ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 30 № 3 2024

УДК 517.977.8

К КОНСТРУИРОВАНИЮ РЕШЕНИЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ[1]

В. Н. Ушаков, А. А. Ершов

Изучается игровая задача о сближении в фиксированный момент времени конфликтно управляемой системы с компактом в конечномерном евклидовом пространстве. Основу схем конструирования решений задачи составляют методы теории позиционных дифференциальных игр, созданной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным во второй половине XX в. В задаче не предполагается, вообще говоря, выполнение условия седловой точки в маленькой игре, и поэтому задача рассматривается в минимаксной постановке. Для широкого класса конфликтно управляемых систем описаны и обоснованы схемы приближенного вычисления минимаксных u-стабильных трактов и мостов. Полученные результаты составляют один из этапов приближенного вычисления решений игровой задачи, связанных с дискретизацией промежутка времени, на котором происходит игра.

Ключевые слова: управляемая система, u-стабильный мост, u-стабильный тракт, множество разрешимости, игровая задача о сближении.

V. N. Ushakov, A. A. Ershov. On the construction of solutions to a game problem with a fixed end time.

We study the game problem of convergence of a conflict-control system with a compact set in a finite-dimensional Euclidean space at a fixed time. The schemes for constructing solutions of the problem are based on the methods of the theory of positional differential games designed by N.N. Krasovskii and A.I. Subbotin in the second half of the 20th century. In general, the problem does not assume that the saddle point condition in the small game is satisfied, and therefore the problem is considered in the minimax formulation. New schemes for the approximate calculation of minimax u-stable paths and bridges are described and justified for a wide class of conflict-control systems. The obtained results constitute a stage of the approximate calculation of solutions to the game problem, which is associated with the discretization of the time interval on which the game takes place.

Keywords: control system, u-stable bridge, u-stable path, solvability set, game problem of convergence.

MSC: 49N70, 91A23, 49L25

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-255-273

Введение

Рассматривается конфликтно управляемая система в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$. Изучается игровая задача о сближении системы с компактом в $\mathbb{R}^m$ в момент ϑ (см. [1–10]), формулируемая как минимаксная игровая задача о сближении, в которой не предполагается, вообще говоря, выполнение условия седловой точки в так называемой маленькой игре (см. [2–6]). В задаче, стоящей перед первым игроком (задача 1), разрешающая стратегия $u^*(t,x)$ формируется при условии, что второй игрок имеет информационное преимущество перед первым игроком, применяя в игре сближения контрстратегии $v(t,x,u)$ (см. [2–6]). При определении разрешающей стратегии в задаче 1 в рамках позиционного подхода, предложенного Н. Н. Красовским во второй половине XX в., ключевым моментом в статье становится проблема выделения (описания) в пространстве позиций игры множества разрешимости W^0 задачи о сближении — множества позиционного поглощения (см. [2]).

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

Так как в рамках постановки и разрешающих конструкций задачи 1 множество W^0 есть максимальный минимаксный u-стабильный мост и основная тяжесть в решении задачи 1 приходится на его выделение, то наибольшее внимание в работе уделено изучению свойства минимаксной u-стабильности и в том числе описанию различных форм этого свойства.

При выделении мостов в конкретных задачах 1 встает естественный вопрос о возможности их аналитического описания. Отметим, что даже в относительно простых линейных игровых задачах 1 в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2$ (простые конфликтно управляемые системы и геометрия целевых множеств) возникают трудности при попытках аналитического описания множеств W^0. Одна из наиболее распространенных проблем связана с наличием (как правило) негладкости границы ∂W^0 множества W^0 и сложностью ее аналитического описания. Негладкость границы ∂W^0 может быть обусловлена как негладкостью целевого множества, так и структурой конфликтно управляемой системы в задаче 1. В большинстве конкретных задач 1 для нелинейных конфликтно управляемых систем множество W^0 описать аналитически вряд ли возможно и поэтому так актуально приближенное конструирование множества W^0 в конкретных задачах.

Для изучения задачи 1 в статье привлечены унификационные конструкции из работ [10–13], дополняющих исследования Н. Н. Красовского по данной теме [14; 15]. Вводится понятие минимаксного u-стабильного тракта, дуальное к понятию минимаксного u-стабильного моста и представляющее собой его запись в обратном времени $\tau = t_0 + \vartheta - t$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Минимаксные u-стабильные тракты, как математическое понятие и как математические объекты, в конкретных игровых задачах наиболее перспективны для теоретического исследования возможностей аналитического описания и наиболее удобны для приближенных вычислений.

В работе представлены унификационные конструкции стабильности в аксиоматической форме (в форме условий **A.1**–**A.3**), предложенные в [10–12]. Такой подход полезен тем, что, с одной стороны, охватывает известные формы описания u-стабильности, а с другой — дает возможность применять в ряде конкретных игровых задач динамики рациональные схемы для описания минимаксной u-стабильности, сообразующиеся с динамикой конфликтно управляемой системы. Эти конструкции близки к конструкциям, предложенным А.И. Субботиным в созданной им теории минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби и уравнений в частных производных первого порядка [16; 17].

По постановке задачи и проблематике настоящее исследование примыкает к работам В. Флеминга [18], Л. С. Понтрягина [19;20] и ряда других отечественных ученых [21–24], посвященным линейным дифференциальным играм, концептуальную основу которых составляют конструкции первого прямого метода Л. С. Понтрягина и альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина. Работа близка по тематике и конструктивному подходу к публикациям [25–29], охватывающим широкий круг антагонистических дифференциальных игр.

1. Постановка задачи

Задана конфликтно управляемая система, поведение которой на промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 \leqslant \vartheta < \infty$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x^{(0)}, \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{1.1}$$

Здесь x — фазовый вектор в $\mathbb{R}^m$, u и v — управления первого и второго игроков, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагаются выполненными следующие условия.

A. Вектор-функция $f(t, x, u, v)$ определена, непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$, и для любого компакта $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдется такое $L = L(\Omega) \in (0, \infty)$, что

$$||f(t, x_*, u, v) - f(t, x^*, u, v)|| \leqslant L||x_* - x^*||, \quad (t, x_*, u, v), (t, x^*, u, v) \in \Omega \times P \times Q.$$

B. Найдется такое $\mu \in (0, \infty)$, что

$$||f(t, x, u, v)|| \leqslant \mu(1 + ||x||), \quad (t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q.$$

Условия **A**, **B** относительно $f(t, x, u, v)$ — достаточно общие и не исключают выполнение так называемого локального условия седловой точки в маленькой игре [1]. При этом условиям **A** и **B** удовлетворяет широкий класс нелинейных систем (1.1), для которых условие седловой точки в маленькой игре не выполняется. Принимая это во внимание, задачу о сближении системы (1.1), стоящую перед первым игроком (распоряжающимся выбором управлений $u \in P$), сформулируем в минимаксной постановке.

Пусть $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ и $M \in \mathrm{comp}(\mathrm{R}^m)$, где $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^m$ с хаусдорфовой метрикой.

З а д а ч а 1 (см. [2–6]). Первому игроку требуется определить позиционную стратегию $u^*(t, x)$, $(t, x) \in [t_*, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, обеспечивающую приведение в момент ϑ движения $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1) на M (т.е. $x(\vartheta) \in M$), какова бы ни была контрстратегия $v(t, x, u)$, $(t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$ второго игрока.

Указанное здесь движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1) на $[t_*, \vartheta]$ порождено позиционной стратегией $u^*(t, x)$ первого игрока совместно с контрстратегией $v(t, x, u)$ второго игрока, что соответствует так называемой минимаксной постановке задачи о сближении (см. [2,3,6,7]), которая предоставляет преимущество в информационном плане второму игроку: при формировании в каждый момент $t \in [t_0, \vartheta]$ своих управлений он знает управление u, выбранное в этот момент первым игроком. Строгая формулировка задачи 1 и относящихся к ней понятий дана в [2; 3].

Основное внимание в работе уделено изучению свойства минимаксной u-стабильности, минимаксных u-стабильных мостов и трактов в задаче 1; поэтому не фокусируемся на описании стратегий игроков и порождаемых ими движений системы (1.1) (подробно об этом дано в [2;3]).

В [3] показано, что при выполнении условий **A**, **B** на систему (1.1) позиционная стратегия $u^*(t, x)$ первого игрока, разрешающая задачу 1 для любой исходной позиции (t_*, x_*), принадлежащей множеству W^0 позиционного поглощения в задаче 1 (множеству разрешимости в этой задаче), может быть сформирована как экстремальная к W^0 позиционная стратегия.

Наибольшая трудность в решении задачи 1 приходится на выделение множества W^0 в пространстве $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ позиций (t, x) системы (1.1). Точное выделение (аналитическое описание) W^0 — серьезная математическая проблема, которая в рамках общей постановки задачи 1 неразрешима. Аналитическое описание W^0 возможно лишь в относительно простых конкретных задачах о сближении.

Заключая раздел, укажем, например, достаточно широкий класс конфликтно управляемых систем вида (1.1), удовлетворяющих условиям **A**, **B**, для которых имеет смысл рассматривать игровую задачу о сближении с M как задачу 1.

Конфликтно управляемая система на промежутке $[t_0, \vartheta]$ имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x, u, v) + \gamma(t, x) \cdot \varphi(\overline{u}, \overline{v}), \quad x(t_0) = x^{(0)}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (u, \overline{u}) \in P \times \overline{P}, \quad (v, \overline{v}) \in Q \times \overline{Q},$$

где P и Q, $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ — компакты в пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^{\overline{p}}$ и $\mathbb{R}^{\overline{q}}$ соответственно.

Здесь правая часть системы стеснена условиями вида **A**, **B**; вектор-функция $h(t, x, u, v)$ стеснена условием седловой точки в маленькой игре; скалярная функция $\gamma(t, x)$ непрерывна и положительна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$; вектор-функция $\varphi(\overline{u}, \overline{v})$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ представима в виде $\varphi(\overline{u}, \overline{v}) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-1}, \psi(\overline{u}, \overline{v}))$, где непрерывная скалярная функция $\psi(\overline{u}, \overline{v})$ на $\overline{P} \times \overline{Q}$ удовлетворяет неравенству $\max\limits_{\overline{u} \in \overline{P}} \min\limits_{\overline{v} \in \overline{Q}} \psi(\overline{u}, \overline{v}) < \min\limits_{\overline{v} \in \overline{Q}} \max\limits_{\overline{u} \in \overline{P}} \psi(\overline{u}, \overline{v})$.

При $l = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-1}, l_m)$, $l_m > 0$ выполняется

$$\begin{aligned}
&\max_{(u,\overline{u})\in P\times\overline{P}}\ \min_{(v,\overline{v})\in Q\times\overline{Q}}\langle l, h(t,x,u,v) + \gamma(t,x)\varphi(\overline{u},\overline{v})\rangle \\
&= \max_{u\in P}\min_{v\in Q}\langle l, h(t,x,u,v)\rangle + \max_{\overline{u}\in\overline{P}}\min_{\overline{v}\in\overline{Q}}\langle l, \gamma(t,x)\varphi(\overline{u},\overline{v})\rangle \\
&= \max_{u\in P}\min_{v\in Q}\langle l, h(t,x,u,v)\rangle + l_m\gamma(t,x)\max_{\overline{u}\in\overline{P}}\min_{\overline{v}\in\overline{Q}}\psi(\overline{u},\overline{v}) \\
&< \min_{v\in Q}\max_{u\in P}\langle l, h(t,x,u,v)\rangle + l_m\gamma(t,x)\min_{\overline{v}\in\overline{Q}}\max_{\overline{u}\in\overline{P}}\psi(\overline{u},\overline{v}) \\
&= \min_{(v,\overline{v})\in Q\times\overline{Q}}\ \max_{(u,\overline{u})\in P\times\overline{P}}\langle l, h(t,x,u,v) + \gamma(t,x)\varphi(\overline{u},\overline{v})\rangle.
\end{aligned}$$

В качестве примера приведем функции $h(t,x,u,v) = f^{(1)}(t,x,u) + f^{(2)}(t,x,v)$, где $f^{(1)}(t,x,u)$ и $f^{(2)}(t,x,v)$, $(u,v) \in P \times Q$ удовлетворяют условиям вида **A**, **B**, функции $\gamma(t,x) = 1 + \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^m$, и

$$\psi(\overline{u},\overline{v}) = \sin(\overline{u}\,\overline{v}), \quad \text{где} \quad (\overline{u},\overline{v}) \in \overline{P}\times\overline{Q}, \quad \overline{P} = \overline{Q} = \left[\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\right],$$

$$\psi(\overline{u},\overline{v}) = \left(\frac{\overline{u}-\overline{v}}{\overline{u}+\overline{v}}\right)^2, \quad \text{где} \quad (\overline{u},\overline{v}) \in \overline{P}\times\overline{Q}, \quad \overline{P} = \overline{Q} = [1, 10].$$

2. Свойство минимаксной u-стабильности в задаче 1 (унификация)

Так как эффективное аналитическое описание множества разрешимости W^0 в задаче 1 невозможно, в большинстве конкретных задач о сближении возникает вопрос о приближенном вычислении W^0. Приближенному вычислению в конкретных задачах должна предшествовать разработка схем и алгоритмов приближенного вычисления W^0 в рамках общей постановки задачи 1. В описании таких схем и алгоритмов мы используем ключевое свойство множества W^0: W^0 — максимальный минимаксный u-стабильный мост (см. [2; 3]).

Принимая во внимание условия **A**, **B** и определение множества W^0 как множества разрешимости задачи 1, заключаем, что можно указать ограниченную замкнутую цилиндрическую область $\Omega = [t_0, \vartheta] \times B(\mathbf{0}; R)$, содержащую W^0, все компоненты разрешающей конструкции задачи 1 в том числе движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1) на $[t_*, \vartheta]$, удовлетворяющие $x(\vartheta) \in M_\varepsilon$; здесь $B(\mathbf{0}; R) = \{b \in \mathbb{R}^m : ||b|| \leqslant R\}$, $R \in (0, \infty)$, M_ε — замкнутая ε-окрестность множества M, $\varepsilon > 0$ — некоторое заданное число.

Именно эта область Ω рассматривается в работе.

В данном разделе, привлекая унификационные конструкции из [10–13], дополняющие унификационные конструкции Н.Н. Красовского [14; 15], опишем минимаксные u-стабильные мосты и тракты в задаче 1.

Минимаксная u-стабильность непустого замкнутого множества $W \subset \Omega$ означает слабую инвариантность W относительно некоторого набора дифференциальных включений (д.в.), индуцированных системой (1.1) при помощи некоторого $\mathcal{L}$-набора многозначных отображений.

Этот набор д.в. мы определим в достаточно общей аксиоматической форме при помощи условий **A.1**–**A.3**.

Уточним, что имеется в виду.

Для описания набора д.в., удовлетворяющего условиям **A.1**–**A.3**, введем в рассмотрение функцию — гамильтониан системы (1.1)

$$H(t,x,l) = \max_{u\in P}\min_{v\in Q}\langle l, f(t,x,u,v)\rangle, \quad (t,x,l) \in \Omega \times \mathbb{R}^m;$$

здесь $\langle l, f\rangle$ — скалярное произведение векторов l и f из $\mathbb{R}^m$.

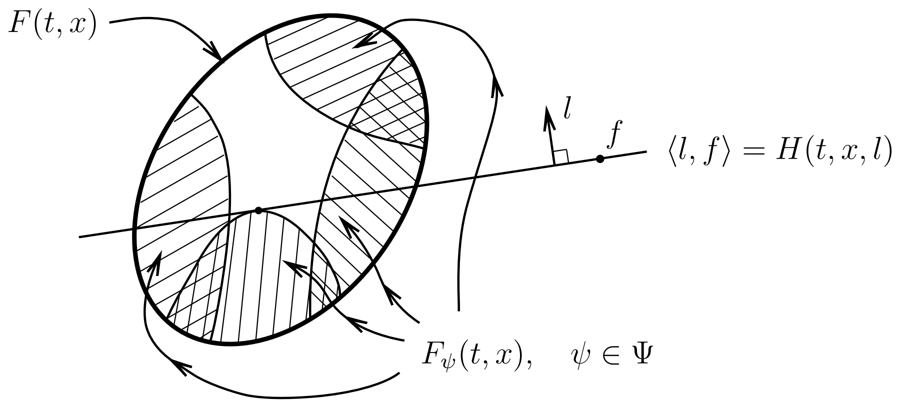

Рис. 1. Набор $\{F_\psi : \psi\in\Psi\}$ в $\mathbb{R}^m$.

Введенный гамильтониан $H(t,x,l)$ соответствует минимаксной постановке задачи 1.

Пусть $(t,x)\mapsto G(t,x)\subset\mathbb{R}^m$, $(t,x)\in\Omega$, — непрерывное в хаусдорфовой метрике многозначное отображение; здесь $G(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, — такие выпуклые компакты в $\mathbb{R}^m$, что $F(t,x)=\mathrm{co}\{f(t,x,u,v) : u\in P, v\in Q\}\subset G(t,x)$, $\mathrm{co}\{f\}$ — выпуклая оболочка множества $\{f\}$.

Пусть также заданы некоторое множество Ψ элементов ψ и набор $\{F_\psi : \psi\in\Psi\}$ отображений $F_\psi : (t,x)\mapsto F_\psi(t,x)\subset\mathbb{R}^m$, $(t,x)\in\Omega$, удовлетворяющих следующим условиям.

A.1. Для любых $(t,x,\psi)\in\Omega\times\Psi$ множество $F_\psi(t,x)$ выпукло, замкнуто в $\mathbb{R}^m$ и $F_\psi(t,x)\subset G(t,x)$.

A.2. Найдется функция $\omega^*(\delta)\downarrow 0$, $\delta\downarrow 0$, удовлетворяющая

$$d(F_\psi(t_*,x_*),F_\psi(t^*,x^*))\leqslant\omega^*(|t_*-t^*|+||x_*-x^*||),\quad \psi\in\Psi,\quad (t_*,x_*),(t^*,x^*)\in\Omega.$$

A.3. Выполняется равенство (см. рис. 1)

$$\min_{\psi\in\Psi} h_{F_\psi(t,x)}(l)=H(t,x,l),\quad (t,x,l)\in\Omega\times S.$$

Здесь $h_F(l)=\max\limits_{f\in F}\langle l,f\rangle$ при $F\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^m$ с хаусдорфовой метрикой $d(F_*,F^*)=\max(h(F_*,F^*),h(F^*,F_*))$, $h(F_*,F^*)=\max\limits_{f_*\in F_*}\rho(f_*,F^*)$, $\rho(f_*,F^*)=\min\limits_{f^*\in F^*}||f_*-f^*||$.

Рассмотрим несколько примеров $\mathcal{L}$-наборов.

П р и м е р 1 (см. [2;3]). Для системы (1.1) введем набор $\{F_{v(\cdot)} : v(\cdot)\in V\}$, где $F_{v(\cdot)}(t,x)=\mathrm{cl}\,\mathrm{co}\,\{f=f(t,x,u,v(u)) : u\in P\}$, $(t,x)\in\Omega$; здесь V — совокупность всех измеримых по Борелю функций $v(u)\in Q$ на P, $\mathrm{cl}\,\mathrm{co}\,\{f\}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $\{f\}$.

П р и м е р 2 (см. [14;15]). Для системы (1.1) введем набор $\{G_l : l\in S\}$, где

$$G_l(t,x)=\{f\in G(t,x) : \langle l,f\rangle\leqslant H(t,x,l)\},\quad (t,x)\in\Omega;$$

здесь $F(t,x)\subset G(t,x)=G=B(\mathbf{0};K)\subset\mathbb{R}^m$, $K\in(0,\infty)$.

Здесь $K=\max\big\{||f(t,x,u,v)|| : (t,x,u,v)\in\Omega\times P\times Q\big\}\in(0,\infty)$, $S=\{l\in\mathbb{R}^m : ||l||=1\}$.

П р и м е р 3. Для системы (1.1) вида

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u,v)=g(t,x,u)+C(t,x)v,\quad u\in P,\quad v\in Q,$$

где Q — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^q$ с конечным числом вершин, введем конечный набор $\{F_\psi : \psi\in\Psi\}$, удовлетворяющий **A.1**–**A.3**.

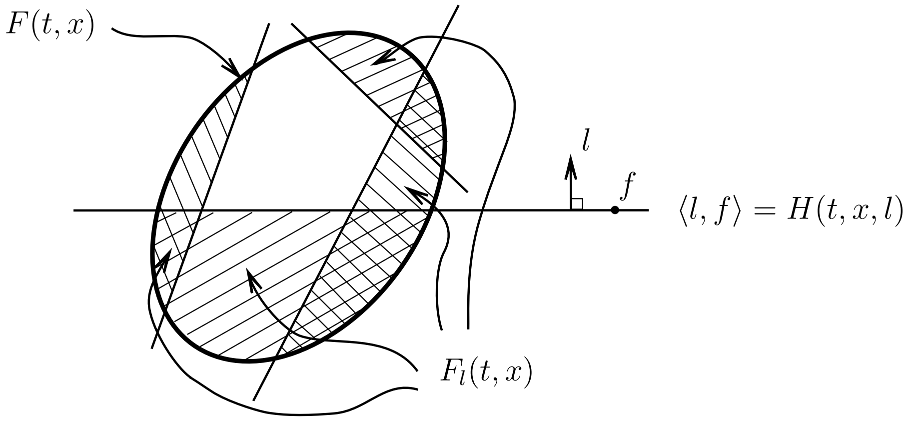

Рис. 2. Набор $\{F_l(t,x) : l \in S\}$ в $\mathbb{R}^m$.

Полагаем: Ψ — набор вершин $v^{(j)}$, $j = \overline{1,J}$, многогранника Q; в качестве $F_\psi(t,x)$, $\psi \in \Psi$, — множества $F_{v^{(j)}}(t,x) = \Phi(t,x) + C(t,x)v^{(j)}$, $j = \overline{1,J}$, где $\Phi(t,x) = \mathrm{co}\{g(t,x,u) : u \in P\}$, $(t,x) \in \Omega$; $C(t,x)$ — матрица размерности $m \times q$.

П р и м е р 4 (см. [10–13].) Для системы (1.1) введем набор $\{F_l : l \in S\}$ (см. рис. 2), где $F_l(t,x) = \{f \in F(t,x) : \langle l,f\rangle \leqslant H(t,x,l)\}$, $(t,x) \in \Omega$, удовлетворяющий неравенству

$$H_*(t,x,l) \leqslant H(t,x,l) \leqslant H^*(t,x,l), \quad l \in S,$$

$$H_*(t,x,l) = \min_{(u,v)\in P\times Q} \langle l, f(t,x,u,v)\rangle, \quad H^*(t,x,l) = \max_{(u,v)\in P\times Q} \langle l, f(t,x,u,v)\rangle.$$

Векторы $l \in S$ из примеров 2–4, предназначенные для определения минимаксных u-стабильных мостов и трактов, мы трактуем как своебразные управления второго игрока, которые вкупе с гамильтонианом $H(t,x,l)$, $(t,x,l) \in \Omega \times S$ системы (1.1) подменяют в игровой задаче 1 контруправления $v(u) \in Q$, $u \in P$ второго игрока. Такая подмена необходима в связи с тем, что в так называемых локальных оценках (см. [2]), описывающих локальные отклонения от W^0 движений $x(t)$, $t \in [t_*,\vartheta]$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1), порожденных экстремальной к W^0 позиционной стратегией $u^*(t,x)$ первого игрока, участвуют фактически не все контруправления $v(\cdot) = \{v(u) : u \in P\}$ второго игрока, а лишь просепарированные контруправления $v_l(\cdot) = \{v_l(u) : u \in P\}$, экстремальные в направлении векторов $l \in S$, т. е. такие, что

$$\langle l, f(t,x,u,v_l(u))\rangle = \min_{v(u)\in Q} \langle l, f(t,x,u,v(u))\rangle \leqslant H(t,x,l), \quad u \in P, \quad (t,x,l) \in \Omega \times S.$$

Эта связь между контруправлениями $v_l(\cdot)$, $l \in S$, и гамильтонианом дает возможность привлечь к выводу упомянутых локальных оценок множества $G_l(t,x)$ и $F_l(t,x)$. Данные множества участвуют в описании свойства минимаксной u-стабильности множества W^0.

Подобного рода переход в описании минимаксной u-стабильности от контруправлений $v(\cdot)$ в пользу языка векторов $l \in S$ и гамильтониана $H(t,x,l)$ доставляет определенные преимущества и в теоретических исследованиях игровых задач, и при конструировании решений в этих задачах. Такой подход к игровым задачам о сближении и, более общо, к задачам теории дифференциальных игр стал определяющим при распространении А. И. Субботиным идей и конструкций теории позиционных дифференциальных игр на теорию уравнений Гамильтона — Якоби и теорию уравнений в частных производных первого порядка (см. [16; 17]).

Обратимся к описанию свойства минимаксной u-стабильности в терминах набора $\mathcal{L}$ отображений $(t,x) \mapsto F_\psi(t,x)$, $\psi \in \Psi$, удовлетворяющего **A.1**–**A.3**, т. е. в терминах $\mathcal{L}$-набора.

Приведем определение оператора π минимаксного u-стабильного поглощения в терминах отображений из $\mathcal{L}$.

Пусть $x_* \in \mathbb{R}^m$, X_* и X^* — множества в $\mathbb{R}^m$, $(t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta} = \{(\eta_*, \eta^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : t_0 \leqslant \eta_* \leqslant \eta^* \leqslant \vartheta\}$, $\psi \in \Psi$.

Введем на $[t_0, \vartheta]$ д.в.

$$\frac{dx}{dt} \in F_\psi(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \psi \in \Psi. \tag{2.1}$$

Полагаем

- $X_\psi(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости (м.д.) в момент t^* д.в. (2.1) с начальной точкой x_*, отвечающей моменту t_*;
- $X_\psi(t^*, t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X_\psi(t^*, t_*, x_*)$ — м.д. в момент t^* д.в. (2.1) с начальным множеством X_*, отвечающим моменту t_*;
- $X_\psi^{-1}(t_*.t^*.X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X_\psi(t^*, t_*, x_*) \cap X^* \neq \varnothing\}$.

Ниже приведем определения, связанные со свойством минимаксной u-стабильномсти, близкие или совпадающие с определениями из работ [10–13].

Определение 1. Оператором минимаксного u-стабильного поглощения π в задаче 1 назовем отображение

$$(t_*, t^*, X^*) \mapsto \pi(t_*, t^*, X^*) = \bigcap_{\psi \in \Psi} X_\psi^{-1}(t_*, t^*, X^*), \quad (t_*, t^*, X^*) \in \mathbf{\Delta} \times 2^{\mathbb{R}^m}.$$

Определение 2. Замкнутое множество $W = \{(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m : x \in W(t)\} \subset \Omega$ назовем минимаксным u-стабильным мостом в задаче 1, если

$$W(\vartheta) \subset M; \quad W(t_*) \subset \pi(t_*, t^*, W(t^*)), \quad (t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}, \quad t_* \in T;$$

здесь $\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in \Phi\}$, $\Phi \subset \Omega$; $T = \{t \in [t_0, \vartheta] : W(t) \neq \varnothing\}$.

Определение 3. Символом W^0 обозначим максимальный по включению минимаксный u-стабильный мост.

По определению W^0 выполняются соотношения $W^0(\vartheta) = M$, $W^0 \subset \Omega$.

Ниже будет показано, что W^0 — максимальный минимаксный u-стабильный мост в смысле его определений из [2; 3] (заметим, что в работе [2] предложено изначальное определение минимаксного u-стабильного моста, незначительно отличающееся от определения из [3, с. 244]).

В [3] приведено утверждение о том, что максимальный минимаксный u-стабильный мост в задаче 1 и множество разрешимости W^0 этой задачи совпадают. Поскольку в любой конкретной задаче 1 $W^0(\vartheta) = M \neq \varnothing$, то $W^0 \neq \varnothing$. Иными словами, в любой конкретной задаче 1 максимальный минимаксный u-стабильный мост W^0 существует как непустое множество в Ω. Оговоримся при этом, что в некоторых конкретных задачах 1 мост W^0 вырожден, т. е. имеет единственное непустое временнóе сечение $W^0(\vartheta) = M$.

Привлекая определения 2, 3 минимаксных u-стабильных мостов, можно доказать ряд важных утверждений теории дифференциальных игр, а также сравнивать множества разрешимости W^0 некоторых конкретных задач 1.

В определении 1 введен оператор π минимаксного u-стабильного поглощения в задаче 1 при помощи $\mathcal{L}$ набора $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$, заданного в достаточно общей аксиоматической форме.

Рассмотрим наряду с ним оператор π^*, отвечающий $\mathcal{L}$-набору $\{F_{v(\cdot)} : v(\cdot) \in V\}$ из примера 1, соответствующему первоначальному определению минимаксной u-стабильности (см. [2; 3]).

Определение 1*. Оператором π^* в задаче 1 назовем отображение

$$(t_*, t^*, X^*) \mapsto \pi^*(t_*, t^*, X^*) = \bigcap_{v \in V} X_v^{-1}(t_*, t^*, X^*), \quad (t_*, t^*, X^*) \in \mathbf{\Delta} \times 2^{\mathbb{R}^m}.$$

Здесь $v = v(\cdot) \in V$ и $X_v^{-1}(t_*, t^*, X^*)$ определено по общей схеме, отвечающей $\mathcal{L}$-набору.

О п р е д е л е н и е 2^*. Замкнутое множество $W \subset \Omega$ назовем минимаксным u^*-стабильным мостом в задаче 1, если $W(\vartheta) \subset M$, и $W(t_*) \subset \pi^*(t_*, t^*, W(t^*))$, $(t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}$, $t_* \in T$.

Простыми стандартными методами показывается, что определения 2 и 2^* эквивалентны в том смысле, что $W \subset \Omega$ — минимаксный u-стабильный мост в задаче 1 тогда и только тогда, когда $W \subset \Omega$ — минимаксный u^*-стабильный мост в задаче 1.

В попытках применить определения минимаксных u-стабильных мостов к решению конкретных задач 1 (с конкретными системами (1.1) и множествами M) мы сталкиваемся с трудностями. Трудности обусловлены тем, что при выделении множества W^0 мы вынуждены (в соответствии с определением W^0) “пятиться” во времени t от целевого множества $M = W^0(\vartheta)$, используя при этом свойство минимаксной u-стабильности (т. е. оператор π), выраженное в терминах “прямого” времени (т. е. в терминах множеств $X_\psi(t^*, t_*, x_*)$, $(t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}$, $(t_*, x_*) \in \Omega$, $\psi \in \Psi$).

Такое временно́е рассогласование, особенно неудобное при решении конкретных игровых задач с использованием оператора π, приводит к необходимости обращения времени t, т. е. замены на промежутке $[t_0, \vartheta]$ “прямого” времени t на “обратное” время τ и соответственно представления минимаксных u-стабильных мостов в терминах обратного времени.

Ниже убираем кавычки из названий времени.

Определим обратное время соотношением $\tau = t_0 + \vartheta - t$, $t \in [t_0, \vartheta]$, представим конфликтно управляемую систему (1.1) в обратном времени

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, u, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, u, v), \quad (\tau, z) \in \Omega, \quad (u, v) \in P \times Q. \tag{2.2}$$

Систему (2.2) мы называем дуальной к системе (1.1). Вообще говоря, динамика этих систем различна, но для некоторых систем она совпадает.

Введем также д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_\psi(\tau, z) = -F_\psi(t_0 + \vartheta - \tau, z), \quad (\tau, z) \in \Omega, \quad \psi \in \Psi. \tag{2.3}$$

Введем обозначения, связанные с (2.2), (2.3).

Пусть $z_* \in \mathbb{R}^m$, $Z_* \subset \mathbb{R}^m$, $(\tau_*, \tau^*) \in \mathbf{\Delta}^* = \{(\xi_*, \xi^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : t_0 \leqslant \xi_* \leqslant \xi^* \leqslant \vartheta\}$, $\psi \in \Psi$. Полагаем

- $Z_\psi(\tau^*, \tau_*, z_*)$ — м.д. в момент τ^* д.в. (2.3) с начальной точкой (τ_*, z_*);
- $Z_\psi(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup\limits_{z_* \in Z_*} Z_\psi(\tau^*, \tau_*, z_*)$ — м.д. в момент τ^* д.в. (2.3) с начальным множеством (τ_*, Z_*);
- $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcap\limits_{\psi \in \Psi} Z_\psi(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ — множество совместной достижимости (по всем $\psi \in \Psi$) в момент τ^* дифференциальных включений (2.3) с начальным множеством (τ_*, Z_*).

В терминах времени $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и отображения $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ введем множество $Z = \bigcup\limits_{\tau \in T^*} (\tau, Z(\tau)) \subset \Omega$, удовлетворяющее

$$Z(t_0) \subset M, \quad Z(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*)), \quad (\tau_*, \tau^*) \in \mathbf{\Delta}^*, \quad \tau^* \in T^* = \{\tau \in [t_0, \vartheta], Z(\tau) \neq \varnothing\}. \tag{2.4}$$

О п р е д е л е н и е 4. Замкнутое множество $Z \subset \Omega$, удовлетворяющее (2.4), назовем минимаксным u-стабильным трактом системы (2.2) в задаче 1.

Пусть W — минимаксный u-стабильный мост в задаче 1.

Покажем, что равенство

$$Z(\tau) = W(t), \quad t + \tau = t_0 + \vartheta, \tag{2.5}$$

определяет минимакный u-стабильный тракт Z системы (2.2).

Действительно, пусть $Z \subset \Omega$ определено равенством (2.5).

Выполняется $Z(t_0) = W(\vartheta) \subset M$.

Покажем, что справедливо второе включение из (2.4).

Выберем произвольные $(\tau_*, \tau^*) \in \mathbf{\Delta}^*$, $\tau^* \in T^*$, и $z^* \in Z(\tau^*)$. Тогда $x_* = z^* \in W(t_*)$, $t_* = t_0 + \vartheta - \tau^*$.

Для $t^* = t_0 + \vartheta - \tau_*$ и $\psi \in \Psi$ выполняется $W(t^*) \cap X_\psi(t^*, t_*, x_*) \neq \varnothing$ и, значит, некоторое решение $x(t) = x(t, t_*, x_*)$ д.в. (2.1) на $[t_*, t^*]$ удовлетворяет $x^* = x(t^*) \in W(t^*)$.

Полагаем $z_*^\psi = x^* \in Z(\tau_*)$ и движение $x(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, запишем как решение д.в. (2.3) на $[\tau_*, \tau^*]$: $x(t) = z(\tau)$, $t + \tau = t_0 + \vartheta$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$.

Получаем, что для любых $\psi \in \Psi$, $z^* \in Z(\tau^*)$, $\tau^* \in T^*$, найдется точка $z_*^\psi \in Z(\tau_*)$ такая, что $z^* = z(\tau^*, \tau_*, z_*^\psi)$. Отсюда следует $z^* \in Z_\psi(\tau^*, \tau_*, z_*^\psi)$, $\psi \in \Psi$, и поэтому $z^* \subset Z(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*))$.

Установлено, что множество $Z \subset \Omega$, определяемое равенством (2.5), удовлетворяет $Z(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*))$ и, значит, Z — минимаксный u-стабильный тракт системы (2.2) в задаче 1.

Аналогично рассуждая, можем убедиться, что для любого минимаксного u-стабильного тракта $Z \subset \Omega$ равенство (2.5) определяет минимаксный u-стабильный мост $W = \{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^m : x \in W(t)\}$ в задаче 1.

Показано, что равенство (2.5) задает взаимнооднозначное соответствие между минимаксными u-стабильными мостами W (1.1) и минимаксными u-стабильными трактами Z дуальной системы (2.2).

Поскольку в множестве минимаксных u-стабильных мостов W существует максимальный (по включению) мост W^0, то и в множестве минимаксных u-стабильных трактов Z существует максимальный (по включению) тракт Z^0, связанный с W^0 равенством

$$Z^0(\tau) = W^0(t), \quad \tau + t = t_0 + \vartheta, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

3. А-система $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ в $\mathbb{R}^m$

Введенное в предыдущем разделе множество Z^0 более приемлемо для выделения в Ω, чем W^0, ибо направление его выделения (выделение временны́х сечений $Z^0(\tau)$) согласовано во времени с направлением эволюции множеств достижимости $Z(\tau, \tau_*, Z(\tau_*))$, $\tau \in [\tau_*, \vartheta]$. Однако точное выделение (аналитическое описание) множества Z^0, как и множества W^0, возможно лишь в немногих конкретных задачах 1. В связи с этим неизбежно возникает проблема приближенных вычислений множества Z^0, которая включает в себя прежде всего вопросы, касающиеся приближенного вычисления Z^0 при общей постановке задачи 1.

В этом разделе обсудим вопросы приближенного вычисления множества Z^0, которое, прежде всего, предполагает дискретизацию пространства $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ позиций игровой задачи 1 и вложенного в это пространство цилиндра Ω, а также присутствующие в задаче 1 ограничения P и Q на управления игроков. Дискретизация пространства $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ включает дискретизацию промежутка $[t_0, \vartheta]$ и фазового пространства $\mathbb{R}^m$ и может быть реализована в различных схемах.

Опишем первый этап дискретизации, связанный с дискретизацией промежутка $[t_0, \vartheta]$.

Введем двоичное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, где $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1} \cdot (\vartheta - t_0)$, $i = \overline{0, N-1}$; $N = 2^r$, $r \in \mathbb{N}$.

Разбиению Γ будет сопоставлена ниже А-система $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, аппроксимирующая Z^0. Понятие А-системы $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ квалифицируем как теоретическую основу для формирования методов и алгоритмов приближенного вычисления Z^0. Базовые элементы этой аппроксимационной схемы — множества достижимости $Z_\psi(\tau^*, \tau_*, Z_*)$, $\psi \in \Psi$, $\tau_*, \tau^* \in \Gamma$ подменяются выпуклыми компактами $z_* + (\tau^* - \tau_*)H_\psi(\tau_*, z_*)$ в $\mathbb{R}^m$. При таких подменах множества $Z_\psi(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ и $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$, $\psi \in \Psi$, $\tau_*, \tau^* \in \Gamma$ и определение минимаксного u-стабильного тракта Z^0 трансформируются в определения, отвечающие разбиению Γ и более приспособленные для вычислений.

Определению А-системы $\{\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ предварим введение некоторых “промежуточных” систем множеств в $\mathbb{R}^m$, отвечающих тому же разбиению Γ, и которым в схеме определения системы $\{\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ отводится исключительно вспомогательная, второстепенная роль, не предполагающая их конструирование.

Начнем с описания “промежуточных” систем.

Сопоставим разбиению Γ систему $\{Z^0(\tau_i) \colon \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $Z^0(\tau_i) = \{z \in \mathbb{R}^m \colon (\tau_i, z) \in Z^0\}$ — временны́х сечений множества Z^0, отвечающих моментам $\tau_i \in \Gamma$.

Наряду с $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ рассмотрим систему $\{Z^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $Z^{\Gamma}(\tau_i)$ в $\mathbb{R}^m$, заданных рекуррентно:

$$Z^{\Gamma}(\tau_0) = M, \quad Z^{\Gamma}(\tau_i) = Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^{\Gamma}(\tau_{i-1})), \quad i \in \overline{1, N}.$$

Так как выполняются соотношения $Z^0(\tau_0) = M,\ Z^0(\tau_i) \subset Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^0(\tau_{i-1})),\ i \in \overline{1, N}$, то $Z^0(\tau_i) \subset Z^{\Gamma}(\tau_i),\ i \in \overline{0, N}$.

От разбиения Γ перейдем к последовательности двоичных разбиений промежутка $[t_0, \vartheta]$

$$\Gamma^{(n)} = \{\tau_0^{(n)} = t_0, \tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_i^{(n)}, \ldots, \tau_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}, \quad N(n) = 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В $\{\Gamma^{(n)}\}$ каждое последующее разбиение содержит предыдущее.

По аналогии с Γ каждому $\Gamma^{(n)}$ сопоставим систему $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) \colon \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ множеств $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)})$:

$$Z^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = M, \quad Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)})), \quad i \in \overline{1, N(n)}.$$

Для любого $\tau_* \in \Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, справедливы

$$Z^0(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*), \quad Z^{(k)}(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*) \ \text{ при } \ k, n \in \mathbb{N}, \quad n < k. \tag{3.1}$$

О п р е д е л е н и е 5. Момент времени $\tau \in [t_0, \vartheta]$ назовем *двоичным*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\tau_* \in \Gamma^{(n)}$. Все остальные моменты времени из $[t_0, \vartheta]$ будем называть *недвоичными.*

Введем множество $T^* = \{\tau \in [t_0, \vartheta] : Z^0(\tau) \neq \varnothing\}$. T^* есть некоторый отрезок $[t_0, \hat{t}]$, что следует из определения Z^0.

Пусть $\tau_* \in T^*$ — двоичный момент. Из (3.1) следует, что $\{Z^{(n)}(\tau_*)\}$ сходится к компакту $\overset{*}{Z}(\tau_*) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} Z^{(n)}(\tau_*)$. Сходимость последовательности $\{Z^{(n)}(\tau_*)\}$ означает, что для любой точки $z_* \in \overset{*}{Z}(\tau_*)$ найдется последовательность $\{z_*^{(n)}\}$, $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_*)$ при $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к z_*, и любая сходящаяся последовательность $\{z_*^{(n)}\}$, $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_*)$ имеет пределом некоторую точку $z_* \in \overset{*}{Z}(\tau_*)$.

Определение множества $\overset{*}{Z}(\tau_*)$ распространим с двоичных моментов на другие моменты $\tau_* \in T^*$.

Полагаем $t_n(\tau_*) = \max\{\tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)} : \tau_i^{(n)} \leqslant \tau_*\}$.

Пусть $\tau_* \in T^*$ — недвоичный момент. Определим для него множество $\overset{*}{Z}(\tau_*)$ всех таких точек $z_* \in \mathbb{R}^m$, что точка (τ_*, z_*) есть предел некоторой последовательности $\{(t_n(\tau_*), z_*^{(n)})\}$, $t_n(\tau_*) \in \Gamma^{(n)}$, $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(t_n(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$. В итоге определено множество $\overset{*}{Z} = \{(\tau_*, z_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m : z_* \in \overset{*}{Z}(\tau_*)\}$.

Компакт $\overset{*}{Z} \subset \Omega$ представи́м в виде

$$\overset{*}{Z} = \lim_{n \to \infty} \overset{*}{Z}{}^{(n)}, \quad \overset{*}{Z}{}^{(n)} = \{(\tau_i^{(n)}, z_i^{(n)}) \in T^* \times \mathbb{R}^m : z_i^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_i^{(n)})\}, \quad n \in \mathbb{N};$$

здесь сходимость понимается в хаусдорфовой метрике.

Мы записываем также $\overset{*}{Z} = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$, понимая под этой записью то, что $\overset{*}{Z}$ порождено последовательностью А-систем $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Множества* $\overset{*}{Z}$ *и* Z^0 *совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем включение $\overset{*}{Z} \subset Z^0$. Для этого убедимся, что $\overset{*}{Z}$ удовлетворяет включениям вида (2.4).

В самом деле, выполняется $\overset{*}{Z}(\tau_0) = Z^0(\tau_0) = M$.

Теперь докажем включение

$$\overset{*}{Z}(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, \overset{*}{Z}(\tau_*)), \quad (\tau_*, \tau^*) \in \mathbf{\Delta}^*, \quad \tau^* \in T^*. \tag{3.2}$$

Зафиксируем произвольную пару $(\tau_*, \tau^*) \in \mathbf{\Delta}^*$ и точку $z^* \in \overset{*}{Z}(\tau^*)$, где τ_*, τ^* — двоичные моменты из $[t_0, \vartheta]$, $\tau^* \in T^*$.

Так как $z^* \in Z^{(n)}(\tau^*) = Z(\tau^*, \tau_*, Z^{(n)}(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$, то $z^* \in Z_\psi(\tau^*, \tau_*, Z^{(n)}(\tau_*))$, $\psi \in \Psi$, $n \in \mathbb{N}$. Значит, найдется начальная точка $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_*)$ для некоторого решения $z_\psi^{(n)}(\tau)$ д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_\psi(\tau, z), \quad z_\psi^{(n)}(\tau^*) = z^* \tag{3.3}$$

на промежутке $[\tau_*, \tau^*]$.

Не нарушая общности рассуждений, считаем, что $\{z_\psi^{(n)}(\tau)\}$ равномерно сходится на $[\tau_*, \tau^*]$ к некоторой функции $z_\psi(\tau)$. Функция $z_\psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ есть решение д.в. (3.3), удовлетворяющее краевым условиям

$$z_\psi(\tau_*) = z_* = \lim_{n\to\infty} z_\psi^{(n)}(\tau_*), \quad z_\psi(\tau^*) = z^*,$$

из которых следует

$$z^* \in Z_\psi(\tau^*, \tau_*, \overset{*}{Z}(\tau_*)), \quad \psi \in \Psi. \tag{3.4}$$

Так как точка z^* выбрана произвольно в $\overset{*}{Z}(\tau^*)$, то из (3.4) следует (3.2) при двоичных τ_*, τ^* из $\mathbf{\Delta}^*$, $\tau^* \in T^*$.

Пусть теперь (τ_*, τ^*) — произвольная пара из $\mathbf{\Delta}^*$, $\tau^* \in T^*$. Выберем произвольную точку $(\tau^*, z^*) \in \overset{*}{Z}$ и сходящуюся к ней последовательность $\{(t_n(\tau^*), z_n^*)\}$, где $z_n^* \in Z^{(n)}(t_n(\tau^*))$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим последовательность $\{t_n(\tau_*)\}$, сходящуюся к τ_*. Так как $t_n(\tau_*)$ и $t_n(\tau^*)$ — двоичные моменты из $\Gamma^{(n)}$, то $Z^{(n)}(t_n(\tau^*)) \subset Z(t_n(\tau^*), t_n(\tau_*), Z^{(n)}(t_n(\tau_*)))$, $n \in \mathbb{N}$.

Отсюда при любом $\psi \in \Psi$

$$Z^{(n)}(t_n(\tau^*)) \subset Z_\psi(t_n(\tau^*), t_n(\tau_*), Z^{(n)}(t_n(\tau_*))), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда найдется такое решение $z_\psi^{(n)}(\tau)$ на $[t_n(\tau_*), t_n(\tau^*)]$ д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_\psi(\tau, z), \quad z_\psi^{(n)}(t_n(\tau_*)) = z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(t_n(\tau_*)),$$

которое удовлетворяет условию $z_\psi^{(n)}(t_n(\tau^*)) = z_n^*$.

Выделим подобного рода решение $z_\psi^{(n)}(\tau)$, $\tau \in [t_n(\tau_*), t_n(\tau^*)]$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Полагая $z_\psi^{(n)}(\tau) = z_n^*$ при $\tau \in [t_n(\tau^*), \tau^*]$, доопределим каждую такую функцию с промежутка $[t_n(\tau_*), t_n(\tau^*)]$ на $[t_n(\tau_*), \tau^*]$. Тем самым все функции $z_\psi^{(n)}(\tau)$, $n \in \mathbb{N}$, определены на $[\tau_*, \tau^*]$.

Не нарушая общности рассуждений, считаем, что последовательность $\{z_\psi^{(n)}(\tau)\}$ непрерывных функций равномерно сходится к некоторой функции $z_\psi(\tau)$ на промежутке $[\tau_*, \tau^*]$.

Функция $z_\psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$, есть решение д.в. $\dfrac{dz}{d\tau} \in H_\psi(\tau, z)$, удовлетворяющее

$$z_\psi(\tau_*) = z_* = \lim_{n\to\infty} z_\psi^{(n)}(\tau_*) \in \overset{*}{Z}(\tau_*), \quad z_\psi(\tau^*) = z^* = \lim_{n\to\infty} z_\psi^{(n)}(\tau^*) \in \overset{*}{Z}(\tau^*).$$

Отсюда следует $z^* \in Z_\psi(\tau^*, \tau_*, \overset{*}{Z}(\tau_*))$, $\psi \in \Psi$, и так как точка $z^* \in \overset{*}{Z}(\tau^*)$ выбрана произвольно, то имеет место (3.2) для недвоичных τ_*, τ^*, $(\tau_*, \tau^*) \in \mathbf{\Delta}^*$, $\tau^* \in T^*$.

Аналогично доказывается (3.2) в случае, когда лишь один из двух моментов, τ_*, $\tau^* \in [t_0, \vartheta]$, не двоичный. В итоге (3.2) установлено для любых пар $(\tau_*, \tau^*) \in \mathbf{\Delta}^*$, $\tau^* \in T^*$, и, значит, $\overset{*}{Z} \subset Z^0$.

Докажем обратное включение $Z^0 \subset \overset{*}{Z}$. Действительно, для любого двоичного момента $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$, $Z^0(\tau_*) \neq \varnothing$ выполняется $Z^0(\tau_*) \subset \overset{*}{Z}(\tau_*)$.

Пусть теперь произвольно выбраны недвоичный момент $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$, $Z^0(\tau_*) \neq \varnothing$ и $(\tau_*, z_*) \in Z^0(\tau_*)$. Рассмотрим последовательность $\{t_n(\tau_*)\}$ двоичных моментов $t_n(\tau_*) \in \Gamma^{(n)}$, где $\Delta^{(n)} = \Delta(\Gamma^{(n)}) \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

Так как $Z^0(\tau_*) \subset Z(\tau_*, t_n(\tau_*), Z^0(t_n(\tau_*)))$, то $z_* \in Z(\tau_*, t_n(\tau_*), Z^0(t_n(\tau_*)))$, $n \in \mathbb{N}$.

Выберем произвольное $\psi \in \Psi$; для него имеем $z_* \in Z_\psi(\tau_*, t_n(\tau_*), Z^0(t_n(\tau_*)))$.

Значит, для некоторой последовательности $\{z_n(t_n(\tau_*))\}$ точек $z_n(t_n(\tau_*)) \in Z^0(t_n(\tau_*)) \subset \overset{*}{Z}(t_n(\tau_*)) \subset Z^{(n)}(t_n(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$, найдутся решения $z_\psi^{(n)}(\tau)$, $\tau \in [t_n(\tau_*), \tau_*]$, д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_\psi(\tau, z), \quad z_\psi^{(n)}(t_n(\tau_*)) = z(t_n(\tau_*)), \quad n \in \mathbb{N},$$

удовлетворяющие $z_\psi^{(n)}(\tau_*) = z_*$.

Из $z_n(t_n(\tau_*)) = z_\psi^{(n)}(t_n(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(\tau_*) = \tau_*$ вытекает соотношение $(\tau_*, z_*) = \lim\limits_{n\to\infty}(t_n(\tau_*), z_n(t_n(\tau_*)))$, где $(t_n(\tau_*), z_n(t_n(\tau_*))) \in \overset{*}{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $(\tau_*, z_*) \in \overset{*}{Z}$.

Так как недвоичный момент τ_* и $(\tau_*, z_*) \in Z^0$ выбраны произвольно, то $Z^0(\tau_*) \subset \overset{*}{Z}(\tau_*)$ при недвоичных $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$, $Z^0(\tau_*) \neq \varnothing$. Учитывая справедливость этого включения и при двоичных $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$, получаем $Z^0 \subset \overset{*}{Z}$. $\square$

Вместе с тем показано, что максимальный минимаксный u-стабильный тракт Z^0 системы (2.2) есть предел $\overset{*}{Z}$ "промежуточных" систем $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$, и, значит, к проблеме выделения тракта Z^0 в Ω можно подойти, пытаясь вычислить его приближенно в виде систем $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ множеств $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) \subset \mathbb{R}^m$, точнее, в виде множеств $\overset{*}{Z}{}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

При этом приближенное вычисление множеств Z^0 в конкретных задачах 1 осуществляется согласно рекуррентным соотношениям

$$Z^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = M, \quad Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)})), \quad i \in \overline{1, N(n)}.$$

В некоторых конкретных задачах 1, и в том числе в тех, в которых системы (1.1) стационарны и линейны по управлениям, а ограничения P и Q на управления — выпуклые многогранники в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ с конечным числом вершин, приведенные рекуррентные соотношения можно использовать непосредственно для вычисления системы $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$.

Однако невозможность аналитического описания (точного вычисления) м.д. $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$, $Z_* \subset \mathbb{R}^m$, даже в относительно простых конкретных задачах 1 с нелинейной конфликтно управляемой системой (1.1) и относительно простым (с простой геометрией) целевым множеством M приводит нас к необходимости трансформации множеств $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ (и, в частности, множеств $Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$) в достаточно близкие к ним множества в $\mathbb{R}^m$, которые при этом более приемлемы для вычислений.

Здесь близость множеств в $\mathbb{R}^m$ понимаем в смысле хаусдорфовой метрики.

Для определения таких множеств сделаем один из возможных шагов, приближающих нас к ним.

Введем А-систему $\{\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) \subset \mathbb{R}^m$, соответствующую некоторому разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, подчеркивая, что введение этой системы — первый важный шаг в направлении трансформации множеств $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$.

Пусть $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ — двоичное разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$. Каждому промежутку $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ разбиения Γ сопоставим д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_\psi(\tau_i, z^{(i)}) + \varphi^*(\Delta)B^1, \quad z(\tau_i) = z^{(i)}, \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad \psi \in \Psi; \tag{3.5}$$

здесь $\Delta = \Delta(\Gamma)$, $\varphi^*(\delta) = \omega^*((1+K)\delta)$, $\delta > 0$, $B^1 = B(\mathbf{0}; 1) \subset \mathbb{R}^m$, функция $\varphi^*(\delta) = \omega^*((1+K)\delta)$ и число K определены на с. 259.

Пусть $(\tau_i, z^{(i)})$ и $(\tau_i, Z^{(i)})$ — точка и множество в Ω, $\psi \in \Psi$:

Введем обозначения, обусловленные дискретизацией промежутка $[t_0, \vartheta]$.

- $\hat{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = z^{(i)} + \Delta_i H_\psi(\tau_i, z^{(i)})$ — м.д. в момент τ_{i+1} д.в. $\dfrac{dz}{d\tau} \in H_\psi(\tau_i, z^{(i)})$, $z(\tau_i) = z^{(i)}$;
- $\hat{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcup\limits_{z^{(i)} \in Z^{(i)}} \hat{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$ — м.д. в момент τ_{i+1} д.в. $\dfrac{dz}{d\tau} \in H_\psi(\tau_i, z^{(i)})$, $z(\tau_i) = z^{(i)} \in Z^{(i)}$;
- $\hat{Z}^{\Gamma}(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcap\limits_{\psi \in \Psi} \hat{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)})$;
- $\widetilde{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = \hat{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) + \omega(\Delta_i)B^1$ — м.д. в момент τ_{i+1} д.в. (3.5) с начальной точкой $z^{(i)}$;
- $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \hat{Z}^{\Gamma}(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) + \omega(\Delta_i)B^1$ — м.д. в момент τ_{i+1} д.в. (3.5) с начальным множеством $Z^{(i)}$;
- $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcap\limits_{\psi \in \Psi} \widetilde{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)})$;

здесь $\omega(\delta) = \delta \cdot \varphi^*(\delta)$, $\delta > 0$, $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta$.

При $\tau_i, \tau_{i+1} \in \Gamma$, $(\tau_i, z^{(i)}) \in \Omega$, $\psi \in \Psi$ справедлива оценка

$$d(Z_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}), \hat{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})) \leqslant \omega(\Delta),$$

из которой вытекает

$$Z_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) \subset \widetilde{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}). \tag{3.6}$$

Из (3.6) при $(\tau_i, Z^{(i)}) \subset \Omega$, $\tau_i, \tau_{i+1} \in \Gamma$, $\psi \in \Psi$ следует включение $Z_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) \subset \widetilde{Z}^{\Gamma}_\psi(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)})$, из которого при $(\tau_i, Z^{(i)}) \subset \Omega$, $\tau_i, \tau_{i+1} \in \Gamma$, получаем

$$Z(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) \subset \widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}). \tag{3.7}$$

Введем А-систему (аппроксимирующую систему) $\{\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) \subset \mathbb{R}^m$.

Определение 6. А-системой $\{\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) \colon \tau_i \in \Gamma\}$ в $\mathbb{R}^m$, отвечающей разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, назовем систему множеств

$$\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_0) = M, \quad \widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) = \widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i, \tau_{i-1}, \widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_{i-1})), \quad i \in \overline{1, N}.$$

Сравним (по включению) системы $\{Z^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ и $\{\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$.

Учитывая $Z^{\Gamma}(\tau_0) = \widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_0) = M$ и (3.7), получаем $Z^{\Gamma}(\tau_i) \subset \widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i)$, $\tau_i \in \Gamma$. Вместе с тем установлено, что множества $Z^0(\tau_i)$, $Z^{\Gamma}(\tau_i)$, $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i)$, $\tau_i \in \Gamma$, связаны включениями

$$Z^0(\tau_i) \subset Z^{\Gamma}(\tau_i) \subset \widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i), \quad \tau_i \in \Gamma,$$

показывающими, что А-система $\{\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ мажорирует систему $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ — набор временны́х сечений $Z^0(\tau_i)$ максимального минимаксного u-стабильного тракта Z^0 в задаче 1.

Сосредоточимся на двоичных разбиениях $\Gamma^{(n)} = \{\tau_0^{(n)} = t_0, \tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_i^{(n)}, \ldots, \tau_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}$, $n \in \mathbb{N}$. Полагая для упрощения $\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_*) = \widetilde{Z}^{\Gamma^{(n)}}(\tau_*)$, $\tau_* \in \Gamma^{(n)}$, запишем А-систему, отвечающую разбиению $\Gamma^{(n)}$ в виде $\{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$.

О п р е д е л е н и е 7. Символом $\mathcal{Z}^0$ обозначим множество всех $(\tau_*, z_*) \in \Omega$, представимых в виде $(\tau_*, z_*) = \lim\limits_{n\to\infty} (t_n(\tau_*), z_n)$, где последовательность $\{(t_n(\tau_*), z_n)\}$ такова, что

$$(t_n(\tau_*), z_n) \in (t_n(\tau_*), \widetilde{Z}^{(n)}(t_n(\tau_*))), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Множество $\mathcal{Z}^0$ стеснено соотношениями $Z^0(\tau_0^{(n)}) = \mathcal{Z}^0(t_0) = M$, $n \in \mathbb{N}$; также справедливы включения

$$Z^{(n)}(\tau_*) \subset \widetilde{Z}^{(n)}(\tau_*), \quad \tau_* \in \Gamma^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Из определения множеств Z^0, $\mathcal{Z}^0$ и (3.8) вытекает $Z^0(\tau_*) \subset \mathcal{Z}^0(\tau_*)$ при любом недвоичном $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$.

Отсюда следует включение

$$Z^0 \subset \mathcal{Z}^0. \tag{3.9}$$

Кроме того, привлекая схему рассуждений, которую применяли к Z^0, получаем

$$\mathcal{Z}^0(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, \mathcal{Z}^0(\tau_*)), \quad (\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*, \quad \mathcal{Z}^0(\tau^*) \neq \varnothing. \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) выводим следующее утверждение.

Лемма 2. *Множества Z^0 и $\mathcal{Z}^0$ совпадают.*

Объединим леммы 1, 2 в следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо равенство $Z^0 = \overset{*}{Z} = \mathcal{Z}^0$.*

В теореме 1 представлено теоретическое обоснование возможности привлечения А-систем $\{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})\colon \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ для приближенного вычисления максимального минимаксного u-стабильного тракта Z^0 системы (2.2).

Перейдем от разрешающих конструкций задачи 1, отвечающих обратному времени τ, к разрешающим конструкциям, отвечающим прямому времени t.

Введем двоичное разбиение $\Gamma_*^{(n)} = \{t_0^{(n)} = t_0, t_1^{(n)}, \ldots, t_j^{(n)}, \ldots, t_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}$, где фактически рассматриваем разбиение $\Gamma^{(n)}$ с обозначением моментов разбиения в терминах прямого времени t, так что имеем $t_j^{(n)} + \tau_i^{(n)} = t_0 + \vartheta$, $j + i = N(n)$, $j \in \overline{0, N(n)}$.

Введем А-систему $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}) : t_j^{(n)} \in \Gamma_*^{(n)}\}$ в $\mathbb{R}^m$, соответствующую разбиению $\Gamma_*^{(n)}$.

О п р е д е л е н и е 8. А-системой $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}) : t_j^{(n)} \in \Gamma_*^{(n)}\}$ в $\mathbb{R}^m$, отвечающей двоичному разбиению $\Gamma_*^{(n)}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, назовем систему множеств $\widetilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}) = \widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, $t_j^{(n)} \in \Gamma_*^{(n)}$, где $t_j^{(n)} = t_0 + \vartheta - \tau_i^{(n)}$, $i + j = N(n)$, $j \in \overline{0, N(n)}$.

Справедливо соотношение $W^0 = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{W}^{0^{(n)}}$, где

$$\overset{(n)}{\widetilde{W}^0} = \{(t_j^{(n)}, x_j^{(n)}) \in \Gamma_*^{(n)} \times \mathbb{R}^m : x_j^{(n)} \in \widetilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)})\};$$

здесь имеется в виду сходимость множеств в хаусдорфовой метрике.

Этот факт мы также записываем в виде $W^0 = \operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \{\widetilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}) : t_j^{(n)} \in \Gamma_*^{(n)}\}$.

З а м е ч а н и е 1. Для определения А-системы $\{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i \in \Gamma^{(n)}\}$ не обязательно, чтобы $\Gamma^{(n)}$ было двоичным разбиением промежутка $[t_0, \vartheta]$, но относительно последовательности $\{\Gamma^{(n)}\}$, $\Delta^{(n)} = \Delta(\Gamma^{(n)}) \downarrow 0$ при $n \to \infty$ следует предполагать, что $\Gamma^{(n)} \subset \Gamma^{(k)}$, $n < k$, $n, k \in \mathbb{N}$.

Введение А-системы $\{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ в схемы приближенного решения задачи 1, связанное с дискретизацией промежутка $[t_0, \vartheta]$, не приводит, однако, к окончательному решению задачи приближенного вычисления Z^0. Схему приближенного вычисления Z^0 необходимо в последующем дополнить схемой, обусловленной дискретизацией фазового пространства $\mathbb{R}^m$ системы (1.1), а именно необходима процедура дискретизации множеств $\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, $\tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, предполагающая еще и некоторую дискретизацию множеств P и Q, — процедура формирования системы $\{\widetilde{\widetilde{Z}}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ *конечных* множеств $\widetilde{\widetilde{Z}}^{(n)}(\tau_i^{(n)}$, $\tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}$ в $\mathbb{R}^m$, достаточно близких к множествам $\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, $\tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}$. Степень близости множеств $\widetilde{\widetilde{Z}}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$ к $\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$ должна быть такой, чтобы система $\{\widetilde{\widetilde{Z}}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ сходилась вслед за $\{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ к Z^0 при $\Delta^{(n)} = \Delta(\Gamma^{(n)}) \downarrow 0$, $n \to \infty$.

Схема формирования системы $\{\widetilde{\widetilde{Z}}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ для нелинейной системы (2.2) требует подробного изложения и анализа. Может быть несколько таких схем.

Их подробное рассмотрение включает в себя описание:

1) дискретизации пространства $\mathbb{R}^m$ и ограничений P, Q на управления игроков;

2) (задание) числовой зависимости между параметрами дискретизации промежутка $[t_0, \vartheta]$ и дискретизаций $\mathbb{R}^m$, P и Q;

3) разрешающих конструкций задачи 1, относящихся к приближенному вычислению множеств разрешимости и возникших в результате этих дискретизаций; описание, в частности, конечных множеств $\widetilde{\widetilde{Z}}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, в определение которых входит неудобная процедура "пересечения" дискретных множеств в $\mathbb{R}^m$. Эта процедура должна быть определена. Вопрос о корректности этой процедуры очень сложный; он должен, по-видимому, исследоваться для каждого класса компактов в $\mathbb{R}^m$ отдельно. Вообще говоря, вопросы, связанные с проблематикой пересечения множеств в $\mathbb{R}^m$, повсеместно возникающие в математической теории управления, весьма важны и требуют серьезного изучения.

Таким образом, описание схемы формирования разрешающих дискретных конструкций задачи 1 подразумевает подробную расшифровку пп. 1)–3), которая в настоящей работе не предусмотрена.

З а м е ч а н и е 2. В этом разделе определена А-система $\{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ (а также А-система $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}) : t_j^{(n)} \in \Gamma_*^{(n)}\}$). Определение А-системы $\{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)} : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ и теорема 1, в которой обоснована сходимость А-системы к Z^0, не используют содержащегося в условии **A** (с. 256) предположения о локальной липшицевости по x правой части системы (1.1). Тем не менее это предположение существенно при обосновании утверждений, обеспечивающих корректность определения разрешающей позиционной стратегии $u^*(t, x)$ первого игрока как экстремальной позиционной стратегии к мосту W^0, который определен с привлечением $\mathcal{L}$-наборов $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$, удовлетворяющих **A.1**–**A.3**. Некоторые из этих $\mathcal{L}$-наборов наследуют от системы (1.1) свойство локальной липшицевости по переменной x, т. е. удовлетворяют следующему условию.

A4. Для любой ограниченной замкнутой области $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ существует такое $\lambda = \lambda(\Omega) \in (0, \infty)$, что

$$d(F_\psi(t, x_*), F_\psi(t, x^*)) \leqslant \lambda \cdot ||x_* - x^*||, \quad (t, x_*), (t, x^*) \in \Omega, \quad \psi \in \Psi.$$

Справедливо следующее важное утверждение.

Для максимального минимаксного u-стабильного моста W^0 (определенного с привлечением $\mathcal{L}$-набора, удовлетворяющего **A.1–A.4**) экстремальная к W^0 позиционная стратегия $u^*(t,x)$ первого игрока обеспечивает решение задачи 1.

Обоснование этого утверждения, также как и описание разрешающих конструкций задачи 1, отвечающих временной и пространственной дискретизациям, целесообразно изложить в отдельной работе.

Заключение

Работа посвящена игровой задаче о сближении нелинейной конфликтно управляемой системы в целью M в конечномерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$ в конечный момент времени ϑ из промежутка $[t_0,\vartheta]$. Хотя, по постановке, эта игровая задача о сближении является одной из наиболее простых, тем не менее ее решение требует разработки нетривиальных разрешающих конструкций (включая определения компонентов, составляющих эти конструкции) и обоснования корректности этих конструкций. Поскольку в работе не предполагается, вообще говоря, для конфликтно управляемой системы выполнение условия седловой точки в так называемой маленькой игре, то игровая задача о сближении формулируется как игровая задача в минимаксной постановке. В рамках этой постановки первый игрок применяет класс позиционных стратегий $u(t,x)$, а второму игроку, не исключая худших для себя ситуаций, он предоставляет преимущество в информационном плане: второй игрок использует контрпозиционные стратегии $v(t,x,u)$, как бы зная, какие управления u в моменты $t\in[t_0,\vartheta]$ выбирает первый игрок. Минимаксный подход в дифференциальных играх существенно расширил круг задач: в него вошли многие задачи с нелинейными конфликтно управляемыми системами. Для таких задач весьма удобна унификационная схема описания u-стабильных мостов, и в частности максимальных u-стабильных мостов, представляющих собой множества разрешимости задачи о сближении. В работе приведены различные унификационные схемы описания u-стабильности. Эти схемы, достаточно простые в некоторых конкретных игровых задачах, привлечены для описания A-систем множеств $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i):\tau_i\in\Gamma\}$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$ конфликтно управляемой системы, отвечающих конечным разбиениям Γ и представляющих собой важное звено в разработке *конечных* дискретных конструкций, аппроксимирующих множество Z^0 — максимальный u-стабильный тракт в задаче 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. **Осипов Ю.С.** Минимаксное поглощение в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 1. С. 32–35.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И., Ушаков В.Н.** Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 277–280.
6. **Куржанский А.Б.** Избранные труды. М.: изд-во Моск. ун-та, 2009. 756 с.
7. **Субботин А.И., Субботина Н.Н.** Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 4. С. 862–865.
8. **Ушаков В.Н.** К теории минимаксных дифференциальных игр. Ч. 1. Свердловск, 1980. Деп. в ВИНИТИ 16.10.80. № 4425-80.
9. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** К вопросу численного решения дифференциальных игр для линейных систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 75–87. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-75-87
10. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.

11. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, № 2. С. 216–222.
12. **Тарасьев А.М.** Конструкции и методы негладкого анализа в задачах оптимального гарантированного управления : автореферат дис. ... д-р. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Ин-т математики и механики. Екатеринбург, 1996. 32 с.
13. **Григорьева С.В., Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Мат. сб. 2005. Т. 196, №4. С. 51–78.
14. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
15. **Красовский Н.Н.** Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1977. № 24. С. 32–45.
16. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильторна — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
17. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
18. **Fleming W.H.** The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. and Appl. 1961. Vol. 3. P. 102–116.
19. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280.
20. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 1. С. 764–766.
21. **Никольский М.С.** Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 1. С. 136–144.
22. **Никольский М.С.** О нижнем альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1985. Т. 128, № 1. С. 35–49.
23. **Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В.** Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 95–122.
24. **Азамов А.** Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 2. С. 265–268.
25. **Пшеничный Б.Н.** Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184, № 2. С. 285–287.
26. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
27. **Пацко В.С.** Задача качества в линейных дифференциальных играх второго порядка // Дифференциальные игры и задачи управления: сб. ст. / ред. А.Б. Куржанский. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. С. 167–227.
28. **Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.** Pursuit differential games with state constraints // SIAM J. Control Optim. 2000. Vol. 39, no. 5. P. 1615–1632.
29. **Bardi M., Falcone M., Soravia P.** Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Stochastic and differential games, Annals of the International Society of Dynamic Games. 1999. Vol. 4. P. 105–175.

Поступила 26.05.2024
После доработки 17.07.2024
Принята к публикации 22.07.2024

Ушаков Владимир Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ale10919@yandex.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text was published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniy* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
4. Osipov Yu.S. Minimax absorption in difference-differential games. *Sov. Math., Dokl.*, 1972, vol. 13, pp. 337–341.
5. Krasovskij N.N., Subbotin A.I., Ushakov V.N. A minimax differential game. *Sov. Math., Dokl.*, 1972, vol. 13, pp. 1200–1204.
6. Kurjanskii A.B. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow, Publ. House of Moscow Univ., 2009, 756 p. ISBN: 978-5-211-05758-6 .
7. Subbotin A.I., Subbotina N.N. Necessary and sufficient conditions for a piecewise smooth value of a differential game. *Sov. Math., Dokl.*, 1978. vol. 19, pp. 1447–1451.
8. Ushakov V.N. *K teorii minimaksnyh differentsial'nyh igr. Chast'* 1 [On the theory of minimax differential games. Part 1]. Yekaterinburg, Deposited at VINITI on 10.16.1980, № 4425-80.
9. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 301, suppl. 1, pp. S44–S56.
doi: 10.1134/S0081543818050048
10. Ushakov V.N. On the problem of constructing stable bridges in a differential game of approach and avoidance. *Engineer. Cybernetcs*, 1980, vol. 18, no. 4, pp. 16–23.
11. Taras'yev A.M., Ushakov V.N., Khripunov A.P. On a computational algorithm for solving game control problems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, iss. 2, pp. 167–172. doi: 10.1016/0021-8928(87)90059-1
12. Taras'yev A.M. *Konstruktsii i metody analiza v zadachah optimal'nogo garantirovannogo upravleniya* [Constructions and methods of nonsmooth analysis in problems of optimal guaranteed control]. Abstract of the thesis of dissertation, Cand. Sci. (Phys.–Math.): 01.01.02, Yekaterinburg, Institute of Mathematics and Mechanics, 1996, 32 p.
13. Grigor'eva S.V., Pakhotinskikh V.Yu., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. Construction of solutions in certain differential games with phase constraints. *Sb. Math.*, 2005, vol. 196, no. 4, pp. 513–539.
doi: 10.1070/SM2005v196n04ABEH000890
14. Krasovskij N.N. On the problem of unifying differential games. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 269–273.
15. Krasovskii N.N. Unification of differential games. *Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 1977, no. 24, pp. 32–45.
16. Subbotin A.I. *Minimaksmye neravenstva i uravneniya Gamil'tona-Yakobi* [Minimax inequalities and Hamilton — Jacobi equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 216 p. ISBN: 5-02-000139-2 .
17. Subbotin A.I. *Obobshchennyye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [Generalized solutions of partial differential equations of the first order]. Moscow–Izhevsk, Institute for Computer Research, 2003, 336 p. ISBN: 5-93972-206-7 .
18. Fleming W.H. The convergence problem for differential games. *J. Math. Anal. Appl.*, 1961, vol. 3, pp. 102–116. URL: https://core.ac.uk/download/pdf/81988858.pdf
19. Pontryagin L. Linear differential games. I. *Sov. Math., Dokl.*, 1967, vol. 8, pp. 769–771.
20. Pontryagin L.S. Linear differential games. II. *Sov. Math., Dokl.*, 1967, vol. 8, pp. 910–912.
21. Nikol'skii M.S. On the alternating integral of Pontryagin. *Math. USSR-Sb.*, 1983, vol. 44, iss. 1, pp. 125–132. doi: 10.1070/SM1983v044n01ABEH000956
22. Nikol'skii M.S. On the lower alternating integral of Pontryagin in linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1987, vol. 56, iss. 1, pp. 33—47. doi: 10.1070/SM1987v056n01ABEH003022

23. Polovinkin E.S., Ivanov G.E., Balashov M.V., Konstantinov R.V., Khorev A.V. An algorithm for the numerical solution of linear differential games. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1515–1542. doi: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000604
24. Azamov A. Semistability and duality in the theory of the Pontryagin alternating integral. *Dokl. Math.*, 1988, vol. 37, no. 2, p. 355–359.
25. Pshenichnyj B.N. The structure of differential games. *Sov. Math., Dokl.*, 1969, vol. 10, pp. 70–72.
26. Chernous'ko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* [Game problems of control and search], Moscow, Nauka Publ., 1978, 270 p.
27. Patsko V.S. Quality problem in second order linear differential games. *Differentsial'nyye igry i zadachi upravleniya. Sb. statei* ed. by Kurzhanskii A.B., Sverdlovsk: Ural Scientific Center of the USSR Academy of Sciences, 1975, pp. 167–227 (in Russian). http://sector3.imm.uran.ru/stat/patsko1975sbDifIgr/Patsko1975sbDifIgrV4.pdf
28. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Pursuit differential games with state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 2000, vol. 39, no. 5, pp. 1615–1632. doi: 10.1137/S0363012998349327
29. Bardi M., Falcone M., Soravia P. Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions. *Stochastic and differential games, Annals of the Inter. Society of Dynamic Games*, 1999, vol. 4, pp. 105–175. doi: 10.1007/978-1-4612-1592-9_3

Received May 26, 2024
Revised July 17, 2024
Accepted July 22, 2024

Funding Agency: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Corresponding member of RAS, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ushak@imm.uran.ru .

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ale10919@yandex.ru .

Cite this article as: V. N. Ushakov, A. A. Ershov. On the construction of solutions to a game problem with a fixed end time. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 255–273 .