

УДК 517.977

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАСШИРЕНИЕМ ЗАДАЧ
О ДОСТИЖИМОСТИ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР****А. Г. Ченцов**

Исследуются вопросы, связанные с расширением задач о достижимости и имеющие целью построение множеств притяжения, являющихся асимптотическими аналогами множеств достижимости в условиях последовательного ослабления системы ограничений. В качестве обобщенных элементов используются конечно-аддитивные меры со свойством слабой абсолютной непрерывности относительно фиксированной меры; последняя (в случае задач управления) определяется обычно в виде сужения меры Лебега на то или иное семейство измеримых множеств. Изучаются свойства обобщенных задач о достижимости и связь их расширений с множествами притяжения в классе обычных решений (управлений), а также свойства этих множеств, имеющие смысл устойчивости при ослаблении ограничений и асимптотической нечувствительности при ослаблении той или иной “части” этих ограничений.

Ключевые слова: конечно-аддитивная мера, множество притяжения, слабая абсолютная непрерывность.

A. G. Chentsov. Some questions related to the extension of reachability problems in the class of finitely additive measures.

Questions related to the extension of reachability problems and aimed at the construction of attraction sets, which are asymptotic analogs of reachable sets in the situation of successive relaxation of the constraint system, are studied. Finitely additive measures with the property of weak absolute continuity with respect to a fixed measure are used as generalized elements; the measure (in the case of control problems) is usually defined as the restriction of the Lebesgue measure to some family of measurable sets. The properties of relaxed reachability problems and the connection of their extensions with attraction sets in the class of usual solutions (controls), as well as the properties of these sets that have the sense of stability when the constraints are relaxed and asymptotic insensitivity when some “part” of the constraints is relaxed, are studied.

Keywords: finitely additive measure, attraction set, weak absolute continuity.

MSC: 05A05, 97N70, 97N80**DOI:** 10.21538/0134-4889-2024-30-3-293-313**Введение**

Рассматриваются варианты задачи о достижимости с ограничениями импульсного и моментного характера, ориентированные, в частности, на применение в линейных задачах управления с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях. Исследуются условия асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений, а также условия устойчивости при такого рода ослаблении ограничений. Общие конструкции применяются к изучению релаксаций задачи о построении области достижимости (ОД) по части координат при наличии краевых условий и импульсных ограничений. Основу исследования составляет подход, предусматривающий расширение задачи: создаются обобщенные элементы (ОЭ), на множестве которых удастся ввести топологию, превращающую данное множество в компакт, а “целевое” отображение исходной задачи продолжается до непрерывного на данном компакте. Упомянутый компакт может выбираться по-разному, в зависимости от конкретного варианта обычных решений (или управлений) исходной задачи. Отметим прежде всего конструкцию расширения, применяемую в нелинейных задачах управления с геометрическими ограничениями (см. [1, гл. III, IV; 2; 3] и др.). Здесь требуемый компакт реализуется в пространстве

мерозначных функций или в пространстве регулярных борелевских мер на произведении метрических компактов, один из которых — отрезок на числовой прямой. В этом варианте в качестве оснащения используется топология, индуцированная $*$ -слабой топологией на пространстве, сопряженном к пространству непрерывных функций (в работе [1, гл. IV] используется другое предсопряженное пространство, но сама суть процедуры сохраняется).

В случае задач с импульсными ограничениями Н. Н. Красовским в работе [4] была предложена конструкция, использующая обобщенные функции. Эта конструкция стала основой для построения развитой теории импульсного управления (см. [5–8] и др.), активно применяемой в приложениях. В линейных задачах управления с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях нередко возникают осложнения, связанные с эффектом, имеющим смысл произведения разрывной функции на обобщенную. Для исследования таких задач был предложен (см. [9–11] и др.) подход, основанный на применении конечно-аддитивных (к.-а.) мер в качестве ОЭ и, в частности, в качестве обобщенных управлений (ОУ). Здесь ключевую роль играют к.-а. меры со свойством слабой абсолютной непрерывности (см. [12]) относительно заданной (и тоже, вообще говоря, к.-а.) меры, которую в задачах управления естественно отождествить с сужением меры Лебега на подсемейство σ -алгебры измеримых множеств. При выборе последнего следует учитывать особенности исходной задачи и возможности практической реализации обычных управлений как функций времени; это существенно в конструкциях с применением к.-а. мер, которые допускают зачастую конкретное описание на измеримых пространствах (ИП) с алгебрами и полуалгебрами множеств, но практически нереализуемы как ОЭ в случае стандартных ИП, оснащаемых σ -алгебрами своих п/м.

Следует подчеркнуть, что само использование к.-а. мер в качестве ОЭ связано с “хорошими” условиями компактности, определяемыми теоремой Алаоглу (см. [1, 1.3.12]). Здесь мы используем погружение к.-а. мер нужного типа в пространство ограниченных линейных функционалов на пространстве разрывных (точнее, ярусных) функций, допускающих равномерное приближение ступенчатыми. Между тем погружение ярусных, и в том числе ступенчатых, управлений в пространство к.-а. мер ограниченной вариации (с упомянутым свойством слабой абсолютной непрерывности) реализуется с помощью операции построения неопределенного интеграла по мере, являющейся здесь сужением меры Лебега. Таким образом, создается при наличии импульсных ограничений компакт ОУ, в который совокупность обычных управлений погружается в виде всюду плотного множества. Заметим, что в работах [9–11] данная конструкция была реализована в абстрактном виде, что позволило охватить единой схемой и целый ряд задач о достижимости, непосредственно не связанных с задачами управления. Больше внимание уделялось случаю неотрицательных (скалярных и векторных) обычных управлений (см., в частности, [10, гл. 3]). Вариант знакопеременных управлений исследовался (см. [10, разд. 3.9, 6.2–6.5]) в меньшей степени; в настоящей работе, мы напротив, уделяем ему основное внимание, отказываясь при этом от рассмотрения очень общих случаев, с тем чтобы получить конкретные условия устойчивости и асимптотической нечувствительности (при ослаблении части ограничений) задачи о достижимости в случае разрывных зависимостей в системе условий.

Автор имел неоценимую возможность обсуждать предлагаемый подход с Николаем Николаевичем Красовским. Это очень помогло в выборе направления и методов исследования.

1. Общие сведения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу “по определению”. Семейством называем *множество*, все элементы которого — множества. Если x и y — объекты, то $\{x; y\}$ есть def их неупорядоченная пара: $\{x; y\}$ — непустое множество со свойствами $(x \in \{x; y\}) \& (y \in \{x; y\}) \& (\forall z \in \{x; y\} (x = z) \vee (y = z))$. Тогда для любого объекта h в виде

$\{h\} \triangleq \{h; h\}$ имеем синглетон, содержащий h . Множества — объекты; поэтому для любых объектов u и v в виде $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$ имеем (см. [13, гл. II, §3]) упорядоченную пару (УП) с первым элементом u и вторым элементом v . Для всякой УП z через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z .

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H , $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$ и $\text{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Для двух множеств A и B через B^A обозначаем (см. [13, гл. II, §6]) множество всех отображений из A в B ; при $f \in B^A$ и $a \in A$ через $f(a)$, $f(a) \in B$, обозначается значение f в точке a . Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$.

В дальнейшем $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая; $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$; $\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq k) \& (k \leq q)\}$ при $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами; с учетом этого для любых множеств H и $n \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1, n}}$ используем H^n для множества всех кортежей $(h_i)_{i \in \overline{1, n}}$ со свойством $h_j \in H$ при $j \in \overline{1, n}$. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, а Y — множество, то

$$\mathfrak{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y : X \in \mathfrak{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)) \quad (1.1)$$

есть след $\mathfrak{X}$ на множество Y . Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})). \quad (1.2)$$

Специальные семейства, элементы топологии, конечно-аддитивные меры. Фиксируем далее в пределах данного раздела множество I и полагаем, что $\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\emptyset \in \mathcal{I}) \& (I \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I})\}$, получая семейство всех π -систем п/м I с “нулем” и “единицей” (см. [14, с. 14]);

$$(\text{top})[I] \triangleq \left\{ \tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \right\}$$

есть семейство всех топологий на I . Если $\tau \in (\text{top})[I]$, то (I, τ) — топологическое пространство (ТП), а $\mathbf{C}_I[\tau]$ (см. (1.2)) — семейство всех замкнутых в (I, τ) п/м I . Если $\mathcal{H}$ — семейство и S — множество, то $[\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Тогда при $\tau \in (\text{top})[I]$ и $S \in \mathcal{P}(I)$ имеем (см. [15, гл. 1; 16, с. 70]), что $[\mathbf{C}_I[\tau]](S) \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ и $\text{cl}(S, \tau) \triangleq \bigcap_{F \in [\mathbf{C}_I[\tau]](S)} F \in [\mathbf{C}_I[\tau]](S)$

есть замыкание S в (I, τ) . Далее, при $\tau \in (\text{top})[I]$ и $x \in I$ полагаем, что $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$, и определяем, следуя [15, гл. 1], фильтр $N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in N_\tau^0(x) : G \subset H\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ всех окрестностей (см. [15, гл. 1]) x в ТП (I, τ) . Если $\mathbf{D}$ — непустое множество, то через $(\text{DIR})[\mathbf{D}]$ обозначаем множество всех направлений (см. [15, гл. 2]) на множестве $\mathbf{D}$; при $\preceq \in (\text{DIR})[\mathbf{D}]$ пару $(\mathbf{D}, \preceq)$ называем *направленным множеством* (НМ). Если $(\mathbf{D}, \preceq)$ есть (непустое) НМ, H — множество и $h \in H^{\mathbf{D}}$, то триплет $(\mathbf{D}, \preceq, h)$ называем *направленностью* в H . Если $\tau \in (\text{top})[I]$, $(\mathbf{D}, \preceq, h)$ — направленность в I и $x \in I$, то

$$((\mathbf{D}, \preceq, h) \xrightarrow{\tau} x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall H \in N_\tau(x) \ \exists d \in \mathbf{D} \ \forall \delta \in \mathbf{D} \ (d \preceq \delta) \Rightarrow (h(\delta) \in H)). \quad (1.3)$$

В (1.3) определена сходимость по Морю — Смиту (см. [15, гл. 2]). Полагаем, что

$$\beta[I] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B} \ \forall B_2 \in \mathcal{B} \ \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\} \quad (1.4)$$

(семейство всех непустых направленных подсемейств $\mathcal{P}(I)$). Если (X, τ) , $X \neq \emptyset$, есть ТП, $r \in X^I$ и $\mathcal{J} \in \beta[I]$, то считаем, что

$$(\text{AS})[I; X; \tau; r; \mathcal{J}] \triangleq \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \text{cl}(r^1(J), \tau), \quad (1.5)$$

получая замкнутое в (X, τ) п/м X , именуемое *множеством притяжения* (МП). Свойства МП вида (1.5) см., в частности, в [9–11]; отметим и более общие конструкции в работе [17, разд. 3]. В случае, когда (см. [17, следствие 3.1]) (X, τ) , $X \neq \emptyset$, есть хаусдорфово ТП, $(K, \mathbf{t})$, $K \neq \emptyset$, — компактное ТП, $m \in K^I$, а $g \in X^K$ — непрерывное в смысле $(K, \mathbf{t})$ и (X, τ) отображение, то

$$(\text{AS})[I; X; \tau; g \circ m; \mathcal{J}] = g^1((\text{AS})[I; K; \mathbf{t}; m; \mathcal{J}]) \quad \forall \mathcal{J} \in \beta[I],$$

где символ $\circ$ используется при обозначении композиции отображений. Используем ИП с полуалгебрами множеств. При $\mathcal{I} \in \pi[I]$, $A \in \mathcal{P}(I)$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_n(A, \mathcal{I}) \triangleq \left\{ (\Sigma_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{I}^n \mid \left(A = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i \right) \& (\Sigma_p \cap \Sigma_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, n} \quad \forall q \in \overline{1, n} \setminus \{p\}) \right\}. \quad (1.6)$$

Кроме того, при $\mathcal{I} \in \pi[I]$ и $A \in \mathcal{P}(I)$ полагаем, что

$$\mathbf{D}(A, \mathcal{I}) \triangleq \left\{ \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{I}) \mid \left(A = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma \right) \& (\forall A \in \mathcal{K} \quad \forall B \in \mathcal{K} \quad (A \cap B \neq \emptyset) \Rightarrow (A = B)) \right\}. \quad (1.7)$$

Итак, для заданного (широко понимаемого) ИП $(I, \mathcal{I})$ введены семейства всех упорядоченных (см. (1.6)) и неупорядоченных (см. (1.7)) конечных разбиений $A \in \mathcal{P}(I)$. При этом

$$\Pi[I] \triangleq \left\{ \mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall \Sigma \in \mathcal{I} \quad \exists n \in \mathbb{N}: \Delta_n(I \setminus \Sigma, \mathcal{I}) \neq \emptyset \right\} \in \mathcal{P}'(\pi[I])$$

есть семейство всех полуалгебр п/м I . Алгебры и σ -алгебры п/м I являются частными случаями полуалгебр. Фиксируем до конца настоящего раздела полуалгебру $\mathcal{I} \in \Pi[I]$. Тогда

$$(\text{add})[\mathcal{I}] \triangleq \left\{ \mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \mid \mu(L) = \sum_{i=1}^n \mu(L_i) \quad \forall L \in \mathcal{I} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (L_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \Delta_n(L, \mathcal{I}) \right\}$$

есть линейное пространство всех вещественнозначных (в/з) к.-а. мер на $\mathcal{I}$; здесь и ниже (см. [16, гл. 2, 3]) линейные операции, умножение и порядок в пространствах в/з функций определяются поточечно. Конус $(\text{add})_+[\mathcal{I}] \triangleq \left\{ \mu \in (\text{add})[\mathcal{I}] \mid 0 \leq \mu(\Sigma) \quad \forall \Sigma \in \mathcal{I} \right\}$ всех неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{I}$ играет в дальнейшем важную роль; в виде

$$\mathbb{A}(\mathcal{I}) \triangleq \left\{ \mu \in (\text{add})[\mathcal{I}] \mid \exists c \in [0, \infty[: \sum_{i=1}^n |\mu(L_i)| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (L_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \Delta_n(I, \mathcal{I}) \right\} \quad (1.8)$$

имеем линейное пространство всех в/з к.-а. мер на $\mathcal{I}$ ограниченной вариации. Вообще при $\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ и $L \in \mathcal{I}$ определено множество

$$(\mathcal{I} - \text{VAR})_L[\mu] \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists (L_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \Delta_n(L, \mathcal{I}): \xi = \sum_{i=1}^n |\mu(L_i)| \right\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+).$$

С учетом (1.8) получаем, что при $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{I}) \quad \exists c \in \mathbb{R}_+: (\mathcal{I} - \text{VAR})_I[\mu] \in \mathcal{P}'([0, c])$; это свойство доставляет полную вариацию к.-а. меры μ : $V_\mu[\mathcal{I}] \triangleq \sup((\mathcal{I} - \text{VAR})_I[\mu]) \in \mathbb{R}_+$. При $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{I}]$ непременно $(\mathcal{I} - \text{VAR})_I[\mu] = \{\mu(I)\}$, а потому $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{I})$; при этом $V_\mu[\mathcal{I}] = \mu(I)$. Итак, $(\text{add})_+[\mathcal{I}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{I})$. При $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{I})$ и $\Sigma \in \mathcal{I}$ непременно $(\mathcal{I} - \text{VAR})_\Sigma[\mu] \subset [0, V_\mu[\mathcal{I}]]$; тогда $\mathbf{v}_\mu \triangleq (\sup((\mathcal{I} - \text{VAR})_\Sigma[\mu]))_{\Sigma \in \mathcal{I}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathcal{I}}$; более того (см. [16, (4.11.7), (4.11.8)]) $\mathbf{v}_\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{I}]$,

$$(\mu^+ \triangleq (1/2)(\mathbf{v}_\mu + \mu) \in (\text{add})_+[\mathcal{I}]) \& (\mu^- \triangleq (1/2)(\mathbf{v}_\mu - \mu) \in (\text{add})_+[\mathcal{I}])$$

реализуют равенства $\mu = \mu^+ - \mu^-$ и $\mathbf{v}_\mu = \mu^+ + \mu^-$ (простое следствие разложения Жордана). В виде $\mu \mapsto V_\mu[\mathcal{I}]: \mathbb{A}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ имеем сильную норму на $\mathbb{A}(\mathcal{I})$.

2. Банахово пространство ярусных функций и его сопряженное

В настоящем разделе I — непустое множество и $\mathcal{I} \in \Pi[I]$. В виде $\mathbb{B}(I) \triangleq \{g \in \mathbb{R}^I \mid \exists c \in \mathbb{R}_+ : |g(x)| \leq c \ \forall x \in I\}$ имеем линейное пространство ограниченных в/з функций на I с оснащением в виде $\sup$ -нормы $\|\cdot\|_I$, задаваемой выражением $\|h\|_I \triangleq \sup(\{|h(x)| : x \in I\}) \in \mathbb{R}_+ \ \forall h \in \mathbb{B}(I)$; итак, $\|\cdot\|_I$ есть отображение $g \mapsto \|g\|_I : \mathbb{B}(I) \rightarrow \mathbb{R}_+$, причем $(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|_I)$ — банахово пространство (см. [16, § 2.6]). Если $H \in \mathcal{P}(I)$, то $\chi_H[I] \in \mathbb{B}(I)$ — индикатор H , рассматриваемого как п/м I : $(\chi_H[I](x) \triangleq 1 \ \forall x \in H) \ \& \ (\chi_H[I](\tilde{x}) \triangleq 0 \ \forall \tilde{x} \in I \setminus H)$. В виде

$$B_0(I, \mathcal{I}) \triangleq \left\{ f \in \mathbb{R}^I \mid \exists n \in \mathbb{N} \ \exists (\alpha_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathbb{R}^n \ \exists (\Sigma_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \Delta_n(I, \mathcal{I}) : f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{\Sigma_i}[I] \right\}$$

имеем (см. [16, следствие 2.7.1]) линейную оболочку $\{\chi_L[I] : L \in \mathcal{I}\}$; $B_0(I, \mathcal{I}) \subset \mathbb{B}(I)$. Через $\mathfrak{I}_I$ обозначим топологию $\mathbb{B}(I)$, порожденную нормой $\|\cdot\|_I$; тогда (см. [16, (2.6.11), (2.7.24), (2.7.25)])

$$B(I, \mathcal{I}) \triangleq \text{cl}(B_0(I, \mathcal{I}), \mathfrak{I}_I) = \{f \in \mathbb{B}(I) \mid \exists (f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B_0(I, \mathcal{I})^{\mathbb{N}} : (f_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows f\},$$

где $\rightrightarrows$ обозначает равномерную сходимост (см. [16, (2.6.9)]). Элементы $B_0(I, \mathcal{I})$ называем *ступенчатыми*, а элементы $B(I, \mathcal{I})$ — *ярусными функциями* на $(I, \mathcal{I})$. Тогда $B(I, \mathcal{I})$ с нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|_I)$, является банаховым пространством; по сути дела, это вариант известного пространства $B(S, \Sigma)$ (см. [18, гл. IV]). Следуя [16, (3.5.1)], через $B^*(I, \mathcal{I})$ обозначим множество всех ограниченных линейных функционалов на $B(I, \mathcal{I})$ с традиционной нормой $\|\cdot\|_I^*$ (см. [16, (3.5.4)]) пространства, сопряженного к банахову. Используем для целей интегрирования функций из $B(I, \mathcal{I})$ по к.-а. мерам из $\mathbb{A}(\mathcal{I})$ простейшую конструкцию из [16, § 3.3] и свойство [16, (3.5.2)]. Для наших целей важно положение (см. [16, теорема 3.6.1]) о том, что

$$\mu \mapsto \left(\int_I f \, d\mu \right)_{f \in B(I, \mathcal{I})} : \mathbb{A}(\mathcal{I}) \rightarrow B^*(I, \mathcal{I}) \quad (2.1)$$

есть изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{I})$ в сильной норме на $(B^*(I, \mathcal{I}), \|\cdot\|_I^*)$ (см. также [18, гл. IV, разд. 5]). Полагаем при $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{I})$, $K \in \text{Fin}(B(I, \mathcal{I}))$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$

$$N_{\mathcal{I}}^*(\mu, K, \varepsilon) \triangleq \left\{ \nu \in \mathbb{A}(\mathcal{I}) \mid \left| \int_E f \, d\mu - \int_E f \, d\nu \right| < \varepsilon \ \forall f \in K \right\}; \quad (2.2)$$

тогда $*$ -слабая топология $\tau_*(\mathcal{I}) \in (\text{top})[\mathbb{A}(\mathcal{I})]$ имеет вид $\tau_*(\mathcal{I}) \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{I})) \mid \forall \mu \in G \ \exists K \in \text{Fin}(B(I, \mathcal{I})) \ \exists \varepsilon \in]0, \infty[: N_{\mathcal{I}}^*(\mu, K, \varepsilon) \subset G\}$. Семейство всех множеств (2.2) образует базу ТП

$$(\mathbb{A}(\mathcal{I}), \tau_*(\mathcal{I})),$$

которое есть локально выпуклый σ -компакт (счетное объединение компактов). Потребуется две топологии на $\mathbb{A}(\mathcal{I})$, отвечающие подпространствам тихоновской степени $\mathbb{R}$ с индексным множеством $\mathcal{I}$ при оснащении $\mathbb{R}$ обычной $|\cdot|$ -топологией $\tau_{\mathbb{R}}$ и дискретной топологией τ_{∂} (подробнее см. [10, разд. 3.5]). Если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{I})$, $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{I})$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то $N_{\mathcal{I}}^{\otimes}(\mu, \mathcal{K}, \varepsilon) \triangleq \{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{I}) \mid |\mu(L) - \nu(L)| < \varepsilon \ \forall L \in \mathcal{K}\}$. Тогда

$$\tau_{\otimes}(\mathcal{I}) \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{I})) \mid \forall \mu \in G \ \exists \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{I}) \ \exists \varepsilon \in]0, \infty[: N_{\mathcal{I}}^{\otimes}(\mu, \mathcal{K}, \varepsilon) \subset G\} \in (\text{top})[\mathbb{A}(\mathcal{I})]$$

(топология поточечной сходимости в $\mathbb{A}(\mathcal{I})$). В виде $(\mathbb{A}(\mathcal{I}), \tau_{\otimes}(\mathcal{I}))$ имеем требуемое ТП.

Далее, при $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{I})$ и $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{I})$ полагаем, что $N_{\mathcal{I}}^{(\partial)}(\mu, \mathcal{K}) \triangleq \{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{I}) \mid \mu(L) = \nu(L) \forall L \in \mathcal{K}\}$. Далее, с учетом построений [9, § 4.2] получаем, что

$$\tau_0(\mathcal{I}) \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{I})) \mid \forall \mu \in G \exists \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{I}): N_{\mathcal{I}}^{(\partial)}(\mu, \mathcal{K}) \subset G\} \in (\text{top})[\mathbb{A}(\mathcal{I})]. \quad (2.3)$$

В виде $(\mathbb{A}(\mathcal{I}), \tau_0(\mathcal{I}))$ имеем подпространство тихоновской степени $\mathbb{R}$ в дискретной топологии. Легко видеть (см. [11, (4.6.19), (4.6.21)]), что $(\tau_{\otimes}(\mathcal{I}) \subset \tau_0(\mathcal{I})) \& (\tau_{\otimes}(\mathcal{I}) \subset \tau_*(\mathcal{I}))$. Эти свойства определяют нужные в дальнейшем взаимосвязи ТП $(\mathbb{A}(\mathcal{I}), \tau_*(\mathcal{I}))$, $(\mathbb{A}(\mathcal{I}), \tau_{\otimes}(\mathcal{I}))$ и $(\mathbb{A}(\mathcal{I}), \tau_0(\mathcal{I}))$; первое из упомянутых ТП имеет “хорошие” условия компактности подпространств, характеризующиеся теоремой Алаоглу (см. [18, гл. IV]).

3. Слабая абсолютная непрерывность

В настоящем и последующих разделах фиксируем непустое множество E , полуалгебру $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и к.-а. меру $\eta \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. В виде

$$(\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \triangleq \{\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall L \in \mathcal{L} (\eta(L) = 0) \Rightarrow (\mu(L) = 0)\} \quad (3.1)$$

имеем выпуклый конус в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, а в виде (см. [11, (4.9.4)])

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\eta}[\mathcal{L}] &\triangleq \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} (\eta(L) = 0) \Rightarrow (\mu(L) = 0)\} = \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \mathbf{v}_{\mu} \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid (\mu^+ \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]) \& (\mu^- \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta])\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

— подпространство $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, порожденное конусом (3.1). Элементы (3.2) называем *слабо абсолютно η -непрерывными* к.-а. мерами на $\mathcal{L}$. В связи с (3.1), (3.2) понадобится понятие неопределенного η -интеграла функций из $B(E, \mathcal{L})$; отметим, в частности, что $\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Напомним построения из [16, § 3.7], используя [16, предложение 2.7.7]: $fg \in B(E, \mathcal{L})$ при $f \in B(E, \mathcal{L})$ и $g \in B(E, \mathcal{L})$. В силу [16, (3.7.2)] имеем по свойствам (2.1), что $\forall f \in B(E, \mathcal{L}) \exists! \nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$\int_E u f d\eta = \int_E u d\nu \quad \forall u \in B(E, \mathcal{L}).$$

Последнее свойство позволяет при $f \in B(E, \mathcal{L})$ ввести к.-а. меру $f * \eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ со свойством $\int_E u f d\eta = \int_E u d(f * \eta) \quad \forall u \in B(E, \mathcal{L})$; при этом (см. [16, (3.7.3), предложение 3.7.2])

$$f * \eta = \left(\int_L f d\eta \right)_{L \in \mathcal{L}} \in \mathbb{A}_{\eta}[\mathcal{L}]. \quad (3.3)$$

Используем положения из [10, § 3.7] и [9, § 4.3] о свойствах плотности множеств, элементами которых являются неопределенные интегралы, но ограничиваемся применением в (3.3) ступенчатых функций с целью использования в качестве обычных управлений. Сейчас отметим только два положения из [9; 10]. Так (см. [10, теорема 3.7.4]),

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\eta}[\mathcal{L}] &= \text{cl}(\{f * \eta: f \in B_0(E, \mathcal{L})\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}(\{f * \eta: f \in B_0(E, \mathcal{L})\}, \tau_{\otimes}(\mathcal{L})) \\ &= \text{cl}(\{f * \eta: f \in B_0(E, \mathcal{L})\}, \tau_0(\mathcal{L})). \end{aligned}$$

Далее учитываем, что $|f| \triangleq (|f(x)|)_{x \in E} \in B_0^+(E, \mathcal{L})$ при $f \in B_0(E, \mathcal{L})$, где $B_0^+(E, \mathcal{L}) = \{h \in B_0(E, \mathcal{L}) \mid 0 \leq h(x) \quad \forall x \in E\}$. Полагаем при $b \in \mathbb{R}_+$, что $\Xi_b(\mathcal{L}, \eta) \triangleq \{\mu \in \mathbb{A}_{\eta}[\mathcal{L}] \mid V_{\mu}[\mathcal{L}] \leq b\}$ и

$$M_b(\mathcal{L}, \eta) \triangleq \left\{ f \in B_0(E, \mathcal{L}) \mid \int_E |f| d\eta \leq b \right\}; \quad (3.4)$$

тогда согласно [10, теорема 3.7.5] имеем

$$\begin{aligned}\Xi_b(\mathcal{L}, \eta) &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in M_b(\mathcal{L}, \eta)\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}(\{f * \eta : f \in M_b(\mathcal{L}, \eta)\}, \tau_\otimes(\mathcal{L})) \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in M_b(\mathcal{L}, \eta)\}, \tau_0(\mathcal{L})).\end{aligned}\quad (3.5)$$

В связи с [10, (6.2.10)] потребуется специальная направленность ступенчатых функций (см. (1.7)). При $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ введем функционал $\theta[\mu] \in \mathbb{R}^\mathcal{L}$: полагаем при $\mathcal{L}_0 \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \eta(L) \neq 0\}$, что

$$(\theta[\mu](L) \triangleq \frac{\mu(L)}{\eta(L)} \quad \forall L \in \mathcal{L}_0) \& (\theta[\mu](L) \triangleq 0 \quad \forall L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0).$$

Следуя [10, с. 244], при $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ и $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ вводим $\Theta_\mu[\mathcal{K}] \in B_0(E, \mathcal{L})$ посредством правила: $\Theta_\mu[\mathcal{K}](x) \triangleq \theta[\mu](L) \quad \forall L \in \mathcal{K} \quad \forall x \in L$. Наделяем $\mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ направлением $\prec \in (\text{DIR})[\mathbf{D}(E, \mathcal{L})]$, определяемым посредством вписанности: $(\mathcal{U} \prec \mathcal{V}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U} : V \subset U)$ при $\mathcal{U} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ и $\mathcal{V} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$; тем самым определены непустое НМ $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec)$ и, при $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, направленность $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \Theta_\mu[\cdot])$ в $B_0(E, \mathcal{L})$, где $\Theta_\mu[\cdot]$ есть $\mathcal{K} \mapsto \Theta_\mu[\mathcal{K}] : \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \rightarrow B_0(E, \mathcal{L})$. Напомним ключевое свойство из работы [10, (6.2.10)], полагая при $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, что $\Theta_\mu[\cdot] * \eta \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]^{\mathbf{D}(E, \mathcal{L})}$ является (см. (3.3)) отображением $\mathcal{K} \mapsto \Theta_\mu[\mathcal{K}] * \eta : \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$:

$$\begin{aligned}((\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \Theta_\mu[\cdot] * \eta) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \mu) \& ((\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \Theta_\mu[\cdot] * \eta) \xrightarrow{\tau_\otimes(\mathcal{L})} \mu) \\ \& ((\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \Theta_\mu[\cdot] * \eta) \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \mu).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Предложение 1. Если $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, $n \in \mathbb{N}$ и $(\tilde{h}_i)_{i \in \overline{1, n}} \in B_0(E, \mathcal{L})^n$, то

$$\exists \tilde{\mathcal{K}} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \quad (\tilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}) \Rightarrow \left(\int_E \tilde{h}_j \Theta_\mu[\mathcal{K}] d\eta = \int_E \tilde{h}_j d\mu \quad \forall j \in \overline{1, n} \right).$$

Доказательство следует из (2.3) и (3.6) с учетом определения элементарного интеграла в [16, § 3.2] (см. также [16, (3.3.8)]). $\square$

Отметим следствие первого положения в (3.6), полагая при $k \in \mathbb{N}$, что $\tau_\mathbb{R}^{(k)} \in (\text{top})[\mathbb{R}^k]$ — это топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^k$.

Предложение 2. Если $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, $n \in \mathbb{N}$ и $(h_i)_{i \in \overline{1, n}} \in B(E, \mathcal{L})^n$, то для отображения $\mathcal{H}$ вида $\mathcal{K} \mapsto \left(\int_E h_i \Theta_\mu[\mathcal{K}] d\eta \right)_{i \in \overline{1, n}} : \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ реализуется сходимость

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \mathcal{H}) \xrightarrow{\tau_\mathbb{R}^{(n)}} \left(\int_E h_i d\mu \right)_{i \in \overline{1, n}}.$$

Доказательство следует из определения $\tau_*(\mathcal{L})$ (см. (2.2)) и первого положения в (3.6). $\square$

В заключение раздела напомним (см. [10, (3.7.7), (6.2.9)]): при $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ и $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$\int_E |\Theta_\mu[\mathcal{K}]| d\eta = V_{\Theta_\mu[\mathcal{K}] * \eta}[\mathcal{L}] \leq V_\mu[\mathcal{L}]. \quad (3.7)$$

Заметим здесь же, что (см. [10, (3.7.6)]) при $b \in \mathbb{R}_+$ множество $\Xi_b(\mathcal{L}, \eta)$ компактно в ТП

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L}));$$

в нашем случае это означает, что (см. (1.1)) топология

$$\tau_b^*(\mathcal{L}, \eta) \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{\Xi_b(\mathcal{L}, \eta)} = \{\Xi_b(\mathcal{L}, \eta) \cap G : G \in \tau_*(\mathcal{L})\} \in (\text{top})[\Xi_b(\mathcal{L}, \eta)] \quad (3.8)$$

превращает множество $\Xi_b(\mathcal{L}, \eta)$ в непустой компакт

$$(\Xi_b(\mathcal{L}, \eta), \tau_b^*(\mathcal{L}, \eta)), \quad (3.9)$$

т. е. в компактное хаусдорфово ТП. Отметим, что из (3.7) непосредственно следует, что

$$\Theta_\mu[\mathcal{K}] \in M_b(\mathcal{L}, \eta) \quad \forall b \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \Xi_b(\mathcal{L}, \eta) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}). \quad (3.10)$$

4. Задача о достижимости при ограничениях асимптотического характера

Ниже рассматривается постановка, моделирующая линейную задачу о достижимости при импульсных ограничениях и краевых условиях. Фиксируем $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$,

$$((h_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{m}}} \in B(E, \mathcal{L})^{\mathbf{m}}) \& ((s_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}}} \in B(E, \mathcal{L})^{\mathbf{n}}); \quad (4.1)$$

в этих терминах определяем вектор-функционалы:

$$f \mapsto \left(\int_E h_i f d\eta \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{m}}} : M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \quad (4.2)$$

$$f \mapsto \left(\int_E s_i f d\eta \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}}} : M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \quad (4.3)$$

обозначаемые через $\mathbf{h}$ и $\mathbf{s}$ соответственно (далее в разд. 5, 6 обозначения $h_1, \dots, h_{\mathbf{m}}, s_1, \dots, s_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{h}$ и $\mathbf{s}$ понимаются, если не оговорено противное, в смысле (4.1)–(4.3)). Мы полагаем, что в $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ задано непустое замкнутое множество Y :

$$Y \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^{\mathbf{n}}}[\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})}] \setminus \{\emptyset\}. \quad (4.4)$$

Указанное множество (4.4) формирует ограничение на $f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$:

$$\mathbf{s}(f) = \left(\int_E s_i f d\eta \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}}} \in Y. \quad (4.5)$$

Нас будет интересовать вопрос о том, какие значения $\mathbf{h}(f) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ можно получить в классе $f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ со свойством (4.5). Ясно, что ответ на данный вопрос доставляет множество

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}). \quad (4.6)$$

С практической точки зрения может представлять, однако, интерес вопрос о соотношении множеств (4.6) и $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\tilde{Y}))$, где $\tilde{Y} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ “близко” к Y (см. (4.4)). Асимптотическую версию вопроса получаем, используя в качестве $\tilde{Y}$ множества из того или иного направленного (см. (1.4)) семейства $\mathcal{Y} \in \beta[\mathbb{R}^{\mathbf{n}}]$, реализующего Y в виде пересечения всех своих множеств. Это приводит к замене (4.6) на МП (см. (1.5)). Понятно, что семейство $\mathcal{Y}$ проявляет себя в данной конструкции посредством системы прообразов $\mathbf{s}^{-1}(\tilde{Y})$, $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}$, формирующей ограничения асимптотического характера (ОАХ). В связи с (4.4) заметим, что топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \in (\text{top})[\mathbb{R}^k]$, где $k \in \mathbb{N}$, порождается нормой $\|\cdot\|_k$ вида $z \mapsto \max_{l \in \overline{1, k}} |z(l)| : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_+$, тогда $\|\tilde{z}\|_k \in \mathbb{R}_+$ есть при

$\tilde{z} \in \mathbb{R}^k$ наибольшее из чисел $|\tilde{z}(l)|$, $l \in \overline{1, k}$. Естественный вариант подмены Y надмножеством $\tilde{Y}$ можно связать с использованием ε -окрестностей Y при $\varepsilon > 0$. Итак, при $\varepsilon \in]0, \infty[$ полагаем, что

$$\mathbf{O}[Y; \varepsilon] \triangleq \{z \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \mid \exists y \in Y : \|y - z\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon\}, \quad (4.7)$$

получая открытую ε -окрестность Y ; в случае (4.7) условие (4.5) заменяется требованием $\mathbf{s}(f) \in \mathbf{O}[Y; \varepsilon]$. Соответственно, теперь множество (4.6) логично заменить на

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \varepsilon])), \quad (4.8)$$

где $\varepsilon \in]0, \infty[$, рассматривая (4.8) как достижимое множество (ДМ) при ε -ослаблении условия (4.5). Допуская вариацию параметра точности, приходим к направленному семейству

$$\mathfrak{N} \triangleq \{\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \varepsilon]): \varepsilon \in]0, \infty[\} \in \beta[M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)], \quad (4.9)$$

порождающему ОАХ, которым естественным образом сопоставляется МП

$$\mathfrak{Y} \triangleq (\text{AS})[M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta); \mathbb{R}^{\mathbf{m}}; \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}; \mathbf{h}; \mathfrak{N}] = \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \varepsilon])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}). \quad (4.10)$$

Следуя [9; 10], будем рассматривать и другой, вообще говоря, вариант ослабления (4.5). Для этого мы зафиксируем множество $\mathbf{J} \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n}})$ со свойством

$$s_j \in B_0(E, \mathcal{L}) \quad \forall j \in \mathbf{J} \quad (4.11)$$

(случай $\mathbf{J} = \emptyset$ не исключается). Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то

$$\hat{\mathbf{O}}[Y; \varepsilon] \triangleq \{z \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \mid \exists y \in Y: (y(j) = z(j) \quad \forall j \in \mathbf{J}) \& (|y(j) - z(j)| < \varepsilon \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \mathbf{J})\}; \quad (4.12)$$

рассматриваем следующий вариант ослабления (4.5): $\mathbf{s}(f) \in \hat{\mathbf{O}}[Y; \varepsilon]$. Ясно, что (см. (4.7), (4.12))

$$\hat{\mathbf{O}}[Y; \varepsilon] \subset \mathbf{O}[Y; \varepsilon] \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (4.13)$$

В соответствии с (4.12) формируем направленное семейство

$$\hat{\mathfrak{N}} \triangleq \{\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \varepsilon]): \varepsilon \in]0, \infty[\} \in \beta[M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)] \quad (4.14)$$

и отвечающее ему МП $\hat{\mathfrak{Y}}$:

$$\hat{\mathfrak{Y}} \triangleq (\text{AS})[M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta); \mathbb{R}^{\mathbf{m}}; \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}; \mathbf{h}; \hat{\mathfrak{N}}] = \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \varepsilon])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}). \quad (4.15)$$

Заметим, что из (4.10), (4.13) и (4.15) легко следует вложение

$$\hat{\mathfrak{Y}} \subset \mathfrak{Y}. \quad (4.16)$$

Используя к.-а. меры из $\Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ в качестве ОЭ, введем вектор-функционалы:

$$\mu \mapsto \left(\int_E h_i d\mu \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{m}}}: \Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \quad (4.17)$$

$$\mu \mapsto \left(\int_E s_j d\mu \right)_{j \in \overline{1, \mathbf{n}}}: \Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \quad (4.18)$$

обозначаемые через $\tilde{\mathbf{h}}$ и $\tilde{\mathbf{s}}$ соответственно; Y (см. (4.4)) формирует ограничение на $\mu \in \Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$:

$$\tilde{\mathbf{s}}(\mu) = \left(\int_E s_j d\mu \right)_{j \in \overline{1, \mathbf{n}}} \in Y.$$

Следовательно, $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y))$ играет роль обобщенного ДМ. Рассмотрим связь $\mathfrak{Y}$, $\hat{\mathfrak{Y}}$ и $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y))$ (см. [17, разд. 6]). Триплеты $(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}, \mathbf{h})$ и $(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})}, \mathbf{s})$ удовлетворяют условиям [17, разд. 6]; в частности, $(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})})$ и $(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})})$ — хаусдорфовы ТП. Далее (см. (3.5)),

$$\mathbf{p} \triangleq (f * \eta)_{f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)} \in \Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)^{M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)} \quad (4.19)$$

обладает тем свойством, что (см. (3.5))

$$\Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) = \text{cl}(\mathbf{p}^1(M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)), \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}(\mathbf{p}^1(M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)), \tau_0(\mathcal{L})), \quad (4.20)$$

причем (см. (3.8), (3.9)) в виде

$$(\Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta), \tau_{\mathbf{b}}^*(\mathcal{L}, \eta)) \quad (4.21)$$

имеем непустой компакт. Отметим здесь же, что согласно (4.19) при $f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$

$$\mathbf{h}(f)(i) = \int_E h_i f d\eta = \int_E h_i d(f * \eta) = \int_E h_i d\mathbf{p}(f) = \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{p}(f))(i) = (\tilde{\mathbf{h}} \circ \mathbf{p})(f)(i) \quad \forall i \in \overline{1, \mathbf{m}}.$$

Получили равенство $\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{h}} \circ \mathbf{p}$. Аналогичным образом $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}} \circ \mathbf{p}$. В итоге

$$(\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{h}} \circ \mathbf{p}) \& (\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}} \circ \mathbf{p}). \quad (4.22)$$

В силу (3.8) и (3.9) вектор-функционал $\tilde{\mathbf{h}}$ (см. (4.17)) непрерывен как отображение из ТП (4.21) в $(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})})$, а $\tilde{\mathbf{s}}$ (см. (4.18)) непрерывен как отображение из (4.21) в $(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})})$. Согласно (3.5) и (4.20)

$$\text{cl}(\mathbf{p}^1(M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)), \tau_{\mathbf{b}}^*(\mathcal{L}, \eta)) = \text{cl}(\mathbf{p}^1(M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)), \tau_*(\mathcal{L})) \cap \Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) = \Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta). \quad (4.23)$$

Тогда (см. (4.21)–(4.23)) $(\Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta), \tau_{\mathbf{b}}^*(\mathcal{L}, \eta), \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{s}})$ — компактифицируемая модель расширения для $(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}, \mathbf{h})$ и $(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})}, \mathbf{s})$ (см. [17, определение 6.1]). Поскольку $\forall z \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \setminus Y \exists \varepsilon \in]0, \infty[: \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \mid \|\tilde{z} - z\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon\} \cap \mathbf{O}[Y; \varepsilon] = \emptyset$ (см. [17, (5.4)]), то согласно [17, теорема 6.1]

$$\mathfrak{Y} = \tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)). \quad (4.24)$$

Теорема 1. *Справедлива цепочка равенств $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) = \mathfrak{Y} = \hat{\mathfrak{Y}}$.*

Доказательство. В силу (4.16) и (4.24) достаточно установить, что

$$\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) \subset \hat{\mathfrak{Y}}. \quad (4.25)$$

Воспользуемся [17, (3.1), (3.2)]. Выберем произвольно $z_0 \in \tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y))$, после чего подберем $\mu_0 \in \tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)$ со свойством $z_0 = \tilde{\mathbf{h}}(\mu_0)$; $z_0 \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ и согласно (4.18) $\mu_0 \in \Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$. Кроме того,

$$\tilde{\mathbf{s}}(\mu_0) = \left(\int_E s_j d\mu_0 \right)_{j \in \overline{1, \mathbf{n}}} \in Y. \quad (4.26)$$

Рассмотрим направленность $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \Theta_{\mu_0}[\cdot])$ в $B_0(E, \mathcal{L})$ со свойствами (3.6) при $\mu = \mu_0$. Из (3.4) и (3.10) получаем, что $\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$. Поэтому $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \Theta_{\mu_0}[\cdot])$ есть направленность в $M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$. В силу *-слабой непрерывности $\tilde{\mathbf{h}}$ получаем, что

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \tilde{\mathbf{h}} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \eta)) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}} \tilde{\mathbf{h}}(\mu_0).$$

При этом (см. (4.22)) в случае $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{h}} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \eta))(\mathcal{K}) &= \tilde{\mathbf{h}}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] * \eta) = \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{p}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}])) \\ &= (\tilde{\mathbf{h}} \circ \mathbf{p})(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) = \mathbf{h}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) = (\mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot])(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Поэтому $\tilde{\mathbf{h}} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \eta) = \mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]$, а следовательно, имеем сходимость

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}} z_0. \quad (4.27)$$

Выберем произвольно $\mathbb{Y}_0 \in \hat{\mathfrak{N}}$. Тогда согласно (4.14) для некоторого $\varepsilon_0 \in]0, \infty[$

$$\mathbb{Y}_0 = \mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \varepsilon_0]). \quad (4.28)$$

Напомним (4.26). В силу непрерывности $\tilde{\mathbf{s}}$ имеем из первого положения (3.6) сходимость $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \tilde{\mathbf{s}} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \eta)) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})}} \tilde{\mathbf{s}}(\mu_0)$. При $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ ввиду (4.22)

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{s}} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \eta))(\mathcal{K}) &= \tilde{\mathbf{s}}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] * \eta) = \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{p}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}])) \\ &= (\tilde{\mathbf{s}} \circ \mathbf{p})(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) = \mathbf{s}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) = (\mathbf{s} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot])(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Поэтому $\tilde{\mathbf{s}} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \eta) = \mathbf{s} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]$ и, как следствие, $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \mathbf{s} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})}} \tilde{\mathbf{s}}(\mu_0)$. Это означает, в частности, что для некоторого $\mathcal{K}^0 \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ истинна импликация $(\mathcal{K}^0 \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\|(\mathbf{s} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot])(\mathcal{K}) - \tilde{\mathbf{s}}(\mu_0)\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon_0)$. При этом $(\mathbf{s} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot])(\mathcal{K}) = \mathbf{s}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}])$ при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$; тогда $(\mathcal{K}^0 \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\|\mathbf{s}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) - \tilde{\mathbf{s}}(\mu_0)\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon_0)$. Иными словами, $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$(\mathcal{K}^0 \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (|\mathbf{s}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}])(j) - \tilde{\mathbf{s}}(\mu_0)(j)| < \varepsilon_0 \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}).$$

При $j \in \mathbf{J}$ (см. (4.11)) $s_j \in B_0(E, \mathcal{L})$. Для некоторого $\tilde{\mathcal{K}}^0 \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ имеем $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$(\tilde{\mathcal{K}}^0 \prec \mathcal{K}) \Rightarrow \left(\int_E s_j \Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] d\eta = \int_E s_j d\mu_0 \quad \forall j \in \mathbf{J} \right)$$

(см. предложение 1). Выберем мажоранту $\mathcal{K}_*$ для множества $\{\mathcal{K}^0; \tilde{\mathcal{K}}^0\}$; итак, $\mathcal{K}_* \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$: $(\mathcal{K}^0 \prec \mathcal{K}_*) \& (\tilde{\mathcal{K}}^0 \prec \mathcal{K}_*)$. Пусть $\mathcal{L} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ таково, что $\mathcal{K}_* \prec \mathcal{L}$. Тогда $\mathbf{s}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{L}]) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ обладает свойствами $(\mathbf{s}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{L}])(j) = \tilde{\mathbf{s}}(\mu_0)(j) \quad \forall j \in \mathbf{J}) \& (|\mathbf{s}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{L}])(j) - \tilde{\mathbf{s}}(\mu_0)(j)| < \varepsilon \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \mathbf{J})$. В силу (4.26) $\mathbf{s}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{L}]) \in \hat{\mathbf{O}}[Y; \varepsilon]$, т. е. $\Theta_{\mu_0}[\mathcal{L}] \in \mathbb{Y}_0$ согласно (4.28). Так как $\mathcal{L} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ со свойством $\mathcal{K}_* \prec \mathcal{L}$ выбиралось произвольно, установлено следующее положение: $\exists \mathfrak{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \quad (\mathfrak{K} \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] \in \mathbb{Y}_0)$. Итак, $\forall \mathbb{Y} \in \hat{\mathfrak{N}} \quad \exists \mathfrak{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \quad (\mathfrak{K} \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] \in \mathbb{Y})$. Поскольку $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \Theta_{\mu_0}[\cdot])$ — направленность в $M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$, то (см. [17, (3.1), (3.2)] с учетом (4.27)) $z_0 \in (\text{AS})[M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta); \mathbb{R}^{\mathbf{m}}; \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}; \mathbf{h}; \hat{\mathfrak{N}}]$ и (см. (4.15)) $z_0 \in \hat{\mathfrak{N}}$; имеем (4.25). $\square$

Заметим, что равенство $\mathfrak{Y} = \hat{\mathfrak{Y}}$ означает свойство асимптотической нечувствительности при ослаблении условия (4.5) в направлениях, определяемых индексами из $\mathbf{J}$ (см. (4.12)). Рассмотрим некоторые частные случаи. Отметим следующее очевидное свойство

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)). \quad (4.29)$$

Предложение 3. *Истинна импликация*

$$(s_j \in B_0(E, \mathcal{L}) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}) \Rightarrow (\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) = \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})})). \quad (4.30)$$

Доказательство. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (4.30), т. е.

$$s_j \in B_0(E, \mathcal{L}) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}. \quad (4.31)$$

Покажем, что справедливо равенство

$$\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) = \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}). \quad (4.32)$$

В силу (4.29) для этого достаточно установить вложение

$$\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}). \quad (4.33)$$

Итак, пусть $z_0 \in \tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y))$. Тогда $z_0 \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ и для некоторой к.-а. меры $\mu_0 \in \tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)$

$$z_0 = \tilde{\mathbf{h}}(\mu_0) = \left(\int_E h_i d\mu_0 \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{m}}}; \quad (4.34)$$

$\mu_0 \in \Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ по определению $\tilde{\mathbf{s}}$, а потому (см. (3.7), (3.10)) $\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$.

Из (3.6) и (3.8) следует, что $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \tilde{\mathbf{h}} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \eta)) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}} \tilde{\mathbf{h}}(\mu_0)$; используется свойство непрерывности $\tilde{\mathbf{h}}$. При $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ имеем (см. (4.3)), что

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{h}} \circ (\Theta_{\mu_0}[\cdot] * \eta))(\mathcal{K}) &= \tilde{\mathbf{h}}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] * \eta) = \left(\int_E h_i d(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] * \eta) \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{m}}} \\ &= \left(\int_E h_i \Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] d\eta \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{m}}} = \mathbf{h}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) = (\mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot])(\mathcal{K}), \end{aligned}$$

а потому реализуется сходимость $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}} \tilde{\mathbf{h}}(\mu_0)$. Как следствие (см. (4.34)), получаем сходимость $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot]) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}} z_0$. По выбору μ_0 имеем включение

$$\tilde{\mathbf{s}}(\mu_0) \in Y. \quad (4.35)$$

Далее, в силу (4.31) и предложения 1 получаем для некоторого $\tilde{\mathcal{K}} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$, что $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$(\tilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}) \Rightarrow \left(\int_E s_j \Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] d\eta = \int_E s_j d\mu_0 \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}} \right).$$

С учетом (4.3), (4.18) получаем следующее свойство: $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$(\tilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\mathbf{s}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) = \tilde{\mathbf{s}}(\mu_0)).$$

Исходя из (4.35), имеем теперь, что $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$(\tilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}] \in \mathbf{s}^{-1}(Y)). \quad (4.36)$$

Пусть $\varepsilon \in]0, \infty[$. Тогда $\Pi_* \triangleq \{z \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}} \mid \|z_0 - z\|_{\mathbf{m}} < \varepsilon_*\} \in N_{\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}}^0(z_0)$, а потому для некоторого $\mathcal{K}_* \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ имеем при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$, что $(\mathcal{K}_* \prec \mathcal{K}) \Rightarrow ((\mathbf{h} \circ \Theta_{\mu_0}[\cdot])(\mathcal{K}) \in \Pi_*)$. Иными словами, при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ со свойством $\mathcal{K}_* \prec \mathcal{K}$

$$\mathbf{h}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}]) \in \Pi_*. \quad (4.37)$$

При этом $\tilde{\mathcal{K}} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ и $\mathcal{K}_* \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$, и по свойствам НМ $(\tilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}_*) \& (\mathcal{K}_* \prec \mathcal{K}^*)$ для некоторого $\mathcal{K}^* \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$. В силу (4.36) $\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}^*] \in \mathbf{s}^{-1}(Y)$, причем (см. (4.37)) $\mathbf{h}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}^*]) \in \Pi_*$. Из упомянутых включений имеем $\mathbf{h}(\Theta_{\mu_0}[\mathcal{K}^*]) \in \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \cap \Pi_*$. Поскольку выбор $\varepsilon_* \in]0, \infty[$ был произвольным, $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists z \in \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) : \|z_0 - z\|_{\mathbf{m}} < \varepsilon$. Но в этом случае $z_0 \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})})$, чем и завершается проверка (4.33), а следовательно, и (4.32). Итак (см. (4.31), (4.32)), требуемая импликация (4.30) установлена. $\square$

Предложение 4. *Истинна импликация*

$$((h_i \in B_0(E, \mathcal{L}) \quad \forall i \in \overline{1, \mathbf{m}}) \& (s_j \in B_0(E, \mathcal{L}) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}})) \Rightarrow (\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) = \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))). \quad (4.38)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинна посылка доказываемой импликации, т. е.

$$(h_i \in B_0(E, \mathcal{L}) \ \forall i \in \overline{1, \mathbf{m}}) \& (s_j \in B_0(E, \mathcal{L}) \ \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}). \quad (4.39)$$

Согласно предложению 3 имеем (см. (4.39)) равенство $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) = \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})})$, из которого вытекает следующее вложение

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \subset \tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)). \quad (4.40)$$

Выберем произвольно $z_* \in \tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y))$. Тогда $z_* \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ и для некоторой к.-а. меры $\mu_* \in \tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)$

$$z_* = \tilde{\mathbf{h}}(\mu_*) = \left(\int_E h_i d\mu_* \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{m}}}. \quad (4.41)$$

Рассмотрим направленность $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \Theta_{\mu_*}[\cdot])$ в $B_0(E, \mathcal{L})$. При этом $\mu_* \in \Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ (см. (4.18)), а потому $\mu_* \in \mathbb{A}_{\eta}[\mathcal{L}]$ и $V_{\mu_*}[\mathcal{L}] \leq \mathbf{b}$. С учетом (3.7) и (3.10) получаем, что $\Theta_{\mu_*}[\mathcal{K}] \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$. Итак, $(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec, \Theta_{\mu_*}[\cdot])$ есть направленность в $M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$. Далее, из (4.39) и предложения 1 вытекает, что для некоторого $\mathcal{K}_* \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ реализуется следующее положение: при $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ со свойством $\mathcal{K}_* \prec \mathcal{K}$

$$\mathbf{h}(\Theta_{\mu_*}[\mathcal{K}]) = \tilde{\mathbf{h}}(\mu_*) = z_* \quad (4.42)$$

(см. (4.41)). Вместе с тем из предложения 1 и (4.39) следует, что для некоторого $\tilde{\mathcal{K}} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ реализуется свойство: $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \ (\tilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}) \Rightarrow (\mathbf{s}(\Theta_{\mu_*}[\mathcal{K}]) = \tilde{\mathbf{s}}(\mu_*))$.

При этом $\mathcal{K}_* \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ и $\tilde{\mathcal{K}} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$. Тогда по свойствам НМ для некоторого $\tilde{\mathcal{K}}_* \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ реализуется $(\mathcal{K}_* \prec \tilde{\mathcal{K}}_*) \& (\tilde{\mathcal{K}} \prec \tilde{\mathcal{K}}_*)$. Для $\Theta_{\mu_*}[\tilde{\mathcal{K}}_*] \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ имеем свойство

$$\mathbf{s}(\Theta_{\mu_*}[\tilde{\mathcal{K}}_*]) = \tilde{\mathbf{s}}(\mu_*) \in Y \quad (4.43)$$

(напомним, что $\mu_* \in \tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)$, причем (см. (4.42)) $\mathbf{h}(\Theta_{\mu_*}[\tilde{\mathcal{K}}_*]) = z_*$). Поэтому (см. (4.43)) $\Theta_{\mu_*}[\tilde{\mathcal{K}}_*] \in \mathbf{s}^{-1}(Y)$, а в таком случае $z_* \in \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))$, чем и завершается проверка вложения $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))$. С учетом (4.40) получаем требуемое равенство $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) = \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))$. Итак (см. (4.39)), установлена истинность импликации (4.38). $\square$

Следует подчеркнуть, что в силу (1.5), (4.10), (4.15) и теоремы 1 $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^{\mathbf{m}}}[\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}]$, а потому предложение 4 указывает условия, достаточные для замкнутости множества $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))$.

5. Окрестностная реализация свойства асимптотической нечувствительности

В настоящем разделе мы рассмотрим полезное следствие теоремы 1, а затем и предложений 3 и 4. Здесь опираемся на работу [19, следствие 3.1.5]. В этой связи заметим, что $\tilde{\mathbf{h}}$ есть непрерывное отображение компакта (4.21) в хаусдорфово ТП $(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})})$. Поэтому (см. [19, теорема 3.1.12]) отображение $\tilde{\mathbf{h}}$ замкнуто. Кроме того, $\tilde{\mathbf{h}}^1(\Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta))$ — компактное множество (см. [11, (2.8.5)]). Отметим следствие положения [19, следствие 3.1.5]: если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbb{R}^{\mathbf{m}}}[\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}])$ и $G \in \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}$, то в случае, когда в семействе $\mathcal{X}$ имеется компактное (в смысле $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}$) множество и $\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X \subset G$, непременно $\exists k \in \mathbb{N} \ \exists (X_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \mathcal{X}^k : \bigcap_{i=1}^k X_i \subset G$; называем данное положение свойством **С**. По аналогии с (4.7) введем при $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ открытую ε -окрестность

$$\mathbb{O}[D; \varepsilon] \triangleq \{z \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}} \mid \exists d \in D : \|d - z\|_{\mathbf{m}} < \varepsilon\} \in \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})} \quad (5.1)$$

множества D ; множество (5.1) используем в качестве G в свойстве **С** (само множество D можно конструировать в виде пересечения множеств непустого подсемейства $\mathbf{C}_{\mathbb{R}^{\mathbf{m}}}[\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}]$).

Предложение 5. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то

$$\begin{aligned} \exists \zeta \in]0, \infty[: \tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) &\subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \\ &\subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \mathbb{O}[\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)); \varepsilon]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon_0 \in]0, \infty[$; определим в свойстве (C) G в виде $\mathbb{O}[\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)); \varepsilon_0]$. Далее будем использовать (4.10) и (4.15). В самом деле,

$$\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) \subset \mathbb{O}[\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)); \varepsilon_0],$$

а потому (см. (4.10), теорема 1)

$$\bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \varepsilon])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \mathbb{O}[\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)); \varepsilon_0];$$

$\mathcal{X} \triangleq \{\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \varepsilon])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) : \varepsilon \in]0, \infty[\}$ есть непустое семейство замкнутых множеств. Каждое из этих множеств содержится в компакте $\tilde{\mathbf{h}}^1(\Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta))$ и замкнуто в ТП

$$(\tilde{\mathbf{h}}^1(\Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}|_{\tilde{\mathbf{h}}^1(\Xi_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta))}),$$

которое компактно; $X \in \mathcal{X}$ компактно в упомянутом ТП и в силу транзитивности операции перехода к подпространству компактно в $(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})})$. Итак, условия, обеспечивающие свойство (C), в нашем случае выполнены и для некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $(\varepsilon_i)_{i \in \overline{1, k}} \in]0, \infty[^k$

$$\bigcap_{i=1}^k \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \varepsilon_i])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \mathbb{O}[\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)); \varepsilon_0].$$

Тогда $\zeta \triangleq \min_{i \in \overline{1, k}} \varepsilon_i \in]0, \infty[$ и, как легко видеть,

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \bigcap_{i=1}^k \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \varepsilon_i])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \mathbb{O}[\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)); \varepsilon_0]. \quad (5.3)$$

Далее, из (4.13) и (5.3) следует цепочка вложений

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \mathbb{O}[\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)); \varepsilon_0]. \quad (5.4)$$

Согласно (4.15) и теореме 1 $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})})$, откуда (см. (5.4)) вытекает (5.2) при $\varepsilon = \varepsilon_0$. Поскольку $\varepsilon_0 \in]0, \infty[$ выбиралось произвольно, предложение доказано. $\square$

Следствие 1. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то

$$\begin{aligned} \exists \zeta \in]0, \infty[: \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) &\subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \\ &\subset \mathbb{O}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}); \varepsilon]. \end{aligned}$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in]0, \infty[$; подберем (см. (5.2)) $\zeta \in]0, \infty[$ так, что

$$\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \mathbb{O}[\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)); \varepsilon]. \quad (5.5)$$

Из (5.5) вытекает, однако, что

$$\mathbb{O}[\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)); \varepsilon] \subset \mathbb{O}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}); \varepsilon]. \quad (5.6)$$

Теперь из (5.5) и (5.6) получаем цепочку вложений

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \mathbb{O}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}); \varepsilon]. \quad \square$$

Предложение 6. *Истинна импликация*

$$(\mathbf{J} = \overline{1, \mathbf{n}}) \Rightarrow (\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists \zeta \in]0, \infty[: \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])) \subset \mathbb{O}[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)); \varepsilon]). \quad (5.7)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{J} = \overline{1, \mathbf{n}}$. Тогда $s_j \in B_0(E, \mathcal{L}) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}$. Фиксируем $\varepsilon \in]0, \infty[$. С учетом следствия 1 подберем $\zeta \in]0, \infty[$ со свойством

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \mathbb{O}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}); \varepsilon]. \quad (5.8)$$

Для нас существенно последнее вложение. В силу (4.12) $Y \subset \hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta]$, а потому, как следствие, $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta]))$. Учтем (4.13). Тогда

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])). \quad (5.9)$$

В нашем случае (ступенчатых функций $s_1, \dots, s_{\mathbf{n}}$) из (4.12) следует равенство $\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta] = Y$. В соответствии с (5.8) $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \zeta])) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}) \subset \mathbb{O}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}); \varepsilon]$, где $\mathbb{O}[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)); \varepsilon] = \mathbb{O}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{m})}); \varepsilon]$. Поэтому (см. (5.9), (4.15))

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \zeta])) \subset \mathbb{O}[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)); \varepsilon].$$

Поскольку $\zeta \in]0, \infty[$, а $\varepsilon \in]0, \infty[$ выбиралось произвольно, получаем утверждение следствия импликации (5.7). $\square$

6. Пример (причаливание к неподвижной точке)

Рассмотрим теперь простейший пример задачи управления материальной точкой (МТ)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = f(t), \quad (6.1)$$

$t \in [0, 1]$, полагая для простоты, что $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Итак, в начальный момент времени МТ покоится в нуле. В качестве f в (6.1) будем использовать кусочно-постоянные (к.-п.) и непрерывные справа (н.спр.) в/з функции на $[0, 1[$ со свойством

$$\int_0^1 |f(t)| dt \leq 2. \quad (6.2)$$

Через $\mathbb{F}$ обозначаем сейчас множество всех к.-п. и н.спр. в/з функций на $[0, 1[$ со свойством (6.2). Рассмотрим вопрос о переводе МТ (6.1) в состояние

$$x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0; \quad (6.3)$$

такой перевод можно рассматривать как причаливание данной МТ к точке 1 по координате.

Легко видеть (при условии (6.2)), что (6.3) неосуществимо. С другой стороны,

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists f \in \mathbb{F}: \left(\left| \int_0^1 (1-t)f(t) dt - 1 \right| < \varepsilon \right) \& \left(\int_0^1 f(t) dt = 0 \right).$$

Данное свойство может быть реализовано в классе управлений $\mathbf{f}_{\delta} \in \mathbb{F}$, где $\delta \in]0, 1/2[$, вида $(\mathbf{f}_{\delta}(t) \triangleq 1/\delta \quad \forall t \in [0, \delta]) \& (\mathbf{f}_{\delta}(t) \triangleq 0 \quad \forall t \in [\delta, 1-\delta]) \& (\mathbf{f}_{\delta}(t) \triangleq -(1/\delta) \quad \forall t \in [1-\delta, 1])$.

Полагаем до конца настоящего раздела, что $E = [0, 1[$ и $\mathcal{L} = \{[\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z) [: z \in [0, 1] \times [0, 1]\}$, получая в виде $(E, \mathcal{L})$ ИП с полуалгеброй множеств, т. е. $\mathcal{L} \in \Pi[E]$. Данное ИП рассматривалось в работах [16, § 3.9] и [20, гл. 8]. В частности, в [16, с. 184] введена функция длины, определенная на $\mathcal{L}$ и являющаяся, конечно, неотрицательной к.-а. мерой. В этой связи условимся, что в настоящем разделе к.-а. мера η из разд. 4 есть упомянутая функция длины, т. е. $\eta \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ такова, что $\eta(\emptyset) \triangleq 0$ и $\eta(L) \triangleq \sup(L) - \inf(L)$ при $L \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$. Более того (см. [20, замечание 8.4.1]), данная мера η счетно-аддитивна и является сужением на $\mathcal{L}$ меры Лебега. Укажем на очевидную связь η -интегрирования в смысле [16, гл. 3] и интегрирования по Риману непрерывных функций на $[0, 1]$, отмеченную в работе [21, § 8] (см. [21, (8.8)]), которая на самом деле реализуется не только в случае непрерывных функций. Вернемся к (6.3). Тогда

$$\mathbb{F}_\partial \triangleq \left\{ f \in \mathbb{F} \mid \left(\int_0^1 (1-t)f(t) dt = 1 \right) \& \left(\int_0^1 f(t) dt = 0 \right) \right\} = \emptyset \quad (6.4)$$

(используемые в (6.4) римановские интегралы совпадают здесь с соответствующими η -интегралами в смысле [16, гл. 3]; подобные обстоятельства учитываются и в дальнейшем; см. [16, § 3.4]).

Напомним, что (6.3) может быть реализовано на $\mathbb{F}$ с любой степенью точности. Рассмотрим теперь вопросы, связанные с реализацией (6.3) в классе ОУ; речь пойдет о мерах из $\Xi_2(\mathcal{L}, \eta)$. Если $t \in E$, то через δ_t обозначаем далее в настоящем разделе след меры Дирака, сосредоточенной в t , на полуалгебре $\mathcal{L}$: $\delta_t \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, и при этом $\forall L \in \mathcal{L}$

$$((t \in L) \Rightarrow (\delta_t(L) = 1)) \& ((t \notin L) \Rightarrow (\delta_t(L) = 0)); \quad (6.5)$$

мера δ_t счетно-аддитивна. Семейство $\mathcal{F}_0 \triangleq \{[a, 1[: a \in E\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ есть ультрафильтр ИП $(E, \mathcal{L})$, и мы полагаем, что $\nu_0 \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ обладает (см. [16, с. 180, 181]) представлением $(\nu_0(L) \triangleq 1 \ \forall L \in \mathcal{F}_0) \& (\nu_0(L) \triangleq 0 \ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{F}_0)$. При $g \in B(E, \mathcal{L})$ в виде ν_0 -интеграла g имеем (см. [16, (3.9.37), (3.9.48)]) предел слева функции g в точке 1, т. е.

$$\int_E g d\nu_0 = \lim_{t \uparrow 1} g(t) \in \mathbb{R} \quad (6.6)$$

(см. [16, определение 3.9.1]). Тогда с учетом (6.5) получаем, что

$$\int_E (1-t)(\delta_0 - \nu_0)(dt) = \int_E (1-t)\delta_0(dt) - \int_E (1-t)\nu_0(dt) = 1 - 0 = 1.$$

Более того, имеет место равенство (получаем синглетон)

$$\left\{ \mu \in \Xi_2(\mathcal{L}, \eta) \mid \left(\int_E (1-t)\mu(dt) = 1 \right) \& (\mu(E) = 0) \right\} = \{\delta_0 - \nu_0\}. \quad (6.7)$$

7. Область достижимости и релаксация краевых условий

В настоящем разделе рассматривается одна конкретизация построений разд. 5, 6; она отвечает вопросу, связанному со свойствами ОД линейной системы при релаксации краевых условий в случае импульсных ограничений на выбор управления.

Итак, фиксируем $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ со свойством $t_0 < \vartheta_0$. Полагаем в данном разделе, что $E = [t_0, \vartheta_0[$ (в предыдущем разделе анализировался частный случай $t_0 = 0, \vartheta_0 = 1$). Полагаем также, что полуалгебра $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ состоит только из множеств, измеримых по Лебегу,

и $[c, d] \in \mathcal{L}$ при $c \in [t_0, \vartheta_0]$ и $d \in [t_0, \vartheta_0]$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ в качестве размерности фазового вектора системы

$$\dot{x}(t) = f(t)m(t), \quad (7.1)$$

функционирующей на промежутке $[t_0, \vartheta_0]$; итак, $x(t) \in \mathbb{R}^n$. В (7.1) $m = m(\cdot)$ есть отображение из E в $\mathbb{R}^n$ с компонентами $m_j \triangleq (m(t)(j))_{t \in E} \in \mathbb{R}^E \quad \forall j \in \overline{1, n}$. Полагаем, что все эти компоненты суть ярусные функции на $(E, \mathcal{L})$, т. е. $m_j \in B(E, \mathcal{L}) \quad \forall j \in \overline{1, n}$. Следовательно, вектор-функция m в (7.1) ярусна покомпонентно.

Выбор системы вида (7.1) не является экзотическим, поскольку рассматривается задача управления с фиксированным моментом окончания и скалярным управлением. Можно воспользоваться в случае линейной системы более общего вида известным преобразованием (см., например, [22, с. 85, 86]). В качестве меры η используем след меры Лебега на полуалгебру $\mathcal{L}$; она счетно-аддитивна. Исходим из того, что начальное состояние системы (7.1) совпадает с началом координат, т. е. $x(t_0) = x_0$, где $x_0(j) = 0 \quad \forall j \in \overline{1, n}$ (в противном случае можно использовать сдвиг множества, аналогичного (4.4)). Сохраняем ресурсное ограничение $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+$ и полагаем в (7.1), что $f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$. Сопоставляем управлению $f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ траекторию $\mathbf{x}_f$ в виде непрерывной функции из $[t_0, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$ со значениями

$$\mathbf{x}_f(t) \triangleq x_0 + \int_{[t_0, t[} f(\tau)m(\tau)\eta(d\tau) \quad \forall t \in [t_0, \vartheta_0], \quad (7.2)$$

определяя интеграл вектор-функции как вектор интегралов ее скалярных компонентов. Впрочем, нам потребуется только терминальное состояние (7.2):

$$\mathbf{x}_f(\vartheta_0) = x_0 + \int_E f(\tau)m(\tau)\eta(d\tau) = \left(\int_E f(\tau)m_i(\tau)\eta(d\tau) \right)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathbb{R}^n \quad \forall f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) \quad (7.3)$$

(учтено зануление x_0). Согласно (7.3) имеем тогда, что

$$\mathbf{x}_{f,i}(\vartheta_0) \triangleq \mathbf{x}_f(\vartheta_0)(i) = \int_E f(\tau)m_i(\tau)\eta(d\tau) = \int_E f m_i d\eta \in \mathbb{R} \quad \forall f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) \quad \forall i \in \overline{1, n}.$$

Пусть $q \in \overline{1, n}$ и $r \in \overline{1, n}$. Фиксируем $Y \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}^q}[\tau_{\mathbb{R}}^{(q)}] \setminus \{\emptyset\}$ и определяем краевое условие в виде

$$(\mathbf{x}_{f,j}(\vartheta_0))_{j \in \overline{1, q}} \in Y, \quad (7.4)$$

где $f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$. Кроме того, полагаем $p \triangleq n - r + 1$, получая $p \in \mathbb{N}$ и равенство $\{(r-1)+i : i \in \overline{1, p}\} = \overline{r, n}$. Тогда результатом действия f полагаем вектор

$$(\mathbf{x}_{f, (r-1)+i}(\vartheta_0))_{i \in \overline{1, p}} \in \mathbb{R}^p. \quad (7.5)$$

Определяем ОД по части координат как множество всех векторов (7.5) при переборе $f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$ со свойством (7.4).

Теперь мы введем аналоги (4.2), (4.3) при $\mathbf{m} = p$ и $\mathbf{n} = q$. Итак,

$$(h_i \triangleq m_{(r-1)+i} \quad \forall i \in \overline{1, p}) \& (s_j \triangleq m_j \quad \forall j \in \overline{1, q}). \quad (7.6)$$

Далее вводим вектор-функционалы $\mathbf{h}: M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{s}: M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^q$; при $f \in M_{\mathbf{b}}(\mathcal{L}, \eta)$

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}(f) \triangleq & \left(\int_E h_i f d\eta \right)_{i \in \overline{1, p}} = (\mathbf{x}_{f, (r-1)+i}(\vartheta_0))_{i \in \overline{1, p}}) \\ & \& (\mathbf{s}(f) \triangleq \left(\int_E s_j f d\eta \right)_{j \in \overline{1, q}} = (\mathbf{x}_{f,j}(\vartheta_0))_{j \in \overline{1, q}}), \end{aligned} \quad (7.7)$$

где учитывается (7.6). Согласно (7.7) нужная ОД есть $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))$; получаем (при $\mathbf{m} = p$ и $\mathbf{n} = q$) вариант задачи, исследуемой в разд. 5 и 6. Соответственно, все положения разд. 5, 6 здесь сохраняют силу (рассматриваем МП (4.10) и (4.15), отвечающие ОАХ (4.9), (4.14) при упомянутой конкретизации $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$; вводим варианты $\tilde{\mathbf{h}}$ и $\tilde{\mathbf{s}}$; создаем ОД $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y))$ (по части координат) в классе ОУ, совпадающую с каждым из упомянутых МП ввиду теоремы 1, после чего получаем положения разд. 6 относительно свойств асимптотической нечувствительности и устойчивости ОД при ослаблении ограничения (7.4)).

Теперь вернемся к обсуждению примера предыдущего раздела, полагая в дальнейшем $t_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 1$. Кроме того, напомним, что полуалгебра $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, где $E = [0, 1[$, сейчас определяется в виде $\mathcal{L} \triangleq \{\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z) [: z \in [0, 1] \times [0, 1]\}$. Далее, при $2 < n$ введем некоторую детализацию компонент вектор-функции m (продолжаем изучение системы (7.1), полагая $t_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 1$). Пусть $q = 2$ и при $t \in E$

$$(m_1(t) = 1 - t) \& (m_2(t) = 1). \quad (7.8)$$

Итак (см. (7.8)), мы фактически рассматриваем (6.1) как подсистему (7.1). Полагаем, что $\mathbf{J} = \{2\}$ (выделили в число “особых” координат фазового вектора только одну). Далее, множество Y (см. (4.4)), где $\mathbf{n} = q = 2$, в нашем случае состоит из одного вектора $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ с координатами $\mathbf{y}(1) \triangleq 1$ и $\mathbf{y}(2) \triangleq 0$. При $\varepsilon \in]0, \infty[$ множество $\mathbf{O}[Y; \varepsilon]$ является фактически прямоугольником $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$, а множество $\hat{\mathbf{O}}[Y; \varepsilon]$ отождествимо с $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\times \{0\}$. Посредством (7.8) определяются функции s_1 и s_2 соответственно; имеем $\mathbf{b} \triangleq 2$, $\varepsilon \in]0, \infty[$,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{O}[Y; \varepsilon]) = \left\{ f \in M_2(\mathcal{L}, \eta) \mid \left(\left| \int_E (1 - t) f(t) \eta(dt) - 1 \right| < \varepsilon \right) \right. \\ \left. \& \left(\left| \int_E f(t) \eta(dt) \right| < \varepsilon \right) \right\} \in \mathcal{P}(M_2(\mathcal{L}, \eta)), \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{-1}(\hat{\mathbf{O}}[Y; \varepsilon]) = \left\{ f \in M_2(\mathcal{L}, \eta) \mid \left(\left| \int_E (1 - t) f(t) \eta(dt) - 1 \right| < \varepsilon \right) \right. \\ \left. \& \left(\int_E f(t) \eta(dt) = 0 \right) \right\} \in \mathcal{P}(M_2(\mathcal{L}, \eta)). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Сохраняем предположения относительно r и p , а также соглашения (7.6). Посредством первого условия в (7.7) формируется вектор-функционал $\mathbf{h}$ (учитывается первое положение в (7.6)). С учетом (4.9) и (7.9) формируем направленное семейство $\mathfrak{N}$ в $M_2(\mathcal{L}, \eta)$; аналогично с использованием (4.14) и (7.10) получаем направленное семейство $\hat{\mathfrak{N}}$. Как следствие, реализуются варианты МП $\mathfrak{Y}$ и $\hat{\mathfrak{Y}}$ (см. (4.10), (4.15)). Рассмотрим конкретный вариант множества $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y))$, используя (4.17) и (4.18). Исходя из одноэлементности Y , имеем (см. (6.7), (7.8))

$$\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y) = \left\{ \mu \in \Xi_2(\mathcal{L}, \eta) \mid \left(\int_E (1 - t) \mu(dt) = 1 \right) \& (\mu(E) = 0) \right\} = \{\delta_0 - \nu_0\},$$

получая синглетон, отвечающий к.-а. мере $\delta_0 - \nu_0$. Поэтому в нашем случае

$$\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) = \{\tilde{\mathbf{h}}(\delta_0 - \nu_0)\}, \quad (7.11)$$

т. е. ОД в классе ОУ есть синглетон, отвечающий элементу $\tilde{\mathbf{h}}(\delta_0 - \nu_0)$, где согласно (7.6)

$$\tilde{\mathbf{h}}(\delta_0 - \nu_0) = \left(\int_E h_i d(\delta_0 - \nu_0) \right)_{i \in \overline{1, p}} = \left(\int_E m_{(r-1)+i} d(\delta_0 - \nu_0) \right)_{i \in \overline{1, p}} \in \mathbb{R}^p. \quad (7.12)$$

В силу (7.11) и теоремы 1 вектор (7.12) определяет МП $\mathfrak{Y}$ и $\hat{\mathfrak{Y}}$: в нашем случае

$$\mathfrak{Y} = \hat{\mathfrak{Y}} = \tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) = \{\tilde{\mathbf{h}}(\delta_0 - \nu_0)\}, \quad (7.13)$$

причем согласно (7.12) и [16, предложение 3.4.1] имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{h}}(\delta_0 - \nu_0) &= \left(\int_E h_i d\delta_0 - \int_E h_i d\nu_0 \right)_{i \in \overline{1,p}} = \left(h_i(0) - \int_E h_i d\nu_0 \right)_{i \in \overline{1,p}} \\ &= \left(h_i(0) - \lim_{t \uparrow 1} h_i(t) \right)_{i \in \overline{1,p}} = \left(m_{(r-1)+i}(0) - \lim_{t \uparrow 1} m_{(r-1)+i}(t) \right)_{i \in \overline{1,p}}, \end{aligned}$$

где учтены представления (6.6) и (7.6). Напомним в связи с (7.13), что $\mathbb{F}_\partial = \emptyset$. При этом согласно (6.4) и (7.8)

$$\mathbf{s}^{-1}(Y) = \mathbf{s}^{-1}(\{y\}) = \left\{ f \in M_2(\mathcal{L}, \eta) \mid \left(\int_0^1 (1-t)f(t) dt = 1 \right) \& \left(\int_0^1 f(t) dt = 0 \right) \right\} = \mathbb{F}_\partial.$$

Поэтому в рассматриваемом случае $\mathbf{s}^{-1}(Y) = \emptyset$, а тогда $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) = \emptyset = \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(p)})$. С учетом (7.13) получаем, что (в примере) $\tilde{\mathbf{h}}^1(\tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y)) \neq \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \tau_{\mathbb{R}}^{(p)})$. Возвращаясь к (7.13), отметим (см. (7.9), (7.10)), что требование зануления $x_2(1)$ следует признать “грубым”: ε -ослабление данного условия не влияет (при $\varepsilon \downarrow 0$) на структуру МП. С использованием предложения 5 и следствия 1 упомянутому свойству “грубости” (асимптотической нечувствительности) можно придать окрестностную форму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 620 р.
2. **Гамкрелидзе Р.В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. 230 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 р.
5. **Халанай А.** Качественная теория импульсных систем (науч. изд.). Пер. с румын. / А. Халанай, Д. Векслер. М.: Мир, 1971. 309 с.
6. **Завалицин С.Т., Сесекин А.Н.** Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
7. **Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.** Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2003. 256 с. ISBN 5-9221-0352-0
8. **Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.** Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005. 429 с.
9. **Ченцов А.Г.** Конечно-аддитивные меры и расширения абстрактных задач управления // Современная математика и ее приложения. Оптимальное управление. Тбилиси: Изд-во Ин-та кибернетики АН Грузии. 2004. Т. 17.
10. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p. doi: 10.1007/978-94-017-0805-0
11. **Chentsov A.G., Morina S.I.** Extensions and relaxations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0
12. **Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M.** Theory of charges. A study of finitely additive measures. NY: Acad. Press, 1983. 315 p.
13. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
14. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
15. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 298 с.

16. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2009. 388 с.
17. **Ченцов А.Г.** Расширение абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 184–217.
18. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы: Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
19. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
20. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010.
21. **Ченцов А. Г.** Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск: Ср.-Урал. книжное изд-во, 1985. 126 с.
22. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

Поступила 19.04.2024

После доработки 15.05.2024

Принята к публикации 20.05.2024

Ченцов Александр Георгиевич

д-р физ.-мат. наук

чл.-корр. РАН, профессор

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

620108, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16;

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*. NY, Academic Press, 1972, 531 p. doi: 10.1016/C2013-0-11669-8. Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nyimi i funktsional'nyimi uravneniyami*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 620 p.
2. Gamkrelidze R.V. *Principles of optimal control theory*. NY, Springer, 1978, 175 p. doi: 10.1007/978-1-4684-7398-8. Original Russian text was published in Gamkrelidze R.V., *Osnovy optimal'nogo upravleniya*, Tbilisi, Tbilisi Univ. Publ., 1975, 230 p.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. This book is substantially revised version of the monograph: Krasovskii N.N., Subbotin A.I., *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
4. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
5. Halanau A., Wexler D. *Teoria calitativa a sistemelor cu impulsuri*. Bucuresti, Acad. Rep. Soc. Romina, 1968, 313 p. Translated to Russian under the title *Kachestvennaya teoriya impul'snykh sistem*, Moscow, Mir Publ., 1971. 309 p.
6. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snyye protsessy. Modeli i prilozheniya* [Impulse processes. Models and applications]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 256 p.
7. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noye impul'snoye upravleniye s prilozheniyami* [Optimal impulse control with applications]. Fizmatlit Publ., 2003, 256 p. ISBN: 5-9221-0352-0.
8. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snymi upravleniyami* [Optimization of dynamic systems with impulse controls]. Moscow, Nauka Publ., 2005, 429 p. ISBN: 5-02-033458-8.
9. Chentsov A.G. *Konechno-additivnyye mery i rasshireniya abstraktnykh zadach upravleniya* [Finite-additive measures and extensions of abstract control problems]. Tbilisi, Acad. Sci. Georgia. In-te of Cybernetics Publ., 2004. Ser. Modern Math. and Its Appl., vol. 17, Optimal control.
10. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publ., 1997, 322 p. doi: 10.1007/978-94-017-0805-0
11. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 2002, 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0

12. Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M. *Theory of charges. A study of finitely additive measures*. NY, Acad. Press, 1983, 315 p.
13. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*. Warszawa, PWN Polish Scient. Publ., 1967. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
14. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [The theory of stochastic processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. ISBN: 978-5-9221-0335-0.
15. Kelley J.L. *General topology*. Springer Science & Business Media, 1975, 298 p.
16. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* [Elements of finitely additive measure theory, I]. Yekaterinburg, Ural State Tech. Univ., 2008, 388 p. ISBN: 978-5-321-01408-0.
17. Chentsov A.G. Extensions of abstract problems of attainability: nonsequential version. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2007, vol. 259, suppl. 2, pp. S46–S82. doi: 10.1134/S0081543807060041
18. Dunford N., Schwartz J. *Linear operators: General theory*, NY, London, Intersci. Publ., 1958. ISBN: 9780470226056. Translated to Russian under the title *Lineinye operatory: Obshchaya teoriya*, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1962, 895 p.
19. Engelking R. *General topology*, Warsaw, PWN, 1977. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
20. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* [Elements of finitely additive measure theory, II]. Yekaterinburg, Ural State Tech. Univ., 2010. ISBN: 978-5-321-01684-8.
21. Chentsov A.G. *Prilozheniya teorii mery k zadacham upravleniya* [Applications of measure theory to control problems]. Sverdlovsk, Sredne-Ural'skoye Knizhnoye Izd-vo, 1985, 126 p.
22. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniy* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.

Received April 19, 2024

Revised May 15, 2024

Accepted May 20, 2024

Aleksandr Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: chentsov@imm.uran.ru.

Cite this article as: A. G. Chentsov. Some questions related to the extension of reachability problems in the class of finitely additive measures. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 293–313.