ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 3 2024

УДК 517.977

# УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА

**В. Р. Барсегян**

Рассматривается задача управляемости линейных систем переменной структуры с помощью динамического регулятора. Сформулировано понятие вполне управляемости таких систем с помощью динамического регулятора. Получены условия вполне управляемости составной и поэтапно меняющейся линейных нестационарных систем с помощью динамического регулятора. Показано, что поэтапно меняющаяся линейная стационарная система с помощью динамического регулятора вполне управляема тогда и только тогда, когда система вполне управляема и вполне наблюдаема. Критерий вполне управляемости явно выражен через матрицы управляемости и наблюдаемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы и сравним с известным условием для обычной системы.

Ключевые слова: система переменной структуры, составная система, поэтапно меняющаяся система, управляемость, наблюдаемость, динамический регулятор.

**V. R. Barseghyan. Controllability of linear systems of variable structure using a dynamic controller.**

The problem of controllability of linear systems of variable structure using a dynamic controller is considered. The notion of complete controllability of such systems using a dynamic controller is formulated. Conditions for the complete controllability of composite and stage-by-stage changing linear nonstationary systems using a dynamic controller are obtained. It is shown that a stage-by-stage changing linear stationary system is completely controllable using a dynamic controller if and only if the system is completely controllable and completely observable. The criterion of complete controllability is explicitly expressed in terms of the controllability and observability matrices of a stage-by-stage changing linear stationary system and is comparable with the known condition for a conventional system.

Keywords: system of variable structure, composite system, stage-by-stage changing system, controllability, observability, dynamic controller.

**MSC:** 93B05, 93B12, 93C05, 93C15

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-30-44

## Введение

Теория управления, являясь одной из важнейших наук, дает теоретическую основу для исследования и проектирования автоматизированных систем во многих областях деятельности человека. Целью проектирования систем автоматического управления является построение управляющего устройства (регулятора) обратной связи, с помощью которого динамической системе передается желаемое движение. Для формирования обратной связи в динамических системах управления необходима информация о состоянии объекта управления. На практике обычно реализация обратной связи по вектору состояния затруднена, поскольку для непосредственного измерения доступны только часть компонент вектора состояния или линейные комбинации этих компонент. Поэтому возникает необходимость построения технически легко реализуемой обратной связи по известным значениям выходного сигнала. Эта задача наблюдения и является одной из фундаментальных задач в теории автоматического управления. С точки зрения легкой реализуемости обратной связи представляет интерес возможность построения управления динамической системой с помощью функций из желаемого класса. В теории управления и наблюдения принципиальными являются вопросы управляемости и наблюдаемости; их решение играет важную роль в синтезе динамических систем [1; 2].

Для линейных стационарных систем управления известен критерий вполне управляемости Р. Калмана [1], а для линейных нестационарных — достаточный признак Н. Н. Красовского [2].

Исследованию задач построения динамических регуляторов посвящены, в частности работы [3–5]. Так, в статье [3] рассматривается задача управляемости линейной динамической системы с помощью дифференциально-алгебраического регулятора, который представляет собой линейную дескрипторную систему. Получен критерий управляемости динамическим регулятором, который выражается через параметры исходной системы и динамического регулятора.

Исследование многих прикладных задач о процессах управления и наблюдения сводится к изучению динамических систем, которые имеют различные структурные параметры на разных этапах функционирования, т. е. относятся к системам переменной структуры, в том числе к составным и поэтапно меняющимся системам. Задачи для таких систем в игровых постановках сближения и уклонения при многих целевых множествах рассмотрены, например, профессором М. С. Габриеляном (научным руководителем которого был академик Н. Н. Красовский), в частности в работах [6–8]. Системы с переменной структурой эффективно используются в практике автоматического управления [9; 10]. Надо отметить, что для динамических систем переменной структуры с сосредоточенными и расспределенными параметрами также возникают нетривиальные задачи управления и наблюдения и, следовательно, возникает необходимость их исследования [11–16]. Поэтому как в обычных задачах управления и наблюдения, так и в задачах управления и наблюдения систем переменной структуры принципиальными являются вопросы управляемости и наблюдаемости.

Некоторые вопросы управляемости и наблюдаемости систем переменной структуры (составной и поэтапно меняющейся систем) и кусочно-линейных импульсных систем исследованы, в числе прочих, в работах [11; 12; 17–20]. В [11; 12], в частности, получены необходимые и достаточные условия вполне управляемости и наблюдаемости составной (и поэтапно меняющейся) линейной стационарной системы, выраженные непосредственно через исходные параметры системы и сравнимые с известными условиями Калмана. В [11] показано, что на отдельных интервалах времени все подсистемы, которые образуют составную систему, по отдельности могут быть не вполне управляемыми (наблюдаемыми), однако в целом на всем интервале времени составная система может быть вполне управляемой (наблюдаемой). А если хотя бы одна подсистема составной системы на своем интервале функционирования вполне управляема (наблюдаема), то составная система также будет вполне управляемой (наблюдаемой). В [11] также показано, что если поэтапно меняющуюся стационарную систему рассматривать как линейно нестационарную динамическую систему, то с формальной точки зрения из достаточного признака вполне управляемости Н. Н. Красовского [2] следует: вполне управляемости одной подсистемы составной системы на своем интервале функционирования достаточно для вполне управляемости составной системы.

Вопросы управлемости систем переменной структуры, в частности составной (или поэтапно меняющейся) системы, с помощью динамического регулятора не исследованы. Наверное, это связано со сложностью исследуемого обьекта. Неясно также, что понимать под управляемостью динамическим регулятором таких систем, сочетающих непрерывное и скачкообразное (дискретное) поведение.

В данной работе рассматриваются вопросы управляемости составных систем и поэтапно меняющихся линейных систем с помощью динамического регулятора. Сформулирован критерий вполне управляемости таких систем с помощью динамического регулятора. В частности, получены условия вполне управляемости составной системы и поэтапно меняющейся линейной нестационарной системы с помощью динамического регулятора. Для поэтапно меняющейся линейной стационарной системы условие вполне управляемости с помощью динамического регулятора явно выражено непосредственно через исходные параметры системы. Доказано, что поэтапно меняющаяся линейная стационарная система вполне управляема с помощью динамического регулятора тогда и только тогда, когда вполне управляема и вполне наблюдаема.

Эти условия выражены через матрицы управляемости и наблюдаемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы и сравнимы с известными условиями для обычных систем.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой на интервале времени $t_{k-1} \le t \le t_k$, $k = 1, \dots, m$, описывается $n_k$-мерными линейными дифференциальными уравнениями [11, с. 18, 19]

$$\dot{x}^{(k)} = A_k(t)x^{(k)} + B_k(t)u^{(k)} \tag{1.1}$$

с начальным и конечным условиями

$$x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}, \quad x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}, \tag{1.2}$$

где $x^{(k)}(t) \in \mathbb{R}^{n_k}$, $x^{(k)}$ — фазовый вектор системы; $A_k(t)$, $B_k(t)$ $(k = 1, \dots, m)$ — матрицы параметров системы (модели объекта); $u^{(k)}(t)$ — управляющее воздействие соответственно с размерностями $A_k(t) - (n_k \times n_k)$, $B_k(t) - (n_k \times r_k)$, $u^{(k)}(t) - (r_k \times 1)$. В общем случае будем считать, что элементы матрицы функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбца $u^{(k)}(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Предполагается, что правые части системы (1.1) таковы, что решение задачи Коши существует и единственно. Предполагается также, что заданы начальное состояние системы $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$ и промежуточные моменты времени $0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$.

Преемственность между составными системами (1.1) при $k = 1, \dots, m$ (стыковки траекторий) обеспечивается выполнением следующих условий связи [11, с. 18-19] в промежуточные моменты времени $t_k$, $(k = 1, \dots, m-1)$:

$$E_k x^{(k)}(t_k) + F_k x^{(k+1)}(t_k) = \beta_k, \tag{1.3}$$

где $E_k - (n_{k+1} \times n_k)$-мерная, $F_k - (n_{k+1} \times n_{k+1})$-мерная матрицы; $\beta_k - (n_{k+1} \times 1)$-мерный вектор-столбец. Предполагается, что матрицы $E_k$, $F_k$ и векторы $\beta_k$ известны, а матрицы $F_k$ такие, что существуют обратные матрицы $F_k^{-1}$, т. е. $\det F_k \neq 0$.

Сформулируем определение вполне управляемости составной системы (1.1)–(1.3).

О п р е д е л е н и е 1. Составная система (1.1) с промежуточными условиями связи (1.3) называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, если для любых начальных $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$ и конечных $x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}$ состояний можно найти набор управлений $u^{(k)}(t)$, $k = 1, \dots, m$, такой, что решение $x^{(k)}(t)$, начиная из состояния $x^{(1)}(t_0)$ и отвечая промежуточным условиям связи (1.3), в момент времени $t = T$ удовлетворяет условию $x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}$.

Рассматривается вопрос о возможности управления составной системой с помощью технически легко реализуемого набора функций (из известного класса). Пусть управляющая функция $u^{(k)}(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ $(k = 1, \dots, m-1)$ имеет вид

$$u^{(k)}(t) = C_k y(t), \tag{1.4}$$

и строится по выходному сигналу дифференциальной системы

$$\dot{y}(t) = Dy(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{1.5}$$

которую назовем *дифференциально-динамическим регулятором* или просто *динамическим регулятором.* Здесь $C_k$ — $(r_k \times n_m)$- и $D$ — $(n_m \times n_m)$-мерные заданные матрицы.

О п р е д е л е н и е 2. Составная система (1.1) с промежуточными условиями связи (1.3) называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$ динамическим регулятором (1.4), (1.5), если для любого начального состояния $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$ системы (1.1) найдется начальное состояние $y(t_0) = y_0$ системы (1.5), при котором решение $x^{(k)}(t)$ системы (1.1), соответствующее набору управлений $u^{(k)}(t)$, $k = 1, \dots, m$, $t \in [t_0, T]$, начиная из состояния $x^{(1)}(t_0)$ и отвечая промежуточным условиям связи (1.3), в момент времени $t = T$ удовлетворяет условию $x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}$.

Требуется найти условия, при которых движение управляемого объекта, описываемого системой (1.1)–(1.3), будет вполне управляемым на отрезке времени $[t_0, T]$ динамическим регулятором (1.4), (1.5).

## 2. Условие вполне управляемости составной линейной нестационарной системы с помощью динамического регулятора

Для нахождения условий управляемости составных систем (1.1)–(1.3) динамическим регулятором (1.4), (1.5) будем использовать теорему [11, с. 19–24], определяющую аналитическое представление решения составной системы (1.1)–(1.3). Условия вполне управляемости составной системы (1.1)–(1.3) приведены в работах [11, с. 35–37], [12].

Из (1.5) имеем

$$y(t) = e^{D(t-t_0)} y\,(t_0)\,,$$

следовательно, из (1.4) получим

$$u^{(k)}(t) = C_k e^{D(t-t_0)} y\,(t_0) \quad (k = 1, \dots, m-1). \tag{2.1}$$

Из формулы (см. (1.1.10), [11]) аналитического представления решения составной системы (1.1)–(1.3) при $k = m-1$ и $t = t_m = T$ выводим следующее соотношение:

$$X_m[T, t_{m-1}] F_{m-1}^{-1} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m+1-i} W_i E_i \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} H_i[t_i, \tau] u^{(i)}(\tau) d\tau + \int\limits_{t_{m-1}}^{T} H_m[T, \tau] u^{(m)}(\tau) d\tau = \eta$$

или

$$\int\limits_{t_0}^{T} \Big( \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m+1-i} X_m[T, t_{m-1}] F_{m-1}^{-1} W_i E_i \bar{H}_i[t_i, \tau] u^{(i)}(\tau) \Big) d\tau + \int\limits_{t_0}^{T} \bar{H}_m[T, \tau] u^{(m)}(\tau) d\tau = \eta, \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned} \eta = x^{(m)}(T) - X_m[T, t_{m-1}] F_{m-1}^{-1} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m-i} W_i^{(m-1)} \beta_i \\ - (-1)^m X_m[T, t_{m-1}] F_{m-1}^{-1} W_1^{(m-1)} E_1 X_1[t_1, t_0] x^{(1)}(t_0), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$W_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{k-i} E_{k+1-j} X_{k+1-j}[t_{k+1-j}, t_{k-j}] F_{k-j}^{-1} \quad (k = 2, 3, \dots, m;\ i = 1, 2, \dots, k-1). \tag{2.4}$$

Здесь $H_k[t, \tau] = X_k[t, \tau] B_k(\tau)$, а через $X_k[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части $k$-го уравнения системы (1.1). Согласно введенному обозначению (2.4) размерность матрицы $W_i^{(k)}$ равна $(n_{k+1} \times n_{i+1})$ и принято, что при $i = k$ $W_k^{(k)} = E$ — единичная матрица размерностью $(n_{k+1} \times n_{k+1})$.

В (2.2) вместо функций $H_i[t_i, \tau]$ $(i = 2, \dots, m)$ введены функции $\bar{H}_i[t_i, \tau]$ следующим образом:

$$\bar{H}_1[t_1, \tau] = \begin{cases} H_1[t_1, \tau], & t_0 \le \tau \le t_1, \\ 0, & t_1 < \tau \le t_m = T, \end{cases} \qquad \bar{H}_m[t_m, \tau] = \begin{cases} 0, & t_0 \le \tau < t_{m-1}, \\ H_m[T, \tau], & t_{m-1} \le \tau \le t_m = T, \end{cases}$$

$$\bar{H}_i[t_i,\tau] = \begin{cases} 0, & t_0 \le \tau < t_{i-1}, \\ H_i[t_i,\tau], & t_{i-1} \le \tau \le t_i, \\ 0, & t_i < \tau \le t_m = T \end{cases} \qquad (i = 2,\dots,m-1).$$

Отметим, что в (2.2) число соотношений равно $n_m$, а $\eta$ — известный вектор. Соотношение (2.2) с учетом (2.1) запишем так:

$$\Bigg[X_m[T,t_{m-1}]F_{m-1}^{-1}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m+1-i}W_iE_i\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} H_i[t_i,\tau]C_ie^{D(\tau-t_0)}d\tau + \int\limits_{t_{m-1}}^{T} H_m[T,\tau]C_me^{D(\tau-t_0)}d\tau\Bigg]y\,(t_0) = \eta$$

или

$$\Bigg[\int\limits_{t_0}^{T}\Bigg(\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m+1-i}X_m[T,t_{m-1}]F_{m-1}^{-1}W_iE_i\bar{H}_i[t_i,\tau]C_ie^{D(\tau-t_0)} + \bar{H}_m[T,\tau]C_me^{D(\tau-t_0)}\Bigg)d\tau\Bigg]\,y\,(t_0) = \eta. \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) можно представить в виде

$$M(t_0,t_1,\dots,T)y\,(t_0) = \eta, \tag{2.6}$$

где

$$M(t_0,t_1,\dots,T) = \int\limits_{t_0}^{T}\Bigg(\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m+1-i}X_m[T,t_{m-1}]F_{m-1}^{-1}W_iE_i\bar{H}_i[t_i,\tau]C_ie^{D(\tau-t_0)} + \bar{H}_m[T,\tau]C_me^{D(\tau-t_0)}\Bigg)d\tau.$$

Матрица $M(t_0,t_1,\dots,T)$ имеет размерность $(n_m\times n_m)$. Соотношение (2.5) — это система $n_m$ линейных алгебраических уравнений относительно $n_m$ неизвестных компонент вектора $y\,(t_0)$ с правой частью $\eta$ (2.3). Отметим, что для любого начального состояния $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$ составной системы (1.1)–(1.3), правая часть системы (2.6) принимает любое значение. Поэтому из условий существования решений системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (2.6) следует критерий вполне управляемости нестационарной составной системы (1.1)–(1.3) динамическим регулятором (1.4), (1.5). Этот критерий сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Составная система* (1.1)–(1.3) *вполне управляема динамическим регулятором* (1.4), (1.5) *тогда и только тогда, когда матрица* $M(t_0,t_1,\dots,T)$ *не особая.*

Таким образом, если матрица $M(t_0,t_1,\dots,T)$ не особая, т. е. определитель матрицы отличен от нуля ($\det M(t_0,t_1,\dots,T) \ne 0$), то существует обратная матрица $M^{-1}(t_0,t_1,\dots,T)$, и тогда решение алгебраического уравнения (2.6) можно записать в виде

$$y(t_0) = M^{-1}(t_0,t_1,\dots,T)\eta.$$

Следовательно, искомое регулирующее управление представляется как

$$u^{(k)}(t) = C_ke^{D(t-t_0)}M^{-1}(t_0,t_1,\dots,T)\eta, \quad t\in[t_k,t_{k+1}] \ \ (k=1,\dots,m-1).$$

## 3. Условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной системы динамическим регулятором

Рассмотрим случай составной системы (1.1) с условиями связи (1.3), предполагая, что

1) размерности фазового вектора $x^{(k)}$ и вектора управления $u^{(k)}(t)$ не меняются, т. е. $n_k = n$, $r_k = r$ при $k = 1, \dots, m$, тогда вместо системы (1.1) получим поэтапно меняющуюся линейную систему

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1(t)x + B_1(t)u, & t \in [t_0, t_1), \\ A_2(t)x + B_2(t)u, & t \in [t_1, t_2), \\ \quad\vdots \\ A_m(t)x + B_m(t)u, & t \in [t_{m-1}, T], \end{cases} \tag{3.1}$$

2) матрицы $E_k$, $F_k$ и вектор-столбец $\beta_k$ удовлетворяют условиям

$$E_k = -F_k, \quad \beta_k = 0,$$

которые обеспечивают стыковки траектории системы в промежуточные моменты времени $t_k$ (конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа), т. е. в моменты времени $t_k$ вместо условий связи (3.1) будем иметь

$$x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k) \ \ (k = 1, \dots, m-1). \tag{3.2}$$

Для получения условия вполне управляемости системы (3.1) динамическим регулятором (1.4), (1.5) будем использовать теоремы (см. [11], теорема 1.2, разд. 1.4) о представлении решения системы (3.1), (3.2) и о вполне управляемости на отрезке $[t_0, T]$ системы (3.1).

**Теорема 2.** *Для любых начальных значений* $x(t_0) = x_0$ *и допустимых управлений* $u(t)$ *существует решение* $x(t)$ *системы* (3.1)*, удовлетворяющее условиям* (3.2)*,* $k = 1, \dots, m-1$*, и для* $t \in [t_{k-1}, t_k)$ *представимое в виде*

$$x(t) = V(t, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, \tau]u(\tau)d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t} H_k[t, \tau]u(\tau)d\tau, \tag{3.3}$$

*где*

$$V(t, t_j) = X_k[t, t_{k-1}]\, V(t_{k-1}, t_j),$$

$$V(t_k, t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} X_{k-i}[t_{k-i}, t_{k-i-1}] \ \ (k = 1, \dots, m;\ j = 0, \dots, k-1).$$

Здесь $H_k[t, \tau] = X_k[t, \tau]B_k$, а через $X_k[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части $k$-го уравнения системы (3.1). Отметим, что согласно введенному обозначению $V(t_k, t_{k-1}) = X_k[t_k, t_{k-1}]$ при $j = k-1$, а $V(t_k, t_k) = E$ при $j = k$.

**Теорема 3.** *Поэтапно меняющаяся система* (3.1) *с условием* (3.2) *вполне управляема на отрезке времени* $[t_0, T]$ *тогда и только тогда, когда интегральная матрица*

$$Q(t_0, \dots, T) = \int_{t_0}^{T} \left( \sum_{j=1}^{m} V(\,t_j)\bar{H}_j[t_j, t] \right) \left( \sum_{j=1}^{m} V(\,t_j)\bar{H}_j[t_j, t] \right)^T dt$$

*положительно определена.*

Здесь и далее буква “$T$” в верхнем индексе означает операцию транспонировая.

### 3.1. Условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной нестационарной системы с помощью динамического регулятора

Рассматривается вопрос о возможности управления системой (3.1), (3.2) с помощью технически легко реализуемой функции $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, которая имеет вид

$$u(t) = Cy\,(t)\,, \tag{3.4}$$

и строится по выходному сигналу дифференциальной системы

$$\dot{y}(t) = Dy\,(t)\,, \quad y(t_0) = y_0. \tag{3.5}$$

Данную систему назовем дифференциально-динамическим регулятором или просто динамическим регулятором. Здесь $C$ — $(r \times n)$- и $D$ — $(n \times n)$-мерные заданные матрицы.

Из (3.5) имеем $y(t) = e^{D(t-t_0)}y\,(t_0)$ , следовательно, из (3.4) выводим

$$u(t) = Ce^{D(t-t_0)}y\,(t_0)\,. \tag{3.6}$$

Решение системы (3.1) с условиями (3.2) для $t \in [t_{k-1}, t_k)$, согласно теореме 2 представляя в виде (3.3) и учитывая (3.6), запишем как

$$\begin{aligned} x(t) = V_k(t,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V_k(t,t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]Ce^{D(\tau-t_0)}d\tau y\,(t_0) \\ + \int\limits_{t_{k-1}}^{t} H_k[t,\tau]Ce^{D(\tau-t_0)}d\tau y\,(t_0)\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Если управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, обеспечивает переход движения системы (3.1) к моменту времени $t = T$ в положение $x(T) = x_T$, то при $t = t_m = T$ (при $k = m$) из (3.7) получаем

$$x(T) = V_m(T,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{m} V_m(T,t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]Ce^{D(\tau-t_0)}d\tau y\,(t_0)\,. \tag{3.8}$$

Выражение (3.8) представим в виде

$$\sum_{j=1}^{m} V_m(T,t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]Ce^{D(\tau-t_0)}d\tau y\,(t_0) = x(T) - V_m(T,t_0)x(t_0)$$

или

$$N(t_0,t_1,\ldots,T)y\,(t_0) = x(T) - V_m(T,t_0)x(t_0), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} N(t_0,t_1,\ldots,T) &= \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{j=1}^{m} V_m(T,t_j)H_j[t_j,\tau]Ce^{D(t-t_0)}d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{m} V_m(T,t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]Ce^{D\,\tau}d\tau e^{-D\,t_0}. \end{aligned}$$

Матрица $N(t_0,t_1,\ldots,T)$ имеет размерность $(n \times n)$. Соотношение (3.9) — это система $n$ линейных алгебраических уравнений относительно $n$ неизвестных компонент вектора $y\,(t_0)$ с правой частью $x(T)-V_m(T,t_0)x(t_0)$. Отметим, что для любого начального состояния $x(t_0)=x_0$ системы (3.1) правая часть системы (3.9) принимает любое значение. Поэтому из условий существования решений системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (3.9) следует критерий вполне управляемости нестационарной системы (3.1) динамическим регулятором (3.4), (3.5).

**Теорема 4.** *Система* (3.1), (3.2) *вполне управляема динамическим регулятором* (3.4), (3.5) *тогда и только тогда, когда матрица* $N(t_0,t_1,\ldots,T)$ *не особая.*

Таким образом, если матрица $N(t_0,t_1,\ldots,T)$ не особая, т. е. определитель матрицы отличен от нуля ($\det N(t_0,t_1,\ldots,T)\neq 0$), то существует обратная матрица $N^{-1}(t_0,t_1,\ldots,T)$, и тогда решение алгебраического уравнения (3.9) запишем следующим образом:

$$y(t_0)=N^{-1}(t_0,t_1,\ldots,T)\left[x(T)-V_m(T,t_0)x(t_0)\right].$$

Отсюда искомое регулирующее управление представим в виде

$$u(t)=Ce^{D(t-t_0)}N^{-1}(t_0,t_1,\ldots,T)\left[x(T)-V_m(T,t_0)x(t_0)\right].$$

Суждение об условии управляемости линейных систем переменной структуры (3.1) с динамическим регулятором (3.4), (3.5) целесообразно иметь, лишь опираясь на исходные данные задачи. Поэтому желательно иметь условия, позволяющие судить об управляемости (3.1) с помощью динамического регулятора (3.4), (3.5) по элементам матрицы $A_k$, $B_k$ $(k=1,\ldots,m)$, $C$ и $D$.

В соответствии с этим требуется найти условие вполне управляемости линейных систем переменной структуры (3.1), (3.2) с помощью динамического регулятора (3.4), (3.5), выраженное непосредственно через матрицы $A_k$, $B_k$ $(k=1,\ldots,m)$, $C$ и $D$.

## 3.2. Условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы с помощью динамического регулятора

Рассмотрим случай, когда система (3.1) стационарна, т. е.

$$\dot{x}=\begin{cases} A_1x+B_1u, & t\in[t_0,t_1),\\ A_2x+B_2u, & t\in[t_1,t_2),\\ \quad\vdots & \\ A_mx+B_mu, & t\in[t_{m-1},T]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Для вполне управляемости системы (3.10) с условием (3.2) на отрезке времени $t_0\le t\le T$ справедлива следующая теорема (см. [11], теорема 1.6; [12]).

**Теорема 5.** *Линейная стационарная система* (3.10) *вполне управляема на отрезке времени* $t_0\le t\le T$ *тогда и только тогда, когда матрица*

$$K=\{B_1,A_1B_1,\ldots,A_1^{n-1}B_1,\ldots,B_m,A_mB_m,\ldots,A_m^{n-1}B_m\}$$

*имеет ранг, равный* $n$.

Так как в (3.10) $A_k$ — постоянная матрица, то нормированая фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x}=A_kxt\in[t_{k-1},t_k)$ имеет вид $X_k[t,t_{k-1}]=e^{A_k(t-t_{k-1})}$.

Поэтому решение системы (3.10) для текущего момента времени $t\in[t_{k-1},t_k)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x_0$, согласно формуле (3.3) можно записать как

$$x(t)=V(t,t_0)x(t_0)+\sum_{j=1}^{k-1}V(t,t_j)\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}e^{A_j(t_j-\tau)}B_ju(\tau)d\tau+\int\limits_{t_{k-1}}^{t}e^{A_k(t-\tau)}B_ku(\tau)d\tau, \tag{3.11}$$

где

$$V(t,t_j) = e^{A_k(t-t_{k-1})}V(t_{k-1},t_j), \quad V(t_k,t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} e^{A_{k-i}(t_{k-i}-t_{k-i-1})}, \tag{3.12}$$

$k = 1,\ldots, m$; $j = 1,\ldots, k-1$. Если управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, обеспечивает переход движения системы (3.10) к моменту времени $t = T$ в положение $x(T) = x_T$, то при $t = t_m = T$ (при $k = m$) из (3.11) с учетом (3.12) имеем

$$x(T) = V(T,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{m} V(T,t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} e^{A_j t_j} e^{-A_j\tau} B_j u(\tau) d\tau. \tag{3.13}$$

Из (3.6) при $t_0 = 0$, $y(t) = e^{Dt}y\,(0)$ получим

$$u(t) = Ce^{Dt}y\,(0)\,. \tag{3.14}$$

Тогда из (3.13) и (3.14) при $t_0 = 0$ выводим

$$x(T) = V(T,0)x(0) + \sum_{j=1}^{m} V(T,t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} e^{A_j t_j} e^{-A_j\tau} B_j C e^{D\tau} d\tau y\,(0)$$

или

$$\sum_{j=1}^{m} C_j \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_j\tau} B_j C e^{D\tau} d\tau y\,(0) = L, \tag{3.15}$$

где $C_j = V(T,t_j)e^{A_j t_j}, L = x(T) - V(T,0)x(0)$.

Соотношение (3.15) — это система $n$ линейных алгебраических уравнений относительно $n$ неизвестных компонент вектора $y(0)$ с правой частью $L = x(T) - V(T,0)x(0)$. Отметим, что для любого начального состояния $x(0) = x_0$ системы (3.10) правая часть системы (3.15), т. е. $L$, принимает любое значение. Поэтому из условий существования решений системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (3.15) следует критерий вполне управляемости системы (3.10) динамическим регулятором (3.4), (3.5). Значит, согласно теореме Кронекера — Капелли о совместимости систем линейных неоднородных алгебраических уравнений [21; 22], справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** *Система* (3.10) *с условием* (3.2) *вполне управляема динамическим регулятором* (3.4), (3.5) *тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\operatorname{rank}\left(\sum_{j=1}^{m} C_j \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_j\tau} B_j C e^{D\tau} d\tau\right) = n. \tag{3.16}$$

Таким образом, при выполнении условий (3.16) для любого начального состояния $x(0) = x_0$ системы (3.10) найдется (как решение системы (3.15)) начальное состояние $y(0) = y_0$ регулятора (3.5), при котором решение системы (3.10), соответствующее управлению $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, (3.4), в конечный момент времени $t = T$ будет удовлетворять условию $x(T) = x_T$.

Действительно, искомое регулирующее управление представляется в виде

$$u(t) = Ce^{D\,t}\left(\sum_{j=1}^{m} C_j \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_j\tau} B_j C e^{D\tau} d\tau\right)^{-1}\big[x(T) - V_m(T,0)x(0)\big].$$

Критерий (3.16), который для применения не так практичен, неявно выражен через матрицы $A_k$, $B_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, $C$ и $D$. Поэтому необходимо условие (3.16) свести к условию вполне управляемости стационарной системы (3.10) динамическим регулятором (3.4), (3.5), явно выраженные непосредственно через исходные матрицы $A_k$, $\quad B_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, $C$ и $D$.

Из теории матриц известно, что матричные функции $e^{-A_j\tau}$ и $e^{D\tau}$ описываются как

$$e^{-A_j\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(j)}(-\tau)A_j^i, \quad e^{D\tau} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_\nu(\tau)D^\nu,$$

где функции $\alpha_i^{(j)}(\tau)$, $\beta_\nu(\tau)$ — коэффициенты интерполяционных многочленов Лагранжа — Сильвестра [21] (скалярные функции), линейно независимые аналитические функции.

Матрица

$$\sum_{j=1}^{m} C_j \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_j\tau} B_j C e^{D\tau} d\tau$$

с размерностью — $(n \times n)$ представима в виде

$$\sum_{j=1}^{m} C_j \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_j\tau} B_j C e^{D\tau} d\tau = \sum_{j=1}^{m} C_j \Bigg[ \sum_{i=0}^{n-1} A_j^i B_j \Bigg( \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha_i^{(j)}(-\tau)\beta_\nu(\tau)d\tau C D^\nu \Bigg) \Bigg]. \tag{3.17}$$

Вводя обозначение

$$h_i^{(j)}(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \le t < t_{j-1}, \\ \alpha_i^{(j)}(-t), & t_{j-1} \le t < t_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0, & t_j \le t \le T, \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

правую часть равенства (3.17) запишем как

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{m} C_j \Bigg[ B_j \Bigg( \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_0^T h_0^{(j)}(\tau)\beta_\nu(\tau)d\tau C D^\nu \Bigg) + A_j B_j \Bigg( \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_0^T h_1^{(j)}(\tau)\beta_\nu(\tau)d\tau C D^\nu \Bigg) + \ldots + \\ + A_j^{n-1} B_j \Bigg( \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_0^T h_{n-1}^{(j)}(\tau)\beta_\nu(\tau)d\tau C D^\nu \Bigg) \Bigg]. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Для полной матричной записи выражения (3.18), учитывая размерность матрицы $CD^\nu$ — $(r \times n)$, введем матрицы с размерностью $(r \times r)$ :

$$H_{i\nu}^{(j)}(T) = \begin{pmatrix} \int_0^T h_i^{(j)}(\tau)\beta_\nu(\tau)d\tau & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \int_0^T h_i^{(j)}(\tau)\beta_\nu(\tau)d\tau & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \int_0^T h_i^{(j)}(\tau)\beta_\nu(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

Тогда выражения в круглых скобках слагаемых формулы (3.18) представим следующим образом:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_0^T h_i^{(j)}(\tau)\beta_\nu(\tau)d\tau C D^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} H_{i\nu}^{(j)}(T)\, C D^\nu$$

$$= H_{i0}^{(j)}(T)\, C + H_{i1}^{(j)}(T)\, C D + \ldots + H_{i\,n-1}^{(j)}(T)\, C D^{n-1} = H_i^{(j)}(T)\, R,$$

где $H_i^{(j)}(T) = \begin{pmatrix} H_{i\,0}^{(j)}(T) & H_{i\,1}^{(j)}(T) & \ldots & H_{i\,n-1}^{(j)}(T) \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} C & CD & \ldots & CD^{n-1} \end{pmatrix}^T$.

Размерность матрицы $H_i^{(j)}(T)$ — $(r \times n\,r)$, а $R$ имеет размерность $(n\,r \times n)$. Теперь (3.18) запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{m} C_j \big[B_j H_0^{(j)}(T)\,R + A_j B_j H_1^{(j)}(T)\,R + \ldots + A_j^{n-1} B_j H_{n-1}^{(j)}(T)\,R\big]. \tag{3.19}$$

Введем следующие обозначения:

$$K^{(j)} = C_j\big(B_j, A_jB_j, \ldots, A_j^{n-1}B_j\big), \quad H^{(j)}(T) = \begin{pmatrix} H_0^{(j)}(T) & H_1^{(j)}(T) & \ldots & H_{n-1}^{(j)}(T) \end{pmatrix}^T.$$

Матрица $K^{(j)}$ — $(n \times n\,r)$, а $H^{(j)}(T)$ имеет размерность $(n\,r \times n\,r)$. Так как функции $\alpha_i^{(j)}(\tau)$ (или $h_i^{(j)}(t)$), $\beta_\nu(\tau)$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ — линейно независимые скалярные функции, то $H^{(j)}(T)$ для любого $j = 1, \ldots, m$ — невырожденная матрица, следовательно,

$$\operatorname{rank} H^{(j)}(T) = n\,r.$$

Таким образом, с помощью введеных обозначений (3.19) получим в виде

$$\sum_{j=1}^{m} K^{(j)} H^{(j)}(T)\,R,$$

значит, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{m} C_j \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_j\tau} B_j C e^{D\tau} d\tau = \bar{K} H(T)\,R,$$

где $\bar{K} = \begin{pmatrix} K^{(1)} & K^{(2)} & \ldots & K^{(m-1)} \end{pmatrix}$, $H(T) = \begin{pmatrix} H^{(1)}(T) & H^{(2)}(T) & \ldots & H^{(m)}(T) \end{pmatrix}^T$.

Здесь размерность матрицы $\bar{K}$ — $(n \times n\,m\,r)$, а $H(T)$ имеет размерность $(n\,m\,r \times n\,r)$. Поэтому условие (3.16) эквивалентно выполнению равенства

$$\operatorname{rank} \bar{K} H(T)\,R = n. \tag{3.20}$$

Отметим, что матрица $H(T)$ — блочная матрица, состоящая из невырожденных матриц $H^{(j)}(T)$, $j = 1, \ldots, m$. Так как ранг блочной матрицы не меньше рангов ее блоков и $\operatorname{rank} H^{(j)}(T) = n\,r$, а $n\,r$ является максимальным числом столбцов матрицы $H(T)$, то

$$\operatorname{rank} H(T) = \operatorname{rank} H^{(j)}(T) = n\,r.$$

Сформулируем более удобный критерий вполне управляемости.

**Теорема 7.** *Для вполне управляемости системы* (3.10) *с условием* (3.2) *динамическим регулятором* (3.4), (3.5) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\operatorname{rank} \bar{K} = n, \tag{3.21}$$

$$\operatorname{rank} R = n. \tag{3.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть система (3.10) с условием (3.2) вполне управляема динамическим регулятором (3.4), (3.5). Следовательно, выполняется соотношение (3.16) или (3.20). Учитывая, что ранг произведения двух прямоугольных матриц не превосходит ранг каждого из сомножителей [22], получаем

$$\begin{gathered} n = \operatorname{rank} \bar{K} H(T)\,R \le \min\left\{\operatorname{rank} \bar{K},\, \operatorname{rank} H(T)\,R\right\} \\ \le \min\left\{\operatorname{rank} \bar{K},\, \min\left\{\operatorname{rank} H(T),\, \operatorname{rank} R\right\}\right\} \le \min\left\{\operatorname{rank} \bar{K},\, \min\left\{n\,r,\, \operatorname{rank} R\right\}\right\}. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Так как число строк матрицы $\bar{K}$ — $(n \times n\,m\,r)$ и число столбцов матрицы $R$ — $(n\,r \times n)$ равны $n$, то для выполнения соотношения (3.23) эти матрицы должны иметь максимальный ранг, следовательно, выполняются условия $\operatorname{rank} \bar{K} = n$, $\operatorname{rank} R = n$. Отметим, что соотношения $\operatorname{rank} \bar{K} = n$ и $\operatorname{rank} R = n$ равносильны условиям

$$\operatorname{rank} \{B_1, A_1 B_1, \ldots, A_1^{n-1} B_1, \ldots, B_m, A_m B_m, \ldots, A_m^{n-1} B_m\} = n, \tag{3.24}$$

$$\operatorname{rank} \{\begin{matrix} C & CD & \ldots & CD^{n-1} \end{matrix}\}^T = n. \tag{3.25}$$

соответственно. Необходимость доказана.

*Достаточность.* Пусть выполняются соотношения (3.21) и (3.22), т. е. (3.24) и (3.25). Очевидно, что размерность матрицы $\bar{K} H\,(T)\,R$ равна $(n \times n\,)$. Согласно неравенству Фробениуса [22] имеем

$$\operatorname{rank} \bar{K} H\,(T)\,R \geq \operatorname{rank} \bar{K} H\,(T) + \operatorname{rank} H\,(T)\,R - \operatorname{rank} H\,(T)\,.$$

Исходя из неравенства Сильвестра [22], получаем

$$\operatorname{rank} \bar{K} H\,(T) \geq \operatorname{rank} \bar{K} + \operatorname{rank} H\,(T) - n\,m\,r, \quad \operatorname{rank} H\,(T)\,R \geq \operatorname{rank} H\,(T) + \operatorname{rank} R - n\,r,$$

поэтому

$$\operatorname{rank} \bar{K} H\,(T)\,R \geq \operatorname{rank} \bar{K} H\,(T) + \operatorname{rank} H\,(T)\,R - \operatorname{rank} H\,(T) \geq \operatorname{rank} \bar{K} + \operatorname{rank} H\,(T) - n\,m\,r$$
$$+ \operatorname{rank} H\,(T) + \operatorname{rank} R - n\,r - \operatorname{rank} H\,(T) = n + n\,r - n\,m\,r + n\,r + n - n\,r - n\,r = 2n - n\,m\,r,$$

т. е.

$$\operatorname{rank} \bar{K} H\,(T)\,R \geq 2n - n\,m\,r. \tag{3.26}$$

Так как размерность матрицы $\bar{K} H\,(T)\,R$ равна $(n \times n\,)$, то $\operatorname{rank} \bar{K} H\,(T)\,R$ не зависит от значения $m$ и $r$, поэтому неравенство (3.26) должно выполняться для любого значения $m$ и $r$, в частности для значения $m = r = 1$. (При этих значениях правая часть (3.29) принимает максимальное значение.) Это соответствует случаю скалярного управления только первой подсистемы (3.10). В этом случае выводим следующее соотношение:

$$\operatorname{rank} \bar{K} H\,(T)\,R \geq n.$$

Это соотношение выполняется только тогда, когда матрица $\bar{K} H\,(T)\,R$ имеет максимальный ранг (так как размерность матрицы $\bar{K} H\,(T)\,R$ равна $(n \times n\,)$), следовательно, получим

$$\operatorname{rank} \bar{K} H\,(T)\,R = n.$$

Что и требовалось доказать. □

Таким образом, учитывая, что (3.24) — это условие вполне управляемости системы (3.10), а (3.25) — условие вполне наблюдаемости системы (3.4), (3.5), теорема 7 приводит к следующей теореме.

**Теорема 8.** *Система* (3.10) *с условием* (3.2) *вполне управляема динамическим регулятором* (3.4), (3.5) *тогда и только тогда, когда система* (3.10) *вполне управляема, а система* (3.4), (3.5) *вполне наблюдаема.*

Таким образом, наличие свойств управляемости и наблюдаемости поэтапно меняющихся линейных стационарных систем (объектов) управления позволяет рассчитывать управление, а значит и проектировать системы управления этими объектами. Также важно, что при управлении с помощью динамического регулятора достаточно задать только начальное состояние регулятора, а не строить функцию управления на всем промежутке времени.

## Заключение

Сформулировано понятие вполне управляемости линейных систем переменной структуры с помощью динамического регулятора. Показано, что при управлении системами переменной структуры с помощью динамического регулятора достаточно задать только начальное состояние регулятора, а не строить управление на всем интервале. Получены условия вполне управляемости составной и поэтапно меняющейся линейных нестационарных систем с помощью динамического регулятора. Показано, что поэтапно меняющаяся линейная стационарная система с помощью динамического регулятора вполне управляема тогда и только тогда, когда система вполне управляема и вполне наблюдаема.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Калман Р.** Об общей теории систем управления // Тр. I Конгресса ИФАК. М.: АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521–547.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Игнатенко В.В., Крахотко В.В., Размыслович Г.П.** К управляемости линейных систем дескрипторными регуляторами // Тр. БГТУ. 2017. Сер. 3, № 1. С. 5–7.
4. **Размыслович Г.П., Крахотко В.В.** Управляемость линейных систем со многими запаздываниями по управлению с помощью дифференциальных регуляторов // Журн. Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 3. С. 82–85.
5. **Игнатенко В.В.** Управляемость динамических систем с помощью регулятора // Вестн. БГУ. 1976. Сер. 1. С. 56–58.
6. **Габриелян М.С.** Программные конструкции для игровых задач при m целевых множествах и меняющихся систем // Ученые записки ЕГУ. Физика и математика. 1985. № 3. С. 22–32.
7. **Габриелян М.С., Барсегян В.Р.** Стохастический программный синтез для поэтапно меняющихся линейных систем // Ученые записки ЕГУ. Физика и математика. 1994. № 2. С. 29–39.
8. **Габриелян М.С., Чилингарян А.С.** Управление с поводырем в игровой задаче сближения с $m$ целевыми множествами для систем с переменной динамикой // Ученые записки ЕГУ. Физика и математика. 2008. № 1. С. 40–46.
9. Теория систем с переменной структурой / под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1970. 592 с.
10. **Емельянов С.В., Коровин С.К.** Новые типы обратной связи. Управление при неопределенности. М.: Наука, 1997. 352 с.
11. **Барсегян В.Р.** Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
12. **Barseghyan V.R.** On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure // Proc. of 2016 International Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conf.) STAB 2016. Moscow, 2016, pp. 1–3. doi: 10.1109/STAB.2016.7541163
13. **Barseghyan V.R., Barseghyan T.V.** On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76, № 4. P. 549–559. doi: 10.1134/S0005117915040013
14. **Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Барсегян Т.В.** О задаче оптимальной стабилизации одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. Иркутского гос. ун-та. Математика. 2019. Т. 27. С. 71–79. doi: 10.26516/1997-7670.2019.27.71
15. **Barseghyan V., Solodusha S.** On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate time // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 4444. doi: 10.3390/math10234444
16. **Barseghyan V., Solodusha S.** A model of the control problem of the thermal effect of a laser beam on a two-layer biomaterial // Mathematics. 2024. Vol. 12. P. 374. doi: 10.3390/math12030374
17. **Забелло Л.Е.** Об управляемости линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1973. № 8. С. 13–19.
18. **Johansson M.** Piecewise linear control systems. NY: Springer, 2003. 220 p.
19. **Hong Shi, Guangming Xie.** Controllability and observability criteria for linear piecewise constant impulsive systems // J. Appl. Math. 2012. Vol. 2012. Art. no. 82040. doi: 10.1155/2012/182040

20. **Dengguo Xu.** Controllability and observability of a class of piecewise linear impulsive control systems // Advances in Computer, Communication, Control and Automation. Ser. Lecture Notes in Electrical Engineering. 2011. Vol. 121. P. 321–328. doi: 10.1007/978-3-642-25541-0_42
21. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
22. **Прасолов В.В.** Задачи и теоремы линейной алгебры. 2-е изд. М.: Наука, 2008. 537 с.

Поступила 4.04.2024
После доработки 14.05.2024
Принята к публикации 20.05.2024

Барсегян Ваня Рафаелович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт механики НАН Армении;
профессор, Ереванский государственный университет
г. Ереван, Армения,
e-mail: barseghyan@sci.am

**REFERENCES**

1. Kalman R. On the general theory of control systems. In: *Proc. First IFAC Congress*, Moscow, Izd. AN SSSR, 1961, vol. 2, pp. 521–547 (in Russian).
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniyem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 474 p.
3. Ignatenko V.V., Krakhotko V.V., Razmyslovich G.P. On the controllability of linear systems by descriptor regulators. *Proc. BSTU*, 2017, ser. 3, vol. 1, pp. 5–7 (in Russian).
4. Razmyslovich G.P., Krakhotko V.V. Controllability linear systems with many delays in control by the differential regulators. *Zhurn. Belorusskogo Gos. Un-ta. Matematika. Informatika*, 2018, vol. 3, pp. 82–85 (in Russian).
5. Ignatenko V.V. Controllability of dynamic systems using a regulator. *Vestnik BGU*, 1976, ser. 1, pp. 56–58 (in Russian).
6. Gabrielyan M.S. Program constructions for game problems with $m$ target sets and changing systems. *Uchenyye Zapiski YEGU. Fizika i Matematika*, 1985, vol. 3, pp. 22–32 (in Russian).
7. Gabrielyan M.S., Barseghyan V.R. Stochastic software synthesis for step-by-step linear systems. *Uchenyye Zapiski YEGU. Fizika i Matematika*, 1994, vol. 2, pp. 29–39 (in Russian).
8. Gabrielyan M.S., Chilingaryan A.S. Control with a guide in the game problem of approaching $m$ target sets for systems with variable dynamics. *Uchenyye Zapiski YEGU. Fizika i Matematika*, 2008, vol. 1, pp. 40–46 (in Russian).
9. Emel'yanov S.V., Utkin V.I. *Teoriya sistem s peremennoy strukturoy* [Theory of systems with variable structure]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 592 p.
10. Emelyanov S.V., Korovin S.K. *Novyye tipy obratnoy svyazi. Upravleniye pri neopredelennosti* [New types of feedback. Management under uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 352 p. ISBN: 5-02-015149-1 .
11. Barseghyan V.R. *Upravlenie sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [Control of compound dynamic systems and of systems with multipoint intermediate conditions], Moscow, Nauka Publ., 2016, 230 p. ISBN: 978-5-02-039961-7 .
12. Barseghyan V.R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure. In: *Proc. of 2016 Int. Conf. "Stability and oscillations of nonlinear control systems"* (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2016, Moscow, Russia, 2016, pp. 1–3. doi: 10.1109/STAB.2016.7541163
13. Barseghyan V.R., Barseghyan T.V. On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 4, pp. 549–559. doi: 10.1134/S0005117915040013
14. Barseghyan V.R., Simonyan T.A., Barseghyan T.V. On the problem of optimal stabilization of a system of linear loaded differential equations. *Izv. Irkutskogo Gos. Un-ta. Matematika*, 2019, vol. 27, pp. 71–79 (in Russian). doi: 10.26516/1997-7670.2019.27.71

15. Barseghyan V., Solodusha S. On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate time. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 23, pp. 4444. doi: 10.3390/math10234444
16. Barseghyan V., Solodusha S. A model of the control problem of the thermal effect of a laser beam on a two-layer biomaterial. *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 3, pp. 374. doi: 10.3390/math12030374
17. Zabello L.E. On the controllability of linear non-stationary systems. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1973, vol. 8, pp. 13–19 (in Russian).
18. Johansson M. *Piecewise Linear Control Systems*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2003, 220 p. doi: 10.1007/3-540-36801-9
19. Hong Shi, Guangming Xie. Controllability and observability criteria for linear piecewise constant impulsive systems. *J. Appl. Math.*, 2012, vol. 2012, art. no 182040. doi: 10.1155/2012/182040
20. Dengguo Xu. Controllability and observability of a class of piecewise linear impulsive control systems. *Advances in Computer, Communication, Control and Automation*, Ser. Lecture notes in electrical engineering, 2011, vol. 121, pp. 321–328. doi: 10.1007/978-3-642-25541-0_42
21. Gantmakher F.R. *The theory of matrices*, NY, Chelsea Publ. Comp., 2000, 374 p. Translated to Russian under the title *Teoriya matrits. 5-e izd.*, Moscow, Phys. Math. Lit. Publ., 2004, 560 p.
22. Prasolov V.V. *Zadachi i teoremy lineynoy algebry, 2-e izd.* [Problems and theorems of linear algebra, 2nd ed.]. Moscow, Nauka Publ., 2008, 537 p.

Received April 4, 2024
Revised May 15, 2024
Accepted May 20, 2024

*Vanya R. Barseghyan,* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of RA; Yerevan State University, Yerevan, Armenia, e-mail: barseghyan@sci.am .

Cite this article as: V. R. Barseghyan. Controllability of linear systems of variable structure using a dynamic controller. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 30–44 .