

УДК 519.62

**НАБЛЮДЕНИЕ ЗА ОБЪЕКТОМ В УСЛОВИЯХ ЕГО ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ  
НАБЛЮДАТЕЛЮ В ПРОСТРАНСТВЕ  $\mathbb{R}^2$**

**В. И. Бердышев**

Предлагаются способы действия наблюдателя  $f$  при слежении за объектом  $t$ , движущимся по кратчайшей траектории  $\mathcal{T}$ , огибающей набор  $\{G_i\}$  выпуклых множеств. Объект может направить в сторону наблюдателя опасный для него быстроходный мини-объект. Способы наблюдения зависят от геометрических свойств траектории  $\mathcal{T}$ , расположения отрезков и выпуклых дуг, ее составляющих. Задача наблюдателя — отследить движение объекта на возможно большей части траектории  $\mathcal{T}$ .

Ключевые слова: навигация, оптимальная траектория, движущийся объект, наблюдатель, видеосенсор, видеоискатель.

**V. I. Berdyshev. Observation of an object opposed to the observer in the space  $\mathbb{R}^2$ .**

A course of action is proposed for an observer  $f$  tracking an object  $t$  that moves along a shortest trajectory  $\mathcal{T}$  enveloping a family  $\{G_i\}$  of convex sets. The object can send a dangerous high-speed mini-object in the direction of the observer. Observation methods depend on the geometric properties of the trajectory  $\mathcal{T}$ , i.e., on the location of the segments and convex arcs that constitute it. The aim of the observer is to track the motion of the object along the largest possible part of the trajectory  $\mathcal{T}$ .

Keywords: navigation, optimal trajectory, moving object, observer, video sensor, video finder.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-45-52

Траектория  $\mathcal{T}$  движущегося объекта  $t$  огибает набор выпуклых множеств  $G_i$  с непустой внутренностью, соединяет пару точек  $t_0, t^0$ , лежащих вне  $\cup G_i$ , и является кратчайшей в классе таких кривых.

Она состоит из дуг  $\Lambda_i$  и отрезков  $\Delta_i$  (рис. 1)

$$\Lambda_i = \widehat{\underline{t}_i, \bar{t}_i}, \quad \Delta_i = [\bar{t}_{i-1}, \underline{t}_i] \quad (i = 1, \dots, n),$$

соединяющих эти дуги. Дуги выпуклые, следовательно, гладкие почти всюду и в каждой точке имеют односторонние производные. Длина дуги обозначается через  $|\widehat{\cdot, \cdot}|$ . Выпуклая дуга называется строго выпуклой, если она не содержит прямолинейных отрезков.

Объект движется с постоянной по величине скоростью  $v_t$ . Он обладает набором неуправляемых мини-объектов  $m$ , способных двигаться прямолинейно с большой скоростью  $v_m$ ,  $|v_m| \gg |v_t|$ . Целью мини-объекта является наблюдатель  $f$ . Мини-объект движется, пока видит перед собой наблюдателя. В п. 1 наблюдатель изображается точкой, а в п. 2 — шаром  $V_\varepsilon(f)$  малого радиуса  $\varepsilon > 0$  с локатором  $f$  в центре. Скорость  $v_f$  наблюдателя ограничена константой

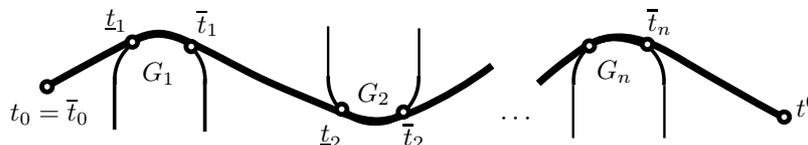


Рис. 1. Жирной линией изображена траектория  $\mathcal{T}$ .

$K > 0$ , при этом  $|v_t| < |v_f| \leq K \ll |v_m|$ . Попадание мини-объекта в открытый шар  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(f)$  влечет гибель наблюдателя. Задача наблюдателя — отследить лучом локатора движение объекта на возможно бóльшей части траектории  $\mathcal{T}$ , не приближаясь к объекту менее заданного расстояния  $E > \varepsilon$ . Будем считать, что локатор  $f$ , находясь на расстоянии  $\rho > 0$  до  $t$ , “освещает” (фотографирует) окрестность  $V_{\alpha \cdot \rho}(t)$  радиуса  $\alpha \cdot \rho$ . Далее будем использовать обозначение

$$l = l(t) = \{t + \eta \vec{v}(t) : \eta > 0\}, \quad (1)$$

где  $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow +0} \frac{t(\tau + \Delta\tau) - t(\tau)}{\Delta\tau}$  есть вектор скорости  $v_t$  объекта в точке  $t \in \mathcal{T}$ ,  $\tau$  — время.

1. Рассмотрим случай, когда объект, мини-объект и наблюдатель изображаются точками.

Достаточно исследовать первую пару:  $[\bar{t}_0, \underline{t}_1] \cup \widehat{\underline{t}_1, \bar{t}_1}$  (рис. 2). Пусть  $[t^*, \bar{t}_0] \subset \mathcal{T}$  — максимальный прямолинейный отрезок траектории  $\mathcal{T}$ , содержащий точку  $\bar{t}_0$ .

Предполагая, что точка  $t^*$  является *гладкой точкой* траектории  $\mathcal{T}$ , на касательном в точке  $t^*$  луче  $l = l(t^*)$  возьмем точку  $f_2 = t^* + \varphi \vec{v}(t^*)$  при малом  $\varphi > 0$  и точку  $t_2 \in \mathcal{T}$ , ближайшую к точке  $f_2$ . Тогда  $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \|f_2 - t_2\| = o(\|f_2 - t^*\|)$ . Процесс наблюдения является пошаговым. В начальный момент времени объект, видя наблюдателя в точке  $f_2$ , запускает мини-объект в его сторону и сам вслед стартует по  $\mathcal{T}$  из позиции  $\bar{t}_0$  со скоростью  $v_t$ . Наблюдатель в позиции  $f_2$  ждет прибытия мини-объекта в точку  $t^*$  и по прибытии сразу начинает движение на скорости  $K$  с позиции  $f_2$  в сторону точки  $t_2$ . Поскольку луч  $l$  является касательным к  $\mathcal{T}$  в точке  $t^*$ , наблюдатель выходит из поля видимости мини-объекта и последний прекращает преследование. Если  $t^*$  — угловая точка, то наблюдатель начинает движение с позиции  $f_2$  в сторону точки  $t_2$  по прибытию мини-объекта в правую малую окрестность точки  $t^*$ . Итак, наблюдатель имел возможность следить за объектом отрезок времени  $\tau_0 = \|\bar{t}_0 - t^*\|/|v_m|$ , по истечении которого объект оказался в позиции  $\tilde{t}_1$  такой, что

$$\|\tilde{t}_1 - \bar{t}_0\| = \|\bar{t}_0 - t^*\| \frac{|v_t|}{|v_m|}.$$

Завершая первый шаг, наблюдатель возвращается на максимальной скорости  $K$  в позицию  $f_2$ , потратив на визит в точку  $t_2$  и обратно отрезок времени  $\tau_1 = 2\delta/K$ , за которое объект

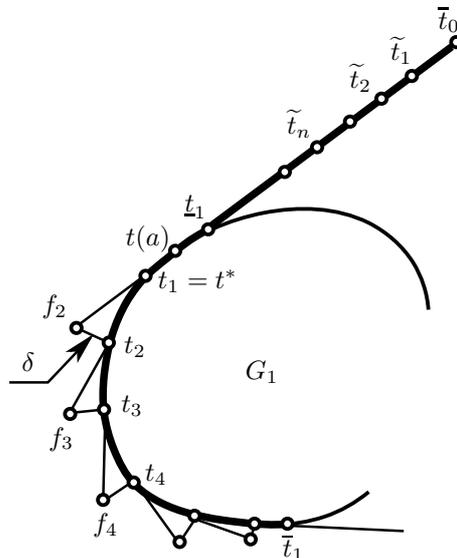


Рис. 2. Жирная линия — траектория  $\mathcal{T}$ , тонкая линия — граница множества  $G_1$ .

преодолевают расстояние до точки  $\tilde{t}_2$  такой, что

$$\|\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1\| = 2\delta \frac{|v_t|}{K}.$$

Участок  $[\bar{t}_0, \tilde{t}_1]$  объект прошел под наблюдением за время  $\tau_0$ , участок  $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$  — за время  $\tau_1$ , где

$$\tau_0 = \frac{\|\bar{t}_0 - t^*\|}{|v_m|}, \quad \tau_1 = \frac{2\delta}{K}.$$

Вернувшись в позицию  $f_2$ , наблюдатель обнаруживает объект в позиции  $t_2$  и начинает выполнять второй шаг, и т. д.

**Лемма 1.** Предлагаемый способ наблюдения за движущимся по отрезку  $[t^*, \bar{t}_0]$  объектом  $t$  позволяет построить последовательность пар отрезков

$$\{[\tilde{t}_{2k}, \tilde{t}_{2k+1}] \cup [\tilde{t}_{2k+1}, \tilde{t}_{2(k+1)}], k = 0, \dots\} \subset [t^*, \bar{t}_0], \quad \text{где } \tilde{t}_0 = \bar{t}_0. \quad (2)$$

Движение объекта по первому отрезку пары контролируется наблюдателем, а движение по второму отрезку происходит вне наблюдения. При этом

$$\|\tilde{t}_{2k+1} - \tilde{t}_{2k}\| = \|\tilde{t}_{2k} - t^*\| \frac{|v_t|}{|v_m|}, \quad \|\tilde{t}_{2k} - \tilde{t}_{2k-1}\| = 2\delta \frac{|v_t|}{K}, \quad (3)$$

где  $\delta > 0$  — сколь угодно малое число.

Изложенный способ наблюдения будем обозначать цифрой I.

Детальное расположение точек  $\tilde{t}_k$  на участке  $[\bar{t}_0, t_2]$  траектории  $\mathcal{T}$  изображено на рис. 3. Будем использовать обозначения

$$a = 2\delta \frac{|v_t|}{K}, \quad b = \frac{|v_t|}{|v_m|}, \quad (4)$$

$t(a) = \tilde{t}_{2k+1}$  — левый конец ближайшего к  $t^*$  контролируемого отрезка. Величина  $b$  постоянна, величину  $a$  можно взять сколь угодно малой постоянной, или убывающей по  $k$ :  $a_k = 2\delta_k (|v_t|/|v_f|)$ .

Легко убедиться, что функция  $\tilde{t}(a)$  непрерывна и

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{t}(a) = t^*.$$

В самом деле, обозначим отрезок  $[t^*, \bar{t}_0]$  через  $[0, 1]$ , удалим из него неконтролируемые отрезки, контролируемые сдвинем в сторону точки  $\bar{t}_0$ , тогда точки  $t_0 = 1, t_1 = 1 - b, \dots, t_n$ , разделяющие контролируемые отрезки, будут иметь координаты  $(1 - b)^n$ , образуя сходящуюся к нулю последовательность.

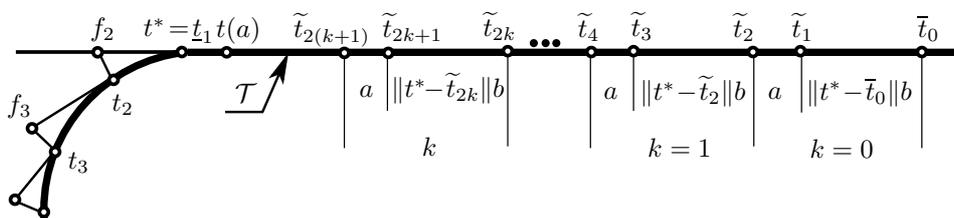


Рис. 3. Жирной линией изображена траектория  $\mathcal{T}$ .

Способ слежения за объектом, двигающимся далее по дуге  $\widehat{t^*, \bar{t}_1}$  зависит от ее геометрических свойств. Пусть эта дуга строго выпукла (т. е. не содержит прямолинейных отрезков) и выполняется неравенство  $K > 2|v_t|$ . Ввиду плотности на дуге множества гладких точек и непрерывности отображения, сопоставляющего точке ближайшую точку на дуге, точку  $f_2 \in \ell(t_1)$  целесообразно расположить вблизи к  $t_1$  (пусть  $\|f_2 - t_1\| \leq \eta$ ,  $\eta > 0$ ) так, что ближайшая к ней точка  $t_2 \in \mathcal{T}$  была гладкой. Следующую пару точек  $f_3, t_3$  выбираем так, что  $f_3 \in \ell(t_2)$ ,  $t_3$  является точкой гладкости траектории  $\mathcal{T}$ ,  $|\widehat{t_3, t_2}| < |\widehat{t_2, t_1}|$ . Учитывая это и неравенство  $K > 2|v_t|$ , нетрудно установить, что наблюдатель  $f$  преодолет путь  $[f_2, t_2] \cup [t_2, f_3]$  раньше, чем объект пройдет участок  $\widehat{t(a), t_2}$ . В момент прибытия объекта в позицию  $t_2$ , наблюдатель с позиции  $f_3$  “освещает” (фотографирует) часть траектории  $\mathcal{T} \cap V_{\alpha, \rho}(f_2)$ , где  $\rho = \|f_3 - t_2\|$ , и смещается со скоростью  $K$  в точку  $t_3 \in \mathcal{T}$ , ближайшую к точке  $f_3$  вне поля видимости мини-объекта, выпущенного с позиции  $t_2$ , поскольку  $\ell(t_2)$  касается дуги в точке  $t_2$ . Начиная следующий шаг, выберем точку  $f_4$  на луче  $\ell(t_3)$  достаточно близко к  $t_3$  так, что ближайшая к ней точка  $t_4 \in \mathcal{T}$  является точкой гладкости и  $|\widehat{t_3, t_4}| < |\widehat{t_3, t_2}|$ . Ввиду гладкости точки  $t_3$  имеем  $\|f_4 - t_4\| = o(|\widehat{t_3, t_4}|)$  и т. д. (см. рис. 2, 3). Поскольку  $f_{k+1} \in \{t_k + \eta \vec{v}(t_k), \eta > 0\}$  и односторонняя производная  $\vec{v}(t_k)$  существует, условие гладкости траектории  $\mathcal{T}$  в точках  $t_k$  необязательно (см. рис. 2, 3).

**Лемма 2.** Предлагаемый способ наблюдения за объектом, движущимся по строго выпуклой дуге  $\Lambda$ , позволяет при малом  $\eta > 0$ ,  $\|t_1 - f_2\| \leq \eta$ , строить последовательность с малым шагом пар точек  $\{t_k \in \Lambda, f_{k+1} \in \ell(t_k)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , таких, что

$$|\widehat{t_{k+1}, t_{k+2}}| < |\widehat{t_k, t_{k+1}}| \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

- $t_k$  – ближайшая для  $f_k$  точка из  $\Lambda$ ;
- наблюдатель занимает позицию  $f_{k+1}$  ранее, чем объект позицию  $t_k$ ;
- наблюдатель  $f_{k+1}$  освещает объект  $t = t_k$  и уходит к точке  $t_{k+1}$ , избегая встречи с мини-объектом, стартовавшим с позиции  $t_k$ .

Предложенный способ наблюдения будем обозначать цифрой II.

III. Для выпуклой, может быть нестрогой выпуклой, гладкой дуги  $\Lambda$  при ограничении сверху на ее кривизну возможно слежение за двигающимся по  $\Lambda$  объектом  $t$  с позиции  $f(t) = t + \eta \vec{v}(t)$  с фиксированным  $\eta > 0$  (рис. 4), если скорость его движения не превосходит  $K$ . При этом позиция  $f(t)$  не доступна для мини-объекта, отправленного объектом в момент обнаружения наблюдателя  $f(t)$  в его направлении.

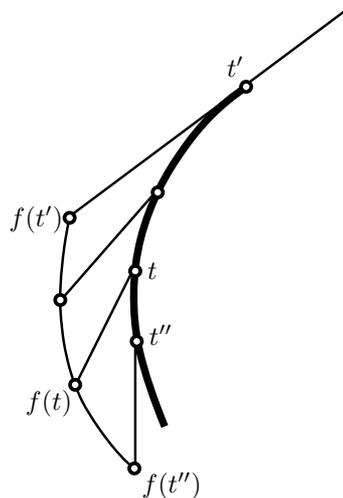


Рис. 4. Жирной линией изображена часть траектории  $\mathcal{T}$ , тонкой — часть траектории наблюдателя.

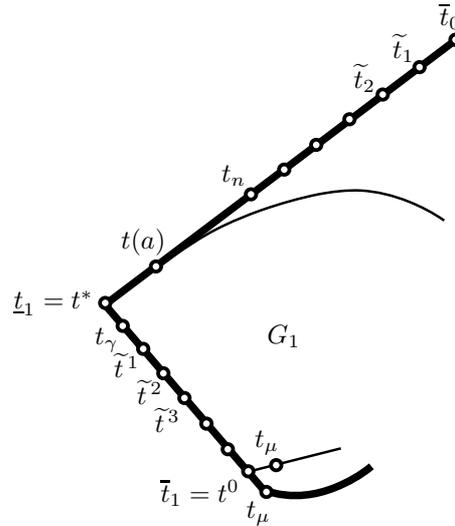


Рис. 5. Жирной линией изображена траектория  $\mathcal{T}$ , тонкой — граница множества  $G_1$ .

Предположим, что дуга  $\widehat{t^*, \bar{t}_1}$  содержит прямолинейные отрезки. Случай единственного отрезка исследуется аналогично случаю, когда этот отрезок является начальным на траектории  $\mathcal{T}$ . Случай присутствия в дуге  $\widehat{t^*, \bar{t}_1}$  цепочки из двух или более прямолинейных отрезков исследуется подобно следующему случаю.

Пусть  $t^*$  — угловая точка траектории  $\mathcal{T}$  и продолжение  $\widehat{t^*, t^0} \subset \widehat{t^*, \bar{t}_1}$  траектории  $\mathcal{T}$  является прямолинейным отрезком. Для слежения за объектом,двигающимся по отрезку  $[\bar{t}_0, t^*]$ , используется алгоритм I: наблюдение ведется с позиции  $f = t^*$  и на каждом шаге, при заходе мини-объекта в малую окрестность точки  $t^*$ , наблюдатель прячется от него, сдвигаясь из точки  $t^*$  по отрезку  $[t^*, t^0]$  в сторону точки  $t^0$  на малое расстояние  $\gamma$  (рис. 5). На последнем шаге объект занимает позицию  $t(a)$ , наблюдатель — позицию  $t^*$ . Для слежения за объектом на отрезке  $[t^*, t^0]$  наблюдатель на скорости  $K$  перемещается в точку  $t^0$ , потратив время  $\tau = \|t^* - t^0\|/K$ , а объект вне наблюдения приходит в позицию  $\tilde{t}^1 \subset [t^*, t^0]$ , для которой  $\tau = (\|t(a) - t^*\| + \|t^* - \tilde{t}^1\|)/|v_t|$ . Далее снова применяется алгоритм I с исходной позицией наблюдателя  $f = t^0$  и возможностью спастись от мини-объекта на участке  $\widehat{t^0, t_\mu}$  траектории (см. позицию  $t_\mu$ , рис. 5). В результате строятся пары отрезков  $[\tilde{t}^{2k}, \tilde{t}^{2k+1}]$ ,  $[\tilde{t}^{2k+1}, \tilde{t}^{2(k+1)}]$ , в которых первый отрезок контролируемый, второй неконтролируемый.

Случай движения объекта по цепочке прямолинейных отрезков из  $\mathcal{T}$  рассматривается аналогично.

Итак, при движении объекта  $t$  по траектории  $[\bar{t}_0, \underline{t}_1] \cup \widehat{\underline{t}_1, \bar{t}_1}$  наблюдатель для слежения использует алгоритм

- I, если объект движется по прямолинейным отрезкам,
- II, если объект движется по строго выпуклым дугам.

Объект движется по  $\mathcal{T}$  без остановок с постоянной скоростью  $|v_t|$  и выпускает мини-объект  $m$  в момент обнаружения наблюдателя; мини-объект движется по прямой с высокой постоянной скоростью, пока видит перед собой наблюдателя. Наблюдатель отслеживает объект, находясь в стационарном положении. Его движение вызвано либо необходимостью “спрятаться” за  $G$ , уклоняясь от встречи с мини-объектом, либо изменить свою позицию ввиду перехода объекта на другую часть траектории  $\mathcal{T}$ ; при этом предполагается, что  $K \geq 2|v_t|$ .

**Теорема 1.** При решении задачи слежения за объектом,двигающимся по объединению  $[\bar{t}_0, \underline{t}_1] \cup \widehat{\underline{t}_1, \bar{t}_1}$  отрезка и строго выпуклой дуги

– способ I позволяет разбить отрезок  $[\bar{t}_0, \underline{t}_1]$  на последовательность пар полуинтервалов

$$\{(\tilde{t}_{2k}, \tilde{t}_{2k+1}] \cup (\tilde{t}_{2k+1}, \tilde{t}_{2(k+1)})\}, k = 0, \dots \} \subset [\bar{t}_0, \underline{t}_1], \quad \tilde{t}_0 = \bar{t}_0, \quad (2)$$

так что движение объекта по первому полуинтервалу каждой пары контролируется наблюдателем, движение по второму полуинтервалу происходит вне наблюдения, длины полуинтервалов указаны в (3), (4);

– способ II наблюдения за объектом, движущемуся по строго выпуклой дуге  $\Lambda = \widehat{\underline{t}_1, \bar{t}_1}$ , для любого  $\delta > 0$  позволяет построить последовательности точек  $t_k \in \Lambda$ ,  $f_{k+1} \in l(t_k)$ ,  $k = 1, 2$  (см. (1)), таких что точка  $t_k$  является ближайшей для  $f_k$  среди точек  $t \in \Lambda$  и выполняется неравенство (5)

$$|\widehat{t_{k+1}, t_{k+2}}| \leq |\widehat{t_k, t_{k+1}}| < \delta;$$

– в момент прибытия объекта  $t$  в точку  $t_k$  наблюдатель  $f_{k+1}$  освещает точку  $t_k$  и перемещается в точку  $t_{k+1}$ , избегая встречи с мини-объектом, стартовавшим с позиции  $t_k$ ;

– способ III позволяет наблюдателю  $f = f(t) = t + \eta \vec{v}(t)$  ( $\eta > 0$ ) непрерывно и безопасно следить за движущимся по выпуклой гладкой дуге  $\Lambda \subset \widehat{\underline{t}_1, \bar{t}_1}$  объектом (рис. 4), если скорость движения точки  $f(t)$  не превосходит  $K$ .

**2.** Теперь предположим, что наблюдатель является шаром  $V_\varepsilon(f)$  радиуса  $\varepsilon$  с центром  $f$ . Выберем точку  $f_2^0$  так, что шар  $V_\varepsilon(f_1^0)$  расположен между лучом  $l = \{t_0 + \lambda(\underline{t}_1 - t_0), \lambda > 0\}$  и дугой  $\Lambda = \widehat{\underline{t}_1, \bar{t}_1}$ , точки касания шара с лучом  $l$  и дугой будем обозначать через  $f_2$  и  $t_2$  соответственно. Точка  $t_2$  является ближайшей для  $f_2^0$  точкой из  $\Lambda$ . Отметим, что здесь вопрос гладкости точки  $t_1$  не важен. Пусть

$$\|\underline{t}_1 - \bar{t}_0\| \geq \frac{\varepsilon}{K} |v_m|, \quad (6)$$

и точка  $g \in [t_0, t_1]$  такова, что

$$\|\underline{t}_1 - g\| = \frac{\varepsilon}{K} |v_m|. \quad (7)$$

Для перехода из  $f_2$  в  $f_2^0$  наблюдателю требуется время  $\varepsilon/K$ . За это время мини-объект преодолеет расстояние, равное  $(\varepsilon/K)v_m$  (7). В момент  $\tau = 0$  объект  $t$  и мини-объект  $m$  стартуют из точки  $\bar{t}_0$  по лучу  $l$ , а наблюдатель  $f$  следит с позиции  $f_2$  за объектом  $t$ . Мини-объект, находясь на  $[\bar{t}_0, \underline{t}_1)$ , видит фрагмент шара  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(f)$ , когда  $f \in [f_2, f_2^0)$ . В момент  $\tau_g$  прибытия мини-объекта  $m$  в точку  $g$  наблюдатель начинает движение со скоростью  $K$  из точки  $f_2$  в точку  $f_2^0$ , а мини-объект движется к  $\underline{t}_1$ . Одновременно наблюдатель занимает позицию  $V_\varepsilon(f_2^0)$ , а мини-объект — позицию  $\underline{t}_1$ , из которой шар  $\overset{\circ}{V}(f_2^0)$  не виден, и мини-объект прекращает преследование. Наблюдатель следил за  $t$  с позиции  $f_2$ , пока  $m$  двигался от  $\bar{t}_0$  до точки  $g$ , потратив время  $\|\bar{t}_0 - g\|(1/|v_m|)$ . Если  $t^*$  — угловая точка траектории  $\mathcal{T}$ , то наблюдатель начинает движение из точки  $f_2$  в точку  $f_2^0$ , когда мини-объект приходит в правую малую окрестность точки  $g$  (см. рис. 6). Итак, наблюдателю удалось отследить движение объекта на участке траектории от  $\bar{t}_0$  длины

$$\left(\|\bar{t}_0 - \underline{t}_1\| - \varepsilon \frac{|v_m|}{K}\right) \frac{|v_t|}{|v_m|}. \quad (8)$$

Точку на отрезке  $[g, t_0]$ , отстоящую от  $\bar{t}_0$  на величину (8), следуя предыдущему пункту, обозначаем через  $\tilde{t}_1$ ,  $a = 2\varepsilon(|v_t|/K)$ ,  $b = |v_t|/|v_m|$  (см. рис. 6). Здесь также имеют место аналогии алгоритма I построения последовательности точек  $\tilde{t}_k$  и леммы 1, в формулировке которых  $t^*$  надо заменить на  $g$ . Пусть  $t(a)$  — левый конец последнего, построенного с помощью алгоритма I отрезка (рис. 6). Применение алгоритма I для контроля движения объекта по отрезку  $[t^*, t(a)]$  невозможно.

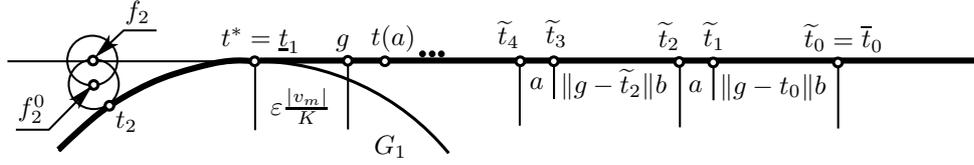


Рис. 6. Жирной линией изображена траектория  $\mathcal{T}$ , тонкой линией изображены два круга радиуса  $\varepsilon$ .

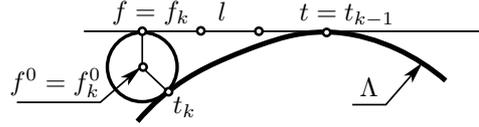


Рис. 7. Жирной линией изображен фрагмент выпуклой дуги, тонкой — круг радиуса  $\varepsilon$ .

Следует учесть, что эффективность алгоритма зависит от величины  $|v_m|$ : отрезки  $[\tilde{t}_{2k}, \tilde{t}_{2k-1}]$  свободного движения объекта могут быть существенно больше отрезков  $[t_{2k+1}, t_{2k}]$  контролируемого движения.

Задача слежения за объектом,двигающимся по дуге  $\Lambda = \widehat{t^*, \bar{t}_1}$ , усложняется в сравнении со случаем  $\varepsilon = 0$  ввиду условия  $\mathring{V}_\varepsilon(f) \cap G = \emptyset$ . Неудобными для организации слежения являются протяженные участки дуги  $\Lambda$ , близкие к прямолинейным.

Для определения степени выпуклости (кривизны) дуги  $\Lambda$  введем характеристику  $C(d)$ , близкую к известному понятию модуля выпуклости (см. J. A. Clarkson [1]). Пусть  $t \in \Lambda$ ,  $l = \{t + \lambda \vec{v}_t(t) : \lambda > 0\}$  и точка  $f^0$ , лежащая между  $l$  и  $\mathcal{T}$  такова, что  $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho(f^0, \Lambda) = \rho(f^0, l)$ . Обозначим  $f = f(t) = l \cap V_\rho(f^0)$  (рис. 7). Ясно, что при фиксированном  $t$  отображение  $f \rightarrow \rho$  для строго выпуклой дуги  $\Lambda$  взаимно однозначно. Обозначим

$$\mathcal{P}(\|f - t\|) = \mathcal{P}(\|f - t\|, \Lambda) = \rho(f, \Lambda) = \rho(f, l), \quad 0 < d < |\Lambda|.$$

$$C(d) = \inf \{\mathcal{P}(\|f - t\|) : \|f - t\| \geq d, t \in \Lambda, f = f(t)\}, \quad (9)$$

Для реализации алгоритма II (см. п. 1) на каждом шаге потребуются неравенства

$$\|f_{k-1} - t_{k-1}\| + \|t_{k-1} - f_k\| \leq |\widehat{t_{k-2}, t_{k-1}}| \frac{|v_f|}{|v_t|}, \quad \frac{\varepsilon}{K} < \frac{|t_{k-1} - f_k|}{|v_m|}. \quad (10)$$

Первое неравенство в (10) позволяет наблюдателю занять позицию  $f_k$  до прибытия объекта в точку  $t_{k-1}$ . Оно выполнимо, в частности, за счет увеличения скорости  $v_f$ , например, за счет неравенства  $K > 2|v_t|$ .

Пусть выполняется второе неравенство. Наблюдатель  $f = f_k$ , дождавшись прибытия объекта в позицию  $t_{k-1}$ , освещает его и чтобы избежать встречи с мини-объектом  $m_{k-1}$ , выпущенным из точки  $t_{k-1}$ , на максимальной скорости  $K$  переходит из  $f_k$  в точку  $f_k^0$ : двигаясь от  $t_{k-1}$  в сторону точки  $f_k$ , мини-объект видит шар  $\mathring{V}_\varepsilon(f_k + \lambda(t_k^0 - f_k))$  при  $0 \leq \lambda < 1$ , но не видит при  $\lambda = 1$  (см. рис. 7).

На  $k$ -м шаге алгоритма II выбирается  $f_k \in l(\widehat{t_{k-1}})$  так, что  $|\widehat{t_{k-2}, t_{k-1}}| - |\widehat{t_{k-1}, t_k}| > 0$  и эта разность убывает с ростом  $k$ . Обозначим  $d = |\widehat{t_{k-1}, t_k}|$ .

**Теорема 2.** Пусть  $(\varepsilon/K)|v_m| < \|\bar{t}_0 - \underline{t}_1\|$ ,  $g \in [\underline{t}_1, \bar{t}_0]$ ,  $\|\underline{t}_1 - g\| = \varepsilon(|v_m|/K)$ . Наблюдатель  $V_\varepsilon(f)$  для слежения за объектом  $t$ ,двигающимся по отрезку  $[\bar{t}_0, \underline{t}_1]$ , посредством алгоритма I строит на отрезке  $[\bar{t}_0, g]$  последовательность пар отрезков (рис. 6)

$$\{[\tilde{t}_{2k}, \tilde{t}_{2k+1}] \cup [\tilde{t}_{2k+1}, \tilde{t}_{2(k+1)}]\}_{k=0, \dots} \subset [g, \bar{t}_0] \subset [\underline{t}_1, \bar{t}_0]$$

таких, что движение объекта на первом отрезке каждой пары контролируется наблюдателем и  $\|\tilde{t}_{2k} - \tilde{t}_{2k+1}\| = \|g - \tilde{t}_{2k}\|(|v_t|/|v_m|)$ , второй отрезок каждой пары не контролируется и  $\|\tilde{t}_{2k+1} - \tilde{t}_{2(k+1)}\| = 2\varepsilon(|v_t|/K)$ .

Пусть  $K > 2|v_t|$  и существует число  $0 < d = \widehat{d(\Lambda)} < |\Lambda|$ , для которого  $C(d) \geq \varepsilon$  (см. (9)). Для контроля движения объекта по дуге  $\Lambda = \widehat{t_1, t_1}$  строятся последовательности точек  $t_k \in \Lambda$ ,  $f_{k+1} \in l(t_k)$  ( $k = 2, \dots, n$ ),  $f_{k+1}^0$  таких, что

$$\rho(f_k^0, l) = \|f_k^0 - f_k\| = \rho(f_k^0, \Lambda) = \|f_k^0 - t_k\| = \varepsilon,$$

$$\|f_k - t_{k-1}\| \leq d, \quad |\widehat{t_k, t_{k+1}}| \leq |\widehat{t_{k-1}, t_k}| \quad (k = 2, \dots, n, t_1 = t^*).$$

В момент прибытия объекта  $t$  в точку  $t_k$  наблюдатель  $f_{k+1}$  освещает точку  $t_k$  и перемещается в точку  $t_{k+1}$ , избегая встречи с мини-объектом.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Clarcson J.A.** Uniformly convex spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. Vol. 40, no. 3. P. 396–414. doi: 10.1090/S0002-9947-1936-1501880-4
2. **Лю В.** Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58. doi: 10.24108/mathm.0118.0000098

Поступила 06.02.2024

После доработки 1.03.2024

Принята к публикации 4.03.2024

Бердышев Виталий Иванович

академик РАН

научный руководитель

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: bvi@imm.uran.ru

### REFERENCES

1. Clarcson J.A. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1936, vol. 40, no. 3, pp. 396–414. doi: 10.1090/S0002-9947-1936-1501880-4
2. Lyu V. Metody planirovaniya puti v srede s prepyatstviyami (obzor) [Path planning methods in an environment with obstacles (a review)], *Matematika i Mat. Modelirovanie*, 2018, vol. 1, pp. 15–58 (in Russian). doi: 10.24108/mathm.0118.0000098

Received February 6, 2024

Revised March 1, 2024

Accepted March 4, 2024

*Vitalii Ivanovich Berdyshev*, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: bvi@imm.uran.ru.

Cite this article as: V. I. Berdyshev. Observation of an object opposed to the observer in the space  $\mathbb{R}^2$ . *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 45–52.