ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 3 2024

УДК 514.85+531.36

СИЛЬНЫЕ СВЯЗИ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

С. Н. Бурьян

Рассматривается динамика голономных механических систем с геометрическими особенностями конфигурационного пространства, такими как точки ветвления. Классические методы вывода уравнений движения неприменимы в окрестности особых точек, где нет обобщенных координат. Предложен новый метод анализа динамики систем с особенностями. Некоторые голономные (жесткие) связи заменяются на упругие (пружины). В результате особенность исчезает, но увеличивается число степеней свободы системы. При неограниченном возрастании жесткости пружины траектория системы с упругими связями должна все меньше отклоняться от конфигурационного пространства для исходной системы с голономными связями. Выдвинута гипотеза о движении механической системы, конфигурационное пространство которой может быть представлено как объединение двух гладких многообразий. Предельный переход для жесткости пружины рассматривается на конкретном примере. Для этого строится сингулярный маятник с пружиной. Данную механическую систему с двумя степенями можно явно параметризовать, что упрощает ее аналитическое и численное моделирование. В численных экспериментах движение системы согласовывается с гипотезой.

Ключевые слова: реализация связей, реакции связей, многообразия с особенностями, особая точка, голономная связь, множители Лагранжа.

S. N. Burian. Strong constraints in the dynamics of systems with geometric singularities.

The dynamics of holonomic mechanical systems with geometric singularities of the configuration space, such as branch points, is considered. Classical methods for deriving equations of motion are not applicable in neighborhoods of singular points because there are no generalized coordinates. A new method for analyzing the dynamics of systems with singularities is proposed. Some holonomic (rigid) constraints are replaced by elastic ones (springs). As a result, the singularity disappears, but the number of degrees of freedom of the system increases. With an unlimited increase in spring stiffness, the trajectory of a system with elastic constraints should deviate less and less from the configuration space for the original system with holonomic constraints. A hypothesis has been put forward about the motion of a mechanical system whose configuration space could be represented as a union of two smooth manifolds. The limit transition for the spring stiffness is considered using a specific example. For this purpose, a singular pendulum with a spring is constructed. This two-degree mechanical system can be explicitly parameterized, which simplifies its analytical and numerical modeling. In numerical experiments, the motion of the system is consistent with the hypothesis.

Keywords: constraint realization, constraint reactions, manifolds with singularities, singular point, holonomic constraints, Lagrange multipliers.

MSC: 53Z05, 70G60, 34M55

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-53-67

Введение

В голономной механике движение механической системы описывается системой дифференциальных уравнений (движения свободной системы) и алгебраических уравнений (связей). Для перехода к системе только дифференциальных уравнений необходимо исключить уравнения связей. Применяется принцип освобождаемости от связей, согласно которому уравнения связей заменяются на силы реакции. Соответствующие силы реакции определяются как решения некоторой системы уравнений, которая зависит от градиентов связей.

Для получения системы дифференциальных уравнений движения необходимо, чтобы система уравнений для сил реакции связей имела решение и оно было единственным. Но это условие не всегда выполняется. Например, для систем с трением скольжения есть примеры механизмов, для которых система уравнений для сил реакции связей или не имеет решения, или имеет несколько решений. Это известные парадоксы Пенлеве [1].

Особенности сил реакций также возникают в системах с избыточными связями. Для описания динамики данных систем часто применяется метод “забывания”, в котором зависимые связи исключаются из рассмотрения. Другим методом для определения сил реакций является псевдообращение матрицы системы для нахождения сил реакции. Схема вычислений в этом случае приведена в работах [2] и [3]. Для механических систем с кинематическими особенностями также предлагается метод Баумгарта для стабилизации движения [4], который зависит от параметров стабилизации.

Парадоксы Пенлеве приводят к вопросу о реализации связей в механике [5]. В некоторых методах предлагается заменить голономные связи на упругие звенья с большим коэффициентом упругости, которым соответствует дополнительный потенциал [6, с. 53–60]. В литературе рассматривается реализация связей только для независимых связей, когда конфигурационное пространство механической системы является гладким многообразием.

Общая схема реализации голономных связей следующая. Независимые голономные связи задают некоторое гладкое многообразие M. В модели с “упругими ” связями многообразие M заменяется на дополнительный потенциал $N \cdot W(\mathbf{x})$. Функция W должна обращаться в 0 на множестве M и должна быть строго положительной вне M. Вещественный параметр N может быть сколь угодно большим. Если начальные данные $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ для системы с дополнительным потенциалом NW удовлетворяют условиям: $\mathbf{x}_0 \in M$ и $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{x}_0}M$, то при $N \to +\infty$ предельное движение системы с дополнительным потенциалом должно стремиться к движению системы с голономными связями. В работе [7] данная реализация голономных связей доказана для систем с потенциальными силами. В статье [8] предельный переход доказан для обобщенных сил с некоторыми условиями гладкости. Уравнения движения для начальных данных $\mathbf{x}_0 \in M$ и $\dot{\mathbf{x}}_0 \notin T_{\mathbf{x}_0}M$ изучаются в [7] и [9]. Для систем с неголономными связями ограничение на направление вектора скорости может быть сформулировано как вязкое трение с большим коэффициентом сопротивления, которое препятствует движению вне связи [10].

Настоящая статья посвящена исследованию движения механических систем вблизи особых точек конфигурационного пространства. Примерами геометрических особых точек являются точки ветвления или угловые точки. Особые точки могут возникать в том случае, когда голономные связи системы становятся зависимыми в некоторых конфигурациях механизма. В литературе нет общего определения для уравнений динамики в окрестности особых конфигураций механизма.

В данной работе впервые рассматривается метод определения динамики механической системы вблизи особой точки, когда некоторые голономные (“жесткие”) связи заменяются на упругие (пружины). Тогда за счет увеличения размерности задачи исчезают особенности конфигурационного пространства. Если на систему действуют только консервативные или диссипативные силы, то при возрастании жесткости пружины траектория движения системы с упругими связями должна все меньше отклоняться от конфигурационного пространства для исходной “жесткой” системы. Новый подход применим к широкому классу механических систем с особенностями конфигурационного пространства. Задача о предельном переходе по параметру жесткости в общем случае осложняется отсутствием обобщенных координат вблизи особенностей. Поэтому сначала необходимо изучить применение описанного метода для нескольких модельных механических систем малой размерности.

Основной мотивацией для данного подхода к движению на многообразиях с особенностями является реализация голономных связей через упругий потенциал для механических систем с независимыми связями. Эта схема реализации связей естественным образом обобщается и на системы с зависимыми связями, вблизи особых точек. При возрастании жесткости пружины траектории системы вне особенностей должна стремиться к траектории системы с голономными связями. Но движение системы через особые точки является неопределенным. Теоретически возможно, что предельная траектория может иметь “поворот” в особой точке, когда направление вектора скорости мгновенно меняется. Или при возрастании жесткости пружины нет определенной “предельной” траектории из-за быстрых осцилляций.

Для шарнирных механизмов в конфигурационном пространстве могут возникать геометрические особые точки, если несколько шарнирно соединенных стержней одновременно становятся параллельными. Возникает вероятность выхода системы из особой точки не одним, а несколькими способами, поэтому возникает "ветвление" траекторий движения. Силы реакции стержней в особой конфигурации механизма могут быть не определены или определены неоднозначно. Малое отклонение параметров связей от "критических" может изменить структуру конфигурационного пространства. Примером является классическая перестройка множества, заданного уравнением $x^2 - y^2 = \varepsilon$ при значениях параметра $\varepsilon \approx 0$.

Цель данной работы — изучение предельного перехода по параметру жесткости на конкретном примере, для сингулярного маятника с пружиной. Эту механическую систему с двумя степенями свободы можно явно параметризовать, что позволяет упростить численное решение дифференциальных уравнений движения и повысить точность расчетов. Для пружины бесконечной жесткости в конфигурационном пространстве возникает точка ветвления, а движение вне особенности является одномерным.

1. Общий подход

Рассматривается механическая система в $\mathbb{R}^n$ с координатами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и голономными связями f_k, $k = 1, ..., m$. Пусть голономные связи являются независимыми. Тогда система уравнений $f_k(\mathbf{x}) = 0$, $k = 1, \ldots, m$ определяет гладкое многообразие M размерности $n - m$. При гипотезе идеальных связей движение по многообразию M обеспечивается за счет введения сил реакции связей, которые ортогональны обобщенным скоростям. Обозначим кинетическую энергию как T, обобщенные силы как $\mathbf{G}$, множители Лагранжа для связи f_k как λ_k. Для составления уравнений движения системы применяются методы из [11, гл. 1] и [12, гл. 5]. Матричная форма полученных уравнений движения рассматривается в [13, гл. 8]. Приведем уравнение движения системы со связями:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\Big) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{G} + \lambda_k \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k. \tag{1.1}$$

Если начальные данные $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ для траектории удовлетворяют условиям $\mathbf{x}_0 \in M$ и $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{x}_0}M$, то траектория движения системы (1.1) лежит на многообразии M.

Заметим, что уравнение (1.1) применимо только для неособых точек конфигурационного пространства. Для многообразий с особенностями возможно изучение поведения траекторий при движении изображающей точки к особой точке конфигурационного пространства.

В статьях [7] и [8] исследуется реализация голономных связей $f_k(\mathbf{x}) = 0$, где $k = 1, \ldots, m$, с помощью дополнительного потенциала W, который равен нулю на многообразии M и строго положителен вне M. Дополнительный потенциал можно рассматривать как некоторую штрафную функцию, которая не позволяет траектории движения "уходить далеко" от многообразия M. Движение системы с дополнительным потенциалом W и множителем N описывается следующим уравнением:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{G} - N\,\frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}}. \tag{1.2}$$

При дополнительных предположениях о гладкости дифференциального уравнения движения свободной системы и упругого потенциала в уравнении (1.2) выполняется следующая теорема из работы [8]. В этой статье есть более подробная формулировка условий.

Теорема 1. *Пусть функция W неотрицательна, обращается в нуль на M, а второй дифференциал W положительно определен на любом подпространстве, трансверсальном к M. Рассматривается траектория $\mathbf{x}_\infty$ для системы со связями* (1.1) *и начальными данными $\mathbf{x}_0 \in M$, $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{x_0}M$. При некоторых условиях гладкости функций T, W, G движение x_N для* *системы с потенциалом* (1.2) *определено при больших значениях N на заданном конечном интервале времени $[t_0, t_1]$ и выполняется условие*

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{x}_\infty(t) + O(1/N).$$

Если многообразие M задано уравнениями $f_k(\mathbf{x}) = 0$, $k = 1, \dots, m$ и дифференциалы ∇f_k линейно независимы, то можно положить

$$W = N \sum_{k=1}^{m} c_k (f_k)^2,$$

где константы c_k положительны.

Далее мы сформулируем и докажем новые утверждения, которые связаны с теоремой 1. Но эти новые утверждения описывают некоторые свойства для систем с геометрическими особенностями.

З а м е ч а н и е 1. Вывод теоремы 1 неприменим для особых точек конфигурационного пространства, так как при доказательстве этой теоремы явно используется локальное представление конфигурационного пространства как плоскости в пространстве свободной системы. Но в окрестности особых точек конфигурационное пространство не диффеоморфно евклидову пространству некоторой размерности $n \in \mathbb{N}$.

Предположим, что конфигурационное пространство X является объединением двух гладких многообразий M_1 и M_2, которые вложены в объемлющее пространство $\mathbb{R}^h$ для некоторого $h \in \mathbb{N}$. Пересечения $M_1 \cap M_2$ обозначим как S.

З а м е ч а н и е 2. Если в пространстве свободной системы $\mathbb{R}^h$ задана динамика (лагранжиан), то на многообразиях M_1 и M_2 возникает индуцированная динамика.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое многообразие M_1 и M_2 определяется некоторой системой независимых голономных связей. Если рассмотреть только многообразие M_1 и "забыть" о многообразии M_2, то для движения по многообразию M_1 можно составить систему уравнений вида (1.1) (аналогично — для многообразия M_2). В результате на каждом многообразии M_1 и M_2 возникает "классическая" динамика голономных систем. Если обобщенные силы $\mathbf{G}$ являются гладкими функциями, то траектории движения будут гладкими кривыми. □

Следующее предложение является основным для моделирования динамики систем с особенностями в рассматриваемом подходе. Оно обобщает некоторые свойства из теоремы 1 на случай многообразий с особенностями: при возрастании параметра N в уравнениях (1.2) траектория движения механической системы должна все меньше отклоняться от конфигурационного пространства для системы со связями (1.1).

Предложение 1. *Предположим, что на систему* (1.1) *действуют только консервативные внешние силы $\mathbf{G}$ с потенциалом U. Пусть при любом значении множителя N начальные координаты $\mathbf{x}_0 \in M_i$ и скорости $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{x}_0} M_i$, где $i = 1, 2$, фиксированные. Тогда при $N \to \infty$ максимальное отклонение траектории системы* (1.2) *от конфигурационного пространства X системы со связями стремится к нулю на конечном интервале времени.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения Лагранжа (1.2) для системы с упругим потенциалом могут быть записаны в матричной форме [13, гл. 8]:

$$A(\mathbf{x}_N)\ddot{\mathbf{x}}_N + B(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) = -N \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}_N}.$$

Индекс в обозначении $\mathbf{x}_N$ соответствует системе (1.2) с множителем N. Матрица A является матрицей кинетической энергии системы. Кинетическая энергия системы может быть записана в виде $T = \dfrac{1}{2}\,\dot{\mathbf{x}}_N^T A(\mathbf{x}_N)\dot{\mathbf{x}}_N$. Предполагается, что матрица A симметрична и положительно определена. Уравнения динамики в матричной форме можно переписать как уравнения в стандартной форме:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{x}_N \\ \dot{\mathbf{x}_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_N \\ -A^{-1}(\mathbf{x}_N)B(\mathbf{x}_N,\dot{\mathbf{x}}_N) - N\,A^{-1}(\mathbf{x}_N)\dfrac{\partial W}{\partial \mathbf{x}_N} \end{pmatrix} := F(\mathbf{x}_N,\dot{\mathbf{x}}_N)\,.$$

Зафиксируем начальные координаты $\mathbf{x}_0 \in M_i$ и скорости $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{x}_0}M_i$. Рассмотрим максимально продолженное решение $\mathbf{x}_N = \varphi(t)$ задачи Коши для уравнения (1.2), которое определено на интервале времени $[t_0, t_*)$. Механическая энергия H сохраняется, поэтому она определяется начальным значением при $t = t_0$. Учитывая, что $W(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \in X$, получаем

$$H = H_0 = T(\mathbf{x}_0,\dot{\mathbf{x}}_0) + U(\mathbf{x}_0) + NW(\mathbf{x}_0) = T(\mathbf{x}_0,\dot{\mathbf{x}}_0) + U(\mathbf{x}_0).$$

Для минимального собственного числа $\mu > 0$ матрицы A выполняется

$$\frac{1}{2}\,\mu|\dot{\mathbf{x}}_N|^2 \le \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{x}}_N^T A(\mathbf{x}_N)\dot{\mathbf{x}}_N \le H_0 - U(\mathbf{x}_N).$$

Тогда для любой ограниченной и замкнутой области G скорость $\dot{\mathbf{x}}_N$ является равномерно ограниченной некоторой константой C_0 для всех значений параметра N. Скорость роста $\mathbf{x}_N(t)$ в области G равномерно ограничена для всех N: $|\mathbf{x}_N(t) - \mathbf{x}_N(t_0)| \le C_0(t - t_0)$.

Предположим, что $t_* < +\infty$. В силу непрерывности функции F существует предел $\mathbf{x}_N = \varphi(t)$ при $t \to t_*$. Тогда вокруг траектории $\mathbf{x}_N$ можно построить компактную трубку G в фазовом пространстве с координатами $(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Например, можно взять все точки точки фазового пространства, которые удалены от образа траектории $\mathbf{x}_N = \varphi(t)$ на расстояние не больше 1. Для такой трубки G можно найти константу C_0, которая равномерно ограничивает скорость в трубке. При этом векторное поле $F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ является гладким, т. е. удовлетворяет локальному условию Липшица по координатам и скоростям (для каждого фиксированного N) в области G. По построению точка $(t_*, \mathbf{x}_N(t_*), \dot{\mathbf{x}}_N(t_*))$ лежит в области G. Следовательно, выполнены условия о продолжимости решения $\mathbf{x} = \varphi(t)$. Получили противоречие. Значит, решение $\mathbf{x}_N = \varphi(t)$ определено на интервале $[t_0, +\infty)$.

Теперь докажем, что для решений задачи Коши для системы (1.2) с фиксированными начальными координатами $\mathbf{x}_0 \in M_i$ и скоростями $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{x}_0}M_i$ максимальное отклонение от множества X будет стремиться к нулю при $N \to \infty$ на каждом конечном интервале $[t_0, t_1]$. Вначале заметим, что при $t \in [t_0, t_1]$ множество $\{\mathbf{x}_N(t)\}$ является ограниченным и содержится в шаре радиуса $C_0(t_1 - t_0)$ для всех N. Предположим противное; тогда существует положительное число $\varepsilon > 0$, последовательность множителей $N \to \infty$ и последовательность моментов $t_N \in [t_0, t_1]$, таких что расстояния $dist(\mathbf{x}_N(t_N), X) > \varepsilon$. В силу ограниченности последовательности $\{\mathbf{x}_N(t_N)\}$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{x}_p(t_p)\} \to \mathbf{x}_*$. Тогда $W(\mathbf{x}_p(t_p)) \to W(\mathbf{x}_*) > 0$. Но из условия сохранения энергии следует, что $W(\mathbf{x}_p(t_p)) \to 0$ при $p \to \infty$. Получили противоречие. Значит, с ростом N траектории движения системы (1.2) стремятся к множеству X (которое задается уравнением $W(\mathbf{x}) = 0$) равномерно. $\square$

При движении системы от точки на многообразии M_1 до множества S ожидается, что траектория движения системы с упругими силами будет стремиться к траектории системы с голономными связями. Сформулируем соответствующее предложение.

Предложение 2. *Пусть функции F, G, W в уравнении* (1.2) *достаточно гладкие. Если $\mathbf{x}_0 \in M_i \backslash S$ и $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{x}_0}M_i$, где $i = 1, 2$, то при движении до пересечения $S = M_1 \cap M_2$ траектория движения системы* (1.2) *сходится к гладкой траектории системы* (1.1) *при $N \to \infty$ на множестве $M_i \backslash S$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую кривую γ, которая является решением уравнения со связями (1.1) с начальными данными $\mathbf{x}_0 \in M_1 \backslash S$ и $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{x}_0} M_1$. Пусть на отрезке $[t_0, t_1)$ кривая γ полностью содержится в множестве $M_1 \backslash S$, а точка $\gamma(t_1)$ лежит в множестве S. Тогда для малого числа $\delta > 0$ кривая γ на интервале времени $[t_0, t_1 - \delta]$ содержится в одном гладком многообразии M_1. В этом случае возможно применить теорему 1: решения $\mathbf{x}_N$ для системы с упругим потенциалом сходятся к решению системы со связями. При $\delta \to 0$ получается приближение на интервале $[t_0, t_1)$. □

Основной интерес представляет движение механизма через пересечение S многообразий M_1 и M_2. Дополнительный потенциал W позволяет построить некоторые траектории движения для системы с упругим потенциалом, после чего перейти к пределу для параметра жесткости. Сформулируем следующую гипотезу.

Предположение 1. *Пусть конфигурационное пространство механической системы X является объединением двух гладких многообразий M_1 и M_2, таких что пересечение $S = M_1 \cap M_2$ также является гладким многообразием. Тогда для начальных данных $\mathbf{x}_0 \in M_i \backslash S$, $\dot{\mathbf{x}}_0 \in T_{\mathbf{x}_0} M_i$ траектории движения системы с дополнительным потенциалом* (1.2) *сходятся к траекториям движения на многообразии M_i.*

Аналитическое исследование данной гипотезы осложняется отсутствием обобщенных координат вблизи особых точек. В данной работе рассматривается численная модель сингулярного маятника с пружиной. Далее описывается конструкция сингулярного маятника с пружиной. Также изучается подведение этой системы для двух типов особенностей конфигурационного пространства: пересечения двух кривых на плоскости и касания 1-го порядка двух кривых на плоскости.

2. Сингулярный маятник с пружиной

Конструкция и свойства сингулярного маятника рассматривались нами в статьях [14–16]. Описание сингулярного маятника в этом разделе в основном следует обобщающей работе [16], в которой рассматриваются как свойства конфигурационного пространства, так и свойства сил реакции связей. Сингулярный маятник с пружиной строится в несколько этапов, описанных ниже.

Двойной маятник. Для построения сингулярного маятника применяется двойной математический маятник, который расположен в вертикальной плоскости Π относительно поверхности Земли. Вершина A является неподвижной. К вершине A крепится стержень AB, а к вершине B — стержень BC. Стержень AB имеет длину l_1, стержень BC — длину l_2. Стержни AB и BC считаются жесткими и нерастяжимыми. Для параметризации движения двойного маятника вводится следующая система координат. Начало отсчета находится в вершине A, ось Ax направлена вертикально вниз, ось Ay направлена горизонтально (рис. 1). Положение маятника определяется декартовыми координатами точек $B(x_1, y_1)$ и $C(x_2, y_2)$. Выпишем формулы для голономных связей. Уравнение голономной связи f_1 соответствует условию $|AB| = l_1$, уравнение голономной связи f_2 — условию $|BC| = l_2$:

$$f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0;$$
$$f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l_2^2 = 0. \tag{2.1}$$

Для параметризации двойного маятника часто применяется пара углов (φ, ψ). Угол φ измеряет отклонение стержня AB от вертикальной оси, угол ψ — отклонение стержня BC от вертикальной оси. В этих координатах уравнения связей (2.1) выполняются автоматически.

Сингулярный маятник. Сингулярный маятник получается из двойного маятника с помощью дополнительной голономной связи f_3. Свободная вершина C двойного маятника должна двигаться по заданной кривой γ в вертикальной плоскости Π. Например, пусть вершина C

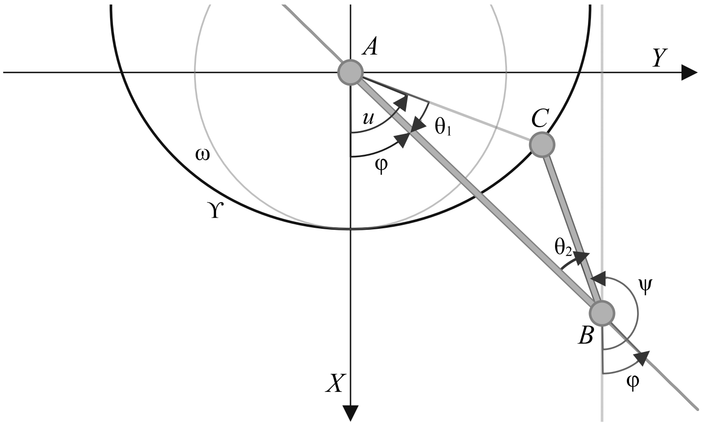


Рис. 1. Сингулярный маятник.

движется по эллипсу γ, тогда получается следующее уравнение связи f_3:

$$f_3(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{(x_2 - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{2.2}$$

В формуле (2.2) параметры a и b обозначают большую полуось и малую полуось эллипса, параметр c определяет положение центра эллипса $(c, 0)$ на оси Ax.

Для параметризации движения сингулярного применяется система координат двойного маятника. Обозначим угол XAC как u, угол CAB как θ_1 и угол ABC как θ_2. Будем предполагать, что расстояние $d = |AC|$ является функцией угла u в окрестности некоторой точки, т.е. $d = d(u)$. В конфигурационном пространстве сингулярного маятника возникает геометрическая особенность, когда в некоторой конфигурации механизма расстояние $|AC|$ достигает минимального значения $l_1 - l_2$ или максимального значения $l_1 + l_2$. Предполагается, что расстояние $|AC|$ имеет изолированный минимум или максимум. Маятник может выйти из особых конфигураций двумя способами, что приводит к появлению точки ветвления (особой точки) конфигурационного пространства. В одном случае маятник ABC находится справа от прямой Ax после прохождения особой точки, в другом — находится слева от прямой Ax.

Углы θ_1 и θ_2 (см. рис. 1) определяют зависимость координат φ и ψ на двумерном торе от угла u. По теореме косинусов для треугольника ABC получаем следующие соотношения:

$$\theta_1(u) = \pm \arccos\Big(\frac{l_1^2 + d(u)^2 - l_2^2}{2 l_1 d(u)}\Big), \quad \theta_2(u) = \pm \arccos\Big(\frac{l_1^2 + l_2^2 - d(u)^2}{2 l_1 l_2}\Big). \tag{2.3}$$

Положительный знак в уравнениях (2.3) соответствует расположению вершины C справа от прямой AB, отрицательный знак — расположению слева от AB. Конфигурационное пространство сингулярного маятника представляет собой две гладкие кривые без общих точек, две пересекающиеся кривые или две касающиеся кривые. Интерес представляет движение сингулярного маятника вблизи особой точки.

Свойства конфигурационного пространства сингулярного маятника в терминах функции расстояний $d(u)$ и углов $\theta_{1,2}(u)$ отражены в статье [16]. Если радиус кривизны линии связи $f_3(x_2, y_2)$ при $u = 0$ равен разности длин стержней AB и BC, то в точке пересечения гладких кривых, которые составляют конфигурационное пространство сингулярного маятника, будет особенность типа касания первого порядка. Если радиус кривизны отличен от разности длин стержней, то на двумерном торе будет трансверсальное пересечение двух гладких кривых.

Кривизна K эллипса (2.2) в точке $(x_2, y_2) = (l_1 - l_2, 0)$ находится прямым вычислением из стандартной параметризации эллипса как $x_2 = c + \cos(\Theta)/a$, $y_2 = \sin(\Theta)/b$:

$$K = \frac{a}{b^2}.$$

Пусть $l_1 = 2\,m$ и $l_2 = 1\,m$. Тогда для модели трансверсальной особой точки в конфигурационном пространстве сингулярного маятника можно взять эллипс с полуосями $a = 4\,m$ и $b = 3\,m$, а для модели особой точки типа касания — эллипс с полуосями $a = 4\,m$ и $b = 2\,m$.

Сингулярный маятник с пружиной. Конфигурационное пространство сингулярного маятника является одномерным всюду, за исключением особых точек. Рассмотрим сингулярный маятник, в котором стержень BC заменяется на пружину жесткости k. В результате получается система с двумя степенями свободы и без особенностей. Для пружины конечной жесткости k возможно применить стандартные уравнения Лагранжа второго рода. В пределе при $k \to \infty$ должна получиться динамика на многообразии с особенностями.

Для описания сингулярного маятника с пружиной введем обобщенные координаты (u, θ), где угол θ равен углу BAC. Если пружина BC считается недеформируемой, то угол θ равен углу θ_1 сингулярного маятника. В общем случае деформация δ пружины BC находится как

$$\delta = \sqrt{d^2(u) + l_1^2 - 2d(u)l_1\cos(\theta)} - l_2. \tag{2.4}$$

Динамика сингулярного маятника с пружиной. Рассмотрим динамику сингулярного маятника с пружиной заданной жесткости k. Стержни AB и BC считаются невесомыми. Кинетическая энергия T механической системы является суммой кинетических энергий двух точечных масс m_B и m_C, расположенных в вершинах B и C:

$$T = \frac{1}{2}m_B l_1^2(\dot{u} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_C\left((d'(u))^2 + (d(u))^2\right)(\dot{u})^2. \tag{2.5}$$

Потенциальная энергия U сингулярного маятника с пружиной является суммой потенциальной энергии силы тяжести и потенциальной энергии деформации пружины BC:

$$U = -m_B g l_1\cos(u + \theta) - m_C g d(u)\cos(u) + k\,\frac{\delta^2}{2}. \tag{2.6}$$

Обобщенные силы $\mathbf{Q} = (Q_u, Q_\theta)^T$, которые действуют на систему, по (2.4) и (2.6) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_u = -\frac{\partial U}{\partial u} &= -m_B g l_1\sin(u + \theta) + m_C g(d'(u)\cos(u) - d(u)\sin(u)) + \ldots \\ &\ldots + k\delta\frac{l_1 d'(u)\cos(\theta) - d(u)d'(u)}{\sqrt{d^2(u) + l_1^2 - 2l_1 d(u)\cos(\theta)}}; \\ Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} &= -m_B g l_1\sin(u + \theta) - k\delta\frac{d(u)l_1\sin(\theta)}{\sqrt{d^2(u) + l_1^2 - 2l_1 d(u)\cos(\theta)}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Приведем уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{gathered} (m_B l_1^2 + m_C(d^2(u) + (d'(u))^2))\ddot{u} + m_B l_1^2\ddot{\theta} + m_C\,d'(u)(d(u) + d''(u))(\dot{u})^2 = Q_u; \\ m_B l_1^2\ddot{u} + m_B l_1^2\ddot{\theta} = Q_\theta. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Уравнения движения (2.8) могут быть записаны в матричном виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}, \tag{2.9}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_B l_1^2 + m_C(d^2(u) + (d'(u))^2) & m_B l_1^2 \\ m_B l_1^2 & m_B l_1^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}; \\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} m_C d'(u)(d(u) + d''(u))(\dot{u})^2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_\theta \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Так как матрица $\mathbf{A}$ является невырожденной, то из системы (2.9) получается система двух явных дифференциальных уравнений второго порядка. Их можно переписать в стандартную форму, получив систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Вектор $\mathbf{Q}$ определяется по выражениям (2.7).

3. Численный эксперимент

Уравнения движения (2.9) в стандартной форме можно проинтегрировать численным методом. Для этого нужно задать начальные условия, метод интегрирования и метод проверки точности полученного решения.

Начальные условия необходимо задать для семейства динамических систем, которые зависят от жесткости k пружины BC (при $k \to \infty$). Начальный вектор скорости подбирается так, что он касается конфигурационного пространства *сингулярного маятника* для заданных параметров связи f_3. В этом случае по теореме 1 движение от начального положения (u_0, θ_0) до малой окрестности особой точки $(u, \theta) = (0, 0)$ должно совпадать с обычным движением по гладкой кривой. Для всех значений жесткости k пружины BC начальные данные на время $t_0 = 0$ секунд были фиксированы:

$$u(t_0) = u_0; \quad \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0 = \theta_1(u_0); \quad \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 = \theta_1'(u_0)\dot{u}_0. \tag{3.1}$$

Для интегрирования уравнений движения (2.9) применяется метод Рунге — Кутты порядка 4(5). Абсолютная и относительные погрешности ошибок задаются как 10^{-8}. Механическая энергия H равна сумме кинетической энергии T (2.5) и потенциальной энергии U (2.6):

$$H = T + U \tag{3.2}$$

и должна сохраняться с достаточной точностью вдоль траектории при численном интегрировании. “Точность” решения можно оценивать как максимальное отклонение механической энергии системы от начального значения при $t = 0$. Это отклонение на интервале моделирования $[t_0, t_1]$ описывается относительной безразмерной величиной

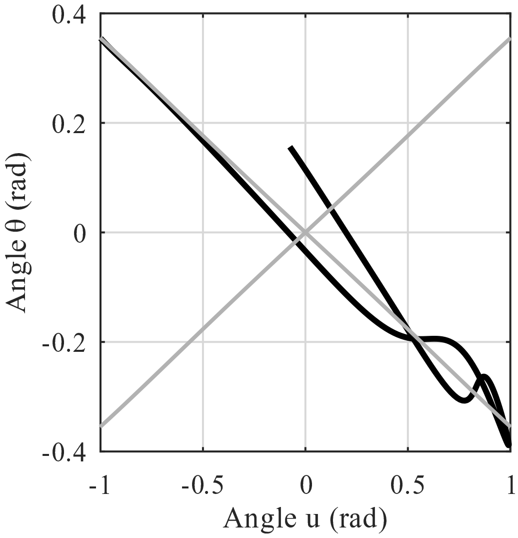
$$\Delta H_{\max} = \frac{\max_{t\in[t_0,t_1]}(|H(t) - H(t_0)|)}{|H(t_0)|}.$$

Чем меньше величина $\Delta H_{\max}$, тем точнее находится механическая энергия. Также для определения времени расчета находится общее количество промежуточных точек N при интегрировании по методу Рунге — Кутты.

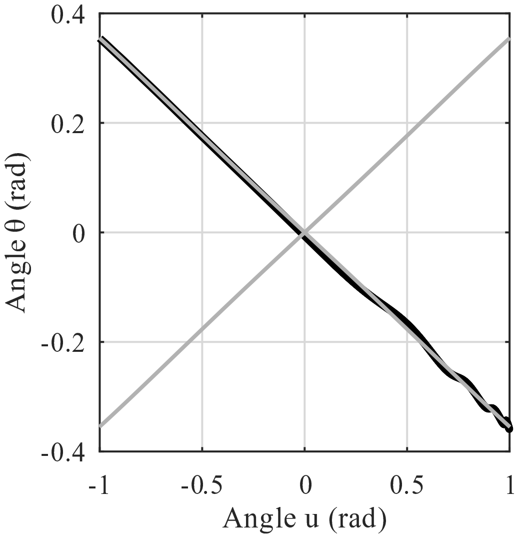
Исследовались два типа конфигурационного пространства сингулярного маятника: объединение двух пересекающихся кривых на плоскости и объединение двух касающихся кривых на плоскости (касание 1-го порядка). Интерес представляет движение сингулярного маятника с пружиной после прохождения окрестности особой точки $(u, \theta) = (0, 0)$. Рассматривался маятник с длинами стержней $l_1 = 2\,m$, $l_2 = 1\,m$. В численном моделировании менялись полуоси a и b эллипса (2.2). Параметр $c = l_1 - l_2 - a$ определяет расположение эллипса, при котором в конфигурационном пространстве возникает особая точка при $k = \infty$ в “сложенном” положении стержней маятника. Также можно задавать разные значения для u_0 и $\dot{u}_0$. Для движения только под действием силы тяжести задается $\dot{u}_0 = 0$. Значения функций

$$d'(u); \quad d''(u); \quad \theta_1'(u); \quad \theta_1''(u) \tag{3.3}$$

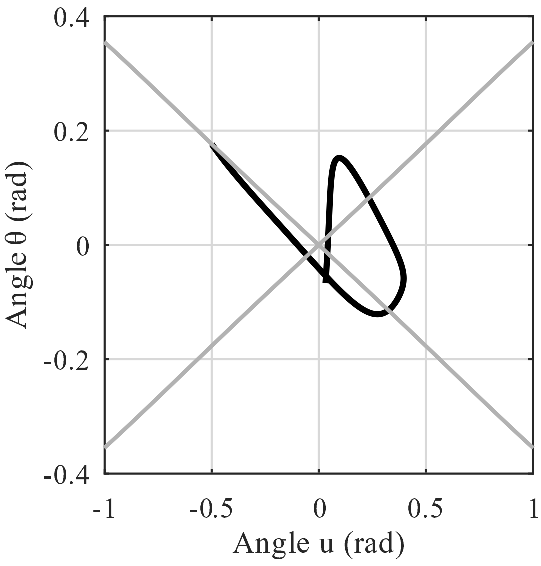
вычисляются аналитически. В этом случае значение механической энергии меньше отличается от начального значения. Для символьного дифференцирования в (3.3) применимы системы компьютерной алгебры, такие как Maxima. Полученные аналитические выражения можно применить для численного решения уравнений движения в GNU Octave/Matlab. Вычисления



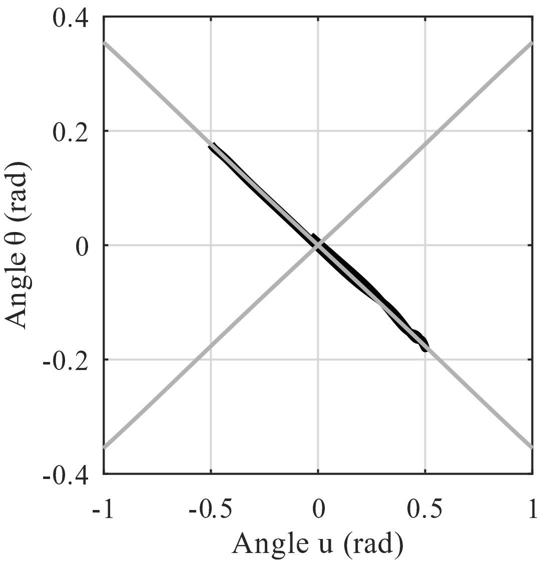
(a) $a = 4.0$; $b = 2.3$; $u_0 = -1.0$; $k = 10^3$;
$\Delta H_{\max} = 2.7 \cdot 10^{-9}$; $N = 873$.



(b) $a = 4.0$; $b = 2.3$; $u_0 = -1.0$; $k = 10^4$;
$\Delta H_{\max} = 3.0 \cdot 10^{-9}$; $N = 2165$.

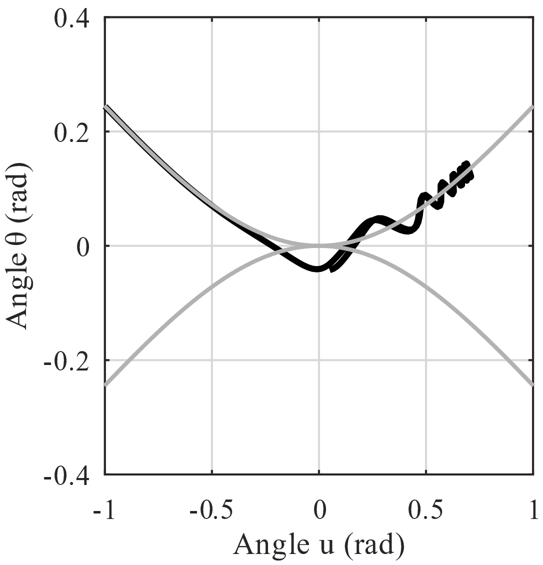


(c) $a = 4.0$; $b = 2.3$; $u_0 = -0.5$; $k = 10^3$;
$\Delta H_{\max} = 4.6 \cdot 10^{-10}$; $N = 521$.

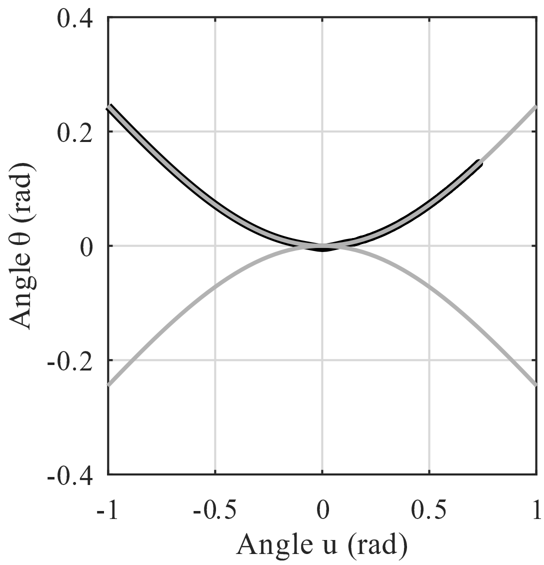


(d) $a = 4.0$; $b = 2.3$; $u_0 = -0.5$; $k = 10^4$;
$\Delta H_{\max} = 3.8 \cdot 10^{-10}$; $N = 957$.

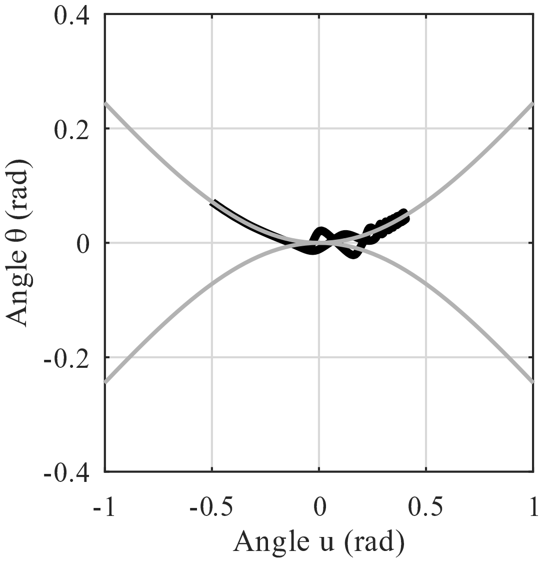
Рис. 2. Типичное движение сингулярного маятника с пружиной вблизи конфигурационного пространства с особенностью типа пересечения. Конфигурационное пространство сингулярного маятника показано серым цветом. Длины стержней двойного маятника: $l_1 = 2\,m$, $l_2 = 1\,m$. Параметры эллипса: $a = 4.0\,m$, $b = 2.3\,m$.



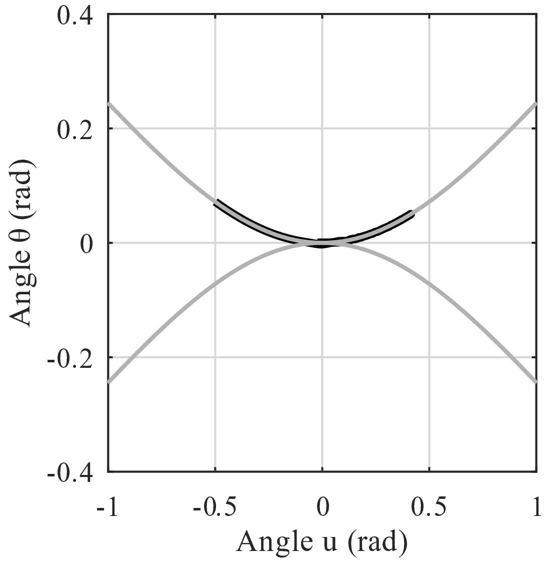
(a) $a = 4.0$; $b = 2.0$; $u_0 = -1.0$; $k = 10^5$;
$\Delta H_{\max} = 1.76 \cdot 10^{-8}$; $N = 4641$.



(b) $a = 4.0$; $b = 2.0$; $u_0 = -1.0$; $k = 10^8$;
$\Delta H_{\max} = 1.66 \cdot 10^{-7}$; $N = 115181$.

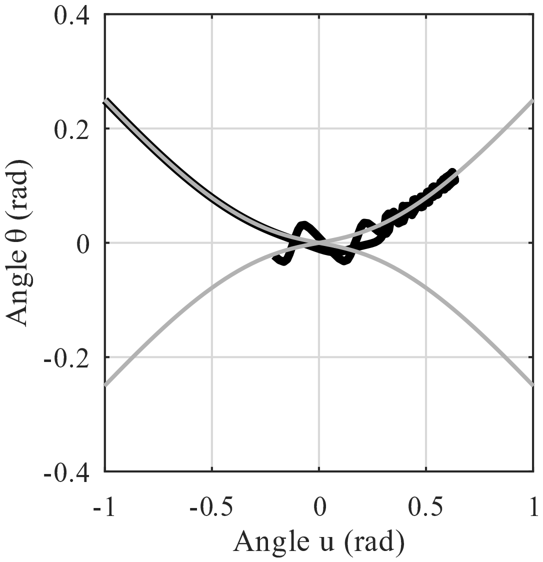


(c) $a = 4.0$; $b = 2.0$; $u_0 = -0.5$; $k = 10^6$;
$\Delta H_{\max} = 4.86 \cdot 10^{-9}$; $N = 4305$.

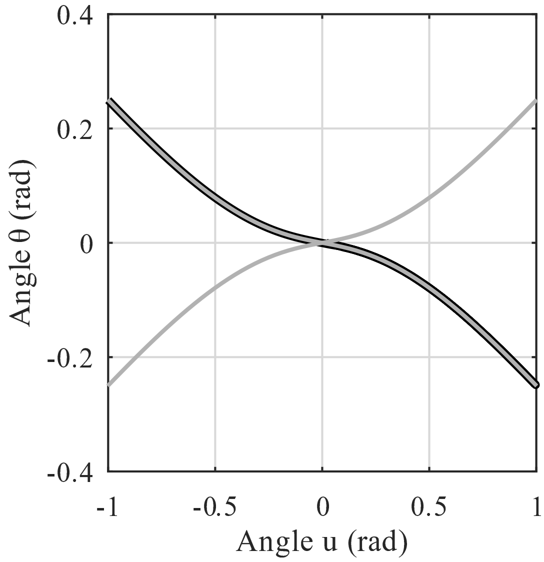


(d) $a = 4.0$; $b = 2.0$; $u_0 = -0.5$; $k = 10^8$;
$\Delta H_{\max} = 2.75 \cdot 10^{-8}$; $N = 33781$.

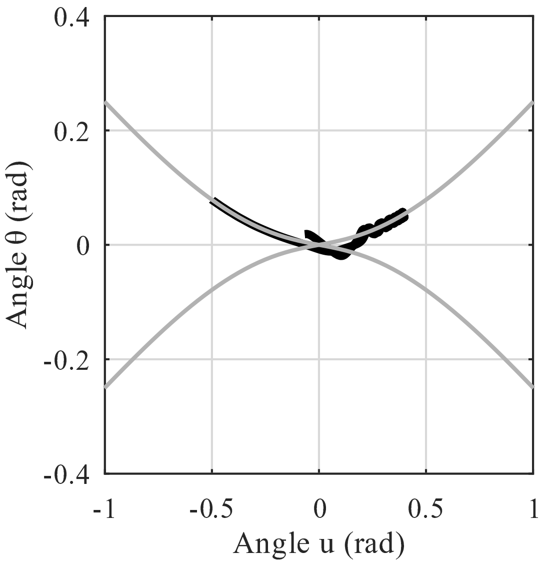
Рис. 3. Типичное движение сингулярного маятника с пружиной вблизи конфигурационного пространства с особенностью типа касания 1-го порядка. Конфигурационное пространство сингулярного маятника показано серым цветом. Длины стержней двойного маятника: $l_1 = 2\,m$, $l_2 = 1\,m$. Параметры эллипса: $a = 4\,m$; $b = 2\,m$.



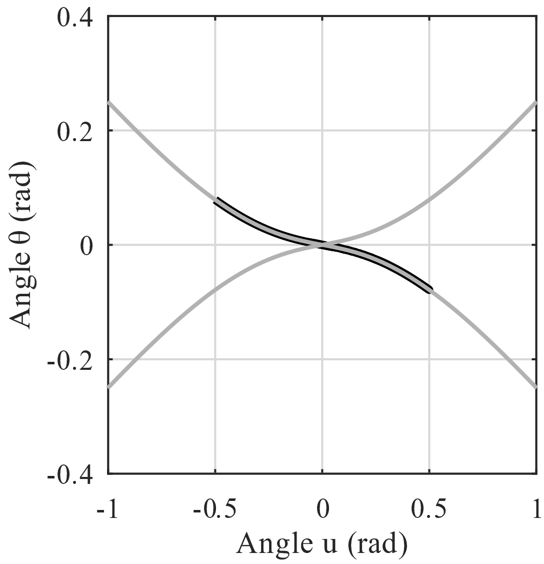
(b) $a = 4.0$; $b = 2.01$; $u_0 = -1.0$; $k = 10^6$;
$\Delta H_{\max} = 1.04 \cdot 10^{-7}$; $N = 12193$.



(b) $a = 4.0$; $b = 2.01$; $u_0 = -1.0$; $k = 10^8$;
$\Delta H_{\max} = 1.22 \cdot 10^{-7}$; $N = 103049$.



(c) $a = 4.0$; $b = 2.0$; $u_0 = -0.5$; $k = 10^6$;
$\Delta H_{\max} = 5.88 \cdot 10^{-9}$; $N = 4769$.



(d) $a = 4.0$; $b = 2.0$; $u_0 = -0.5$; $k = 10^8$;
$\Delta H_{\max} = 8.51 \cdot 10^{-9}$; $N = 30325$.

Рис. 4. Движение сингулярного маятника с пружиной вблизи конфигурационного пространства типа пересечения. Особенность конфигурационного пространства “ближе” к типу касания, чем к типу пересечения. Конфигурационное пространство сингулярного маятника показано серым цветом. Длины стержней двойного маятника: $l_1 = 2\,m$, $l_2 = 1\,m$. Параметры эллипса: $a = 4\,m$; $b = 2.01\,m$. При большом коэффициенте жесткости k пружины BC траектория системы переходит в полуплоскость $\theta < 0$ вблизи окрестности особой точки $(0, 0)$.

велись по формулам (2.3), (2.9), (2.10), (3.1) и (3.2). Графики траектории движения в координатах (u, θ) показаны на рис. 2–4. Для моделирования брался интервал времени в 2 сек. от начала отсчета. По результатам численного моделирования сделано несколько качественных наблюдений.

Н а б л ю д е н и е 1. Траектория движения сингулярного маятника с пружиной при возрастании жесткости пружины k находится в малой окрестности гладкой кривой в конфигурационном пространстве. Этот тип движения соответствует движению сингулярного маятника: для особенности типа пересечения гладкое движение маятника является симметричным относительно вертикальной оси, а для особенности типа касания 1-го порядка гладкое движение является асимметричным. В первом случае угол θ переходит через значение 0 в отрицательную полуплоскость, во втором — угол θ остается по одну сторону полуплоскости с координатами (u, θ).

Н а б л ю д е н и е 2. Для особенности типа касания необходимо в несколько раз больше промежуточных шагов интегрирования для достижения достаточной точности траектории (отклонение от графика конфигурационного пространства $\theta = \pm\theta_1(u)$ должно быть малым).

Заключение

В данной работе сформулирован общий метод, который можно использовать для анализа механических систем с особенностями конфигурационного пространства X. Классические уравнения Лагранжа не применимы в окрестности особых точек, где нет обобщенны координат. Метод обобщенной динамики заключается в том, что одна или несколько голономных связей заменяются на дополнительный потенциал NW (как штрафную функцию). Функция W должна быть равна нулю на конфигурационном пространстве X и должна быть строго положительной вне множества X. Показано, что для фиксированных начальных координат и скоростей (на одном из гладких подмногообразий в X) траектории движения системы с упругим потенциалом должны равномерно стремиться к множеству X на каждом конечном интервале времени. При $N \to \infty$ получается набор траекторий движения $\mathbf{x}_N$. Движение до особой точки для системы с упругим потенциалом сходится к движению системы со связями до особых точек. Дальнейшее предельное движение системы с упругими связями считается неявно заданной траекторией движения системы с особенностями конфигурационного пространства. Для построенного примера сингулярного маятника с пружиной предельные траектории сходились к траекториям движения сингулярного маятника. При этом “предельное” движение соответствовало движению по гладким кривым в конфигурационном пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пенлеве П.** Лекции о трении / пер. с франц. Москва: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. **Mukharlyamov R.G., Deressa C.T.** Dynamic equations of controlled Mechanical system with redundant holonomic constraints // Vestn. Kazan. Tekhnol. Univ. 2014. Vol. 17, no. 11. P. 236–242.
3. **Wojtyra M., Frączek J.** Solvability of reactions in rigid multibody systems with redundant nonholonomic constraints // Multibody Syst Dyn. 2013. Vol. 30. P. 153–171. doi: 10.1007/s11044-013-9352-0
4. **Flores P., Pereira R., Machado M., Seabra E.** Investigation on the Baumgarte stabilization method for dynamic analysis of constrained multibody systems // Proc. 2nd Eur. Conf. on Mechanism Science (EUCOMES 08), Cassino, Italy, Sept. 17–20, 2008 (Springer-Verlag, Dordrecht, 2009). P. 305–312. doi: 10.1007/978-1-4020-8915-2_37
5. **Журавлёв В.Ф.** Понятие связи в аналитической механике // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 853–860.
6. **Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.** Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

7. **Rubin H., Ungar P.** Motion under a strong constraining force // Communications on pure and applied mathematics. 1957. Vol. 10. P. 65–87. doi: 10.1002/CPA.3160100103
8. **Козлов В.В., Нейштадт А.И.** О реализации голономных связей // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, № 5. С. 858–861.
9. **Takens F.** Motion under influence of a strong constraining force // Global theory of Dynamics Systems. Berlin: Springer-Verlag. 1980. P. 425–445. doi: 10.1007/BFb0087006
10. **Карапетян А.В.** О реализации неголономных связей и устойчивость кельтских камней // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, № 1. С. 42–51.
11. **Зегжда С.А., Солтаханов Ш.С., Юшков М.П.** Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. Москва: Физматлит, 2005. 272 с. ISBN 978-5-9221-0576-7.
12. **Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П., Товстик П.Е., Солтаханов Ш.Х., Филиппов С.Б., Петрова В.И.,** Теоретическая и прикладная механика. В 2 т. Том I: Общие вопросы теоретической механики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2022. 560 с. ISBN 978-5-288-06213-1 (общий). ISBN 978-5-288-06214-8 (1-й том).
13. **Журавлёв В.Ф.** Основы теоретической механики. Москва: Физматлит, 2001. 320 с. ISBN 5-94052-041-3 .
14. **Бурьян С.Н.** Особенности движения маятника с сингулярным конфигурационным пространством // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62), № 4. С. 541–551. doi: 10.21638/11701/spbu01.2017.402
15. **Burian S.N., Kalnitsky V.S.** On the motion of one-dimensional double pendulum // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 1959. Art. No. 030004. doi: 10.1063/1.5034584
16. **Бурьян С.Н.** Силы реакции сингулярного маятника // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67), № 2. С. 278–293. doi: 10.21638/spbu01.2022.209

Поступила 13.01.2024
После доработки 4.05.2024
Принята к публикации 6.05.2024

Бурьян Сергей Николаевич
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем
г. Санкт-Петербург
e-mail: burianserg@yandex.ru

REFERENCES

1. Painlevé P. Cours de la faculté des sciences de Paris, cours complémentaire de mécanique rationnelle. 1895. 141 p. Translated to Russian under the title: Penleve P. Lektsii o trenii [Lectures on friction], Moscow, Gostekhizdat, 1954. 316 p.
2. Mukharlyamov R.G., Deressa C.T. Dynamic equations of controlled mechanical system with redundant holonomic constraints. *Vestn. Kazan. Tekhnol. Univ.*, 2014, vol. 17, no. 11. pp. 236–242.
3. Wojtyra M., Frączek J. Solvability of reactions in rigid multibody systems with redundant nonholonomic constraints. *Multibody Syst Dyn.*, 2013, vol. 30, pp. 153–171. doi: 10.1007/s11044-013-9352-0
4. Flores P., Pereira R., Machado M., Seabra E. Investigation on the Baumgarte stabilization method for dynamic analysis of constrained multibody systems. In: *Proc. 2nd Eur. Conf. on Mechanism Science (EUCOMES 08), Cassino, Italy, Sept. 17–20, 2008* (Springer-Verlag, Dordrecht, 2009), pp. 305–312. doi: 10.1007/978-1-4020-8915-2_37
5. Zhuravlev V.F. Notion of constraint in analytical mechanics. *Rus. J. Nonlin. Dyn*, 2012, vol. 8. no. 4, pp. 853–860 (in Russian).
6. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neistadt A.I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. Springer Berlin, Heidelberg, 2010. 505 p. ISBN: 978-3-540-28246-4
7. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force. *Communications on pure and applied mathematics*, 1957, vol. 10, pp. 65–87. doi: 10.1002/CPA.3160100103
8. Kozlov V.V., Neistadt A.I. On the implementation of holonomic connections. *Applied mathematics and mechanics*, 1990, vol. 54, no. 5, pp. 858–861 (in Russian).

9. Takens F. Motion under influence of a strong constraining force. *Global theory of Dynamics Systems*, Berlin, Springer-Verlag, 1980, pp. 425–445. doi: 10.1007/BFb0087006
10. Karapetian A.V. On realizing nonholonomic constraints by viscous friction forces and celtic stones stability. *J. Appl. Math. Mech.*, 1981, vol. 45, no. 1. pp 30–36. doi: 10.1016/0021-8928(81)90006-X
11. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh.S., Yushkov M.P. *Mechanics of non-holonomic systems. A new class of control systems.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, 332 p. ISBN 978-3-642-09938-0 .
12. Polyakhov N.N, Yushkov M.P., Zegzhda S.A., Tovstik P.E. *Rational Appl. Mech.*, Volume 1. Complete general course for students of engineering. Cham, Springer, 2021, 520 p. ISBN 978-3-030-64063-7 .
13. Zhuravlev V.F. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki* [Fundamentals of theoretical mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 320 p. (in Russian). ISBN 5-94052-041-3 .
14. Burian S.N. Behaviour of the pendulum with a singular configuration space. *Vestn. S.-Peterb. Univ., Ser. 1: Mat., Mekh., Astron.* , 2017, vol. 4 (62), no 4, pp. 541–551 (in Russian). doi: 10.21638/11701/spbu01.2017.402
15. Burian S.N., Kalnitsky V.S. On the motion of one-dimensional double pendulum. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, art. no. 030004. doi: 10.1063/1.5034584
16. Burian S.N. Reaction forces of singular pendulum. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2022, vol. 55, pp. 192–202. doi: 10.1134/S1063454122020054

Received January 13, 2024
Revised May 4, 2024
Accepted May 6, 2024

Sergey Nikolaevich Burian, Cand. Sci (Phys.-Math.), State Research Institute of Applied Problems, St. Petersburg, 191167 Russia, e-mail: burianserg@yandex.ru .

Cite this article as: S. N. Burian. Strong constraints in the dynamics of systems with geometric singularities. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 53–67 .