

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Д. В. Хлопин

Рассматривается задача управления на бесконечном промежутке со слабо обгоняющим критерием оптимальности. В таких задачах необходимое для такого критерия условие (Д. В. Хлопин, 2023) на бесконечности, совместимое при этом с принципом максимума, может выделить континуум решений сопряженной системы. С другой стороны, предложенное А. В. Кряжимским и С. М. Асеевым (2004) условие в виде формулы типа Коши всегда выделяет ровно одну сопряженную траекторию, которая зачастую удовлетворяет соотношениям принципа максимума в рамках задачи со свободным правым концом. Поэтому в данной работе найдены асимптотические предположения на систему, при которых именно это решение (или модификации на его основе для задач с асимптотическими терминальными ограничениями) решает принцип максимума Понтрягина. Полученные в работе асимптотические предположения развивают недавние результаты Д. В. Хлопина (2018, 2023), С. М. Асеева, В. М. Вельова (2019) и С. М. Асеева (2023).

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, асимптотическое краевое условие, бесконечный горизонт, единственность сопряженной траектории, условие трансверсальности на бесконечности, слабо обгоняющая оптимальность.

D. V. Khlopin. On an adjoint trajectory in infinite-horizon control problems.

An optimal control problem is considered on an infinite interval with a weakly overtaking optimality criterion. In such problems, the necessary (D.V. Khlopin, 2023) condition at infinity for such a criterion, compatible with the maximum principle, can give a continuum of solutions of the adjoint system. On the other hand, the Cauchy type formula proposed by A.V. Kryazhinsky and S.M. Aseev (2004) always identifies exactly one adjoint trajectory, which often satisfies the maximum principle within the framework of the problem with a free right end. That is why we find asymptotic assumptions on the system that guarantee the compatibility of the Pontryagin maximum principle and this adjoint trajectory (or its modifications for problems with asymptotic terminal constraints). The asymptotic assumptions obtained in this work develop the recent results by D.V. Khlopin (2018, 2023), S.M. Aseev and V.M. Veliov (2019), and S.M. Aseev (2023).

Keywords: optimal control, Pontryagin's maximum principle, asymptotic endpoint constraint, infinite horizon, uniqueness of the adjoint trajectory, transversality condition at infinity, weakly overtaking optimality.

MSC: 49K15, 93C15

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-274-292

1. Введение

В данной работе нас будут интересовать предположения, при которых можно в явном виде указать сопряженную траекторию, удовлетворяющую необходимым условиям оптимальности в следующей задаче оптимального управления на бесконечном промежутке:

$$\text{минимизировать } l(x(0)) + \int_0^{\infty} f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (1.1a)$$

$$\text{в условиях } \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), u(t)) \text{ п.в., } u(t) \in U(t), \quad (1.1b)$$

$$y(0) \in C_0, \quad (1.1c)$$

$$\text{Limsup}_{\theta \uparrow \infty} \{\Lambda(\theta, y(\theta))\} \subset C_{\infty}. \quad (1.1d)$$

Саму систему необходимых условий оптимальности мы будем искать на базе принципа максимума Л. С. Понтрягина:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), u(t)), \quad (1.2a)$$

$$-\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}(y(t), \psi(t), u(t), \lambda, t), \quad (1.2b)$$

$$\sup_{v \in U(t)} H(y(t), \psi(t), v, \lambda, t) = H(y(t), \psi(t), u(t), \lambda, t). \quad (1.2c)$$

Здесь и далее функция Гамильтона — Понтрягина задается правилом

$$H(x, \psi, u, \lambda, t) \triangleq \psi f(t, x, u) - \lambda f_0(t, x, u).$$

Необходимость перечисленных выше условий (1.2a)–(1.2c) хорошо известна и для задачи (1.1a)–(1.1d) легко показывается в рамках схемы Халкина [1]. Однако без дополнительного условия на сопряженную траекторию, условия трансверсальности на бесконечности, эта система соотношений заведомо неполна. В частности, система (1.2a)–(1.2c) никак не учитывает вид, равно как и само наличие асимптотического ограничения (1.1d).

Подбор какого-либо краевого условия в качестве необходимого требует хоть какой-то информации об оптимальности решения на бесконечности, а значит, и выбора того или иного критерия оптимальности. Слабо обгоняющий критерий — один из самых общих для таких задач, и для него недавно удалось подобрать краевое условие [2], необходимость которого не требует существования каких-либо априорных асимптотик на динамику f , интегранд f_0 и/или их производные. Тем самым для такого критерия, вообще говоря, можно выписать заведомо, без проверки каких-либо асимптотик, необходимое соотношение на бесконечности, совместимое при этом с системой условий принципа максимума. Однако этому соотношению уже в линейных задачах могут удовлетворять слишком много (например, континуум) решений, тем самым не обеспечивая выбор сопряженной траектории даже при заданном управляемом процессе. Более того, это может случиться уже в задаче со свободным правым концом, в отличие от аналогичной постановки на конечном промежутке времени. Поэтому помимо общности того или иного условия трансверсальности интересны и предположения, при которых была бы обеспечена единственность удовлетворяющей этому условию трансверсальности сопряженной траектории хотя бы в рамках задач со свободным правым концом. Такая цель ставилась многократно, и не только для слабо обгоняющего критерия; соответствующие библиографические ссылки можно найти в [2–4]. Настоящая работа посвящена этой же цели и развивает недавние результаты [2; 4–6]. Нас будет интересовать, что именно нужно потребовать на бесконечности от исходной системы и ее платежной функции, чтобы гарантировать единственность сопряженной траектории хотя бы в задаче со свободным правым концом.

Сам метод исследования необходимых на бесконечности условий в целом соответствует подходу в [2] и основан на сведении поиска условия трансверсальности к оценке предельных субдифференциалов специально подобранных скалярных функций. При этом, следуя методу [1], исходная задача управления заменяется последовательностью вспомогательных задач на конечном промежутке времени, но для каждой такой задачи подбирается своя терминальная платежная функция. В отличие от [2], в данной статье задача такого подбора — свести предел субдифференциалов к синглетону; в частности, в задаче со свободным правым концом это автоматически даст единственность полученного решения сопряженной системы.

Дальнейший текст построен следующим образом. В разд. 2 выписаны базовые предположения на задачу, основные обозначения и критерии оптимальности. Раздел 3 содержит основные результаты работы: асимптотическое предположение $(J1) \vee (J2)$ теоремы 1, его более удобные для проверки модификации, в том числе в терминах асимптотики производных (по фазовой переменной) динамики f и интегранда f_0 (теорема 2), завершается этот раздел примером. Раздел 4 носит вспомогательный характер и посвящен построению положительно однородных

скалярных функций, прилегающих снизу к верхнему пределу заданного семейства функций. Раздел 5, содержит доказательство теоремы 1. Статья завершается обсуждением полученных результатов и возможных направлений для дальнейших исследований.

2. Постановка задачи и основные гипотезы

Здесь и далее $\mathbb{R}_+ \triangleq [0; \infty)$ и $\mathbb{R}^d$ — промежуток времени и фазовое пространство управляемой системы соответственно. Пусть также даны некоторое конечномерное евклидово пространство $\mathbb{U}$, из которого в каждый момент времени будут браться управляемые параметры системы, и еще одно конечномерное евклидово пространство $\mathbb{Y}$ для описания асимптотического терминального ограничения.

Помимо лебеговской σ -алгебры над $\mathbb{R}_+$ и борелевских σ -алгебр над евклидовыми пространствами (например над $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{U}$) нам потребуются σ -алгебры их произведений. Отображения из декартова произведения $\mathbb{R}_+$ и конечномерного евклидова пространства в конечномерное евклидово пространство, измеримые относительно такой σ -алгебры произведения, будем называть LB-измеримыми.

Всюду далее будем предполагать выполненными несколько условий:

- (H0) $l : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — локально липшицева функция; подмножество $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R}^d$ непусто; функция Λ отображает $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ в $\mathbb{Y}$, подмножеством которого, возможно пустым, является $\mathcal{C}_\infty$;
- (H1) отображения $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ и $f_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ LB-измеримы по переменным (t, u) ; график непустозначного отображения $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto U(t) \subset \mathbb{U}$ также LB-измерим;
- (H2) при некотором открытом множестве $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ с любым управляющим параметром $v \in \mathbb{U}$ найдется такая измеримая по Лебегу функция $L_v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, что для всех (t, v) из графика отображения U выполнено

$$\|f(t, x', v) - f(t, x'', v)\| + |f_0(t, x', v) - f_0(t, x'', v)| \leq L_v(t) \|x' - x''\| \quad \forall (t, x'), (t, x'') \in \mathbb{G}.$$

Пусть $\mathcal{U}$ — множество всех измеримых по Лебегу функций $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{U}$, график которых вложен в график U ; об элементах $\mathcal{U}$ будем говорить как о *допустимых управлениях*. Назовем пару $(y, u) \in (AC)(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \times \mathcal{U}$ *управляемым процессом*, если отображение $\mathbb{R}_+ \ni \tau \mapsto f_0(\tau, y(\tau), u(\tau))$ суммируемо на каждом компакте, а y является решением уравнения (1.2a) с таким u на всем $\mathbb{R}_+$, т. е. (1.2a) выполнено для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$. Управляемый процесс (y, u) назовем *допустимым хотя бы на бесконечности*, если для y выполнено (1.1d), и *допустимым в целом* (или просто *допустимым*), если для y выполнено и (1.1c), и (1.1d). Обозначение $\limsup$ в (1.1d), и далее, означает верхний предел множеств по Куратовскому [7; 8].

В качестве критериев оптимальности в статье взяты одни из самых слабых: слабо обгоняющий и локально слабо обгоняющий. Назовем допустимый в целом управляемый процесс $(\hat{y}, \hat{u})$ *слабо обгоняющим* [9] в задаче (1.1a)–(1.1d), если для всякого другого допустимого управляемого процесса (y, u) выполнено

$$l(y(0)) - l(\hat{y}(0)) + \limsup_{\theta \uparrow \infty} \int_0^\theta [f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) - f_0(\tau, \hat{y}(\tau), \hat{u}(\tau))] d\tau \geq 0. \quad (2.1a)$$

Назовем допустимый в целом управляемый процесс $(\hat{y}, \hat{u})$ *локально слабо обгоняющим* в задаче (1.1a)–(1.1d), если для всякого натурального n найдется такое положительное $\beta(n)$, что (2.1a) выполнено для любого допустимого в целом управляемого процесса (y, u) с $u|_{[n; \infty)} = \hat{u}|_{[n; \infty)}$ и

$$\max_{t \in [0; n]} \|y(t) - \hat{y}(t)\| + \text{meas}\{t \in [0; n] \mid u(t) \neq \hat{u}(t)\} < \beta(n). \quad (2.1b)$$

Всюду далее будем предполагать, что в задаче (1.1a)–(1.1d) имеется некоторый локально слабо обгоняющий процесс $(\hat{y}, \hat{u})$. В данной работе мы никак не будем касаться каких-либо условий, обеспечивающих существование такого процесса; отметим лишь, что они обычно требуют достаточно сильных асимптотических предположений (см., к примеру, [10]).

Мы также потребуем, чтобы для пары $(\hat{y}, \hat{u})$ были выполнены следующие условия:

- (H3) график решения $\hat{y}$ лежит в $\mathbb{G}$, отображение $t \mapsto L_{\hat{u}(t)}(t)$ суммируемо на компактах, а отображения $(t, x) \mapsto f(t, x, \hat{u}(t))$ и $(t, x) \mapsto f_0(t, x, \hat{u}(t))$ непрерывно дифференцируемы по x в точках графика $\hat{y}$;
- (H4) для некоторого положительного γ при любом x из γ -окрестности начальной точки $\hat{y}(0)$ найдется управляемый процесс $(y, \hat{u})$, для которого $y(0) = x$.

Отметим, что в силу (H1), (H2) для каждого достаточно близкого к $\hat{y}(0)$ начального условия x и для каждого допустимого управления u существует единственное решение системы (1.2a) как минимум до границы области $\mathbb{G}$. Будем обозначать это решение через $y(x, u; \cdot)$. Условие (H4) для x , близких к $\hat{y}(0)$, позволяет продолжить $y(x, \hat{u}; \cdot)$ на всю полуось (возможно не единственным, за пределами $\mathbb{G}$, образом), зафиксируем какое-то такое продолжение для каждого x . Тогда можно ввести платежную функцию $\hat{J}(\cdot; T)$ вдоль этого продолжения для каждого x из γ -окрестности точки $\hat{y}(0)$: всякому положительному T сопоставим

$$\hat{J}(x; T) \triangleq \int_0^T f_0(\tau, y(x, \hat{u}, \tau), \hat{u}(\tau)) d\tau.$$

Всюду далее предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий на $(\hat{y}, \hat{u})$:

- (H5) для всех положительных θ отображения $x \mapsto \hat{J}(x; \theta)$ непрерывны по x в некоторой общей окрестности точки $\hat{y}(0)$;
- (H5') для всех положительных θ отображения $x \mapsto \hat{J}(x; \theta)$ непрерывно дифференцируемы по x в некоторой общей окрестности точки $\hat{y}(0)$;
- (H5'') при всяком x_0 , достаточно близком к $\hat{y}(0)$, график решения $y(x_0, \hat{u}, \cdot)$ лежит в $\mathbb{G}$, а отображения $\mathbb{G} \ni (t, x) \mapsto f(t, x, \hat{u}(t))$ и $\mathbb{G} \ni (t, x) \mapsto f_0(t, x, \hat{u}(t))$ непрерывно дифференцируемы по x в точках этого графика.

Отметим, что каждое следующее из этих трех предположений влечет предыдущие.

Относительно общности этих базовых предположений заметим, что гипотезы (H1)–(H5): 1) чуть сильнее, прежде всего в части гладкости, Hypothesis 22.25, требуемых в [11] на конечном промежутке; 2) существенно слабее гипотез, рассмотренных в [12; 13]; 3) существенно больше требуют от окрестности решения, чем (H0)–(H4) в [2]; 4) слабее по части гладкости и не сильнее наложенных на окрестность гипотез (A0)–(A2) из [4; 6].

Однако основная цель работы — найти предположения, при которых, решая систему принципа максимума вместе с условием трансверсальности на бесконечности, можно надеяться получить единственную сопряженную траекторию. Такое предположение, безусловно, должно быть асимптотическим; соответствующие примеры неединственности сопряженных траекторий, удовлетворяющих тому или иному условию трансверсальности, смотрите в [2; 3; 13]. Следующие выше гипотезы, если и накладывали какие-либо асимптотические предположения, то прежде всего в (H4): существование порожденных управлением $\hat{u}$ решений (1.2a) из x , близких к $\hat{y}(0)$. В формулировках ниже потребуются больше.

3. Основной результат

Для формулировки основного результата нам понадобится еще одно множество, позволяющее терминальному ограничению на бесконечности сопоставить краевое условие в нуле. Введем

$$\mathcal{C}_{\text{home}} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \text{Limsup}_{\theta \uparrow \infty} \{\Lambda(\theta, y(x, \hat{u}; \theta))\} \subset \mathcal{C}_\infty\}.$$

Поскольку процесс $(\hat{y}, \hat{u})$ допустим, то $\hat{y}(0)$ лежит в $\mathcal{C}_{\text{home}}$ и это множество непусто. Ниже, в формулировке теоремы 1, будет использоваться предельный нормальный конус $N(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ к $\text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}$ в $\hat{y}(0)$. В случае $\mathcal{C}_\infty = \mathbb{Y}$ или $\mathcal{C}_{\text{home}} = \mathbb{R}^d$ он нулевой (см. следствие 2). Его нахождение в общем случае — отдельная задача. Отметим лишь, что в случае полунепрерывных снизу Λ применимы результаты [2; 14–16]; для гладких функций частный случай разобран в [6].

Нам далее потребуется касательный (по Булигану) конус $T(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ к $\text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}$ в $\hat{y}(0)$, а фактически некоторое приближение к нему. Введем

$$K_n \triangleq \{s(x - \hat{y}(0)) \mid s \in \mathbb{R}_+, x \in \mathcal{C}_{\text{home}}, \|x - \hat{y}(0)\| < 1/n\}. \quad (3.1)$$

Тогда $T(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ является пределом (а в данном случае — и пересечением) конусов K_n . Заметим, что K_n совпадают с $T(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ при выпуклом $\text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}$.

Доказательство следующей теоремы вынесено в разд. 5.

Теорема 1. Пусть в условиях (H0)–(H5) управляемый процесс $(\hat{y}, \hat{u})$ является локально слабо обгоняющим для задачи (1.1a)–(1.1d).

Пусть также для некоторого $\zeta_* \in \mathbb{R}^d$ найдется такая сходящаяся к нулю последовательность δ_n , что при любых натуральном $n > 1/\gamma$ и единичном векторе $v \in K_n$ существует такое положительное $T_n(v)$, что при всех положительных $\theta > T_n(v)$ и $s < 1/n$ справедливо одно из следующих свойств:

(J1) при любом таком неотрицательном $s' < s$, что неравенство $|\hat{J}(\hat{y}(0) + \tau v; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta)| < 1/n$ выполнено для всех $\tau \in [s'; s]$, имеет место

$$\hat{J}(\hat{y}(0) + sv; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0) + s'v; \theta) - (s - s')\langle \zeta_*, v \rangle \leq (s - s')\delta_n; \quad (3.2a)$$

(J2) если $|\hat{J}(\hat{y}(0) + sv; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta)| < 1/n$, то

$$\hat{J}(\hat{y}(0) + sv; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta) - s\langle \zeta_*, v \rangle \leq s\delta_n. \quad (3.2b)$$

Тогда найдется ненулевая пара $(\hat{\psi}, \hat{\lambda}) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \times \{0, 1\}$, решающая порожденную этим процессом $(\hat{y}, \hat{u})$ систему (1.2b), (1.2c) и удовлетворяющая условиям трансверсальности:

$$\hat{\psi}(0) \in \hat{\lambda} \partial l(\hat{y}(0)) + N(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_0), \quad (3.3a)$$

$$-\hat{\psi}(0) \in \hat{\lambda} \zeta_* + N(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}). \quad (3.3b)$$

Все дальнейшие формулировки этого раздела будут следовать из теоремы 1, в основном упрощая ее предположения. Но сначала опишем, что дает включение (3.3b).

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 имеет место normal qualification condition (см. (2.26) в [7]): конус $N(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_0) \cap (-N(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}))$ содержит только ноль. Тогда задача управления нормальна: $\hat{\lambda} = 1$.

Действительно, при $\hat{\lambda} = 0$ ненулевое $\hat{\psi}(0)$ должно оказаться в пересечении конусов в силу (3.3a) и (3.3b), что невозможно. Условия следствия 1 заведомо выполнены в случае неактивного терминального ограничения на правый конец, но тогда и теорема дает больше:

Следствие 2. Пусть условия теоремы 1 выполнены, а конус $N(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ нулевой, например, когда $\hat{y}(0)$ принадлежит внутренности $\text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}$ или при равенстве $\mathcal{C}_{\infty} = \mathbb{Y}$.

Тогда $\hat{\lambda} = 1$, а $\hat{\psi}$ будет решением (1.2b) с начальным условием $\hat{\psi}(0) = -\zeta_*$. Более того, в этом случае конус $T(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ заведомо не содержится ни в одной гиперплоскости $\mathbb{R}^d$.

Отметим также, что, если $\hat{y}(0)$ принадлежит внутренности $\text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}$ (или $\mathcal{C}_{\infty} = \mathbb{Y}$), конусы K_n совпадают со всем пространством $\mathbb{R}^d$ и условие (3.2a) (или (3.2b)) требуется проверять для всех единичных векторов. С другой стороны, при $\mathcal{C}_{\text{home}} = \{\hat{y}(0)\}$ конусы K_n нулевые, значит, каждое из (J1), (J2) выполнено, однако в этом случае (3.3b) само по себе не несет никакой полезной информации в силу $N(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}) = \mathbb{R}^d$.

Обсудим, как находить указанные выше ζ_* и $\hat{\psi}$, если конус $T(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ не содержится ни в одной гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^d$. Отметим, что (H3) гарантирует существование $\frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0); \theta)$ для всех положительных θ . Рассматривая при любых положительном θ и векторе $v \in T(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ все меньшие s в (3.2a), (3.2b), видим, что $\langle \zeta_*, v_i \rangle$ обязано быть пределом $\left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0); \theta), v \right\rangle$ при $\theta \uparrow \infty$. Поскольку из элементов $T(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ можно выбрать базис, то

$$\zeta_* = \lim_{\theta \uparrow \infty} \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0); \theta). \quad (3.4a)$$

При выполнении гипотезы (H5'') есть чуть более явный способ: воспользоваться предложенной в работе [17] А. В. Кряжимским и С. М. Асеевым формулой типа Коши:

$$\zeta_* = \lim_{\theta \uparrow \infty} \int_0^{\theta} \frac{\partial f_0}{\partial x}(\tau, \hat{y}(\tau), \hat{u}(\tau)) \hat{A}(\tau) d\tau, \quad \hat{\lambda} = 1, \quad (3.4b)$$

где $\hat{A} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d \times d})$ — решение матричного уравнения Коши:

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \hat{y}(t), \hat{u}(t)) \hat{A}(t), \quad \hat{A}(0) = \text{Id}.$$

Известны и другие методы выделения именно такой сопряженной траектории, как $\hat{\psi}$. Например, один из вариантов восходит к классической работе [18], где из механических соображений предложено искать предел сопряженных траекторий, удовлетворяющих соответствующему условию трансверсальности во все более поздние моменты времени. В случае задачи со свободным правым концом (более общо, в условиях следствия 2) это означает искать предел сопряженных траекторий, зануляющихся во все более поздние моменты времени. Обоснованность в такой задаче именно этой сопряженной траектории существенно расширена в работе [12]. Там же, насколько известно, впервые для таких задач был предложен (см. (20a) в [12]) эквивалентный метод нахождения $\hat{\psi}$. А именно, в случае задачи со свободным правым концом только искомая $\hat{\psi}$ решает сопряженное уравнение (1.2b) с $\hat{\lambda} = 1$ и краевым условием

$$\lim_{\theta \uparrow \infty} \hat{\psi}(\theta) \hat{A}(\theta) = 0; \quad (3.4c)$$

при этом, естественно, ζ_* снова совпадает с $-\hat{\psi}(0)$. В некотором смысле условие (3.4c) — корректная замена условия Шелла [19], классической, пусть и не вполне удачной, попытки построения условия трансверсальности в задачах управления со свободным правым концом.

Относительно случая, когда K_n имеют меньшую размерность, чем d , отметим, что при подходящем выборе базиса для поиска $\hat{\psi}$ не требуется знать все координаты вектора ζ_* , а значит, и предел в (3.4a) нужен лишь по некоторым компонентам. Однако для простоты мы не будем уточнять формулировки на этот случай далее, сразу предполагая, что ζ_* , если есть, гарантирует существование конечного предела в (3.4a).

Отметим, что даже при жестких предположениях на саму систему и существенно более сильных критериях оптимальности (см. Sect. 3.2 в [13]) само по себе существование предела в (3.4a) еще не гарантирует, даже в задаче со свободным правым концом ($\mathcal{C}_\infty = \mathbb{Y}$), ни единственность сопряженной траектории, ни выполнение для нее остальных соотношений принципа максимума. Это означает существенность предположения $(J1) \vee (J2)$ в теореме 1. Однако простым для проверки оно не является. С другой стороны, условие (3.4a) удобнее. Поэтому будем упрощать предположение $(J1) \vee (J2)$ прежде всего для случая, когда существование конечного предела в (3.4a) каким-либо образом уже обосновано. При этом мы будем пользоваться более сильными, чем $(H5)$, гипотезами.

Пусть выполнено $(H5')$. Возьмем любой единичный вектор v и рассмотрим отображение

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \hat{J}(\hat{y}(0) + tv; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta) - \langle \zeta_*, tv \rangle.$$

По $(H5')$ оно гладко в окрестности нуля, значит, по теореме Лагранжа, левую часть в (3.2a) можно оценить сверху как $(s - s')\langle \zeta - \zeta_*, v \rangle$ для некоторого $\zeta = \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0) + \tau v; \theta)$ при каком-то $\tau \in [s'; s]$ с $\theta > T_n$ и $\hat{J}(\hat{y}(0) + \tau v; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta) < 1/n$. Поделив обе части в (3.2a) на $s - s'$, видим, что $(J1)$ выполнено, если найдется сходящаяся к нулю последовательность δ_n , для которой

$$\limsup_{\theta \rightarrow \infty} \sup_{\substack{0 < \tau < 1/n, \\ |\hat{J}(\hat{y}(0) + \tau v; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta)| < 1/n}} \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0) + \tau v; \theta) - \zeta_*, v \right\rangle < \delta_n \quad \forall v \in K_n, \quad \|v\| = 1.$$

Тем самым фактически показано очередное следствие.

Следствие 3. Пусть выполнены $(H0) - (H4)$, $(H5'')$, предел ζ_* в (3.4a) существует и конечен, а также справедливо хотя бы одно из следующих условий:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in K_n, \|v\|=1} \limsup_{\theta \rightarrow \infty} \sup_{\substack{0 < \tau < 1/n, \\ |\hat{J}(\hat{y}(0) + \tau v; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta)| < 1/n}} \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0) + \tau v; \theta) - \zeta_*, v \right\rangle \leq 0, \quad (3.5a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in K_n, \|v\|=1} \limsup_{\theta \rightarrow \infty} \sup_{\substack{0 < \tau < 1/n, \\ |\hat{J}(\hat{y}(0) + \tau v; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta)| < 1/n}} \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0) + \tau v; \theta) - \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0); \theta), v \right\rangle \leq 0, \quad (3.5b)$$

$$\limsup_{\substack{\theta \uparrow \infty, x \rightarrow \hat{y}(0), \\ \hat{J}(x; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta) \rightarrow 0}} \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x; \theta) = \zeta_*. \quad (3.5c)$$

Тогда имеет место результат теоремы 1. Более того, при этом для ζ_* выполнено также (3.4b), а в случае нулевого конуса $N(\hat{y}(0); \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}})$ — и (3.4c).

Доказательство (3.4b), (3.4c) следует из (3.4a) в рамках этого следствия абсолютно так же, как, например, и в доказательстве Corollary 3 из [2]. Как показано там же, из (3.4c) будет следовать и предложенное в [20] условие (16) из [2], близкое к некоторым достаточным условиям [21].

Отметим, что аналоги условия (3.5c) как предположения, гарантирующего единственность сопряженной траектории (для задачи со свободным правым концом), совсем не новы, это требование восходит к предположению коммутативности операций взятия предела и производной для функции платы. В задачах на бесконечном промежутке оно, по-видимому, впервые возникло в (3.4) из [23]. Условие (3.5c) фактически требует, чтобы асимптотический предельный субдифференциал [15; 22] был синглетоном и заведомо выполнено в линейных по x задачах. Но вот (3.5b) выполнено автоматически, если $\hat{J}$ вогнуто по x , что дает еще один способ обеспечить необходимость условия (3.3b).

Следствие 4. Пусть выполнены (H0)–(H4), (H5''), предел ζ_* в (3.4a) существует и конечен, а кроме того, в некоторой общей окрестности точки $\hat{y}(0)$ справедливо представление $\hat{J}(\cdot; \theta) = \hat{J}_+(\cdot; \theta) - \hat{J}_-(\cdot; \theta)$ с некоторыми выпуклыми $\hat{J}_\pm(\cdot; \theta)$ и дважды непрерывно дифференцируемыми $\hat{J}_+(\cdot; \theta)$, причем

$$\limsup_{\substack{\theta \uparrow \infty, \ x \rightarrow \hat{y}(0), \\ \hat{J}(x; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta) \rightarrow 0}} \left\| \frac{\partial^2 \hat{J}_+}{\partial x^2}(x; \theta) \right\| < +\infty. \quad (3.5d)$$

Тогда имеет место результат следствия 3, в частности, теоремы 1.

Отметим, что в работах [3; 24] типичные для экономических задач предположения выпуклости/вогнутости использовались в рамках монотонного случая в числе прочего и для обоснования единственности сопряженной траектории.

Наконец, заметим, что можно оценивать разность производных от платежной функции в терминах интеграла по времени от разности производных интегранда f_0 , которую, в свою очередь, можно оценить через приращение аргумента и как функцию от фазовой переменной, и как функцию от начального условия. Это будет сделано в следующей теореме. Отметим, что одно из самых сильных среди (3.5a)–(3.5i) условий, условие (3.5f), при подстановке $\varkappa = \varkappa_v$ дает в точности ключевое неравенство из основного асимптотического предположения (A2) работ [4; 6; 25].

Теорема 2. Пусть в условиях (H0)–(H4), (H5'') допустимый управляемый процесс $(\hat{y}, \hat{u})$ является локально слабо обгоняющим для задачи (1.1a)–(1.1d). Пусть задано семейство функций $\varkappa_v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($v \in \mathbb{R}^d$, $\|v\| = 1$).

Если семейство $\varkappa_v$ равномерно интегрируемо на $\mathbb{R}_+$, т. е. равномерен по всем $v \in \mathbb{R}^d$ предел $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_{\theta}^{\infty} \varkappa_v(t) dt = 0$, и при некотором положительном γ выполнено хотя бы одно из следующих предположений:

$$\left\langle \frac{\partial f_0}{\partial x}(\tau, z, \hat{u}(\tau)), y(\hat{y}(0) + sv, \hat{u}, \tau) - \hat{y}(\tau) \right\rangle \leq s \varkappa_v(\tau) \quad (3.5e)$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^d, \quad \|v\| = 1, \quad s \in [0; \gamma], \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \quad z \in [\hat{y}(\tau); y(\hat{y}(0) + sv, \hat{u}, \tau)];$$

$$\left| \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial x}(\tau, z, \hat{u}(\tau)), y(\hat{y}(0) + sv, \hat{u}, \tau) - \hat{y}(\tau) \right\rangle \right| \leq s \varkappa_v(\tau) \quad (3.5f)$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^d, \quad \|v\| = 1, \quad s \in [0; \gamma], \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \quad z \in [\hat{y}(\tau); y(\hat{y}(0) + sv, \hat{u}, \tau)];$$

$$\left| \left\langle \frac{df_0}{dx_0}(\tau, y(x_0, \hat{u}, \tau), \hat{u}(\tau)) \Big|_{x_0 = \hat{y}(0) + sv}, v \right\rangle \right| \leq \varkappa_v(\tau) \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, \quad \|v\| = 1, \quad s \in [0; \gamma], \quad \tau \in \mathbb{R}_+; \quad (3.5g)$$

$$\left\| \frac{df_0}{dx_0}(\tau, y(x_0, \hat{u}, \tau), \hat{u}(\tau)) \Big|_{x_0 = \hat{y}(0) + sv} \right\| \leq \varkappa_v(\tau) \quad \forall s \in [0; \gamma], \quad \tau \in \mathbb{R}_+; \quad (3.5h)$$

то имеют место результаты следствия 3, в частности, теоремы 1.

Более того, они выполнены, если предел ζ_* в (3.4a) существует и конечен, а для семейства суммируемых на $\mathbb{R}_+$ функций $\varkappa_v$ обеспечено

$$\left\langle \frac{df_0}{dx_0}(\tau, y(x_0, \hat{u}, \tau), \hat{u}(\tau)) \Big|_{x_0 = \hat{y}(0)}, v \right\rangle \leq \varkappa_v(\tau) \quad \forall s \in [0; \gamma], \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \quad v \in K_1. \quad (3.5i)$$

Доказательство. Сначала покажем, как вывести (3.4a) из (3.5e)–(3.5g). Для этого достаточно обеспечить малость каждой координаты $y \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0), T) - \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0), \theta)$ при достаточно больших T, θ . Интегрируя (3.5g) или (3.5h) при $s = 0$ на $[T; \theta]$ для всякого единичного

орта v_i , получаем, что предел i -й координаты неотрицателен. Подстановка $v = -v_i$ дает и его неположительность. Итак, и из (3.5g), и из (3.5h) следует (3.4a). В случае (3.5e), переходя к пределу при $s \downarrow 0$, имеем $\left\langle \frac{\partial f_0}{\partial x}(\tau, \hat{y}(\tau), \hat{u}(\tau)), \hat{A}(t)v \right\rangle \leq \kappa_v(\tau)$. Интегрируя это неравенство на $[T; \theta]$ с $v = \pm v_i$, гарантируем существование предела у i -й координаты в (3.4b). Поскольку базис конечен, то $\max_i(\kappa_{v_i}(\tau), \kappa_{-v_i}(\tau)) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ означает (3.4a).

Как из (3.5g), так и из (3.5h) следует (3.5i), а из (3.5f) — (3.5e). Теперь нам достаточно вывести теорему из (3.5e) и из (3.5i), считая выполненным (3.4a), т. е. $\left\| \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0), T) - \zeta_* \right\| < \omega(T)$ для всех положительных T для некоторой функции $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ с $\omega(\theta) \downarrow 0$ при $\theta \uparrow \infty$.

Пусть выполнено (3.5i). Тогда для всех $v \in K_1$ ($\|v\| = 1$), $\theta > M > 0$ и $s \in [0; \gamma]$ имеет место

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x, \theta) \Big|_{x=\hat{y}(0)}^{x=\hat{y}(0)+sv} - \zeta_*, v \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x, \theta) \Big|_{x=\hat{y}(0)}^{x=\hat{y}(0)+sv}, v \right\rangle \pm \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x, M) \Big|_{x=\hat{y}(0)}^{x=\hat{y}(0)+sv}, v \right\rangle - \langle \zeta_*, v \rangle \\ &\leq \int_M^\theta \left\langle \frac{df_0}{dx_0}(\tau, y(x_0, \hat{u}, \tau), \hat{u}(\tau)) \Big|_{x_0=\hat{y}(0)}^{x_0=\hat{y}(0)+sv}, v \right\rangle d\tau + \omega(M) \leq \int_M^\infty \kappa_v(\tau) d\tau + \omega(M). \end{aligned}$$

Правая часть здесь стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$, поэтому выполнено (3.5a). Так как (3.4a) также имеет место, то получен результат следствия 3 и в случае (3.5i) теорема доказана.

Пусть теперь выполнено (3.5e). Зафиксируем некоторое положительное ε . Равномерная интегрируемость семейства κ_v гарантирует существование такого положительного M , что $\int_M^{+\infty} \kappa_v(\tau) d\tau < \varepsilon/4$ для всех единичных векторов v . При необходимости увеличив M , можно также считать, что $\omega(M) < \varepsilon/4$. Далее, в силу непрерывной зависимости решений $y(x, \hat{u}; \cdot)$ на промежутке $[0; M]$ от начальных условий найдется такое положительное $\rho(M) < \min(\gamma, 1)$, что

$$\left\| \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x, M) - \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0), M) \right\| < \varepsilon/4 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x - \hat{y}(0)\| < \rho(M).$$

Зафиксируем единичный вектор $v \in K_1$. Для всех $s \in [0; \rho(T)]$ в силу теоремы Лагранжа о промежуточной точке найдется $\bar{s} \in [0; s]$, для которой

$$\hat{J}(x, T) \Big|_{x=\hat{y}(0)}^{x=\hat{y}(0)+sv} = s \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x; T) \Big|_{x=\hat{y}(0)+\bar{s}v}, v \right\rangle.$$

Аналогично для всех $\tau > 0$ найдется такая точка $z(\tau, s)$ на отрезке $[y(\hat{y}(0) + sv, \hat{u}; \tau); \hat{y}(\tau)]$, что

$$f_0(\tau, x, \hat{u}(\tau)) \Big|_{x=\hat{y}(\tau)}^{x=y(\hat{y}(0)+sv, \hat{u}, \tau)} = \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial x}(\tau, z(\tau, s), \hat{u}(\tau)), y(\hat{y}(0) + sv, \hat{u}, \tau) - \hat{y}(\tau) \right\rangle,$$

а значит, предположение (3.5e) гарантирует

$$f_0(\tau, x, \hat{u}(\tau)) \Big|_{x=\hat{y}(\tau)}^{x=y(\hat{y}(0)+sv, \hat{u}, \tau)} \leq s \kappa_v(\tau).$$

Но тогда с учетом (3.4a) и $\omega(M) < \varepsilon/4$ для всех $\theta > M$ и $0 \leq s' < s'' \leq \rho(M)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \hat{J}(x, \theta) \Big|_{x=\hat{y}(0)}^{x=\hat{y}(0)+sv} - \langle \zeta_*, v \rangle &\leq \frac{1}{s} \hat{J}(x, \theta) \Big|_{x=\hat{y}(0)}^{x=\hat{y}(0)+sv} - \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(\hat{y}(0); M), v \right\rangle + \omega(M) \\ &= \frac{1}{s} \left(\hat{J}(x, \theta) \Big|_{x=\hat{y}(0)}^{x=\hat{y}(0)+sv} - \hat{J}(x, M) \Big|_{x=\hat{y}(0)}^{x=\hat{y}(0)+sv} \right) + \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x; M) \Big|_{x=\hat{y}(0)}^{x=\hat{y}(0)+\bar{s}v}, v \right\rangle + \omega(M) \\ &\leq \varepsilon/4 + \frac{1}{s} \int_M^\theta f_0(t, x, \hat{u}(t)) \Big|_{x=\hat{y}(t)}^{x=y(\hat{y}(0)+sv, \hat{u}, t)} dt + \varepsilon/4 \leq \varepsilon/2 + \int_M^\infty \kappa_v(t) dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности положительного ε проверено (J2), а значит, и результаты следствия 3 имеют место. Тем самым и в предположении (3.5e) теорема также доказана. $\square$

Пример. Сделанные выше предположения сравним на основе Example 4 из [2]. Для этого рассмотрим класс задач

$$\text{минимизировать} \quad \int_0^\infty \left[\frac{1}{4} \|u(\tau)\|^2 + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}(\tau, y(\tau)), e^{-\tau} u(\tau) \right\rangle + \frac{\partial S}{\partial t}(\tau, y(\tau)) \right] d\tau$$

$$\text{в условиях} \quad \frac{dy(t)}{dt} = e^{-t} u(t) \quad \text{п.в.}, \quad y(0) = 0, \quad \|u\| \leq 1,$$

для дважды дифференцируемых функций $S : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что при любом $x \in \mathbb{R}^d$ неотрицателен предел $\limsup_{\theta \rightarrow \infty} S(\theta, x)$, а кроме того, $S(\theta, 0) \equiv 0$ при любом неотрицательном θ .

Отметим, что при таких S справедливы гипотезы (H0)–(H5'').

Покажем, что $(\hat{y} \equiv 0, \hat{u} \equiv 0)$ является слабо обгоняющим процессом. Действительно, в нашей задаче для всякого допустимого процесса (y, u)

$$\int_0^\theta f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau = \int_0^\theta e^{-\tau} u^2(\tau) d\tau + S(\theta, y(\theta)).$$

Верхний предел этого выражения неотрицателен по свойству S , ведь полная вариация y ограничена, т. е. $y(\theta)$ имеет предел в бесконечности. Поскольку $S(\theta, 0) \equiv 0$, то функционал платы на процессе $(\hat{y} \equiv 0, \hat{u} \equiv 0)$ всегда равен нулю и этот процесс слабо обгоняющий. Отметим также, что фактически выше показано тождество $\hat{J}(x; \theta) \equiv S(\theta, x)$, поскольку управление $\hat{u} \equiv 0$ генерирует лишь траектории-константы.

Всем условиям выше на функцию S при $d = 1$ удовлетворяет, к примеру, такой ее выбор:

$$S(\theta, x) = (1 + \theta)^{-2\alpha} \sin^2(x(1 + \theta)) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}_+,$$

при любых $\alpha \in \mathbb{R}$. Так как $\frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x; \theta) = 2(1 + \theta)^{1-2\alpha} \sin(x(1 + \theta)) \cos(x(1 + \theta))$, то и $\frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(0; \theta) = 0$, откуда $\zeta_* = 0$. Кроме того, тогда при $\alpha > 1/2$ имеем $(1 + \theta)^{1-2\alpha} \rightarrow 0$, следовательно, доказаны и (3.5с), и результат теоремы 1. Отметим, что теорема 2 слабее: любое из пяти предположений выполнимо только с $\varkappa_v(\theta) \geq 2(1 + \theta)^{1-2\alpha}$, поэтому воспользоваться ей можно только при $\alpha > 1$.

При $d = 2$ можно предъявить функцию S с неравномерной по направлению асимптотикой:

$$S(\theta, x) = \Upsilon(-2 + \theta(x_1^2 + x_2^2)) \Upsilon(-2 + \theta x_1/x_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \mathbb{R}_+,$$

где $\Upsilon(\tau)$ равна $(\tau^4 - 1)^4$ на отрезке $[-1; 1]$ и нулю вне него. Функция S стремится к нулю при $\theta \rightarrow \infty$, более того, для всякого единичного вектора v на соответствующем луче функции $S(\theta, sv)$, а значит, и $\hat{J}(sv; \theta)$ с любыми своими производными равны нулю при всех достаточно больших θ . Тем самым автоматически выполнено (3.5b), поэтому справедлив и результат теоремы 1. Однако, взяв, например, последовательность единичных векторов $v_n = (1, n^{16})/\sqrt{1 + n^{32}}$, имеем $\left\| \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(n^{-8}v_n; (n+1)n^{15}) \right\| \geq \left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(n^{-8}v_n; (n+1)n^{15}), v_n \right\rangle = 32(n - n(1 - 1/n)^4)^7(1 - 1/n)^7(n+1) \rightarrow \infty$ с $\hat{J}(n^{-8}v_n; (n+1)n^{15}) = (1 - (1 - 1/n)^4)^8 \rightarrow 0$. Итак, здесь выполнено (3.5b), но не (3.5с).

4. Построение вспомогательной последовательности липшицевых терминальных функций

Пусть для некоторого натурального N_0 в $1/N_0$ -окрестности некоторой точки $\hat{x}$ евклидового конечномерного пространства $\mathbb{X}$ задано семейство скалярных непрерывных функций V_θ , $\theta > 0$.

Пусть также заданы и числовая последовательность δ_n , и невозрастающая последовательность непустых конусов $K_n \subset \mathbb{X}$.

Предположим, что нашелся некоторый вектор $\zeta_* \in \mathbb{X}$, для которого при любых натуральном $n > N_0$ и единичном векторе $v \in K_n$ найдется такое положительное $T_n(v)$, что для каждого $\theta > T_n$ имеет место хотя бы одно из следующих свойств:

(J1') при любых положительном $t'' < 1/n$ и неотрицательном $t' < t''$ таких, что $|V_\theta(\hat{x} + \tau v) - V_\theta(\hat{x})| < 1/n$ для всех $\tau \in [t'; t'']$, справедливо

$$V_\theta(\hat{x} + t''v) - V_\theta(\hat{x} + t'v) - (t'' - t')\langle \zeta_*, v \rangle \leq (t'' - t')\delta_n. \quad (4.1)$$

(J2') при любом положительном $s < 1/n$ таком, что $|V_\theta(\hat{x} + sv) - V_\theta(\hat{x})| < 1/n$, выполнено

$$V_\theta(\hat{x} + sv) - V_\theta(\hat{x}) - s\langle \zeta_*, v \rangle \leq s\delta_n. \quad (4.2)$$

Введем последовательность функций $\Phi_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим правилом:

$$\Phi_n(x) \triangleq \langle \zeta_*, x - \hat{x} \rangle + \delta_n \|x - \hat{x}\| \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Лемма 1. Пусть для семейства непрерывных функций V_θ , $\theta > 0$, невозрастающей последовательности конусов K_n , последовательности δ_n и вектора ζ_* при всех n и $v \in K_n$ найдется положительное T_n , для которого для всех $\theta > T_n(v)$ выполнено хотя бы одно из предположений: (J1') или (J2').

Тогда при любых натуральном $n > N_0$, положительном $t < 1/n$, единичном векторе $v \in K_n$ и числе $\varpi \in [-1/(n+1); 1/(n+1)]$, если при некотором $\theta > n$ выполнено $V_\theta(\hat{x} + tv) - V_\theta(\hat{x}) \geq \varpi$, то $\Phi_n(\hat{x} + tv) = \langle \zeta_*, tv \rangle + t\delta_n \geq \varpi$.

Доказательство. Зафиксируем $n > N_0$, $t < 1/n$, $\varpi \in [-1/(n+1); 1/(n+1)]$, $v \in K_n$, $\theta > T_n(v)$. Нам достаточно показать, что из $\langle \zeta_*, tv \rangle + t\delta_n < \varpi$ следует $V_\theta(\hat{x} + tv) - V_\theta(\hat{x}) < \varpi$. Пусть $\langle \zeta_*, tv \rangle + t\delta_n < \varpi$.

Если выполнено предположение (J2'), то из (4.2) при $s = t$ следует, что или $V_\theta(\hat{x} + tv) - V_\theta(\hat{x}) < \varpi$ и все показано, или $V_\theta(\hat{x} + tv) > V_\theta(\hat{x}) + 1/n$. В этом случае найдется некоторое положительное $s < t$, для которого $V_\theta(\hat{x} + sv) - V_\theta(\hat{x}) = 1/n$. Тогда снова из (4.2) следует

$$1/n = V_\theta(\hat{x} + sv; \theta) - V_\theta(\hat{x}) \leq \langle \zeta_*, sv \rangle + s\delta_n < s|\varpi|/t \leq |\varpi| < 1/n;$$

противоречие. Итак, в предположении (J2') все показано.

Если справедливо предположение (J1'), то в случае $|V_\theta(\hat{x} + \tau v) - V_\theta(\hat{x})| < 1/n$ для всех $\tau \in [0; t]$, из (4.1) для $t'' = t, t' = 0$ имеем

$$V_\theta(\hat{x} + tv) - V_\theta(\hat{x}) - t\langle \zeta_*, v \rangle \leq t\delta_n,$$

откуда $V_\theta(\hat{x} + tv) - V_\theta(\hat{x}) \leq t\langle \zeta_*, v \rangle + t\delta_n < \varpi$, что и требовалось. Остался случай, когда найдутся положительные $\tau' \in [0; t]$, для которых $|V_\theta(\hat{x} + \tau'v) - V_\theta(\hat{x})| \geq 1/n$. Возьмем среди них наименьший. Подстановка $t'' = \tau', t' = 0$ в (4.1) дает $V_\theta(\hat{x} + \tau'v; \theta) - V_\theta(\hat{x}) < \tau'|\varpi|/t < 1/n$, откуда $V_\theta(\hat{x} + \tau'v; \theta) - V_\theta(\hat{x}) = -1/n$ по непрерывности V_θ .

Предположим противное, пусть $V_\theta(\hat{x} + tv; \theta) - V_\theta(\hat{x}) \geq \varpi$. Поскольку $|\varpi| \leq 1/(n+1)$, то на отрезке $[\tau'; t]$ найдется подотрезок $[t'; t'']$ с $V_\theta(\hat{x} + t'v) - V_\theta(\hat{x}) = -1/n$, $V_\theta(\hat{x} + t''v) - V_\theta(\hat{x}) = \varpi$ и $-1/n < V_\theta(\hat{x} + \tau v) - V_\theta(\hat{x}) < \varpi$ при $t' < \tau < t''$. Тогда (4.1) дает

$$\varpi + 1/n - (t'' - t')\langle \zeta_*, v \rangle \leq (t'' - t')\delta_n,$$

откуда $\varpi + 1/n \leq (t'' - t')(\langle \zeta_*, v \rangle + \delta_n) < 0$ и $\varpi < -1/n$. Полученное с $|\varpi| < 1/(n+1)$ противоречие завершает доказательство леммы 1. $\square$

5. Доказательство теоремы 1

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Оно будет проведено в несколько шагов: создание последовательности подходящих липшицевых терминальных функций, переход к вспомогательной управляемой системе на промежутке $[0; 2n]$ с проверкой соответствующих предположений принципа максимума, подмена исходной платежной функции терминальной функцией в момент времени $2n$, выписывание принципа максимума для построенной задачи и, наконец, вывод из него всех необходимых соотношений уже в исходной задаче.

Шаг 0. Сначала отметим, что, не умаляя общности, $l(\hat{y}(0)) = 0$, поскольку при необходимости всегда можно вычесть константу $l(\hat{y}(0))$ из функции l . Зададим также $\hat{x} = \hat{y}(0)$.

Возьмем γ из (H4); уменьшив его при необходимости, мы можем считать вследствие (H5), что все отображения $x \mapsto \hat{J}(x; \theta)$ непрерывны в γ -окрестности точки $\hat{y}(0)$.

Определим функции V_θ , $\theta \geq 0$, в окрестности точки $(0, \hat{y}(0))$ правилом

$$V_\theta(x) = \hat{J}(x; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x - \hat{y}(0)\| < \gamma.$$

Введем для всех натуральных n конусы K_n формулой (3.1). Отметим, что предположения (J1), (J2) теоремы гарантируют для V_θ условия (J1'), (J2') соответственно. Зададим, следуя предыдущему разделу, функции Φ_n при $n > 1/\gamma$, тогда для них справедлива лемма 1.

Возьмем произвольное натуральное n . Так как $\mathbb{G}$ открыто, в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных найдется такое $N(n) > \max(1/\gamma, n)$, что для всех x из $1/N(n)$ -окрестности $\hat{y}(0)$ графики $y(x, \hat{u}; \cdot)$ лежат в $\mathbb{G}$. Зафиксируем такое $N = N(n)$.

Построим теперь $\mathbb{G}'_n$ как объединение графиков решений (1.2а), порожденных управлением $\hat{u}$, с начальными значениями из $\mathbb{G}_0 \triangleq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - \hat{y}(0)\| < 1/N(n)\}$. Отметим, что $\mathbb{G}'_n \cap ([0; n] \times \mathbb{R}^d)$ также является открытой окрестностью графика $\hat{y}|_{[0; n]}$.

Уменьшив при необходимости $\beta(n)$, можно полагать, что $\beta(n)$ -окрестность графика $\hat{y}|_{[0; n]}$ содержится в $\mathbb{G}'_n$. В частности, если некоторый управляемый процесс (y, u) удовлетворяет (2.1b), то и график $y|_{[0; n]}$ обязан лежать в $\mathbb{G}'_n$, а значит, и в $\mathbb{G}$.

Шаг 1. Продолжим за пределы $[0; n]$ и динамику $f|_{[0; n]}$, и интегранд $f_0|_{[0; n]}$ иным, нежели исходные f и f_0 , способом. Для этого введем $\bar{f} : [0; 2n] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ и $\bar{f}_0 : [0; 2n] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ правилами: для всех $(t, x, u) \in [0; 2n] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U}$,

$$(\bar{f}, \bar{f}_0)(t, x, u) \triangleq \begin{cases} (f, f_0)(t, x, u) & \text{при } t < n; \\ -(f, f_0)(2n - t, x, \hat{u}(2n - t)) & \text{при } t \geq n. \end{cases}$$

Рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{y}(\tau)}{d\tau} = \bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau), u(\tau)), \quad \frac{d\bar{w}(\tau)}{d\tau} = \bar{f}_0(\tau, \bar{y}(\tau), u(\tau)) \quad (5.1)$$

на промежутке $[0; 2n]$. Прямой подстановкой легко убедиться, что в силу (H4) при любом начальном условии $x \in \mathbb{G}_0$, управление $\hat{u}$ порождает решение этой системы

$$(\bar{y}_n, \bar{w}_n)(x; t) = \begin{cases} (y(x, \hat{u}; t), \hat{J}(x; t)) & \text{при } t \in [0; n], \\ (y(x, \hat{u}; 2n - t), \hat{J}(x; 2n - t)) & \text{при } t \in (n; 2n]. \end{cases}$$

Более того, решениями являются также $t \mapsto (\bar{y}_n(x; t), \bar{w}_n(x; t) + \sigma)$ для всех действительных σ . Обозначим через $(\hat{\bar{y}}, \hat{\bar{w}})$ порожденное $\hat{u}$ решение системы (5.1) с начальными условиями $(\hat{y}(0), 0)$. Заметим, что его график вместе со своей $\beta(n)$ -окрестностью лежит в множестве

$$\overline{\mathbb{G}}_n \triangleq \bigcup_{x \in \mathbb{G}_0, t \in [0; 2n], \sigma \in \mathbb{R}} \{(\bar{y}(x; t), \bar{w}(x; t) + \sigma)\}.$$

По построению, на этой окрестности $\overline{\mathbb{G}}_n$ для $(\bar{f}, \bar{f}_0)$ справедливы суженные на промежуток $[0; 2n]$ гипотезы (H1)–(H2). Более того, в силу такого выбора окрестности $\overline{\mathbb{G}}_n$ обеспечены и аналоги гипотез (H3)–(H5) для решения $\hat{y}$. Гипотезы (H1)–(H5), выполненные на конечном промежутке, гарантируют все условия на динамику и интегранд из Hypothesis 22.25 в [11], если будет показано, что заданное на $\text{grh } U$ отображение $(t, u) \mapsto L_u(t)$ LB-измеримо. Сделаем это.

Действительно, заметим, что, поскольку $\mathbb{G}'_n$ открыто, в силу разложения Кастена (см. Theorem 14.5 в [8]) найдется счетный набор измеримых по Борелю функций $z_i : [0; n] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$, объединение графиков которых всюду плотно в $\mathbb{G}'_n$. Введем для всех натуральных $i, j, k \in \mathbb{N}$

$$F_{i,j,k} \triangleq \{(t, v) \in \text{grh } U \mid$$

$$\|\bar{f}(t, z_i(t), v) - \bar{f}(t, z_j(t), v)\| + |\bar{f}_0(t, z_i(t), v) - \bar{f}_0(t, z_j(t), v)| < k\|z_i(t) - z_j(t)\|\}.$$

Каждое такое множество LB-измеримо, ведь таковы $\bar{f}, \bar{f}_0$ (как функции от (t, u)) и множество $\text{grh } U$. Теперь для всех $(t, v) \in \text{grh } U$ с $t \in [0; n]$ определим $\tilde{L}_v(t) \triangleq \inf \{k \in \mathbb{N} \mid (t, v) \in F_{i,j,k} \forall i, j \in \mathbb{N}\}$. График этого многозначного отображения LB-измерим ввиду $F_{i,j,k}$. В силу вложения $\mathbb{G}' \cap ([0; n] \times \mathbb{R}^d) \subset \mathbb{G}$ каждое значение $\tilde{L}_v(t)$ не превосходит $L_v(t) + 1$, значит, $t \mapsto \tilde{L}_{\hat{u}(t)}(t)$ локально суммируемо ввиду $t \mapsto L_{\hat{u}(t)}(t)$. Теперь, если указанное в (H2) для $\mathbb{G}$ отображение L_u не является LB-измеримым на промежутке $[0; n]$, то таковым заведомо будет $\tilde{L}_u$. Определив $\tilde{L}_u(t) = \tilde{L}_u(2n - t)$ для всех $n < t \leq 2n$, мы получим LB-измеримую константу Липшица на всем $[0; 2n]$, что и требовалось. Итак, проверка Hypothesis 22.25 из [11] для $\bar{f}, \bar{f}_0$ закончена.

Шаг 2. Рассмотрим теперь произвольное управление $u \in \mathcal{U}$ со свойством $u|_{[n; \infty)} = \hat{u}|_{[n; \infty)}$ и порожденное им решение $(y, w) \in C([0; 2n]; \mathbb{R}^{d+1})$ системы (5.1) с начальным условием $y(0) \in \mathcal{C}_0$, $w(0) \geq l(y(0))$. Пусть также $y(2n) \in \mathcal{C}_{\text{home}}$, $\|y(2n) - \hat{x}\| + |w(2n)| < 1/(n+1)$, а кроме того, выполнено (2.1b) с $\theta = n$ для $(y, u)|_{[0; n]}$. Покажем, что тогда

$$w(2n) + \Phi_n(y(2n)) \geq 0. \quad (5.2)$$

Отметим, что (2.1b) с $\theta = n$ влечет $\|y(t) - \hat{y}(t)\| < \beta/2$ для всех $[0; n]$, тогда график $y|_{[0; n]}$ совпадает с графиком $y(y(0), u; \cdot)|_{[0; n]}$ и лежит в $\mathbb{G}$. Из конструкции $(\bar{f}, \bar{f}_0)$ теперь следует $y(y(2n), \hat{u}; t) = y(2n - t)$ для всех $t \in [0; n]$. Отсюда в силу инвариантности $\mathbb{G}$ к динамике (5.1) график $y|_{[0; 2n]}$ лежит в $\overline{\mathbb{G}}$. Далее, $y(y(2n), \hat{u}; n) = y(n)$ и $u|_{[n; \infty)} = \hat{u}|_{[n; \infty)}$ дает $y(y(2n), \hat{u}; \tau) = y(y(0), u; \tau)$ для всех $\tau > n$. Поскольку $y(2n) \in \mathcal{C}_{\text{home}}$, управляемый процесс $(y(y(2n), \hat{u}; \cdot), \hat{u})$ допустим хотя бы на бесконечности. Тогда таков и процесс $(y(y(0), u; \cdot), u)$. Значит, уже в силу $y(0) \in \mathcal{C}_0$, процесс $(y(y(0), u; \cdot), u)$ допустим (в целом).

По аналогии с $\hat{J}$ введем теперь для всех $T > 0$ функцию

$$J(y(0), u; T) \triangleq \int_0^T f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau.$$

Сужение $(y(y(0), u; \cdot), u)|_{[0; n]} = (y, u)|_{[0; n]}$ соблюдает (2.1b), откуда по локальному критерию оптимальности выполнено

$$l(y(0)) + \limsup_{\theta \uparrow \infty} [J(y(0), u; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta)] \geq l(\hat{y}(0)) = 0. \quad (5.3)$$

Кроме того, из $y(y(2n), \hat{u}; t) = y(2n - t)$ для всех $t \in [0; n]$ следует

$$w(n) - w(2n) = \int_0^n f_0(\tau, y(2n - \tau), \hat{u}(2n - \tau)) d\tau = \int_0^n f_0(\tau, y(y(2n), \hat{u}; \tau), \hat{u}(\tau)) d\tau = J(y(2n), \hat{u}; n).$$

Теперь из $w(n) - w(0) = J(y(0), u; n)$ следует $w(2n) - w(0) = J(y(0), u; n) - J(y(2n), \hat{u}; n)$. С другой стороны, выше показано $y(y(2n), \hat{u}; \tau) = y(y(0), u; \tau)$ для всех $\tau > n$, что дает $J(y(0), u; \theta) - J(y(0), u; n) = J(y(2n), \hat{u}; \theta) - J(y(2n), \hat{u}; n)$ и

$$J(y(0), u; \theta) = J(y(2n), \hat{u}; \theta) - J(y(2n), \hat{u}; n) + J(y(0), u; n) = \hat{J}(y(2n); \theta) + w(2n) - w(0)$$

для всех $\theta > n$. Теперь (5.3) и $w(0) \geq l(y(0))$ гарантируют

$$\limsup_{\theta \uparrow \infty} [w(2n) + \hat{J}(y(2n); \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta)] \geq 0.$$

Если $y(2n) = \hat{y}(0)$, то (5.2) следует из $\Phi_n(\hat{y}(0)) = 0$. Пусть $y(2n) \neq \hat{y}(0)$. Тогда найдется неограниченная последовательность $\theta_k > n$, для которой

$$\hat{J}(y(2n); \theta_k) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta_k) \geq -w(2n) - 1/k.$$

По выбору (y, w) выполнено $|-w(2n) - 1/k| < 1/(n+1)$ при достаточно больших k , кроме того, $y(2n) - \hat{y}(0)$ из конуса K_n и по норме также не превосходит $1/n$. Тогда из леммы 1 с $t = \|y(2n) - \hat{y}(0)\|$, $v = (y(2n) - \hat{y}(0))/t$, $\varpi = -w(2n) - 1/k$ следует $\Phi_n(y(2n)) \geq -w(2n) - 1/k$. Поскольку k можно взять произвольно большим, (5.2) показано.

Шаг 3. Отметим, что правая часть (5.2) зануляется на процессе $(\hat{y}_n, \hat{w}_n, \hat{u})$. Действительно, из определения Φ_n и равенств $(\hat{u}_n(2n), \hat{y}_n(2n)) = (\hat{u}_n(0), \hat{y}_n(0)) = (0, \hat{x})$ следует

$$\Phi_n(\hat{y}_n(2n)) - \hat{w}_n(2n) = \Phi_n(\hat{y}_n(0)) - \hat{w}_n(0) = \Phi_n(\hat{x}) - \hat{w}_n(0) = 0.$$

Тогда этот процесс является оптимальным в задаче

$$\text{минимизировать } \bar{w}(2n) + \Phi_n(\bar{y}(2n))$$

$$\text{в условиях } \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t), u(t)), \quad \frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \bar{f}_0(t, \bar{y}(t), u(t)),$$

$$\bar{y}(0) \in \text{cl } \mathcal{C}_0, \quad \bar{w}(0) \geq l(\bar{y}(0)), \quad \bar{y}(2n) \in \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}},$$

$$\int_{[0; 2n]} 1_{u(\tau) \neq \hat{u}(\tau)} d\tau + \max_{\tau \in [0; n]} \|\bar{y}(\tau) - \hat{y}_n(\tau)\| < \beta(n), \quad \|\bar{y}(2n) - \hat{x}\| + |\bar{w}(2n)| < 1/2n.$$

Здесь мы, поставив $\text{cl } \mathcal{C}_0$ и $\text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}$ вместо $\mathcal{C}_0$ и $\mathcal{C}_{\text{home}}$, замкнули множество достижимости задачи. Это не изменило оптимальность процесса $(\hat{y}_n, \hat{w}_n, \hat{u})$, поскольку терминальная функция непрерывна.

Наша ближайшая цель — убрать в построенной задаче последнее ограничение. Для этого введем дополнительную компоненту r , фиксирующую всякое отличие поданного в момент времени t управления от $\hat{u}$. Примем ее динамику $\Delta_{\neq \hat{u}}(t, v)$ равной 1, если $v = \hat{u}(t)$, и 0 — иначе. Отметим, что на оптимальном процессе эта неубывающая переменная не растет, поэтому процесс $(\hat{y}_n, \hat{w}_n, \hat{r} \equiv 0, \hat{u})$ будет оптимален и в следующей задаче:

$$\text{минимизировать } r(2n) + \bar{w}(2n) + \Phi_n(\bar{y}(2n))$$

$$\text{в условиях } \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t), u(t)), \quad \frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \bar{f}_0(t, \bar{y}(t), u(t)), \quad \frac{dr(t)}{dt} = \Delta_{\neq \hat{u}}(t, u(t)),$$

$$r(0) = 0, \quad \bar{y}(0) \in \text{cl } \mathcal{C}_0, \quad \bar{w}(0) \geq l(\bar{y}(0)), \quad \bar{y}(2n) \in \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}},$$

$$\max_{\tau \in [0; n]} |r(\tau)| + \max_{\tau \in [0; n]} \|\bar{y}(\tau) - \hat{y}_n(\tau)\| < \beta(n), \quad \|\bar{y}(2n) - \hat{x}\| + |\bar{w}(2n)| < 1/2n.$$

Теперь последнее ограничение означает лишь, что рассматривается локальное в C -метрике [11] решение задачи. Тем самым процесс $(\hat{y}_n, \hat{w}_n, \hat{r} \equiv 0, \hat{u})$ локально оптимален (см. Sect. 22.6 в [11]) уже в задаче

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } r(2n) + \bar{w}(2n) + \Phi_n(\bar{y}(2n)) \\ & \text{в условиях } \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t), u(t)), \quad \frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \bar{f}_0(t, \bar{y}(t), u(t)), \quad \frac{dr(t)}{dt} = \Delta_{\neq \hat{u}}(t, u(t)), \\ & r(0) = 0, \quad \bar{y}(0) \in \text{cl } \mathcal{C}_0, \quad (\bar{y}, \bar{w})(0) \in \text{epi } l, \quad \bar{y}(2n) \in \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}. \end{aligned}$$

Нужная нам вспомогательная задача на конечном промежутке построена.

Шаг 4. Прежде чем применять к построенной задаче принцип максимума Понтрягина, распишем свойства соответствующего ему гамильтониана и обговорим применимость самого принципа в построенной задаче.

Зададим скалярную функцию $\bar{H}_n$ на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \times [0; 2n]$ правилом

$$\bar{H}_n(r, w, x, \mu_r, \mu_w, \mu_y, u, t) \triangleq \mu_r 1_{u \neq \hat{u}(t)} + \mu_w \bar{f}_0(t, x, u) + \mu_y \bar{f}(t, x, u).$$

По построению отображений $\bar{f}, \bar{f}_0$ имеем

$$\frac{\partial \bar{H}_n}{\partial x}(r, w, x, \mu_r, \mu_w, \mu_y, \hat{u}(t), t) = -\frac{\partial \bar{H}_n}{\partial x}(r, w, x, \mu_r, \mu_w, \mu_y, u, 2n - t), \quad (5.4a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, \mu_y, \hat{u}(t), \lambda, t) = \frac{\partial \bar{H}_n}{\partial x}(r, w, x, \mu_r, -\lambda, \mu_y, \hat{u}(t), t), \quad (5.4b)$$

$$H(x, \mu_y, u, \lambda, t) = \bar{H}_n(r, w, x, \mu_r, -\lambda, \mu_y, u, t) \quad (5.4c)$$

при $t \in [0; n)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и всевозможных $(r, w, x, \mu_r, \mu_w, \mu_y, u)$.

Более того, по условию f, f_0 непрерывно дифференцируемы по x вдоль оптимальной траектории, значит, это так и для $\bar{f}, \bar{f}_0$. Тогда при $t \in [0; 2n]$

$$\begin{aligned} & \lim_{(r', w', x') \rightarrow (r, w, \hat{y}(t))} \frac{\partial \bar{H}_n}{\partial (r, w, x)}(r', w', x', \mu_r, \mu_w, \mu_y, \hat{u}(t), t) \\ & = \left(0, 0, \frac{\partial \bar{H}_n}{\partial x}(r, w, \hat{y}(t), \mu_r, \mu_w, \mu_y, \hat{u}(t), t)\right). \end{aligned} \quad (5.4d)$$

Далее обговорим применимость принципа максимума Понтрягина (Theorem 22.26 в [11]) к построенной выше задаче. Все нужные для этого предположения (см. Hypothesis 22.25 из [11]) относительно $\bar{f}, \bar{f}_0$ (фактически аналоги гипотез (H2)-(H4)) уже были проверены на шаге 1, и введение r также их не нарушило, поскольку динамика r не зависит от x , а указанный выше принцип максимума Понтрягина допускает ЛВ-измеримость правой части от u . Терминальная функция в этой задаче липшицева по выбору n , что упрощает соответствующее условие трансверсальности. Терминальные ограничения замкнуты. Наконец, по предположению (H5) гамильтониан системы непрерывно дифференцируем по x (а значит, и строго дифференцируем) в точках графика оптимального в этой задаче процесса. Следовательно, правая часть дифференциального включения системы принципа максимума Theorem 22.26 в [11] является синглетоном, что превращает данное включение в уравнение.

Шаг 5. Согласно Theorem 22.26 в [11] найдутся неотрицательное число ν_n и сопряженная траектория $(\mu_r, \mu_s, \mu_w, \mu_y) \in C([0; 2n], \mathbb{R}^{d+3})$, для которой выполнены условие нетривиальности

$$((\mu_r, \mu_w, \mu_y)(t), \nu_n) \neq 0 \quad \forall t \in [0; 2n],$$

условия трансверсальности

$$(\mu_y, \mu_w)(0) \in N(0, \hat{y}(0); \text{epi } l) + N(\hat{x}; \text{cl } \mathcal{C}_0) \times \{0\}; \quad (5.5)$$

$$-(\mu_r, \mu_w, \mu_y)(2n) \in \nu_n(\{(1, 1)\} \times \partial \Phi_n(\hat{x})) + \{(0, 0)\} \times N(\hat{x}; \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}) \quad (5.6)$$

и условие максимума на $[0; 2n]$

$$\hat{u}(t) \in \arg \max_{v \in U(t)} \bar{H}_n((\hat{r}, \hat{w}_n, \hat{y}_n)(t), (\mu_r, \mu_w, \mu_y)(t), v, t); \quad (5.7)$$

при этом сопряженная траектория (μ_r, μ_w, μ_y) удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d(\mu_r, \mu_w, \mu_y)}{dt}(t) = \frac{\partial \bar{H}_n}{\partial(r, w, x)}((\hat{r}, \hat{w}_n, \hat{y}_n)(t), (\mu_r, \mu_w, \mu_y)(t), \hat{u}(t), t). \quad (5.8)$$

Отметим также, что с учетом условия нетривиальности можно полагать справедливым $\mu_r^2(0) + \mu_w^2(0) + 3\|\mu_y(0)\|^2 + \nu_n^2 = 3$.

Ввиду (5.8) и (5.4d) функции μ_r и μ_w являются константами, теперь второе условие трансверсальности (5.6) дает $\mu_r = \mu_w \equiv -\nu_n$. Из симметрии отображений $(\bar{f}, \bar{f}_0)$ и $\bar{H}_n$ относительно $t = n$ (см. (5.4a)) при движении в силу $\hat{u}$ функция $\mu_y|_{[0;n]}$ как компонента решения (5.8) удовлетворяет равенству $\mu_y(0) = \mu_y(2n)$.

Примем $\psi_n = \mu_y|_{[0;n]}$, $\lambda_n = -\mu_w = \nu_n$; это сразу гарантирует $\lambda_n \geq 0$. Кроме того, вследствие (5.4b) уравнение (5.8) влечет (1.2b) на отрезке $[0; n]$. Более того, с учетом выбранного выше условия на вектор $((\mu_r, \mu_w, \mu_y)(0), \nu_n) = (-\lambda_n, -\lambda_n, \psi_n(0), \lambda_n)$ единичным вектором будет $(-\lambda_n, \psi_n(0))$. Далее, исходя из $\hat{y}_n|_{[0;n]} = \hat{y}|_{[0;n]}$, равенство (5.4c) можно записать в виде

$$\bar{H}_n(\hat{r}(t), \hat{w}_n(t), \hat{y}_n(t), \mu_r(t), \mu_w(t), \mu_y(t), v, t) = H(\hat{y}(t), \psi_n(t), v, \lambda_n, t)$$

для всех $v \in U(t)$ и почти всех $t \in [0; n]$. Тогда выполненное почти всюду на $[0; n]$ для ψ_n условие максимума (5.7) влечет то же и с (1.2c).

Воспользовавшись равенствами $\psi_n(0) = \mu_y(0) = \mu_y(2n)$, $\lambda_n = -\mu_w$, $\hat{y}(0) = \hat{y}(2n)$ и $\hat{r} = 0$, первое условие трансверсальности (см. (5.5)) в силу липшицевости l можно переписать как $-\psi_n(0) \in N(\hat{x}; \text{cl } \mathcal{C}_0) + \lambda_n \partial l(\hat{y}(0))$, что соответствует условию (3.3a). Теперь, подстановка тех же равенств во второе условие трансверсальности (см. (5.6)) обеспечивает

$$-\psi_n(0) \in \lambda_n \partial \Phi_n(\hat{x}) + N(\hat{x}; \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}). \quad (5.9)$$

Итак, для каждого достаточно большого натурального n построена пара $(\lambda_n, -\psi_n) \in \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, удовлетворяющая на $[0; n]$ сопряженному уравнению (1.2b) и условию максимума (1.2c), при этом единичный вектор $(\lambda_n, -\psi_n(0))$ удовлетворяет (3.3a) и (5.9).

Шаг 6. Снабдив $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ компактно-открытой топологией и воспользовавшись ограниченностью $(\lambda_n, -\psi_n(0))$, мы получаем, что пары $(\lambda_n, -\psi_n)$ не покидают компакта. Значит, найдется предельная точка этой последовательности, некоторая пара $(\lambda_*, -\psi_*) \in \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. Переходя вдоль соответствующей подпоследовательности к пределу в (1.2b), (1.2c), (3.3a), (5.9), мы для (ψ_*, λ_*) в качестве $(\hat{\psi}, \hat{\lambda})$ получаем как условие трансверсальности (3.3a), так и соотношения (1.2b), (1.2c), выполненные уже на всей полуоси. Полученная пара ненулевая, так как $(\psi_*(0), \lambda_*)$ — единичный вектор. Осталось найти подходящие константы, чтобы обеспечить (3.3b) и $\hat{\lambda} \in \{0, 1\}$.

Отметим, что Φ_n является суммой двух липшицевых функций. Предельный субдифференциал у нормы всегда содержится в единичном шаре B_* пространства $\mathbb{R}^d$, а у линейной функции он не зависит от выбора точки, поэтому включение (5.9) дает

$$-\psi_n(0) \in \lambda_n \left(\zeta_* + \frac{1}{n} B_* \right) + N(\hat{x}; \text{cl } \mathcal{C}_{\text{home}}).$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \uparrow \infty$, получаем (3.3b).

Если при этом еще включение $\lambda_* \in \{0, 1\}$ не имеет места, то $\lambda_* > 0$ и уже пара $(\psi_*, \lambda_*)/\lambda_*$ в качестве $(\hat{\psi}, \hat{\lambda})$ удовлетворяет всем необходимым соотношениям.

Теорема 1 доказана.

Заклучение

В работе получен ряд асимптотических предположений, при которых оптимальной траектории в системе принципа максимума можно сопоставить единственную сопряженную траекторию. В отличие от предыдущих результатов (отметим прежде всего недавние [2; 4; 6]) в этих предположениях проверялась асимптотика не самой производной, а лишь ее производных по направлению; в частности требование близости производных по направлению может не быть симметричным к перемене знака. Вследствие этого вместо пределов самих производных оказалось достаточно показать ограниченность второй производной сверху (следствие 4). Тем самым помимо коммутирования операций взятия производной и взятия предела удалось выявить еще один механизм построения асимптотических предположений, гарантирующих единственность сопряженной траектории в достаточно гладких задачах.

При этом найденные асимптотические предположения имеют существенный потенциал для своего развития. Отметим лишь несколько направлений. К примеру, рассматриваемые в рамках теоремы 2 предположения фактически требуют абсолютной сходимости интегралов (или их разности). Но можно использовать признаки условной сходимости.

Далее, асимптотические предположения (3.5a)–(3.5i) работают в рамках (3.4a). Условие (3.4a) о существовании конечного предела производных вдоль оптимальной траектории достаточно ограничительно. Перейти к частичным пределам можно, по-видимому, уточнив критерий оптимальности (см. τ -оптимальность [13]). Более нетривиален случай, когда предел если и есть, то бесконечный. Такие аномальные постановки более чем часты в экономических приложениях уже для случая задач со свободным правым концом, поэтому отдельный интерес представляют возможные аналоги (3.5a)–(3.5i), не использующие конечность предела в (3.4a).

Наконец, на данный момент отсутствуют какие-либо тонкие инструменты для нахождения или работы с множеством C_{home} . В случае, когда Λ — некоторая гладкая функция (в том числе не скалярная), близкие к $(J1) \vee (J2)$ предположения о Λ , могли бы гарантировать не слишком большой нормальный конус к C_{home} , а значит, не слишком большую правую часть в (3.3b). В частности, в этом случае особенно интересен аналог (3.4c).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Halkin H.** Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. *Econometrica*. 1974. Vol. 42. P. 267–272. doi: 10.2307/1911976
2. **Khlopin D.** Necessary conditions in infinite-horizon control problems that need no asymptotic assumptions // *Set-Valued and Variational Analysis*. 2023. Vol. 31, no. 1. Art. no. 8. doi: 10.1007/s11228-023-00672-5
3. **Асеев С.М., Кряжковский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // *Тр. МИАН*. 2007. Т. 257. С. 3–271.
4. **Асеев С.М., Вельов В.М.** Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // *Успехи мат. наук*. 2019. Vol. 74, № 6(450). С. 3–54. doi: 10.1070/rm9915
5. **Khlopin, D.** A maximum principle for one infinite horizon impulsive control problem // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. Vol. 51. P. 213–218. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.383
6. **Aseev S.M.** The Pontryagin maximum principle for optimal control problem with an asymptotic endpoint constraint under weak regularity assumptions // *J. Math. Sci. (N.Y.)*. 2023. Vol. 270, no. 4. P. 531–546. doi: 10.1007/s10958-023-06364-7
7. **Mordukhovich B.S.** *Variational analysis and applications*. Cham: Springer, 2018. 622 p.
8. **Rockafellar R.T., Wets R.J.B.** *Variational analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 736 p.
9. **Carlson D.A.** Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite-horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable // *J. Optim. Theory Appl.* 1990. Vol. 64. P. 55–69. doi: 10.1007/BF00940022
10. **Bogusz D.** On the existence of a classical optimal solution and of an almost strongly optimal solution for an infinite-horizon control problem // *J. Optim. Theory Appl.* 2013 Vol. 156, P. 650–682. doi: 10.1007/s10957-012-0126-2

11. **Clarke F.** Functional analysis, calculus of variations and optimal control. London: Springer, 2013. 591 p. doi: 10.1007/978-1-4471-4820-3
12. **Khlopin D.** Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // J. Dyn. Con. Sys. 2013. Vol. 19. P. 519–552. doi: 10.1007/s10883-013-9192-5
13. **Khlopin D.** Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem // Optimization. 2015. Vol. 64. P. 2417–2440. doi: 10.1080/02331934.2014.971413
14. **Ледяев Ю.С., Триман Д.С.** Суб- и суперградиенты огибающих, полунепрерывных замыканий и пределов последовательностей функций // Успехи мат. наук. 2012. Vol. 67. № 2(404). С. 157–186. doi: 10.4213/rm9466
15. **Pérez-Aros P.** Subdifferential formulae for the supremum of an arbitrary family of functions // SIAM J. Control Optim. 2019. Vol. 29. P. 1714–1743. doi: 10.1137/17M1163141
16. **Khlopin D.V.** On two-sided unidirectional mean value inequality in a Fréchet smooth space // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no. 2. P. 132–140. doi: 10.15826/umj.2023.2.011
17. **Aseev S.M., Kryazhinskii A.V.** The Pontryagin Maximum Principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43. P. 1094–1119. doi: 10.1137/S0363012903427518
18. **Seierstad A.** Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 103. P. 201–230. doi: 10.1023/A:1021733719020
19. **Shell K.** Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // Mathematical Systems Theory and Economics I/II. Berlin; Heidelberg: Springer, 1969. doi: 10.1007/978-3-642-46196-5_12
20. **Belyakov A.O.** Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited. 2017. 19 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/1512.01206>. doi: 10.48550/arXiv.1512.01206
21. **Беляков А.О.** О достаточных условиях оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом времени // Тр. МИАН. 2020. Vol. 308. С. 65–75. doi: 10.4213/tm4092
22. **Mordukhovich B.S., Nghia T.** Subdifferentials of nonconvex supremum functions and their applications to semi-infinite and infinite programs with lipschitzian data // SIAM J. Control Optim. 2013. Vol. 23. P. 406–431. doi: 10.1137/110857738
23. **Kamihigashi T.** Necessity of transversality conditions for infinite horizon problems // Econometrica. 2001. Vol. 69. P. 995–1012. doi: 10.1111/1468-0262.00227
24. **Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжковский А.В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Vol. 67. № 2(404). С. 3–64. doi: 10.4213/rm9467
25. **Aseev S.M.** Necessary conditions for the optimality and sustainability of solutions in infinite-horizon optimal control problems // Mathematics. 2023. Vol. 11. P. 38–51. doi: 10.3390/math11183851

Поступила 29.06.2024

После доработки 31.07.2024

Принята к публикации 5.08.2024

Хлопин Дмитрий Валерьевич

канд. физ.-мат. наук, зав. отделом,

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург e-mail: khlopin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. *Econometrica*, 1974, vol. 42, no. 2, pp. 267–272. doi: 10.2307/1911976
2. Khlopin D.V. Necessary conditions in infinite-horizon control problems that need no asymptotic assumptions. *Set-Valued Var. Anal.*, 2023, vol. 31, no. 1, art. 8. doi: 10.1007/s11228-023-00672-5
3. Aseev S.M., Kryazhinskii A.V. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255. doi: 10.1134/S0081543807020010
4. Aseev S.M., Veliov V.M. Another view of the maximum principle for infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russ. Math. Surv.*, 2019, vol. 74, no. 6, pp. 963–1011. doi: 10.1070/RM9915
5. Khlopin D.V. A maximum principle for one infinite horizon impulsive control problem. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 213–218. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.383

6. Aseev S.M. The Pontryagin maximum principle for optimal control problem with an asymptotic endpoint constraint under weak regularity assumptions. *J. Math. Sci.*, 2023, vol. 270, no. 4, pp. 531–546. doi: 10.1007/s10958-023-06364-7
7. Mordukhovich B.S. *Variational analysis and applications*. Cham, Springer, 2018, 622 p. doi: 10.1007/978-3-319-92775-6
8. Rockafellar R.T., Wets R.J.B. *Variational analysis*. Berlin, Springer-Verlag, 2009, vol. 317, 736 p. doi: 10.1007/978-3-642-02431-3
9. Carlson D.A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite-horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable. *J. Optim. Theory Appl.*, 1990, vol. 64, pp. 55–69. doi: 10.1007/BF00940022
10. Bogusz D. On the existence of a classical optimal solution and of an almost strongly optimal solution for an infinite-horizon control problem. *J. Optim. Theory Appl.*, 2013, vol. 156, no. 3, pp. 650–682. doi: 10.1007/s10957-012-0126-2
11. Clarke F. *Functional analysis, calculus of variations and optimal control*. London, Springer, 2013, 591 p. doi: 10.1007/978-1-4471-4820-3
12. Khlopin D. Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems. *J. Dyn. Control Syst.*, 2013, vol. 19, pp. 519–552. doi: 10.1007/s10883-013-9192-5
13. Khlopin D. Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 11, pp. 2417–2440. doi: 10.1080/02331934.2014.971413
14. Ledyayev Yu.S., Treiman J.S. Sub- and supergradients of envelopes, semicontinuous closures, and limits of sequences of functions. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, no. 2, pp. 345–373. doi: 10.1070/rm2012v067n02abeh004789
15. Pérez-Aros P. Subdifferential formulae for the supremum of an arbitrary family of functions. *SIAM J. Control Optim.*, 2019, vol. 29, no. 2, pp. 1714–1743. doi: 10.1137/17M1163141
16. Khlopin D.V. On two-sided unidirectional mean value inequality in a Fréchet smooth space. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 2, pp. 132–140. doi: 10.15826/umj.2023.2.011
17. Aseev S.M., Kryazhinskii A.V. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons. *SIAM J. Control Optim.*, 2004, vol. 43, no. 3, pp. 1094–1119. doi: 10.1137/S0363012903427518
18. Seierstad A. Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 1999, vol. 103, no. 1, pp. 201–230. doi: 10.1023/A:1021733719020
19. Shell K. Applications of Pontryagin's maximum principle to economics. In: Kuhn H.W., Szegö G.P. (eds.) *Mathematical systems theory and economics I/II*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1969, pp. 241–292. doi: 10.1007/978-3-642-46196-5_12
20. Belyakov A.O. Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited. 2017. 19 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1512.01206>. doi: 10.48550/arXiv.1512.01206
21. Belyakov A.O. On sufficient optimality conditions for infinite horizon optimal control problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, suppl. 1, pp. S56–S66. doi: 10.1134/S0081543820010058
22. Mordukhovich B.S., Nghia T. Subdifferentials of nonconvex supremum functions and their applications to semi-infinite and infinite programs with lipschitzian data. *SIAM J. Control Optim.*, 2013, vol. 23, no. 1, pp. 406–431. doi: 10.1137/110857738
23. Kamihigashi T. Necessity of transversality conditions for infinite horizon problems. *Econometrica*, 2001, vol. 69, no. 4, pp. 995–1012. doi: 10.1111/1468-0262.00227
24. Aseev S.M., Kryazhinskii A.V., Besov K.O. Infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, no. 2, pp. 195–253. doi: 10.1070/RM2012v067n02ABEH004785
25. Aseev S.M. Necessary conditions for the optimality and sustainability of solutions in infinite-horizon optimal control problems. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 18, pp. 38–51. doi: 10.3390/math11183851

Received June 29, 2024

Revised July 31, 2024

Accepted August 5, 2024

Dmitry Valer'evich Khlopin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: khlopin@imm.uran.ru.

Cite this article as: D. V. Khlopin. On an adjoint trajectory in infinite-horizon control problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 274–292.