.

2. Если $(x_0, y_0) = D \in \Omega_2$ и $\Phi_2(D) \leqslant 0$, то базовая траектория начинается с $u = +1$. Как и в случае 1, здесь фазовое ограничение в окрестности точки D можно игнорировать, при этом экстремальное управление $u = (1, -1)$, $u = (1, -1, 1)$ или $u = (1, -1, 0, 1)$ (в последнем случае это ломаная $DGHBCO$ с выходом в зону Ω_1^b) будет оптимальным.

Если же $(x_0, y_0) = F' \in \Omega_2$ и $\Phi_2(F') > 0$, то в качестве начальной возьмем любую точку Q на нисходящей параболе FF'. Тогда $\widetilde{\Phi}(Q) \geqslant \widetilde{\Phi}(F') > 0$ и оптимальная траектория из точки Q типа $u = (-1, 0, 1, -1)$ будет проходить через точку F', поэтому ее "хвост" с управлением $u = (0, 1, -1)$ из точки F' также будет оптимальным.

3.4. Синтез оптимального управления для задачи II

Из приведенных рассмотрений следует, что значение управления зависит от текущих фазовых переменных (x, y, z) следующим образом:

$$u(x,y,z) = +1, \quad \text{если} \begin{cases} \widetilde{\Phi}(x,y,z) < 0 \ \text{ или} \\ \widetilde{\Phi}(x,y,z) = 0 \ \text{ и } \ (x,y) \in \gamma_1 \cup \Omega_2; \end{cases}$$

$$u(x,y,z) = 0, \quad \text{если } \ x = -1 \ \text{ и } \ \begin{cases} \widetilde{\Phi}(x,y,z) > 0 \ \text{ или} \\ \widetilde{\Phi}(x,y,z) = 0 \ \text{ и } \ y > 1/2; \end{cases}$$

$$u(x,y,z) = -1, \quad \text{если } \ x > -1 \ \text{ и } \ \begin{cases} \widetilde{\Phi}(x,y,z) > 0 \ \text{ или} \\ \widetilde{\Phi}(x,y,z) = 0 \ \text{ и } \ (x,y) \in \gamma_2 \cup \Omega_1. \end{cases}$$

Отметим, что в точке $C = (-1,\ 1/2)$ управление таково: если $\widetilde{\Phi}(C) \leqslant 0$, то $u = 1$, если же $\widetilde{\Phi}(C) > 0$, то надо двигаться по границе влево с управлением $u = 0$.

3.5. Время оптимального движения

Опишем здесь лишь траектории, выходящие на фазовую границу.

1) Для управления типа $u = (-1, 0, +1)$ точки переключения легко находятся явно (они совпадают с таковыми для двумерной задачи в плоскости (x, y)):

$$t_1 = x_0 + 1, \quad t_2 = x_0 + y_0 + \frac{x_0^2}{2}, \quad T = x_0 + y_0 + \frac{x_0^2}{2} + 1. \tag{3.7}$$

2) В случае управления $u = (+1, -1, 0, +1)$ возьмем за основную для расчетов точку t_1. Из этой точки выходит базовая траектория типа $u = (-1, 0, 1)$, поэтому она находится на поверхности $\widetilde{S}_1$, т.е. для нее выполняется равенство $\widetilde{\Phi}_1 = 0$. Выражая ее координаты (x_1, y_1, z_1) через (x_0, y_0, z_0) и t_1, получаем с учетом (3.5) уравнение 4-й степени относительно t_1:

$$\frac{t_1^4}{2} + t_1^3 + 2x_0\, t_1^3 + \frac{t_1^2}{2} + \frac{5x_0^2\, t_1^2}{2} + 3x_0\, t_1^2 + y_0\, t_1^2 + x_0^3\, t_1 + 2x_0^2\, t_1 + 2x_0 y_0\, t_1$$

$$+ x_0 t_1 + 2y_0 t_1 + \frac{x_0^4}{8} + \frac{x_0^3}{3} + \frac{x_0^2\, y_0}{2} + \frac{x_0^2}{4} + x_0 y_0 + \frac{y_0^2}{2} + \frac{y_0}{2} + z_0 = 0.$$

Вычислив значение t_1, можно найти координаты (x_1, y_1, z_1) и подставить их в формулы (3.7), принимая эту точку за начальную. Тогда

$$t_2 = t_1 + x(t_1) + 1, \quad t_3 = x(t_1) + y(t_1) + \frac{x(t_1)^2}{2} + t_1, \quad T = \frac{x(t_1)^2}{2} + y(t_1) + x(t_1) + 1 + t_1.$$

3) Аналогично находятся параметры для управления $u = (-1, 0, +1, -1)$, но в качестве основной для расчетов используется вторая точка переключения. Из этой точки выходит траектория типа $u = (+1, -1)$, поэтому она находится на поверхности S_2 и, значит, для нее выполняется равенство $\Phi_2 = 0$. Выражая ее координаты (x_2, y_2, z_2) через (x_0, y_0, z_0) и t_2, получаем с учетом (2.9) уравнение (также 4-й степени) относительно t_2:

$$-\frac{t_2^2}{2} + x_0 t_2 + y_0 t_2 - \frac{t_2}{2} + \frac{t_2 x_0^2}{2} - \frac{x_0^3}{6} + \frac{x_0}{2} + y_0 + z_0 - \Big(t_2 - y_0 - x_0 - \frac{x_0^2}{2}\Big)^{3/2} = 0.$$

Найдя отсюда значение t_2 и затем параметры второй точки переключения, полагаем

$$t_3 = 1 + \sqrt{\frac{1}{2} - y(t_2)}, \quad T = 1 + 2\sqrt{\frac{1}{2} - y(t_2)}.$$

Время до первого переключения, как и в случае 1), есть $t_1 = x_0 + 1$. Вычислив координаты первой точки переключения и учитывая, что далее движение идет по фазовой границе, выразим координаты второй точки переключения через t_2.

Заключение

Рассмотрена задача о наискорейшем переводе трехмерной управляемой цепочки (или так называемого тройного интегратора) из произвольной точки в начало координат при наличии ограничений на управление и на одну из фазовых компонент. На основе принципа максимума в форме Дубовицкого — Милютина построен синтез оптимального управления. В качестве дальнейших исследований нам представляется интересным изучить указанный в [3] случай линейного фазового ограничения общего вида $ax + by + cz \geqslant -1$ при произвольных a, b, c, подобно тому, как это сделано в [3] для задачи с двумерной цепочкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Мищенко Е.Ф. М.: Наука, 1961. 392 с.
2. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 р.
3. **Dmitruk A., Samylovskiy I.** Optimal synthesis in a time-optimal problem for the double integrator system with a linear state constraint // J. Dyn. Contr. Syst. 2023. Vol. 29, no. 1. P. 21–42. doi: 10.1007/s10883-021-09589-4
4. **Фельдбаум А.А.** О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Автоматика и телемеханика. 1955. Т. 16, № 2. Р. 129–149.
5. **Фельдбаум А.А.** Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1966. 624 с.
6. **Павлов А.А.** Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. М.: Наука, 1966. 390 с.
7. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
8. **Черноусько Ф.Л., Шматков А.М.** Синтез оптимального быстродействия в одной системе третьего порядка // Докл. АН. 1997. Т. 354, № 2. С. 174–177.
9. **Акуленко Л.Д., Костин Г.В.** Аналитический синтез управления оптимального быстродействия в системе третьего порядка // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, № 4. С. 532–544.
10. **He Suqin , Hu Chuxiong, Zhu Yu, Tomizuka Masayoshi**. Time optimal control of triple integrator with input saturation and full state constraints // Automatica. 2020. Vol. 122. Art. no. 109240. doi: 10.1016/j.automatica.2020.109240
11. **Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.** Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.
12. **Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.** Принцип максимума в оптимальном управлении / Механико-математический факультет МГУ. М., 2004. 73 с.
13. **Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.** Вариации типа v-замены времени в задачах с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 76–92. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-76-92

Поступила 3.06.2024
После доработки 3.07.2024
Принята к публикации 8.07.2024

Воронина Елизавета Юрьевна
студентка
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: lizok-voronina@mail.ru

Дмитрук Андрей Венедиктович
д-р физ.-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник
ЦЭМИ РАН;
профессор
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: optcon@mail.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. NY, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 978-0470693810. Original Russian text published in Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Phys. Math. Liter. Publ., 1961, 391 p.
2. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach* [Theory of extremal problems]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 480 p. ISBN: 978-5-507-44741-1.

3. Dmitruk A., Samylovskiy I. Optimal synthesis in a time-optimal problem for the double integrator system with a linear state constraint. *J. Dyn. Control Syst.*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 21–42. doi: 10.1007/s10883-021-09589-4
4. Fel'dbaum A.A. On the synthesis of optimal systems with the aid of phase space. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1955, vol. 16, no. 2, p. 129–149 (in Russian).
5. Fel'dbaum A.A. *Optimal control systems.* NY: Acad. Press, 1965, 452 p. Original Russian text (2nd ed.) published in Fel'dbaum A.A. Osnovy teorii optimal'nykh avtomaticheskikh sistem. Moscow: Nauka Publ., 1966, 623 p.
6. Pavlov A.A. *Sintez releinykh sistem, optimal'nykh po bystrodeistviyu* [Synthesis of relay systems with optimal performance]. Moscow: Nauka Publ., 1966, 390 p.
7. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* NY, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
8. Chernous'ko F.L., Shmatkov A.M. Time-optimality synthesis in a third-order system. *Dokl. Akad. Nauk*, 1997, vol. 354, no. 2, pp. 174–177 (in Russian).
9. Akulenko L.D., Kostin G.V. Analytical synthesis of time-optimal control in a third-order system. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 64, no. 4, pp. 509–519. doi: 10.1016/S0021-8928(00)00076-9
10. He Suqin, Hu Chuxiong, Zhu Yu, Tomizuka Masayoshi. Time optimal control of triple integrator with input saturation and full state constraints. *Automatica*, 2020, vol. 122, 109240. doi: 10.1016/j.automatica.2020.109240
11. Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A. Extremum problems in the presence of restrictions. *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, 1965, vol. 5, iss. 3, pp. 1–80. doi: 10.1016/0041-5553(65)90148-5
12. Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovsky N.P. *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [Maximum principle in optimal control]. Moscow, Mekh.-Math. Moscow State University, 2004, 73 p.
13. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Variations of the v-change of time in problems with state constraints. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2019, vol. 305, iss. 1, pp. S49–S64. doi: 10.1134/S0081543819040072

Received June 3, 2024
Revised July 3, 2024
Accepted July 8, 2024

Elizaveta Voronina, student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: lizok-voronina@mail.ru .

Andrei Dmitruk, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Central Economics and Mathematics Institute RAS, Moscow, 117418 Russia; Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: optcon@mail.ru .

Cite this article as: E. Yu. Voronina, A. V. Dmitruk. An optimal synthesis for a triple integrator with a state constraint. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 68–85 .